ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ НА БАЗЕ АПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПО КВАЗИКОНИЧЕСКОМУ СЕЧЕНИЮ

М.ДЖ. МИНГЛИБАЕВ

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени аль-ФАРАБИ

М.ДЖ. МИНГЛИБАЕВ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ НА БАЗЕ АПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПО КВАЗИКОНИЧЕСКОМУ СЕЧЕНИЮ

Монография

Алматы
«Қазақ университеті»
2024

УДК: 521.1+531.011
ББК 22.31:22.1
М 55

Монография издана за счет грантового финансирования МНиВО РК научного проекта AP 14869472 «Исследование вековых возмущений в много планетных системах со сферическими телами переменной массы»

Рецензенты:
Беков А.А. доктор физико-математических наук, профессор
КазНУ им. аль-Фараби
Валиуллин Р.Р. кандидат физико-математических наук
(Заместитель директора по научно-исследовательской работе Астрофизического Института им. В.Г. Фесенкова)

Минглибаев М.Дж.
М 55 Теория возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению: монография / М. Дж. Минглибаев. – Алматы: Қазақ университеті, 2024. – 110 с.

ISBN 978-601-7171-15-5

В монографии систематически изложены основы теории возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению. Предлагаемая теория может быть использована для исследования динамической эволюции нестационарных гравитирующих систем. Монография может быть полезна для студентов старших курсов, магистрантов, докторантов и для специалистов в области теоретической механики, небесной механики, астрофизики.

ISBN 978-601-7171-15-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучения динамической эволюции планетных систем, особенно в экзопланетных системах является актуальной задачей. Первая экзопланетная система была открыта в 1992 году [1], и с тех пор их число постоянно растет, накоплен большой наблюдательный материал [2]. Простейшая математическая модель n-планетной задачи многих сферических тел (задача n+1 тел), когда тела рассматривается как материальная точка с постоянными массами, является классической задачей небесной механики и в настоящее время хорошо изучена [3-7]. Эта задача даже в случае трех тел не имеет аналитического решения, поэтому разработаны различные аналитические и численные методы изучения задачи многих тел-точек.

Хорошо разработанная теория возмущения на базе кеплеровского движения для много планетной задачи многих сферических (точечных) тел широко используется в изучении эволюции гравитирующих систем с постоянными массами. В связи с развитием систем аналитических вычислений многие классические алгоритмы определения вековых возмущений были модифицированы методами компьютерной алгебры. В монографии Murray & Dermott [7] систематически изложена классическая теория возмущения Лагранжа для много планетных систем с использованием современных методов символьных вычислений Mathematica [8].

В гравитирующих системах роль такого параметра как масса тел трудно переоценить. В классической небесной механике масса тел считается постоянной, и классическая задача многих тел с постоянными массами до сих пор не теряет своего значение.

Наблюдательная астрономия свидетельствует, что массы реальных небесных тел переменные [9, 10]. Переменность масс гравитирующих тел предопределяет богатое разнобразие эволюционных треков гравитирующих систем. Планетные системы всегда проходят этапы нестационарности, дальнейший ход эволюции определяется состоянием параметров этой системы в конце этого этапа. Поэтому интересно изучение

нестационарных много планетных систем [11, 12], что позволяет по новому смотреть на эволюцию нашей Солнечной системы.

Приведем краткий обзор наиболее интересных работ по проблеме близкой к нашей теме. В работе [13] рассмотрена проблема построения теории движения четырех планет вокруг центральной звезды, при этом массы тел считаются постоянными. Гамильтониан задачи разложен в ряд Пуассона в оскулирующих элементах второй системы Пуанкаре до третьей степени малого параметра. В статье [14] изучена орбитальная эволюция астероидов скопления Phaethon, принимая во внимание возмущения от восьми крупных планет, карликовой планеты Плутон, влияния эффекта Ярковского, сплюснутого Солнца и релятивистских эффектов, при этом массы тел считаются постоянными. В статье [15] авторы проанализировали динамическую эволюцию молодых пар астероидов на близких орбитах. В работе [16] изучается эволюция планетных систем Солнце – Юпитер – Сатурн – Уран– Нептун. Осредненные уравнения движения построены аналитический с точностью до третьей степени по малому параметру для четырех планетной системы. В работе [17] изучается орбитальная эволюция трехпланетной экзосистемы HD 39194 и четырех-планетных экзосистем HD 141399 и HD 160691 (μ Ara). В результате авторы построили усредненную полуаналитическую теорию движения второго порядка по массам экзопланет. Здесь рассматривается многопланетная задача. Уравнения движения даны в координатах Якоби и записаны в элементах второй системы Пуанкаре.

В статье [18] исследована компактная трехпланетная система, Kepler-23, в которой можно напрямую сравнивать ограничения, связанные со стабильностью, изменениями времени прохождения (TTV) и продолжительностью транзита. Показано, что SPOCK, классификатор стабильности планетарных орбитальных конфигураций, способен точно аппроксимировать результаты N-тел более чем в 4000 раз быстрее.

В исследованиях Верас и др. [19] была применена апериодическое движение по коническому сечению разработанный Т.Б. Омаровым [20] и Хаджидеметриу [21] для исследования эффектов изотропной переменности масс на

динамическую эволюцию нестационарных гравитирующих систем.

Следует отметить, что если учесть переменность масс гравитирующих систем, то изучение динамической эволюции такой системы существенно усложняется. Происходит диссипация массы и энергии системы, задача не имеет ни одного интеграла. Поэтому, мы исследуем проблему методами теорией возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению разработанной нами для систем с переменными массами. В настоящей монографии мы используем уравнения возмущенного движения в форме уравнения Ньютона, уравнения возмущенного движения в форме Лагранжа, а также канонические уравнения в аналогах переменных Пуанкаре.

Структура настоящей книги следующая. В первой главе выполнена интегрирование апериодического движения по квазиконическому сечению методом Бине (дифференциальное уравнение Бине). Выведены уравнения возмущенного движения в форме уравнения Ньютона методом Лурье [22, 23]. Анализированы оскулирующие элементы невозмущенного движения в случае квазиэллиптического движения, рассмотрены различные виды уравнения возмущенного движения в форме уравнения Ньютона. Обсуждается выражение возмущающей функции через оскулирующие элементы апериодического движения по квазиконическому сечению. Как пример рассмотрена уравнения возмущенного движения задачи двух тел с переменными массами при наличии реактивных сил [24].

Во второй главе изучается проблема как уравнения возмущенного движения многих гравитирующих тел в форме уравнения Лагранжа. Приведены уравнения Лагранжа в различных системах оскулирующих элементов. Рассматривается аналитическое разложение возмущающей функции по элементам апериодического движения по квазиконическому сечению. Как приложение уравнение возмущенного движения в форме уравнения Лагранжа рассмотрена уравнения вековых возмущении двухпланетной задачи трех тел [25].

В третьей главе исследуется построение и применение канонической теории возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению для задачи многих тел с переменными массами. Невозмущенное движение интегрируется методом Гамильтона-Якоби, вводится аналоги переменных Якоби, Делоне а также аналоги переменных Пуанкаре. Рассматривается вопрос о разложении возмущающей функции в аналогах второй системы переменных Пуанкаре. Приведены уравнения вековых возмущении циркумбинарных двухпланетных систем с изотропно изменяющимися массами [26].

В заключении выполнены краткое обсуждение полученных результатов и дальнейшая перспектива исследовании проблемы методами теории возмущении в различных формах уравнении возмущенного движения. Список литературы состоит из 59 наименовании, который не претендует на полноту публикации по теме монографии. Здесь приведены те источники, которые использованы в написании настоящей монографии.

ГЛАВА 1. АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЯ ПО КВАЗИКОНИЧЕСКОМУ СЕЧЕНИЮ И УРАВНЕНИЕ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В ФОРМЕ УРАВНЕНИЯ НЬЮТОНА

1.1 Апериодическое движения по квазиконическому сечению. Интегрирование уравнение Бине

Некоторые астрономические задачи нестационарных бинарных систем описываются уравнениями вида

$$\ddot{\vec{r}} = -fm\frac{\vec{r}}{r^3} - a\dot{\vec{r}} - b\vec{r} + \vec{F}\left(t,\vec{r},\dot{\vec{r}}\right), \qquad (1.1)$$

где $m = m(t) = m_1(t) + m_2(t)$, $m_1(t)$ - масса центрального тело, $m_2(t)$ - масса спутника, f - гравитационная постоянная, a и b - некоторые величины, постоянные или функции времени, определяемые характером соответствующих сил, $\vec{r} = \vec{r}(x,y,z)$ - относительный радиус вектор в системе координат $Oxyz$, $\vec{F}$ - заданная функция соответствующих аргументов.

В связи с фактической нестационарностью гравитирующих систем становится актуальным вопрос о решении уравнения вида (1.1). В общем случае, динамика нестационарных систем сложная, решения уравнений вида (1.1) неизвестно. Поэтому, исследуем динамику сложных нестационарных систем методами теории возмущении на основе апериодического движения по квазиконическому сечению.

Рассмотрим простой случай дифференциального уравнения (1.1), когда решения этого уравнения определяется аналогично решению классической задачи двух тел с постоянными массами. Обратимся к уравнению

$$\ddot{\vec{r}} = -fm\frac{\vec{r}}{r^3} + \left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{\vec{r}} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]\vec{r}, \qquad (1.2)$$

где $\gamma = \gamma(t)$ - безразмерная произвольная дважды дифференцируемая функция времени, не обращающаяся в нуль [27]. Из уравнения (1.2) следует интеграл площадей (орбита плоская кривая)

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=\vec{c}\sqrt{m\gamma}\,,\ \vec{c}=\overrightarrow{const}\,, \tag{1.3}$$

где $\vec{c}$ - постоянное интегрирования.

В полярных координатах (r,θ) уравнения (1.2)-(1.3) можно написать в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{r}{\gamma}\right)-\frac{r}{\gamma}\dot{\theta}^2=-\frac{fm/\gamma^3}{(r/\gamma)^2}+\frac{1}{2m/\gamma^3}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\gamma^3}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{\gamma}\right), \tag{1.4}$$

Интеграл площадей (1.3) перепишем в виде

$$\left(\frac{r}{\gamma}\right)^2\dot{\theta}=\frac{c}{\gamma^2}\sqrt{m\gamma}\,. \tag{1.5}$$

Тогда, из уравнений (1.4)-(1.5) получим

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{\gamma}{r}\right)+\frac{\gamma}{r}=\frac{1}{c^2}\,. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) при любых начальных условиях определяет апериодическое движение по квазиконическому сечению [22]. Решения уравнений (1.6) имеет вид

$$\frac{r}{\gamma}=\frac{p}{1+e\cos\theta}\,,\qquad \theta=u-\omega\,, \tag{1.7}$$

где $p,\ e,\ \omega$ - постоянные величины, определяемые начальными условиями; u - полярный угол.

Аналоги интеграла площадей, энергии и вектора Лапласа таковы:

$$p=c^2\,, \tag{1.8}$$

$$\frac{\gamma^3}{fm}\left[\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{\gamma}\right)\right)^2-2\frac{fm}{\gamma^2 r}\right]=h=const\,, \tag{1.9}$$

$$\frac{\gamma^3}{fm}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{\gamma}\right)\times\left[\frac{\vec{r}}{\gamma}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{\gamma}\right)\right]\right]-\frac{\vec{r}}{r}=\vec{q}=const\,,\ |\vec{q}|=q\,, \tag{1.10}$$

$$e=q\,,\qquad e^2-1=hp\,. \tag{1.11}$$

В формулах (1.8)-(1.11) h,q постоянные интегрирования.

Выпишем радиальные и трансверсальное составляющие скорости

$$V_r = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} r + \left(\frac{fm}{p\gamma}\right)^{1/2} e\sin\left(u-\omega\right), \tag{1.12}$$

$$V_n = \left(\frac{fm}{p\gamma}\right)^{1/2} \left[1+e\cos\left(u-\omega\right)\right]. \tag{1.13}$$

Уравнение (1.7) описывает апериодического движение по квазиконическому сечению, которое в координатной форме может быть написаны в виде

$$\begin{aligned} x &= \gamma\rho\left[\cos u\cdot\cos\Omega - \sin u\cdot\sin\Omega\cdot\cos i\right], \\ y &= \gamma\rho\left[\cos u\cdot\sin\Omega + \sin u\cdot\cos\Omega\cdot\cos i\right], \\ z &= \gamma\rho\left[\sin u\cdot\sin i\right], \quad r=\gamma\rho, \quad u=\theta+\omega, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где θ – истинная аномалия, Ω - долгота восходящего узла, i - наклонность плоскости орбиты,

$$\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta}. \tag{1.15}$$

Величины p, e, i, ω, Ω являются аналогами известных кеплеровских элементов, соответственно скорости в координатной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}+\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)x + \gamma\rho\dot{u}\left[-\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i\right], \\ \dot{y} &= \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}+\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)y + \gamma\rho\dot{u}\left[-\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i\right], \\ \dot{z} &= \left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}+\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)z + \gamma\rho\dot{u}\left[\cos u\sin i\right], \quad \rho = \frac{p}{1+e\cos\theta}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

В формулах (1.16) приняты следующие обозначения

$$p = a\left(1-e^2\right), \tag{1.17}$$

$$\dot{\rho} = \left(\frac{m(t)}{m(t_0)\gamma^3} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{p}} e \sin\theta,$$
$$\dot{u} = \left(\frac{m(t)}{m(t_0)\gamma^3} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\mu_0}\sqrt{p}}{\rho^2}, \qquad (1.18)$$

где t_0 - начальный момент времени, $m(t_0) = m_0$ - значения массы тела в начальный момент времени, $\mu_0 = fm_0$ - гравитационный параметр в начальный момент времени, $\gamma = \gamma(t)$ - безразмерная произвольная дважды дифференцируемая функция времени, не обращающаяся в нуль, которая определяется из условии упрощения дифференциальных уравнений невозмущенного движения или из условии упрощения дифференциальных уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах [27].

Отметим, что в случае $m = m(t_0) = const$ и когда $\gamma = \gamma(t) = const = 1$, уравнения (1.2), и его решения (1.14), (1.16) определяют движения тел, вокруг центрального тела по классическим коническим сечениям [3, 4].

В общем случае, наличия в формулах (1.14), (1.16) безразмерного множителя $\gamma = \gamma(t)$ зависящего от времени, приводит к деформации конических сечений и непериодичности движения. Поэтому говорят, что решения уравнений (1.2) в виде (1.14), (1.16) описывают апериодические движения тел по квазиконическим сечениям.

Соответственно, постоянных

$$p,\ e,\ i,\ \omega,\ \Omega \qquad (1.19)$$

именуют аналогами кеплеровских элементов [27].

Исключением является случай $\gamma = (m_0/m)^{1/3}$, когда имеем периодическое движение по квазиконическому сечению. Этот случай использован А. Майлыбаевым для определения изменении периода нестационарных двойных систем, описываемый уравнением Гюльдена-Мещерского [28].

В случае квазиэллиптического движения $(e<1)$, согласно стандартному преобразованию получим уравнение, формально-математически, совпадающее с широкоизвестным уравнением Кеплера. Из интеграла площадей (1.5) получим

$$p^{-3/2}\int_{\tau}^{t}\frac{(fm)^{1/2}}{\gamma^{3/2}}dt=\int_{0}^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^{2}}, \qquad (1.20)$$

Перепишем (1.20) в следующем виде

$$\sqrt{\mu_0}\cdot p^{-3/2}\int_{\tau}^{t}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m_0}\gamma^{3/2}}dt=\int_{0}^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^{2}}, \qquad \mu_0=fm_0.$$

Обозначим через $\Phi(t)$ первообразную функцию для $\sqrt{m}/\sqrt{m_0}\cdot\gamma^{3/2}$, тогда

$$\sqrt{\mu_0}\cdot p^{-3/2}\left[\Phi(t)-\Phi(\tau)\right]=\int_{0}^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^{2}}, \qquad (1.21)$$

Соотношение (1.21) в случае квазиэллиптического движения $e<1$, посредством стандартного преобразования

$$tg\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2} \qquad (1.22)$$

Приводится к уравнению Кеплера

$$E-e\sin E=M \qquad (1.23)$$

где через E обозначена эксцентрическая аномалия и через M обозначена средняя аномалия

$$M=n\left[\Phi(t)-\Phi(\tau)\right]. \qquad (1.24)$$

При этом $\Phi(\tau)$ - шестой динамический элемент, элемент апериодического движения по квазиоконическому сечению, аналог кеплеровского динамического элемента τ - момента прохождения через перицентр.

В невозмущенном движении, соответственно, имеем

$$\dot{M}=n\left(\frac{m(t)}{m(t_0)\gamma^{3}}\right)^{1/2}>0, \quad n=\frac{\sqrt{\mu_0}}{a^{3/2}}=const, \quad \mu_0=fm(t_0)=const. \qquad (1.25)$$

Другими словами, в невозмущенном апериодическом движении по квазиоконическому сечению, фактическое среднее

движение (скорость изменении средней аномалии за одно обращение спутника вокруг центрального тела) не постоянная, а зависит от законов изменения массы тел и от вида конкретно выбранной функции $\gamma = \gamma(t)$.

Таким образом, апериодическое движение по квазиконическому сечению, в качестве исходного невозмущенного движения определяет класс невозмущенных движении с одной произвольной функцией $\gamma = \gamma(t)$, которую в конкретной задаче выбирается из соображения удобства исследования.

В случае квазиэллиптического движения удобно использовать следующую систему оскулирующих элементов [29]

$$a,\ e,\ i,\ \pi,\ \Omega,\ \lambda, \qquad a\left(1-e^2\right)=p, \tag{1.26}$$

где a - аналог большой полуоси, $\lambda = M + \pi$ - аналог средней долготы в орбите, M - аналог средней аномалии, $\pi = \Omega + \omega$ - аналог долготы перицентра.

1.2 Вывод уравнения возмущенного движения в форме уравнения Ньютона методом Лурье

В классической небесной механике широко известно уравнение возмущенного движения в форме уравнения Ньютона, на базе решении классической задачи двух тел постоянной массы [3, 4, 30]. Одно из важных преимуществ уравнений возмущенного движения в форме уравнения Ньютона от других форм возмущенного движения заключается в том, что уравнения возмущенного движения в форме Ньютона можно применить, когда возмущающие силы имеют не потенциальную природу. Например, в нестационарных гравитирующих системах, реактивные силы имеют не потенциальную природу.

В связи с этим, используя в качестве исходного невозмущенного движения апериодического движения по квазиконическому сечению, приведенное в пункте 1.1, методом Лурье выведем уравнения возмущенного движения в форме уравнения Ньютона. Достоинство метода Лурье заключается в том, что этот метод не использует «основную операцию» [22, 31], более проста, менее трудоемкий и одновременно получим

динамику подвижного триэдра пригодной как в невозмущенном движении, так и в возмущенном движений [22, 32].

Обратимся к уравнению вида

$$\ddot{\vec{r}} = -fm\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{\vec{r}} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]\vec{r} + \vec{F}, \quad (1.27)$$

где вектор-функция $\vec{F}$ в общем случае зависит от $t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}$. В орбитальной системе координат можно написать в виде

$$\vec{F} = \vec{F}\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right) = \vec{F}\left(F_r, F_n, F_\tau\right).$$

Составляющие возмущающей силы

$$\vec{W} = \vec{W}\left(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}\right) = \vec{W}\left(W_r, W_n, W_\tau\right) \quad (1.28)$$

в орбитальной системе координат имеют вид

$$W_r = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\left[\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}r + \sqrt{\frac{fm}{\gamma p}}e\sin\theta\right] - \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]r + F_r, \quad (1.29)$$

$$W_\tau = -\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\sqrt{\frac{fm}{\gamma p}}\left(1 + e\cos\theta\right) + F_\tau, \quad (1.30)$$

$$W_n = F_n. \quad (1.31)$$

Введя обозначение

$$\theta = u - \omega \quad (1.32)$$

и единичный радиус-вектор $\vec{e}_r$, перепишем формулу (1.7) для промежуточного движения (1.2) в следующем виде

$$\vec{r} = \gamma\rho = \gamma\frac{p}{1 + e\cos\theta}\vec{e}_r. \quad (1.33)$$

Выражение скорости соответственно имеет вид

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_r\vec{e}_r + \mathrm{v}_n\vec{e}_n = \left[\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}r + \left(\frac{fm}{\lambda\gamma}\right)^{1/2}e\cos\theta\right]\vec{e}_r + \left(\frac{fm}{\lambda\gamma}\right)^{1/2}\left(1 + e\cos\theta\right)\vec{e}_n \quad (1.34)$$

где $\vec{e}_n$ - единичный вектор трансверсали (единичный вектор, перпендикулярный к радиус вектору $\vec{r}$ в плоскости орбиты и направленный в сторону возрастания угла θ). Введем в рассмотрение подвижный ортогональный триэдр единичных векторов $\vec{e}_r$, $\vec{e}_n$, $\vec{e}_3 = \vec{e}_r \times \vec{e}_n$. Единичный вектор $\vec{e}_3$ определяет плоскость орбиты в промежуточном движении, которая с другой

стороны определяется долготой восходящего узла Ω, дающей направление единичного вектора $\vec{N}$ линии узлов, и углом наклона i плоскости орбиты O,ξ,η системы подвижных осей O,ξ,η,ζ для величины ω имеем (определяющая линия апсид)

$$\cos\omega = \vec{N}\vec{e}_q, \qquad \vec{e}_q = \frac{\vec{q}}{q}. \tag{1.35}$$

Сохраняем для векторов $\vec{r}$ и $\vec{\mathrm{v}}$ те же выражения (1.33) и (1.34) в возмущенном движении, что и в невозмущенном.

Однако, величины

$$p,\ e,\ \omega,\ \Omega,\ i \tag{1.36}$$

будут уже не постоянными, а неизвестными функциями времени.

Угловая скорость триэдра $\vec{e}_r$, $\vec{e}_n$, $\vec{e}_3$ в возмущенном движении равна

$$\vec{u} = \dot{\Omega}\vec{k} + \frac{di}{dt}\vec{N} + \left(\dot{\omega}+\dot{\theta}\right)\vec{e}_3, \tag{1.37}$$

где $\vec{k}$ - единичный радиус вектор на оси $O\zeta$. Проекции на оси триэдре $\vec{e}_r$, $\vec{e}_n$, $\vec{e}_3$ определяется формулами

$$u_r = \dot{\Omega}\sin i\sin u + \frac{di}{dt}\cos u, \tag{1.38}$$

$$u_r = \dot{\Omega}\sin i\cos u - \frac{di}{dt}\sin u, \tag{1.39}$$

$$u_3 = \tilde{u}_3 + \dot{\theta}, \tag{1.40}$$

где

$$\tilde{u}_3 = \dot{\Omega}\cos i + \dot{\omega},\ u = \theta + \omega \tag{1.41}$$

Дифференцирования единичных векторов дает

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{e}}_r &= \vec{u}\times\vec{e}_r = -u_n\vec{e}_3 + \left(\tilde{u}_3+\dot{\theta}\right)\vec{e}_n,\\
\dot{\vec{e}}_n &= \vec{u}\times\vec{e}_n = u_r\vec{e}_3 - \left(\tilde{u}_3+\dot{\theta}\right)\vec{e}_r,\\
\dot{\vec{e}}_3 &= \vec{u}\times\vec{e}_3 = -u_r\vec{e}_n + u_n\vec{e}_r.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

С учетом этих формул из равенства

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\mathrm{v}}^{\circ},\qquad \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}=\vec{\mathrm{w}}^{\circ}+\vec{F}, \tag{1.43}$$

где $\vec{\mathrm{v}}^{\circ}$, $\vec{\mathrm{w}}^{\circ}$ скорость и ускорение в невозмущённом движении (1.33), (1.34) следует

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial r}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial r}{\partial e}\dot{e}+\frac{\partial r}{\partial \varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_r+r\left(\left(\tilde{u}_3+\dot{\theta}\right)\vec{e}_n-u_n\vec{e}_3\right)=\mathrm{v}_r\vec{e}_r+\mathrm{v}_n\vec{e}_n, \tag{1.44}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial e}\dot{e}+\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \theta}\dot{\theta}\right)\vec{e}_r+\left(\frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial e}\dot{e}+\frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial \theta}\dot{\theta}\right)\vec{e}_n+\\&+\mathrm{v}_r\left(-u_n\vec{e}_3+\left(\tilde{u}_3+\dot{\theta}\right)\vec{e}_n\right)+\mathrm{v}_n\left(u_n\vec{e}_3-\left(\tilde{u}_3+\dot{\theta}\right)\vec{e}_r\right)=\\&=-\frac{fm}{r^2}\vec{e}_r+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\left(\mathrm{v}_r\vec{e}_r+\mathrm{v}_n\vec{e}_n\right)+\left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]r\vec{e}_r+F_r\vec{e}_r+F_n\vec{e}_n+F_3\vec{e}_3\end{aligned} \tag{1.45}$$

Из этих векторных равенств получим следующие уравнения

$$u_n=0, \tag{1.46}$$

$$r\left(\tilde{u}_3+\dot{\theta}\right)=\mathrm{v}_n, \tag{1.47}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{\partial r}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial r}{\partial e}\dot{e}+\frac{\partial r}{\partial \theta}\dot{\theta}=\mathrm{v}_r, \tag{1.48}$$

$$-\mathrm{v}_r u_n+\mathrm{v}_n u_r=F_3, \tag{1.49}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial e}\dot{e}+\frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial \theta}\dot{\theta}+\mathrm{v}_n\left(\tilde{u}_3+\theta\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\mathrm{v}_n+F_n, \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial t}+\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial p}\dot{p}+\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial e}\dot{e}+\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \theta}\dot{\theta}-\mathrm{v}_n\left(\tilde{u}+\dot{\theta}\right)=\\&=-\frac{fm}{r^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\mathrm{v}_r+\left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]r+F_r.\end{aligned} \tag{1.51}$$

Непосредственное вычисление дает

$$\frac{\partial r}{\partial t}=\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}r,\qquad \frac{\partial r}{\partial e}=-\frac{\cos\theta}{\gamma p}r^2,$$
$$\frac{\partial r}{\partial p}=\frac{r}{p},\qquad \frac{\partial r}{\partial \theta}=\frac{e\sin\theta}{p\gamma}r^2, \tag{1.52}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial t}=\frac{1+e\cos\theta}{p^{1/2}},\quad \frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial e}=\left(\frac{fm}{\gamma p}\right)\cos\theta,$$
$$\frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial p}=-\frac{1+e\cos\theta}{2p^{3/2}}\left(\frac{fm}{\gamma}\right)^{1/2},\quad \frac{\partial \mathrm{v}_n}{\partial \theta}=-\left(\frac{fm}{\gamma p}\right)^{1/2}e\sin\theta, \tag{1.53}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial t}=\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}r+\frac{e\sin\theta}{p^{1/2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{fm}{\gamma}\right)^{1/2},$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial p}=\frac{\dot{\gamma}}{\gamma p}r-\frac{e\sin\theta}{2p^{3/2}}\left(\frac{fm}{\gamma}\right)^{1/2}, \qquad (1.54)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial e}=-\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}r^2\frac{\cos\theta}{\gamma p}\left(\frac{fm}{\gamma p}\right)^{1/2}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_r}{\partial \varphi}=\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}r^2\frac{e\sin\theta}{\gamma p}+\left(\frac{fm}{\gamma p}\right)^{1/2}e\cos\theta.$$

С учетом (1.52)-(1.54) уравнения (1.48), (1.50) и (1.51) имеют вид

$$\frac{r}{p}\dot{p}-\frac{\cos\theta}{\gamma p}r^2\dot{e}+\frac{e\sin\theta}{\gamma p}r^2\dot{\varphi}=\left(\frac{fm}{p\gamma}\right)^{1/2}e\sin\theta, \qquad (1.55)$$

$$\left[\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\frac{r}{p}-\frac{e\sin\theta}{2p^{3/2}}\left(\frac{fm}{\gamma}\right)^{1/2}\right]\dot{p}+\left[-\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\frac{\cos\theta}{\gamma p}r^2+\left(\frac{fm}{p\gamma}\right)^{1/2}\sin\theta\right]\dot{e}+$$

$$+\left[\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\frac{e\sin\theta}{\gamma p}r^2+\left(\frac{fm}{\gamma}\right)^{1/2}e\cos\theta\right]\dot{\theta}= \qquad (1.56)$$

$$=\frac{fm}{\gamma^2p^2}\left(1+e\cos\theta\right)^2e\cos\theta+\left(\frac{fm}{p\gamma}\right)^{1/2}\cdot\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}e\sin\theta+F_r,$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+e\cos\theta}{p^{3/2}}\left(\frac{fm}{\gamma}\right)^{1/2}\dot{p}+\left(\frac{fm}{p\gamma}\right)^{1/2}\dot{e}\cos\theta-\left(\frac{fm}{p\gamma}\right)^{1/2}e\cdot\dot{\theta}\cdot\sin\theta= \qquad (1.57)$$

$$=-\frac{fm}{p^2\gamma^2}\left(1+e\cos\theta\right)^2e\sin\theta+F_n.$$

Из этих уравнений находим

$$\dot{p}=\left(\frac{\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{2p^{3/2}}{1+e\cos\theta}F_n, \qquad (1.58)$$

$$\dot{e}=\left(\frac{\gamma p}{fm}\right)^{1/2}\sin\theta F_r+\left(\frac{\gamma p}{fm}\right)^{1/2}\left(\cos\theta+\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)F_n, \qquad (1.59)$$

$$\dot{\theta}=\frac{(fm)^{1/2}}{(\gamma p)^{3/2}}(1+e\cos\theta)^2+\left(\frac{\gamma p}{fm}\right)^{1/2}\frac{\cos\theta}{e}F_r-\left(\frac{\gamma p}{fm}\right)^{1/2}\left(\sin\theta+\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)\frac{F_n}{e}. \quad (1.60)$$

Из формул (1.38), (1.39), (1.46), (1.49) вытекают уравнения оскулирующего движения для элементов Ω, i

$$\dot{\Omega}=\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\sin u}{(1+e\cos\theta)\sin i}F_3, \quad (1.61)$$

$$\frac{di}{dt}=\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\cos u}{1+e\cos\theta}F_3. \quad (1.62)$$

Из (1.40), (1.47) следует

$$\dot{\Omega}\cos i+\dot{\omega}+\dot{\theta}=\left(\frac{fm}{p\gamma}\right)^{1/2}(1+e\cos\theta)^2\cdot$$

Откуда с учетом (1.60), (1.61) имеем

$$\dot{\omega}=-\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\cos\theta}{e}F_r+\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\left(\sin\theta+\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)\frac{F_n}{e}-\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\sin u\cdot ctgi}{1+e\cos\theta}F_3. \quad (1.63)$$

Таким образом, мы получили полную систему дифференциальных уравнений возмущенного движения для следующей системы геометрических оскулирующих элементов

$$p,\ e,\ \omega,\ i,\ \Omega,\ \theta \quad (1.64)$$

$$\dot{p}=\left(\frac{\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{2p^{3/2}}{1+e\cos\theta}F_n, \quad (1.65)$$

$$\dot{e}=\left(\frac{\gamma p}{fm}\right)^{1/2}\sin\theta F_r+\left(\frac{\gamma p}{fm}\right)^{1/2}\left(\cos\theta+\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)F_n, \quad (1.66)$$

$$\dot{\theta}=\frac{(fm)^{1/2}}{(\gamma p)^{3/2}}(1+e\cos\theta)^2+\left(\frac{\gamma p}{fm}\right)^{1/2}\frac{\cos\theta}{e}F_r-\left(\frac{\gamma p}{fm}\right)^{1/2}\left(\sin\theta+\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)\frac{F_n}{e} \quad (1.67)$$

$$\dot{\Omega}=\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\sin u}{(1+e\cos\theta)\sin i}F_3, \quad (1.68)$$

$$\frac{di}{dt}=\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\cos u}{1+e\cos\theta}F_3, \tag{1.69}$$

$$\dot{\omega}=-\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\cos\theta}{e}F_r+\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\left(\sin\theta+\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)\frac{F_n}{e}-\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\sin u\cdot ctgi}{1+e\cos\theta}F_3. \tag{1.70}$$

В системе дифференцированных уравнений (1.65) – (1.70) для внутренней замкнутости вместо вышеуказанной формулы (1.67) можно брать дифференциальное уравнение динамического элемента, которого нетрудно вывести.

Из аналога интеграла площадей (1.5) справедливого только для промежуточного движения (1.2) с учетом (1.7), (1.32) получим

$$p^{-3/2}\int_{\tau}^{t}\frac{(fm)^{1/2}}{\gamma^{3/2}}dt=\int_{0}^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}, \tag{1.71}$$

где через τ обозначен момент времени, когда материальная точка, движующаяся по кривой (1.7) со скоростью (1.12)-(1.13) пересекает направление постоянного вектора $\vec{q}$ (определяемый интегралом (1.10) промежуточного движения) в плоскости орбиты. Обозначим через $\Phi(t)$ первообразную функцию для $\mu^{1/2}/\gamma^{3/2}$, тогда

$$p^{-3/2}\left[\Phi(t)-\Phi(\tau)\right]=\int_{0}^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}, \tag{1.72}$$

т.е. для промежуточного движения (1.2) шестой постоянной интегрирования является величина $\Phi(\tau)$.

Следуя идее метода Лагранжа, сохраняем в возмущенном движении (1.27) форму интеграла (1.72), но величины p,e,ω и $\Phi(t)$ будут уже неизвестными функциями времени. Дифференцирование равенства (1.72) по времени дает

$$-\frac{3}{2}p^{-5/2}\left[\Phi(t)-\Phi(\tau)\right]\dot{p}+p^{-3/2}\frac{(fm)^{1/2}}{\gamma^{3/2}}-p^{-3/2}\frac{d\Phi(\tau)}{dt}= \tag{1.73}$$

$$=-2\dot{e}\int_0^{\theta}\frac{\cos\theta d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}+\frac{\dot{\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}$$

Откуда с учетом (1.58)-(1.60) имеем

$$\frac{d\Phi(\tau)}{dt}=\frac{r^2}{(fm)^{1/2}\gamma^{3/2}e}\times\left\{\left(Ne\sin\theta-\cos\theta\right)F_r+\right. \tag{1.74}$$

$$\left.+\left[-3e\frac{p\gamma}{r}I+\left(1+\frac{r}{p\gamma}\right)\sin\theta+Ne\left(\cos\theta+\left(e+\cos\theta\right)\frac{r}{p\gamma}\right)\right]F_n\right\},$$

где

$$N=2\frac{p^2\gamma^2}{r^2}\int_0^{\theta}\frac{r^3}{p^3\gamma^3}\cos\theta d\theta,\quad I=\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)}\cdot$$

Используя известное тождество [4]

$$-3e\frac{p\gamma}{r}I=-\left(1+\frac{r}{p\gamma}\right)\sin\theta+\left(1-e^2\right)\frac{r}{p\gamma}N$$

перепишем уравнение динамического элемента (1.74) в виде

$$\frac{d\Phi(\tau)}{dt}=\frac{r^2}{(fm)^{1/2}\gamma^{3/2}e}\left\{\left(Ne\sin\theta-\cos\theta\right)F_r+N\frac{p\gamma}{r}F_n\right\}$$

Таким образом, мы получили полную систему дифференциальных уравнений возмущенного движения для следующей системы оскулирующих элементов

$$p,\ e,\ \omega,\ i,\ \Omega,\ \Phi(\tau) \tag{1.75}$$

$$\dot{p}=\left(\frac{\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{2p^{3/2}}{1+e\cos\theta}F_n, \tag{1.76}$$

$$\dot{e}=\left(\frac{\gamma p}{fm}\right)^{1/2}\sin\theta F_r+\left(\frac{\gamma p}{fm}\right)^{1/2}\left(\cos\theta+\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)F_n, \tag{1.77}$$

$$\dot{\Omega}=\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\sin u}{(1+e\cos\theta)\sin i}F_3, \tag{1.78}$$

$$\frac{di}{dt}=\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\cos u}{1+e\cos\theta}F_3, \tag{1.79}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}=&-\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\cos\theta}{e}F_r+\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\left(\sin\theta+\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)\frac{F_n}{e}-\\&-\left(\frac{p\gamma}{fm}\right)^{1/2}\frac{\sin u\cdot ctgi}{1+e\cos\theta}F_3,\end{aligned} \tag{1.80}$$

$$\frac{d\Phi(\tau)}{dt}=\frac{r^2}{(fm)^{1/2}\gamma^{3/2}e}\left\{(Ne\sin\theta-\cos\theta)F_r+N\frac{p\gamma}{r}F_n\right\}. \tag{1.81}$$

1.3 Система оскулирующих элементов в квазиэллиптическом движении

В динамике гравитационно связанных систем, в ходе эволюции, возмущенный аналог эксцентриситета апериодического движения по квазиоконическому сечению в течении длительного времени остается меньше единицы $e(t)<1$ [29, 33]. В этом случае удобно использовать следующую систему оскулирующих элементов

$$a,\ e,\ i,\ \pi,\ \Omega,\ \lambda, \tag{1.82}$$

где a - аналог большой полуоси, $\lambda=M+\pi$ - аналог средней долготы в орбите, M - аналог средней аномалии, π - аналог долготы перицентра. В этом случае уравнения возмущенного движения в форме уравнений Ньютона имеют вид

$$\dot{a}=\frac{2a^2e\sin\theta}{p}\cdot\tilde{F}_r+\frac{2a^2}{r}\cdot\tilde{F}_\tau, \tag{1.83}$$

$$\dot{e} = \sin\theta \cdot \tilde{F}_r + \left(\cos\theta + \frac{e + \cos\theta}{1 + e \cdot \cos\theta} \right) \cdot \tilde{F}_\tau , \qquad (1.84)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\cos u}{1 + e \cdot \cos\theta} \cdot \tilde{F}_n , \qquad (1.85)$$

$$\dot{\pi} = -\frac{\cos\theta}{e} \cdot \tilde{F}_r + \frac{\sin\theta}{e} \left(1 + \frac{r}{\gamma p} \right) \cdot \tilde{F}_\tau + \frac{r}{\gamma p} \sin u \cdot \mathrm{tg}\frac{i}{2} \cdot \tilde{F}_n , \qquad (1.86)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\sin u}{(1 + e \cdot \cos\theta)\sin i} \cdot \tilde{F}_n , \qquad (1.87)$$

$$\dot{\lambda} = n \left(\frac{m_1(t) + m_2(t)}{m_1(t_0) + m_2(t_0)} \cdot \frac{1}{\gamma^3} \right)^{1/2} - 2\frac{r}{\gamma p}\sqrt{1 - e^2} \cdot \tilde{F}_r + \frac{r}{\gamma p} \sin u \cdot \mathrm{tg}\frac{i}{2} \cdot \tilde{F}_n + \qquad (1.88)$$

$$+ \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \left[-\tilde{F}_r \cdot \cos\theta + \left(1 + \frac{r}{\gamma p} \right) \tilde{F}_\tau \cdot \sin\theta \right],$$

где $n = \sqrt{\mu_0} \big/ a^{3/2}$ - среднее движение по орбите.

Полученные новые формы уравнения возмущенного движения, на базе апериодического движения по квазиконическому сечению были использованы в исследовании динамической эволюции нестационарной много планетной задачи [34].

1.4 Уравнения возмущенного движения задачи двух тел переменной массы при наличии реактивных сил

Расмотрим гравитирующую систему состоящихся из двух небесных тел с переменными массами. Будем считать, что тела являются шаровидными со сферическими распределениями масс. Пусть, P_1 - более массивное тело (далее центральное тело), P_2 - менее массивное тело (далее спутник). Соответственно, обозначим массы, которые являются функциями времени

$$m_1 = m_1(t), \qquad m_2 = m_2(t). \qquad m_1 \geq m_2 . \qquad (1.89)$$

Допустим, что массы тел уменьшаются за счет отделяющихся частиц и растет из-за присоединяющихся (налипающих) частиц. При этом, в общем случае, относительная скорость отделяющихся частиц от тела, отличается от

относительной скорости присоединяющихся частиц к телу. Рассмотрим общий случай, когда массы тел изменяются не изотропно в различных удельных темпах

$$\frac{\dot{m}_1}{m_1} \neq \frac{\dot{m}_2}{m_2}. \tag{1.90}$$

Исходя из обобщенного уравнения Мещерского [35] для двух сферических тел с переменными массами, при наличии реактивных сил, получим дифференциальные уравнения движения в абсолютной системе координат *OXYZ* (см. Рис.1)

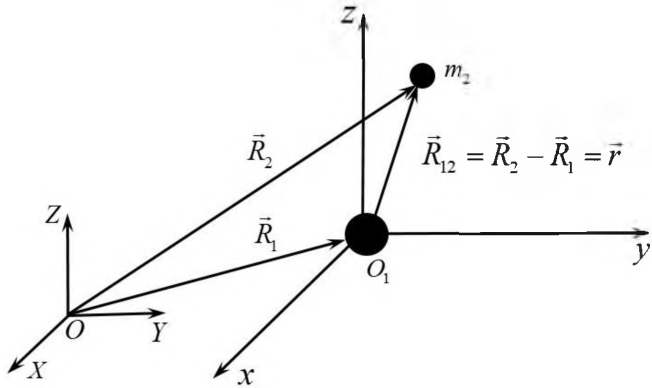

Рисунок 1. Обозначения в абсолютной и в относительной системе координат.

$$m_1 \ddot{\vec{R}}_1 = f\frac{m_1 m_2}{R_{12}^3}\vec{R}_{12} - \left(\left|\dot{m}_{1-}\right|\right)\vec{V}_{1-} + \dot{m}_{1+}\vec{V}_{1+}, \tag{1.91}$$

$$\vec{V}_{1-} = \vec{u}_{1-} - \dot{\vec{R}}_1, \qquad \vec{V}_{1+} = \vec{u}_{1+} - \dot{\vec{R}}_1, \quad \vec{R}_{12} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1, \tag{1.92}$$

$$m_1 = m_1(t) = m_1(t_0) - \left(\left|m_{1-}\right|\right) + \left(m_{1+}\right) = m_1(t_0) - \int_{t_0}^{t}\left(\left|\dot{m}_{1-}\right|\right)dt + \int_{t_0}^{t}\left(\dot{m}_{1+}\right)dt, \tag{1.93}$$

$$m_2 \ddot{\vec{R}}_2 = f\frac{m_2 m_1}{R_{21}^3}\vec{R}_{21} - \left(\left|\dot{m}_{2-}\right|\right)\vec{V}_{2-} + \dot{m}_{2+}\vec{V}_{2+}, \tag{1.94}$$

$$\vec{V}_{2-}=\vec{u}_{2-}-\dot{\vec{R}}_2,\qquad \vec{V}_{2+}=\vec{u}_{2+}-\dot{\vec{R}}_2,\quad \vec{R}_{21}=\vec{R}_1-\vec{R}_2, \tag{1.95}$$

$$\begin{aligned} m_2 &= m_2(t)=m_2(t_0)-\left(|m_{2-}|\right)+\left(m_{2+}\right)= \\ &= m_2(t_0)-\int_{t_0}^{t}\left(|\dot{m}_{2-}|\right)dt+\int_{t_0}^{t}\left(\dot{m}_{2+}\right)dt. \end{aligned} \tag{1.96}$$

Здесь обозначены f - гравитационная постоянная, $\vec{R}_j$ - радиус вектора центра инерции тел в абсолютной системе координат $(j=1,2)$, $\vec{R}_{ij}$ - взаимные расстояния центра инерции тел $(j,i=1,2,\ j\neq i)$ тел P_1 и P_2, t - текущий момент времени, t_0 - начальный момент времени,

$$m_1(t_0)=const,\qquad m_2(t_0)=const \tag{1.97}$$

$$-\left(|m_{1-}|\right)=-\int_{t_0}^{t}\left(|\dot{m}_{1-}|\right)dt<0,\qquad -\left(|m_{2-}|\right)=-\int_{t_0}^{t}\left(|\dot{m}_{2-}|\right)dt<0, \tag{1.98}$$

- массы частиц отделяющихся от тел P_1 и P_2 за время t,

$$\left(m_{1+}\right)=+\int_{t_0}^{t}\left(\dot{m}_{1+}\right)dt>0,\qquad \left(m_{2+}\right)=+\int_{t_0}^{t}\left(\dot{m}_{2+}\right)dt>0. \tag{1.99}$$

- массы частиц присоединяющихся к телам P_1 и P_2 за время t.

В уравнениях (1.92), (1.95), $\vec{u}_{1-}$ и $\vec{u}_{2-}$ - абсолютные скорости отделяющихся частиц от тела P_1 и P_2, $\vec{u}_{1+}$ и $\vec{u}_{2+}$ - абсолютные скорости присоединяющихся частиц к телу P_1 и P_2, соответственно,

$$\begin{aligned} &\vec{V}_{1-}=\vec{u}_{1-}-\dot{\vec{R}}_1,\quad \vec{V}_{2-}=\vec{u}_{2-}-\dot{\vec{R}}_2, \\ &\vec{V}_{1+}=\vec{u}_{1+}-\dot{\vec{R}}_1,\quad \vec{V}_{2+}=\vec{u}_{2+}-\dot{\vec{R}}_2, \end{aligned} \tag{1.100}$$

относительные скорости отделяющихся и присоединяющихся (налипающих) частиц.

Будем считать, что законы изменения масс (1.93), (1.96) и относительная скорость отделяющихся и присоединяющихся частиц (1.100) известные и заданы.

Из уравнения (1.91), (1.94) следуют

$$\ddot{\vec{R}}_1 = f\frac{m_2}{R_{12}^3}\vec{R}_{12} + \frac{1}{m_1}\left[\dot{m}_{1+}\vec{V}_{1+} - \left(\left|\dot{m}_{1-}\right|\right)\vec{V}_{1-}\right] \qquad (1.101)$$

$$\ddot{\vec{R}}_2 = f\frac{m_1}{R_{21}^3}\vec{R}_{21} + \frac{1}{m_2}\left[\dot{m}_{2+}\vec{V}_{2+} - \left(\left|\dot{m}_{2-}\right|\right)\vec{V}_{2-}\right] \qquad (1.102)$$

Уравнения (1.101), (1.102) определяют задачу двух тел с неизотропно изменяющимися массами при наличии реактивных сил в абсолютной системе координат. Следуя Л.Г. Лукьянову [36] будем считать, что реактивные силы приложены к центру инерции соответствующих сферических небесных тел.

Введем относительную систему координат O_1xyz с началом в центре центрального тела P_1 оси которой параллельны соответствующим осям абсолютной системы координат. Обозначим (см. рис.1)

$$\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 = \vec{R}_{12}. \qquad (1.103)$$

Тогда в относительных координатах уравнения движения рассматриваемой задачи двух тел имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} + fm\frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{F}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (1.104)$$

где суммарная масса тел и равнодействующая реактивных сил (на единицу масс) обозначены следующим образом

$$m = m(t) = m_1(t) + m_2(t), \qquad (1.105)$$

$$\vec{F} = \vec{F}(t) = \vec{F}\left(F_x, F_y, F_z\right) = \vec{F}_+ + \vec{F}_-, \qquad (1.106)$$

$$\vec{F}_+ = \frac{\dot{m}_{2+}}{m_2}\vec{V}_{2+} - \frac{\dot{m}_{1+}}{m_1}\vec{V}_{1+}, \quad \vec{F}_- = \frac{\left|\dot{m}_{1-}\right|}{m_1}\vec{V}_{1-} - \frac{\left|\dot{m}_{2-}\right|}{m_2}\vec{V}_{2-}. \qquad (1.107)$$

В орбитальной системе координат реактивная сила (1.106) может быть записана в форме

$$\vec{F} = \vec{F}(t) = \vec{F}_r + \vec{F}_\tau + \vec{F}_n = \vec{F}(F_r, F_\tau, F_n), \qquad (1.108)$$

где составляющие реактивных сил обозначены (см. Рис.2) через F_r радиальное (направленное по радиус вектору), F_τ трансверсальное (перпендикулярное к радиус вектору, лежащее на плоскости мгновенной орбиты) и F_n нормальное (перпендикулярное к плоскости мгновенной орбиты).

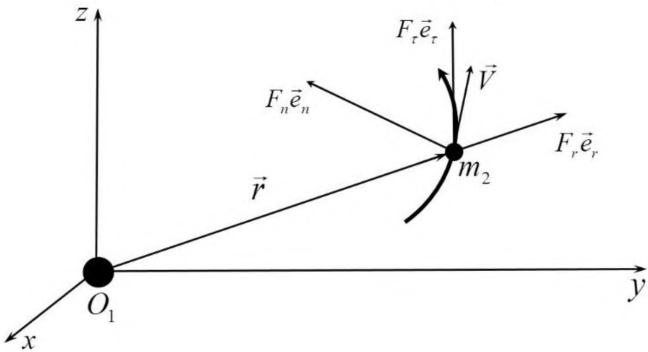

Рисунок 2. Обозначения составляющих реактивной силы в орбитальной системе координат.

Из наблюдений обычно определяют относительные скорости отделяющихся и присоединяющихся частиц (1.100) относительно каждого конкретного тела. Поэтому реактивные силы далее будем описывать в орбитальной системе координат. Будем считать, что величины (1.97)-(1.99) известные и заданные функции времени. Соотношения (1.04), (1.105)-(1.107) описывают задачу двух тел с неизотропно изменяющимися массами при наличии реактивных сил в относительной системе координат. Дифференциальные уравнения (1.104)-(1.107) могут быть исследованы различными методами, в том числе методом автономизации [37, 38], которые являются предметом отдельной работы.

В настоящей работе уравнения (1.104)-(1.107) являются базовыми исходными уравнениями, решения которых будем искать методами теории возмущения.

Рассмотрим задачу двух тел с переменными массами при наличии реактивных сил (1.104) как уравнения возмущенного движения по квазиоскулирующему сечению в оскулирующих элементах (1.82), где $\gamma = m(t_0)/m(t)$. Перепишем уравнение (1.104) в виде

$$\ddot{\vec{r}} + fm\frac{\vec{r}}{r^3} - mA\vec{r} = \vec{W} \tag{1.109}$$

$$\vec{W} = -mA\vec{r} + \vec{F} = \vec{W}(W_r, W_\tau, W_n), \tag{1.110}$$

Тогда в уравнениях возмущенного движения (1.83)-(1.88) составляющие возмущающих сил можно представить в виде

$$W_r^* = W_r \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\left(\frac{m_0}{m}\right), \quad W_\tau^* = W_\tau \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\left(\frac{m_0}{m}\right), \quad W_n^* = W_n \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\left(\frac{m_0}{m}\right), \tag{1.111}$$

$$W_r = F_r(t) - mAr, \quad W_\tau = F_\tau(t), \quad W_n = F_n(t), \quad A = d^2(1/m)/dt^2. \tag{1.112}$$

Уравнение возмущенного движения в форме уравнений Ньютона (1.83)-(1.88) определяется следующими уравнениями

$$\dot{a} = Q\left\{\frac{2a^2 e\sin\theta}{p}\left(F_r(t) - mAr\right) + \frac{2a^2}{\rho}F_\tau(t)\right\}, \tag{1.113}$$

$$\dot{e} = Q\left\{\sin\theta\left(F_r(t) - mAr\right) + \left(\cos\theta + \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right)F_\tau(t)\right\}, \tag{1.114}$$

$$\frac{di}{dt} = Q\frac{\cos u}{1+e\cos\theta}F_n(t), \tag{1.115}$$

$$\dot{\pi} = Q\left\{-\frac{\cos\theta}{e}\left(F_r(t) - mAr\right) + \frac{\sin\theta}{e}\left(1 + \frac{mr}{m_0 p}\right)F_\tau(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{mr}{m_0 p}\sin u \cdot \operatorname{tg}\frac{i}{2}F_n(t)\right\}, \tag{1.116}$$

$$\dot{\Omega} = Q\frac{\sin u}{(1 + e\cos\theta)\sin i}F_n(t), \tag{1.117}$$

$$\dot{\lambda} = n\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 - Q\left\{2\frac{mr}{m_0 p}\sqrt{1-e^2}\left(F_r(t) - mAr\right) - \frac{mr}{m_0 p}\sin u \cdot \operatorname{tg}\frac{i}{2}F_n(t)\right\} + \tag{1.118}$$
$$+ \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[\left(1 + \frac{mr}{m_0 p}\right)\sin\theta F_\tau(t) - \cos\theta\left(F_r(t) - mAr\right)\right]Q.$$

где $Q = m_0\sqrt{p}\,/\,m\sqrt{\mu_0}$.

Из уравнения возмущенного движения в оскулирующих элементах (1.113)-(1.118) после осреднения по средней долготе λ по схеме Гаусса [39], получим уравнения вековых возмущений для исследования проблемы в длительных интервалах времени.

Детально приведем вычисления вековых возмущений для элементов *a* и *e*, которые определяют формы и размеры орбиты. Учитывая, что

$$r = \frac{m_0}{m}\frac{p}{1 + e\cos\theta} = \frac{m_0}{m}\frac{a\left(1-e^2\right)}{1 + e\cos\theta}, \tag{1.119}$$

перепишем уравнение (1.113) в виде

$$\dot{a} = \left\{\frac{2a^2 e\sin\theta}{p}\left(F_r(t) - mA\frac{m_0}{m}\frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta}\right) + \frac{2a^2}{\rho}F_\tau(t)\right\}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\frac{m_0}{m} = \tag{1.120}$$
$$= \left\{\left[\sin\theta\right]\frac{2a^2 e}{p}F_r(t) - \left[\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]2ea^2 m_0 A + \left[\frac{1}{\rho}\right]2a^2 F_\tau(t)\right\}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\frac{m_0}{m}.$$

$$\dot{a}^{sec} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left\{\left[\sin\theta\right]\frac{2a^2e}{p}F_r(t) - \left[\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]2ea^2m_0A + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left[\frac{1}{\rho}\right]2a^2F_\tau(t)\right\}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\frac{m_0}{m}\right]d\lambda$$

Используем известные формулы перехода от θ к λ а также θ к E [4], [40], [27]

$$\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}d\theta = d\lambda, \qquad d\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE,$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}, \qquad \cos\theta = \frac{\cos E - e}{1-e\cos E},$$

$$\frac{1}{1+e\cos\theta} = \frac{1-e\cos E}{1-e^2}$$

перепишем уравнение (1.120) в следующем виде

$$\dot{a}^{sec} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left\{\left[\sin\theta\right]\frac{2a^2e}{p}F_r(t) - \left[\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]2ea^2m_0A + \right.\right. \qquad (1.121)$$
$$\left.\left. + \left[\frac{1+e\cos\theta}{a\left(1-e^2\right)}\right]2a^2F_\tau(t)\right\}\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\left(\frac{m_0}{m}\right)\right]d\lambda$$

Интегралы в правой части уравнения (1.121) легко вычисляются

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\theta\right]d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\theta\right]\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}d\theta}{\left(1+e\cos\theta\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}\left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\left(1-e\cos E\right)^2}{\left(1-e^2\right)^2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-e^2}\sin E dE = 0.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}d\theta}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}\frac{1-e\cos E}{1-e^2}\left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE\frac{\left(1-e\cos E\right)^2}{\left(1-e^2\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin E}{\sqrt{1-e^2}}\left(1-e\cos E\right)dE=0.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1+e\cos\theta}{a\left(1-e^2\right)}\right]d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1+e\cos\theta}{a\left(1-e^2\right)}\right]\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}d\theta}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}d\theta}{a\left(1+e\cos\theta\right)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}d\theta}{a\left(1+e\cos\theta\right)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\frac{1-e\cos E}{1-e^2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dE}{a}=\frac{1}{a}.$$

В результате получим

$$\dot{a}^{\sec}=\frac{2a^{3/2}m_0}{m\sqrt{\mu_0}}\sqrt{1-e^2}F_\tau\left(t\right)\cdot \tag{1.122}$$

Далее вычислим вековые возмущения для уравнения аналога эксцентриситета (1.114). Перепишем уравнение (1.114) в следующем виде

$$\dot{e}^{\sec}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{\mu_0}}\frac{m_0}{m}\left\{\left[\sin\theta\right]F_r\left(t\right)-\left[\frac{\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]a\left(1-e^2\right)m_0A+\right.\right. \tag{1.123}$$

$$\left.\left.+\left[\cos\theta\right]F_\tau\left(t\right)+\left[\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right]F_\tau\left(t\right)\right\}\right]d\lambda.$$

Соответствующие вычисления дают

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\theta]d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\cos\theta]\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}d\theta}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}\frac{\left(1-e\cos E\right)^2}{\left(1-e^2\right)^2}\left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos E-e\right)dE=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos EdE-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}edE=-e.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}\right]d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{1+e\cos\theta}\left(e+\cos\theta\right)\right]\frac{\left(1-e^2\right)^{3/2}d\theta}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1-e\cos E}{1-e^2}\left(e+\frac{\cos E-e}{1-e\cos E}\right)\right]\frac{\left(1-e\cos E\right)^2}{\left(1-e^2\right)^2}\left(1-e^2\right)^{3/2}\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos E}dE=$$

$$=\frac{1}{1-e^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-e\cos E\right)\left(e-e^2\cos E+\cos E-e\right)dE=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-e\cos E\right)\cos EdE=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos EdE-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e\cos^2 EdE=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2E\right)dE=-\frac{1}{2}e.$$

В результате получим

$$\dot{e}^{\text{sec}}=-\frac{3}{2}\frac{m_0e\sqrt{a\left(1-e^2\right)}}{m\sqrt{\mu_0}}F_\tau\left(t\right). \qquad (1.124)$$

Аналогично, выполняя все вычисления, получим вековые возмущения для остальных оскулирующих элементов. В результате имеем следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих вековые возмущения

$$\dot{a}^{\text{sec}}=\frac{2a^{3/2}\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu_0}}\frac{m_0}{m}F_\tau\left(t\right), \qquad (1.125)$$

$$\dot{e}^{\text{sec}} = -\frac{3}{2}\frac{e\sqrt{a\left(1-e^2\right)}}{\sqrt{\mu_0}}\frac{m_0}{m}F_\tau\left(t\right), \tag{1.126}$$

$$\frac{di^{\text{sec}}}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{e\sqrt{a}\cos\left(\pi-\Omega\right)}{\sqrt{\mu_0}\sqrt{1-e^2}}\frac{m_0}{m}F_n\left(t\right), \tag{1.127}$$

$$\dot{\pi}^{\text{sec}} = \frac{m_0}{m}\frac{\sqrt{a\left(1-e^2\right)}}{\sqrt{\mu_0}}\left\{F_r\left(t\right)-\frac{3}{2}m_0 aA-\frac{3e}{2\left(1-e^2\right)}\sin\left(\pi-\Omega\right)\cdot\text{tg}\frac{i}{2}F_n\left(t\right)\right\}, \tag{1.128}$$

$$\dot{\Omega}^{\text{sec}} = -\frac{3}{2}\frac{e\sqrt{a}}{\sqrt{1-e^2}\sqrt{\mu_0}}\frac{m_0}{m}\frac{\sin\left(\pi-\Omega\right)}{\sin i}F_n\left(t\right), \tag{1.129}$$

$$\dot{\lambda}^{\text{sec}} = n\left(\frac{m}{m_0}\right)^2 - \frac{m_0}{m}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu_0}}\left\{F_r\left(t\right)\left(2+e^2\right)-\left(2+3e^2\right)m_0 Aa\right\}- \\ -\frac{3}{2}\frac{m_0}{m}\frac{e\sqrt{a}\sin\left(\pi-\Omega\right)}{\sqrt{\mu_0\left(1-e^2\right)}}\text{tg}\frac{i}{2}F_n\left(t\right)+\frac{\sqrt{a\left(1-e^2\right)}}{1+\sqrt{1-e^2}}\frac{m_0}{m}\frac{e^2}{\sqrt{\mu_0}}\left(F_r\left(t\right)-\frac{3}{2}m_0 Aa\right). \tag{1.130}$$

Отметим, что полученная система уравнений вековых возмущений допускает один простой первый интеграл [24]. Уравнение (1.125) разделим на уравнение (1.126), тогда получим простое следующее выражение

$$\frac{\dot{a}^{\text{sec}}}{\dot{e}^{\text{sec}}} = -\frac{4}{3}\frac{a}{e}. \tag{1.131}$$

Отсюда следует

$$a^3e^4 = const = a_0^3e_0^4, \qquad e_0 = e\left(t_0\right), \qquad a_0 = a\left(t_0\right). \tag{1.132}$$

Интеграл (1.132) можно написать в удобном виде

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 = \left(\frac{e_0}{e}\right)^4 \tag{1.133}$$

Простой аналитический вид полученного первого интеграла системы дифференциальных уравнений вековых возмущений удобен для использования в приложениях.

Отметим, что при выводе интеграла (1.133) мы не делали никаких ограничений на законы изменения масс (1.105) и на относительные скорости отделяющихся и присоединяющихся частиц (1.100).

Поэтому соотношение (1.133) имеет место для произвольных законов изменения масс (1.105) и произвольных относительных скоростей (1.100).

Во многих случаях может оказаться полезным приближенное решение системы дифференциальных уравнений векового возмущения полученные методом Пикара.

Пусть заданы начальные условия при $t = t_0$

$$\begin{aligned} &a_0 = a(t_0), \quad e_0 = e(t_0), \quad i_0 = i(t_0), \\ &\pi_0 = \pi(t_0), \quad \Omega_0 = \Omega(t_0), \quad \lambda_0 = \lambda(t_0) \end{aligned} . \tag{1.134}$$

Тогда по методу Пикара [4], в первом приближении, можно написать

$$a \approx a_0 + \sqrt{1-e_0^2}\,\frac{2a_0^{3/2}}{\sqrt{\mu_0}} m_0 \int_{t_0}^{t} \frac{F_\tau(t)}{m} dt , \tag{1.135}$$

$$e \approx e_0 - \frac{3}{2}\,\frac{e_0\sqrt{a_0\left(1-e_0^2\right)}}{\sqrt{\mu_0}} m_0 \int_{t_0}^{t} \frac{F_\tau(t)}{m} dt , \tag{1.136}$$

$$i \approx i_0 - \frac{3}{2}\,\frac{e_0\sqrt{a_0}\cos(\pi_0 - \Omega_0)}{\sqrt{\mu_0}\sqrt{1-e_0^2}} m_0 \int_{t_0}^{t} \frac{F_n(t)}{m} dt , \tag{1.137}$$

$$\pi \approx \pi_0 + \frac{\sqrt{a_0\left(1-e_0^2\right)}}{\sqrt{\mu_0}}\left(m_0\int_{t_0}^{t}\frac{F_r(t)}{m}dt - \frac{3}{2}a_0 m_0^2\int_{t_0}^{t}\frac{A}{m}dt\right) - \\ -\sin\left(\pi_0-\Omega_0\right)\operatorname{tg}\frac{i_0}{2}\frac{3e_0\sqrt{a_0}}{2\sqrt{1-e_0^2}\sqrt{\mu_0}}m_0\int_{t_0}^{t}\frac{F_n(t)}{m}dt, \tag{1.138}$$

$$\Omega \approx \Omega_0 - \frac{3}{2}\frac{e_0\sqrt{a_0}}{\sqrt{\mu_0}\sqrt{1-e_0^2}}\frac{\sin\left(\pi_0-\Omega_0\right)}{\sin i_0}m_0\int_{t_0}^{t}\frac{F_n(t)}{m}dt\,, \tag{1.139}$$

$$\lambda \approx \lambda_0 + \frac{\sqrt{\mu_0}}{m_0^2 a_0^{3/2}}\int_{t_0}^{t}m^2dt - \left(2+e_0^2-\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{1+\sqrt{1-e_0^2}}e_0^2\right)\frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{\mu_0}}m_0\int_{t_0}^{t}\frac{F_r(t)}{m}dt + \\ +\left(2+3e_0^2-\frac{3}{2}\frac{e_0^2\sqrt{1-e_0^2}}{1+\sqrt{1-e_0^2}}\right)\frac{a_0^{3/2}}{\sqrt{\mu_0}}\int_{t_0}^{t}mAdt - \frac{3}{2}\frac{e_0\sqrt{a_0}\sin\left(\pi_0-\Omega_0\right)}{\sqrt{\mu_0}\sqrt{1-e_0^2}}\operatorname{tg}\frac{i_0}{2}m_0\int_{t_0}^{t}\frac{F_n(t)}{m}dt. \tag{1.140}$$

Заметим, что приведенные формулы описывают решения системы дифференциальных уравнений (1.135)-(1.140) только в первом приближении.

ГЛАВА 2. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ МНОГИХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТЕЛ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА

2.1 Силовая функция гравитирующих тел

Рассмотрим систему многих материальных тел-точек $P_1, P_2, ..., P_n$ с переменными массами

$$m_1(t), m_2(t), ..., m_n(t) \tag{2.1}$$

взаимно притягивающихся по закону всемирного тяготения [4, 27]. Силовая функция этой системы многих тел определяется следующим аналитическим выражением

$$U = f \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{2.2}$$

где f - постоянная тяготения, Δ_{ij} - взаимные расстояния тел. В формуле (2.2) штрих при знаке суммы означает $i \neq j$. Соответственно, силы ньютоновского взаимодействия определяется формулой

$$\vec{F} = grad_{\vec{r}} U, \ \vec{F} = \vec{F}(X, Y, Z) \tag{2.3}$$

2.2 Вывод уравнения Лагранжа из уравнении Ньютона, когда возмущающая сила допускает силовую функцию

Пусть

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{2.4}$$

где

$$U = U(x, y, z, t) \tag{2.5}$$

Функция U называется возмущающей функцией.

$$\frac{\partial U}{\partial \kappa} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \kappa} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \kappa} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \kappa} \tag{2.6}$$

Откуда в силу формул (2.4) имеем также

$$\frac{\partial U}{\partial \kappa} = X\frac{\partial x}{\partial \kappa} + Y\frac{\partial y}{\partial \kappa} + Z\frac{\partial z}{\partial \kappa} \tag{2.7}$$

$$x = \gamma\rho\left[\cos u \cdot \cos\Omega - \sin u \cdot \sin\Omega \cdot \cos i\right],$$
$$y = \gamma\rho\left[\cos u \cdot \sin\Omega + \sin u \cdot \cos\Omega \cdot \cos i\right], \qquad (2.8)$$
$$z = \gamma\rho\left[\sin u \cdot \sin i\right], \quad r = \gamma\rho, \quad u = \theta + \omega,$$

Формулы невозмущенного эллиптического движения дают следующие соотношения

$$r = a\left(1 - e\cos E\right) \qquad (2.9)$$

и

$$E - e\sin E = M = n\left[\Phi(t) - \Phi(\tau)\right] + \varepsilon - \pi \qquad (2.10)$$

$$M = n\left[\Phi(t) - \Phi(\tau)\right], \quad n = \frac{\sqrt{\mu_0}}{a^{3/2}},$$

Из (2.9) имеем

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a} \qquad (2.11)$$

Далее, дифференцируя (2.9) и (2.10) по эксцентриситету e, имеем

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos E + ae\sin E\frac{\partial E}{\partial e}, \qquad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{a\sin E}{r}, \qquad (2.12)$$

Откуда после сокращений найдем

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos\theta\,. \qquad (2.13)$$

Дифференцируя затем формулы (2.9) и (2.10) по элементам ε и π, найдем

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = ae\sin E\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}, \qquad \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} = \frac{a}{r}. \qquad (2.14)$$
$$\frac{\partial r}{\partial \pi} = ae\sin E\frac{\partial E}{\partial \pi}, \qquad \frac{\partial E}{\partial \pi} = -\frac{a}{r}.$$

откуда с помощью формулы

$$r\sin\theta = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E \qquad (2.15)$$

получим

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \frac{ae\sin\theta}{\sqrt{1-e^2}}, \qquad \frac{\partial r}{\partial \pi} = -\frac{ae\sin\theta}{\sqrt{1-e^2}}. \qquad (2.16)$$

Наконец, ясно, что

$$\frac{\partial r}{\partial \Omega} = 0\,, \qquad \frac{\partial r}{\partial i} = 0\,. \tag{2.17}$$

Перейдем к аргументу широты. Так как

$$u = \theta + \omega = \theta + \pi - \Omega\,, \tag{2.18}$$

То мы имеем прежде всего

$$\frac{\partial u}{\partial \Omega} = -1\,, \quad \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial \theta}{\partial e}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial \pi} = \frac{\partial \theta}{\partial \pi} + 1\,. \tag{2.19}$$

Дифференцируя по e соотношение

$$r\cos\theta = a\left(\cos E - e\right), \tag{2.20}$$

имеем

$$\frac{\partial r}{\partial e}\cos\theta - r\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial e} = -a\sin E\frac{\partial E}{\partial e} - a\,, \tag{2.21}$$

откуда с помощью уже полученных выше выражений для $\frac{\partial r}{\partial e}$ и $\frac{\partial E}{\partial e}$ найдем после упрощений

$$\frac{\partial \theta}{\partial e} = \frac{a\sin\theta}{r}\left(1 + \frac{r}{\gamma p}\right). \tag{2.22}$$

Дифференцируя затем соотношение

$$r\left(1 + e\cos\theta\right) = a\left(1 - e^2\right) \tag{2.23}$$

по ε и π, получим

$$\frac{a\left(1-e^2\right)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} - re\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} = 0\,, \tag{2.24}$$

$$\frac{a\left(1-e^2\right)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial \pi} - re\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial \pi} = 0\,.$$

откуда, зная уже выражение для $\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}$ и $\frac{\partial r}{\partial \pi}$, найдем

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\,, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \pi} = -\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}\,. \tag{2.25}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0\,, \frac{\partial u}{\partial i} = 0\,. \tag{2.26}$$

Собирая все полученные производные вместе, получим следующую группу формул:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial \Omega}=0, && \frac{\partial u}{\partial \Omega}=-1,\\
&\frac{\partial r}{\partial i}=0, && \frac{\partial u}{\partial i}=0,\\
&\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{r}{a}, && \frac{\partial u}{\partial a}=0,\\
&\frac{\partial r}{\partial e}=-a\cos\theta, && \frac{\partial u}{\partial e}=\frac{a\sin\theta}{\rho}\left(1+\frac{\rho}{\gamma p}\right),\\
&\frac{\partial \rho}{\partial \pi}=-\frac{ae\sin\theta}{\sqrt{1-e^2}}, && \frac{\partial u}{\partial \pi}=-\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}+1,\\
&\frac{\partial \rho}{\partial \varepsilon}=\frac{ae\sin\theta}{\sqrt{1-e^2}}, && \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}=+\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}.
\end{aligned} \qquad (2.27)$$

Положим теперь в формуле (2.6) последовательно $\kappa = a,e,i,\Omega,\varepsilon,\pi$. Так как ввиду (2.27)

$$\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{x}{a}, \qquad \frac{\partial y}{\partial a}=\frac{y}{a}, \qquad \frac{\partial z}{\partial a}=\frac{z}{a} \qquad (2.28)$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial a}=\frac{r}{a}\left(\alpha X+\beta Y+\gamma Z\right)=\frac{r}{a}W_r, \qquad (2.29)$$

где α,β,γ направляющие косинусы радиуса вектора $\vec{r}$. Из формулы (2.29), имея в виду, что $n=\frac{\sqrt{\mu_0}}{a^{3/2}}$, получим

$$\frac{\partial U}{\partial a}=\frac{nr}{\sqrt{1-e^2}}\tilde{F}_r. \qquad (2.30)$$

Далее, из формул (2.8) имеем

$$\frac{\partial x}{\partial e}=\alpha\frac{\partial r}{\partial e}+r\alpha'\frac{\partial u}{\partial e},$$
$$\frac{\partial y}{\partial e}=\beta\frac{\partial r}{\partial e}+r\beta'\frac{\partial u}{\partial e}, \qquad (2.31)$$
$$\frac{\partial x}{\partial e}=\gamma\frac{\partial r}{\partial e}+r\gamma'\frac{\partial u}{\partial e},$$

где α',β',γ' - направляющие косинусы прямой перпендикулярный к радиус вектору и лежащей в плоскости орбиты. Следовательно

$$\frac{\partial U}{\partial e}=\frac{\partial r}{\partial e}W_r+r\frac{\partial u}{\partial e}W_\tau, \qquad (2.32)$$

Откуда с помощью формул (2.27) найдем

$$\frac{\partial U}{\partial e}=\frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{F}_r\cos\theta+\left(1+\frac{r}{\gamma p}\right)\tilde{F}_\tau\sin\theta\right]. \qquad (2.33)$$

Теперь имеем

$$\frac{\partial x}{\partial i}=\alpha''r\sin u,\quad \frac{\partial y}{\partial i}=\beta''r\sin u,\quad \frac{\partial z}{\partial i}=\gamma''r\sin u, \qquad (2.34)$$

где $\alpha'',\beta'',\gamma''$ - направляющие косинусы прямой перпендикулярный к плоскости орбиты [4]. Поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial i}=r\sin u\cdot W_n, \qquad (2.35)$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial i}=\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}r\sin u\cdot\tilde{F}_n. \qquad (2.36)$$

Далее, дифференцирование формул (2.8) по Ω дает

$$\frac{\partial x}{\partial\Omega}=-r\alpha'-y,\qquad \frac{\partial y}{\partial\Omega}=-r\beta'+x,\qquad \frac{\partial z}{\partial\Omega}=-r\gamma', \qquad (2.37)$$

Вследствие чего получим

$$\frac{\partial U}{\partial\Omega}=-rT+xY-yX. \qquad (2.38)$$

Заменяя здесь выражение $xY - yX$ его соответствующим его значением [4] и исключая затем $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{di}{dt}$ при помощи уравнений (1.76), (1.79), мы найдем после упрощений

$$\frac{\partial U}{\partial \Omega} = -\frac{2nar}{\sqrt{1-e^2}} \sin^2 \frac{i}{2} \cdot \tilde{F}_\tau - \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \sin i \cos u \cdot \tilde{F}_n .$$

Наконец, дифференцируя формулы (2.8) по ε и по π, мы получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\alpha + r\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\alpha', & \frac{\partial x}{\partial \pi} &= \frac{\partial r}{\partial \pi}\alpha + r\frac{\partial u}{\partial \pi}\alpha', \\
\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\beta + r\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\beta', & \frac{\partial y}{\partial \pi} &= \frac{\partial r}{\partial \pi}\beta + r\frac{\partial u}{\partial \pi}\beta', \qquad (2.39) \\
\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial r}{\partial \varepsilon}\gamma + r\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}\gamma', & \frac{\partial z}{\partial \pi} &= \frac{\partial r}{\partial \pi}\gamma + r\frac{\partial u}{\partial \pi}\gamma',
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon}W_r + r\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}W_\tau, \qquad \frac{\partial U}{\partial \pi} = \frac{\partial r}{\partial \pi}W_r + r\frac{\partial u}{\partial \pi}W_\tau, \quad (2.40)$$

откуда при помощи формул (2.27) будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = \frac{na^2 e \sin\theta}{1-e^2} \cdot \tilde{F}_r + \frac{na^3}{r} \cdot \tilde{F}_\tau , \qquad (2.41)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \pi} = -\frac{na^2 e \sin\theta}{1-e^2} \cdot \tilde{F}_r - \frac{na^3}{r} \cdot \tilde{F}_\tau + \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \tilde{F}_\tau .$$

Выписывая все полученные выражения для частных производных функции U вместе, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial \Omega} = -\frac{2nar}{\sqrt{1-e^2}} \sin^2 \frac{i}{2} \cdot \tilde{F}_\tau - \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \sin i \cos u \cdot \tilde{F}_n, \\
&\frac{\partial U}{\partial i} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} r \sin u \cdot \tilde{F}_n, \\
&\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{nr}{\sqrt{1-e^2}} \tilde{F}_r, \\
&\frac{\partial U}{\partial e} = \frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}} \left[-\tilde{F}_r \cos\theta + \left(1 + \frac{r}{\gamma p}\right) \tilde{F}_\tau \sin\theta \right], \\
&\frac{\partial U}{\partial \pi} = -\frac{na^2 e \sin\theta}{1-e^2} \cdot \tilde{F}_r - \frac{na^3}{r} \cdot \tilde{F}_\tau + \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \tilde{F}_\tau, \\
&\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} = \frac{na^2 e \sin\theta}{1-e^2} \cdot \tilde{F}_r + \frac{na^3}{r} \cdot \tilde{F}_\tau,
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

откуда выводим следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \tilde{F}_\tau = \frac{\partial U}{\partial \pi} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}, \\
&\frac{a^2 e \sin\theta}{p} \cdot \tilde{F}_r + \frac{a^2}{r} \cdot \tilde{F}_\tau = \frac{1}{na} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon}, \\
&\frac{r}{p} \sqrt{1-e^2}\, \tilde{F}_r = \frac{1}{na} \frac{\partial U}{\partial a}, \\
&\frac{r}{p} \sin u \cdot \tilde{F}_n = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial U}{\partial i}, \\
&\frac{r}{p} \cos u \cdot \tilde{F}_n = -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial U}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} i/2}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\partial U}{\partial \pi} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right), \\
&-\tilde{F}_r \cos\theta + \left(1 + \frac{r}{\gamma p}\right) \tilde{F}_\tau \sin\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} \frac{\partial U}{\partial e}.
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= \frac{2a^2 e\sin\theta}{p}\cdot\tilde{F}_r + \frac{2a^2}{r}\cdot\tilde{F}_\tau,\\
\dot{e} &= \sin\theta\cdot\tilde{F}_r + (\cos\theta+\cos E)\cdot\tilde{F}_\tau,\\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{\gamma p}\cos u\cdot\tilde{F}_n,\\
\dot{\Omega} &= \frac{r}{\gamma p}\sin u\cdot\operatorname{cosec} i\cdot\tilde{F}_n,\\
\dot{\pi} &= -\frac{\cos\theta}{e}\cdot\tilde{F}_r + \frac{\sin\theta}{e}\left(1+\frac{r}{\gamma p}\right)\cdot\tilde{F}_\tau + \frac{r}{\gamma p}\sin u\cdot\operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{F}_n,\\
\dot{\varepsilon} &= -2\frac{r}{\gamma p}\sqrt{1-e^2}\cdot\tilde{F}_r + \frac{r}{\gamma p}\sin u\cdot\operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{F}_n + \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{F}_r\cdot\cos\theta+\left(1+\frac{r}{\gamma p}\right)\tilde{F}_\tau\cdot\sin\theta\right].
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Подставляя выражения (2.43) в уравнения (1.83)-(1.88), мы получим уравнения для определения оскулирующих эллиптических элементов, называемые *уравнениями Лагранжа.*

$$
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial U}{\partial\varepsilon},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial U}{\partial\pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\frac{\partial U}{\partial\varepsilon},\\
\frac{di}{dt} &= -\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial U}{\partial\Omega} - \frac{tg\, i/2}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial U}{\partial\pi}+\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}\right),\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial U}{\partial i},\\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{tg\, i/2}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial U}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e}\frac{\partial U}{\partial e},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial U}{\partial\varepsilon} + \frac{tg\, i/2}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial U}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\frac{\partial U}{\partial\varepsilon}.
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

2.3 Уравнения Лагранжа в различных системах оскулирующих элементов

В теории возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению будем использовать уравнения возмущенного движения в форме Лагранжа.

Часто используются система оскулирующих элементов

$$a_i,\quad e_i,\quad i_i,\quad \Omega_i,\quad \pi_i,\quad \varepsilon_i, \tag{2.46}$$

$$\pi_i = \omega_i + \Omega_i, \tag{2.47}$$

$$\varepsilon_i = \beta_{i2} + \beta_{i3} + \frac{\left(-2\alpha_{i1}\right)^{3/2}}{\mu_{i0}}\left[\beta_{i1} + \varphi_i(t_{i0})\right] \qquad (2.48)$$

где $a-$ большая полуось, $e-$ эксцентриситет, $i-$ наклонение, Ω - долгота восходящего узла, $\pi-$ долгота перицентра, $\varepsilon-$ средняя долгота в эпоху.

Соответственно, система дифференциальных уравнений оскулирующих элементов в форме уравнения Лагранжа имеет вид

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{2}{n_i a_i}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \varepsilon_i}, \qquad (2.49)$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{\sqrt{1-e_i^2}}{n_i a_i^2 e_i}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial \pi_i} - \frac{e_i\sqrt{1-e_i^2}}{1+\sqrt{1-e_i^2}}\frac{1}{n_i a_i^2}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial \varepsilon_i}, \qquad (2.50)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{cosec} i_i}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\frac{\partial W_i}{\partial \Omega_i} - \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{n_i a^2\sqrt{1-e_i^2}}\left(\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial \pi_i} + \frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial \varepsilon_i}\right), \qquad (2.51)$$

$$\frac{d\Omega_i}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i_i}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial i_i}, \qquad (2.52)$$

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial i_i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{n_i a_i^2 e_i}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial e_i}, \qquad (2.53)$$

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = -\frac{2}{n_i a_i}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial a_i} + \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial i_i} + \frac{e_i\sqrt{1-e_i^2}}{1+\sqrt{1-e_i^2}}\frac{1}{n_i a_i^2}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial e_i}, \qquad (2.54)$$

$$\tilde{W}_i = -\left(\frac{m_{i0}}{m_i\gamma_i}\right)^{1/2} W_i\left(t_i, a_i, e_i, \pi_i, i_i, \Omega_i, \varepsilon_i\right). \qquad (2.55)$$

Наиболее часто используемая система оскулирующих элементов

В некоторых случаях предпочтительно следующая система элементов

$$a_i, \quad e_i, \quad i_i, \quad \Omega_i, \quad \pi_i, \quad \lambda_i, \qquad (2.56)$$

где λ_i, - средняя долгота, которая вводится по формуле

$$\lambda_i = M_i + \pi_i = n_i\left[\phi(t_i) - \phi(t_0)\right] + \pi_i = n_i\left[\phi(t_i) - \phi(t_0)\right] + \varepsilon_i \cdot \qquad (2.57)$$

Тогда вместо системы уравнений возмущенного движения (2.49)-(2.55) используем следующую систему дифференциальных уравнений возмущенного движения в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{2}{n_i a_i}\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \lambda_i}, \qquad (2.58)$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{\sqrt{1-e_i^2}}{n_i a_i^2 e_i}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial \pi_i} - \frac{e_i\sqrt{1-e_i^2}}{1+\sqrt{1-e_i^2}}\frac{1}{n_i a_i^2}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial \lambda_i}, \qquad (2.59)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\operatorname{cosec} i_i}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\frac{\partial W_i}{\partial \Omega_i} - \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{n_i a^2\sqrt{1-e_i^2}}\left(\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial \pi_i} + \frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial \lambda_i}\right), \qquad (2.60)$$

$$\frac{d\Omega_i}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i_i}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial i_i}, \qquad (2.61)$$

$$\frac{d\pi_i}{dt} = \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial i_i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{n_i a_i^2 e_i}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial e_i}, \qquad (2.62)$$

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \left(\frac{m_0(t) + m_i(t)}{m_0(t_0) + m_i(t_0)}\right)^2 \cdot n_i - \frac{2}{n_i a_i}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial a_i} + \\ + \frac{\operatorname{tg}(i/2)}{n_i a_i^2\sqrt{1-e_i^2}}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial i_i} + \frac{e_i\sqrt{1-e_i^2}}{1+\sqrt{1-e_i^2}}\frac{1}{n_i a_i^2}\frac{\partial \tilde{W}_i}{\partial e_i}, \qquad (2.63)$$

$$\tilde{W}_i = -\left(\frac{m_{i0}}{m_i \gamma_i}\right)^{1/2} W_i\left(t_i, a_i, e_i, \pi_i, i_i, \Omega_i, \lambda_i\right). \qquad (2.64)$$

Для получения явного вида правой части уравнений (2.58)-(2.63) в оскулирующих элементах необходимо выразить возмущающие функции (2.64) через оскулирующие элементы (2.56).

2.4 Аналитические разложения возмущающей функции по оскулирующим элементам апериодического движения по квазиконическому сечению

Для явного написания уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах, необходимо выразить силовую функцию в правой части этих уравнений через оскулирующие элементы апериодического движения по квазиконическому сечению. Это можно только в виде рядов [4, 27].

В разложении силовой функции в ряд основная трудность заключается в разложении главной части возмущающих функций $\tilde{U}_{1гл}$, $\tilde{U}_{2гл}$. Из $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ следует:

$$r_{12}^2 = r_2^2 - 2\vec{r}_1\vec{r}_2 + r_1^2 = r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\psi + r_1^2 \qquad (2.65)$$

где ψ - угол между двумя радиус-векторами.

Введем обозначения:

$$\Delta^2 = r_{12}^2 = r_{21}^2 = r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\psi + r_1^2 = \left[\Delta_0^2\right] + \left[-2r_1 r_2 \tilde{\Psi}\right] \qquad (2.66)$$

$$\Delta_0^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\left(v_1 - v_2\right), \qquad (2.67)$$

$$\tilde{\Psi} = \cos\psi - \cos\left(v_1 - v_2\right), \qquad (2.68)$$

где $v_j = \theta_j + \pi_j$ - истинные долготы, $\pi_j = \Omega_j + \omega_j$, $j = 1,2$ - долгота перицентра планет.

Перепишем (2.66) в виде

$$\Delta^2 = \Delta_0^2 + \left(-2r_1 r_2 \tilde{\Psi}\right) = \Delta_0^2\left[1 - \frac{2r_1 r_2}{\Delta_0^2}\tilde{\Psi}\right] \qquad (2.69)$$

Из равенства (2.69) следует:

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2r_1r_2}{\Delta_0^2}\tilde{\Psi}}}. \qquad (2.70)$$

Используя известную формулу

$$(1-x)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+..... \qquad (2.71)$$

где $0<x<1$, разложим в ряд второй множитель в правой части формулы (2.70). В результате получим:

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta_0}+r_1r_2\tilde{\Psi}\frac{1}{\Delta_0^3}+\frac{3}{2}\left(r_1r_2\tilde{\Psi}\right)^2\frac{1}{\Delta_0^5}+\frac{5}{2}\left(r_1r_2\tilde{\Psi}\right)^3\frac{1}{\Delta_0^7}+... \qquad (2.72)$$

Формула (2.72) может быть записана в общем виде:

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\Delta_0}+r_1r_2\tilde{\Psi}\frac{1}{\Delta_0^3}+\frac{3}{2}\left(r_1r_2\tilde{\Psi}\right)^2\frac{1}{\Delta_0^5}+\frac{5}{2}\left(r_1r_2\tilde{\Psi}\right)^3\frac{1}{\Delta_0^7}+...= \qquad (2.73)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(2i)!}{(i!)^2}\cdot\left(\frac{1}{2}r_1r_2\tilde{\Psi}\right)^i\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}$$

Чтобы прописать правую часть уравнения (2.73) через орбитальные элементы двух планет, необходимо выразить величины r_1, r_2, $\tilde{\Psi}$ и $\Delta_0^{-(2i+1)}$ через орбитальные элементы.

Как было отмечено выше, выражения r_1, r_2 через орбитальные элементы величин достаточно простые и известные [27]

$$r_1=\frac{\gamma_1a_1\rho_1}{a_1}=\gamma_1a_1\left(\frac{\rho_1}{a_1}\right)=\gamma_1a_1\left(1+\frac{e_1^2}{2}+e_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{k+1}(ke_1)-J_{k-1}(ke_1)}{k}\cos kM_1\right) \qquad (2.74)$$

$$r_2=\frac{\gamma_2a_2\rho_2}{a_2}=\gamma_2a_2\left(\frac{\rho_2}{a_2}\right)=\gamma_2a_2\left(1+\frac{e_2^2}{2}+e_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{k+1}(ke_2)-J_{k-1}(ke_2)}{k}\cos kM_2\right)$$

где $J_k(ke)$ - является функциями Бесселя [30].

Разложение величины $\tilde{\Psi}=\cos\psi-\cos(v_1-v_2)$

Разложение величины $\cos\psi$

Для первой слагаемой уравнения (2.68), согласно определению скалярного произведения, имеем:

$$\cos\psi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2} = \frac{x_1}{r_1}\cdot\frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1}\cdot\frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1}\cdot\frac{z_2}{r_2} = \\ = \left(\frac{x_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{\gamma_2\rho_2}\right) + \left(\frac{y_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{y_2}{\gamma_2\rho_2}\right) + \left(\frac{z_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{z_2}{\gamma_2\rho_2}\right) \tag{2.75}$$

Соответственно, из формулы (1.14) следует, что координаты двух планет могут быть записаны в виде:

$$\left(\frac{x_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{\gamma_2\rho_2}\right) = \left[\{\cos u_1\}\cos\Omega_1 - \{\sin u_1\}\sin\Omega_1\cos i_1\right]\cdot\left[\{\cos u_2\}\cos\Omega_2 - \{\sin u_2\}\sin\Omega_2\cos i_2\right] \\ \left(\frac{y_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{y_2}{\gamma_2\rho_2}\right) = \left[\{\cos u_1\}\sin\Omega_1 + \{\sin u_1\}\cos\Omega_1\cos i_1\right]\cdot\left[\{\cos u_2\}\sin\Omega_2 + \{\sin u_2\}\cos\Omega_2\cos i_2\right] \\ \left(\frac{z_1}{\gamma_1\rho_1}\right)\cdot\left(\frac{z_2}{\gamma_2\rho_2}\right) = \left[\{\sin u_1\}\sin i_1\right]\cdot\left[\{\sin u_2\}\sin i_2\right] \tag{2.76}$$

$$\cos\psi = \Big[\big(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1 - \{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\big)\cos\Omega_1 - \big(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1 + \{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\big)\sin\Omega_1\cos i_1\Big]\times \\ \Big[\big(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2 - \{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\big)\cos\Omega_2 - \big(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2 + \{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\big)\sin\Omega_2\cos i_2\Big] + \\ + \Big[\big(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1 - \{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\big)\sin\Omega_1 + \big(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1 + \{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\big)\cos\Omega_1\cos i_1\Big]\times \\ \times\Big[\big(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2 - \{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\big)\sin\Omega_2 + \big(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2 + \{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\big)\cos\Omega_2\cos i_2\Big] + \\ + \Big[\big(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1 + \{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\big)\sin i_1\Big]\cdot\Big[\big(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2 + \{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\big)\sin i_2\Big] \tag{2.77}$$

$$\{\cos u_j\} = \cos\left(\theta_j + \omega_j\right) = \{\cos\theta_j\}\cos\omega_j - \{\sin\theta_j\}\sin\omega_j \\ \{\sin u_j\} = \sin\left(\theta_j + \omega_j\right) = \{\sin\theta_j\}\cos\omega_j + \{\cos\theta_j\}\sin\omega_j \tag{2.78}$$

$$\{\cos\theta_j\} = -e + \frac{2\left(1-e^2\right)}{e}\sum_{k=1}^{\infty}J_k\left(ke\right)\cos kM \tag{2.79}$$

$$\{\sin\theta_j\} = \sqrt{1-e^2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[J_{k-1}\left(ke\right) - J_{k+1}\left(ke\right)\Big]\sin kM, \tag{2.80}$$

$$\sin\theta_j \approx \sin M_j + e_j \sin 2M_j + e_j^2\left(\frac{9}{8}\sin 3M_j - \frac{7}{8}\sin M_j\right),$$
$$\cos\theta_j \approx \cos M_j + e_j\left(\cos 2M_j - 1\right) + e_j^2\left(\frac{9}{8}\cos 3M_j - \frac{9}{8}\cos M_j\right). \quad (2.81)$$

Выразим среднюю аномалию M_j в формулах (2.81) через среднюю долготу λ_j

$$M_j = \lambda_j - \left(\Omega_j + \omega_j\right) = \lambda_j - \pi_j, \quad \pi_j = \Omega_j + \omega_j, \quad j = 1,2. \quad (2.82)$$

Используя уравнения (2.75), (2.76), (2.81), (2.82) определяем выражение $\cos\psi$ через орбитальные элементы. Выражения в фигурных скобках разлагаются в бесконечный ряд по степеням эксцентриситета, которые известны [30].

Разложение величины $\cos\left(v_1 - v_2\right)$

В уравнении (2.68) разлагаем в ряд второе слагаемое:

$$\cos\left(v_1 - v_2\right) = \cos v_1 \cos v_1 + \sin v_1 \sin v_2 = \\ = \cos v_1 \cos v_2 + \sin v_1 \sin v_2, \quad (2.83)$$

$$\cos v_j = \cos\left(u_j + \Omega_j\right) = \left\{\cos u_j\right\}\cos\Omega_j - \left\{\sin u_j\right\}\sin\Omega_j, \quad j = 1,2 \quad (2.84)$$
$$\sin v_j = \sin\left(u_j + \Omega_j\right) = \left\{\sin u_j\right\}\cos\Omega_j + \left\{\cos u_j\right\}\sin\Omega_j,$$

$$\begin{aligned}
&\cos(v_1 - v_2) = \cos(u_1 + \Omega_1)\cos(u_2 + \Omega_2) + \sin(u_1 + \Omega_1)\sin(u_2 + \Omega_2) = \\
&= \left[\{\cos u_1\}\cos\Omega_1 - \{\sin u_1\}\sin\Omega_1\right]\left[\{\cos u_2\}\cos\Omega_2 - \{\sin u_2\}\sin\Omega_2\right] + \\
&\left[\{\sin u_1\}\cos\Omega_1 + \{\cos u_1\}\sin\Omega_1\right]\left[\{\sin u_2\}\cos\Omega_2 + \{\cos u_2\}\sin\Omega_2\right] = \\
&= \left[\left(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1 - \{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\right)\cos\Omega_1 - \left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1 + \{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin\Omega_1\right]\times \\
&\times\left[\left(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2 - \{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\right)\cos\Omega_2 - \left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2 + \{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin\Omega_2\right] + \\
&+\left[\left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1 + \{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\cos\Omega_1 + \left(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1 - \{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin\Omega_1\right]\times \\
&\times\left[\left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2 + \{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\cos\Omega_2 + \left(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2 - \{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin\Omega_2\right]
\end{aligned} \quad (2.85)$$

Выражения в фигурных скобках в формуле (2.85) согласно формулам (2.79), (2.80) выражаются через орбитальные элементы в виде бесконечного ряда.

Использование формул (2.81) и (2.82) позволит получить аналитическое выражение $\tilde{\Psi}$ через орбитальные элементы двух планет [30, 27].

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Psi} = \cos\psi - \cos(v_1 - v_2) = \\
&= \left[\left(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1 - \{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\right)\cos\Omega_1 - \left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1 + \{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin\Omega_1\cos i_1\right]\times \\
&\left[\left(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2 - \{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\right)\cos\Omega_2 - \left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2 + \{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin\Omega_2\cos i_2\right] + \\
&+\left[\left(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1 - \{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin\Omega_1 + \left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1 + \{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\cos\Omega_1\cos i_1\right]\times \\
&\times\left[\left(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2 - \{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin\Omega_2 + \left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2 + \{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\cos\Omega_2\cos i_2\right] + \\
&+\left[\left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1 + \{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin i_1\right]\cdot\left[\left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2 + \{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin i_2\right] - \\
&-\Big(\Big[\left(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1 - \{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\right)\cos\Omega_1 - \left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1 + \{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin\Omega_1\Big]\times \\
&\times\left[\left(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2 - \{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\right)\cos\Omega_2 - \left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2 + \{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin\Omega_2\right] + \\
&+\left[\left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1 + \{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\cos\Omega_1 + \left(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1 - \{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin\Omega_1\right]\times \\
&\times\left[\left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2 + \{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\cos\Omega_2 + \left(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2 - \{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin\Omega_2\right]\Big)
\end{aligned}
\qquad (2.86)
$$

Разложение в ряд величины $\dfrac{1}{\Delta_0^{2i+1}}$.

Уравнение (2.67) перепишем виде

$$
\begin{aligned}
&\Delta_0^2 = a_1^2\gamma_1^2\left(\frac{\rho_1}{a_1}\right)^2 + a_2^2\gamma_2^2\left(\frac{\rho_2}{a_2}\right)^2 - 2a_1\gamma_1a_2\gamma_2\left(\frac{\rho_1}{a_1}\right)\left(\frac{\rho_2}{a_2}\right)\cos(v_1 - v_2) = a_1^2\gamma_1^2\left(1 + R_1\right)^2 + \\
&+a_2^2\gamma_2^2\left(1 + R_2\right)^2 - 2a_1\gamma_1a_2\gamma_2\left(1 + R_1\right)\left(1 + R_2\right)\cos(v_1 - v_2) = a_1^2\gamma_1^2 + a_2^2\gamma_2^2 - 2a_1\gamma_1a_2\gamma_2\cos(v_1 - v_2) + \\
&+a_1^2\gamma_1^2\left(2R_1 + R_1^2\right) + a_2^2\gamma_2^2\left(2R_2 + R_2^2\right) - 2a_1\gamma_1a_2\gamma_2\left(R_2 + R_1 + R_1R_2\right)\cos(v_1 - v_2)
\end{aligned}
\qquad (2.87)
$$

где R_1, R_2 - части разложения модулей радиус-векторов, зависящие от первой и выше степени эксцентриситетов.

Введем обозначения:

$$
\rho_0^2 = \left[\gamma_1^2a_1^2 + \gamma_2^2a_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2a_1a_2\cos\left(v_1 - v_2\right)\right], \qquad (2.88)
$$

$$
\begin{aligned}
R_{12} &= a_1^2\gamma_1^2\left(2R_1 + R_1^2\right) + a_2^2\gamma_2^2\left(2R_2 + R_2^2\right) - \\
&-2a_1\gamma_1a_2\gamma_2\left(R_2 + R_1 + R_1R_2\right)\cos\left(v_1 - v_2\right),
\end{aligned}
$$

Тогда из формулы (2.87) следует:

$$\Delta_0^2 = \rho_0^2 + R_{12}. \tag{2.89}$$

Поэтому можно написать

$$\frac{1}{\Delta_0} = \frac{1}{\rho_0}\left(1 + \frac{R_{12}}{\rho_0^2}\right)^{-1/2} \tag{2.90}$$

$$\frac{1}{\rho_0} = \left[\gamma_1^2 a_1^2 + \gamma_2^2 a_2^2 - 2\gamma_1\gamma_2 a_1 a_2 \cos\left(v_1 - v_2\right)\right]^{-1/2} = \\ = \frac{1}{\gamma_2 a_2}\left[1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\left(v_1 - v_2\right)\right]^{-1/2}. \tag{2.91}$$

Перепишем формулу (2.90) в виде

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}}\left(1 + \frac{R_{12}}{\rho_0^2}\right)^{-(i+1/2)} \tag{2.92}$$

Разлагая правую часть формулы (2.92) в ряд Тейлора по ρ_0, получим

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + \left(r_1 - \gamma_1 a_1\right)\frac{\partial}{\partial\left(\gamma_1 a_1\right)}\left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}\right) + \left(r_2 - \gamma_2 a_2\right)\frac{\partial}{\partial\left(\gamma_2 a_2\right)}\left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}\right) + \ldots \tag{2.93}$$

Обозначим

$$\varepsilon_j = \frac{r_j}{\gamma_j a_j} - 1 \tag{2.94}$$

Из известного разложения в ряд (2.74) следует

$$\frac{r_j}{\gamma_j a_j} = \frac{\rho_j}{a_j} = 1 - e_j\cos M_j + \frac{e_j^2}{2}\left(1 - \cos 2M_j\right) + \frac{3e_j^3}{8}\left(\cos M_j - \cos 3M_j\right) + \ldots$$

Поэтому,

$$\varepsilon_j = \frac{r_j}{\gamma_j a_j} - 1 = -e_j\cos M_j + \frac{e_j^2}{2}\left(1 - \cos 2M_j\right) + \frac{3e_j^3}{8}\left(\cos M_j - \cos 3M_j\right) + \ldots \tag{2.95}$$

Следовательно, ε_1 имеет порядок $O\left(e_1\right)$, а ε_2 имеет порядок $O\left(e_2\right)$.

Пусть $D_{m,n}$ обозначает дифференциальный оператор

$$D_{m,n} = \left(\gamma_1 a_1\right)^m \left(\gamma_2 a_2\right)^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial\left(\gamma_1 a_1\right)^m \partial\left(\gamma_2 a_2\right)^n}, \tag{2.96}$$

тогда из (2.93) получим

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}=\left[1+\varepsilon_1 D_{1,0}+\varepsilon_2 D_{0,1}+\frac{1}{2!}\left(\varepsilon_1^{\,2} D_{2,0}+2\varepsilon_1\varepsilon_2 D_{1,1}+\varepsilon_2^{\,2} D_{0,2}\right)+\ldots\right]\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}. \quad (2.97)$$

Однако, из соотношения (2.91) следует:

$$\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}=\left\{\frac{1}{\gamma_2 a_2}\left[1-\alpha^2-2\alpha\cos\left(v_1-v_2\right)\right]^{-1/2}\right\}^{(2i+1)}=$$

$$=\left(\gamma_2 a_2\right)^{-(2i+1)}\left[1-\alpha^2-2\alpha\cos\left(v_1-v_2\right)\right]^{-(i+1/2)}= \quad (2.98)$$

$$=\left(\gamma_2 a_2\right)^{-(2i+1)}\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha)\cos\left[j\left(v_1-v_2\right)\right],$$

$$\frac{1}{2}b_s^{(j)}(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(j\varphi)d\varphi}{\left(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2\right)^s} \quad (2.99)$$

Величины $b_s^{(j)}(\alpha)$ согласно формуле (2.99), называются коэффициентами Лапласа, каждый из которых может быть представлен в виде равномерно сходящегося ряда по α для всех $\alpha<1$ [30, 41].

Введем обозначения:

$$A_{i,j,m,n}=D_{m,n}\left(\left(a_2\gamma_2\right)^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha)\right)=$$

$$\left(\gamma_1 a_1\right)^m\left(\gamma_2 a_2\right)^n\frac{\partial^{m+n}}{\partial\left(\gamma_1 a_1\right)^m\partial\left(\gamma_2 a_2\right)^n}\left(\left(a_2\gamma_2\right)^{-(2i+1)} b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha)\right). \quad (2.100)$$

В результате формула (2.97) имеет вид

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}=\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[A_{i,j,0,0}+\varepsilon_1 A_{i,j,1,0}+\varepsilon_2 A_{i,j,0,1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}\left(\varepsilon_1^2 A_{i,j,2,0}+2\varepsilon_1\varepsilon_2 A_{i,j,1,1}+\varepsilon_2^2 A_{i,j,0,2}\right)\right]\cos j\left(v_1-v_2\right). \quad (2.101)$$

Если обобщить это выражение, то окончательно получим

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}}=\frac{1}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{l}\binom{l}{k}\varepsilon_1^{\,k}\varepsilon_2^{\,l-k}A_{i,j,k,l-k}\right]\cos j\left(v_1-v_2\right). \quad (2.102)$$

В формуле (2.102) слагаемые выражаются через орбитальные элементы в виде бесконечного ряда.

При вычислении частных производных $A_{i,j,k,l-k}$ по $(\gamma_1 a_1)$ и $(\gamma_2 a_2)$ следует быть внимательным, поскольку $(\gamma_1 a_1)$ и $(\gamma_2 a_2)$ также неявно содержатся в коэффициентах Лапласа $b_{i+1/2}^{(j)}(\alpha)$.

В результате окончательно имеем

$$\frac{1}{\Delta} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2} r_1 r_2 \tilde{\Psi} \right)^i \times$$
$$\times \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \varepsilon_1^{\,k} \varepsilon_2^{\,l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(v_1 - v_2) \qquad (2.103)$$

Используя полученные результаты, можем написать главные и косвенные части возмущающей функции.

$$\tilde{U}_{1гл} = \frac{\gamma_2 a_2}{r_{12}} = \gamma_2 a_2 \left(\frac{1}{r_{12}} \right), \quad \tilde{U}_{2гл} = \frac{\gamma_2 a_2}{r_{21}} = \gamma_2 a_2 \left(\frac{1}{r_{21}} \right), \qquad (2.104)$$

$$\tilde{U}_{1косв} = \left(\frac{r_1}{\gamma_1 a_1} \right) \left(\frac{\gamma_2 a_2}{r_2} \right)^2 \cos\psi \,. \qquad (2.105)$$

Аналитическая формула для разложения косвенной части возмущающей функции. Согласно [30]:

$$\frac{a_1}{r_1} = \gamma_1 a_1 \left(\frac{a_1}{\rho_1} \right) = \gamma_1 a_1 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke_1) \cos kM_1 \right), \qquad (2.112)$$

$$\frac{a_2}{r_2} = \gamma_2 a_2 \left(\frac{a_2}{\rho_2} \right) = \gamma_2 a_2 \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke_2) \cos kM_2 \right), \qquad (2.113)$$

$$\left(\frac{a_1}{\rho_1} \right)^2 = \left(1 - e_1^2 \right)^{-n/2} \left[T_0(n,0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k^n T_k(n,0) \cos k\vartheta \right], \qquad (2.114)$$

$$\left(\frac{a_2}{\rho_2} \right)^2 = \left(1 - e_2^2 \right)^{-n/2} \left[T_0(n,0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k^n T_k(n,0) \cos k\vartheta \right]. \qquad (2.115)$$

Подставив (2.112)-(2.115) и (2.77) в выражения для косвенной части возмущающей функции внутреннего и внешнего объектов, получим их разложение в бесконечный ряд:

$$\tilde{U}_{1косв} = \gamma_1 a_1 \left(1+\frac{e_1^2}{2}+e_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{k+1}(ke_1)-J_{k-1}(ke_1)}{k}\cos kM_1\right)\left(\frac{\gamma_2 a_2}{r_2}\right)^2 \times \tag{2.116}$$
$$\times\left[\left(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1-\{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\right)\cos\Omega_1-\left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1+\{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin\Omega_1\cos i_1\right]\times$$
$$\left[\left(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2-\{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\right)\cos\Omega_2-\left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2+\{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin\Omega_2\cos i_2\right]+$$
$$+\left[\left(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1-\{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin\Omega_1+\left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1+\{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\cos\Omega_1\cos i_1\right]\times$$
$$\times\left[\left(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2-\{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin\Omega_2+\left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2+\{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\cos\Omega_2\cos i_2\right]+$$
$$+\left[\left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1+\{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin i_1\right]\cdot\left[\left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2+\{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin i_2\right]$$

$$\tilde{U}_{2косв} = \gamma_2 a_2 \left(1+\frac{e_2^2}{2}+e_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{k+1}(ke_2)-J_{k-1}(ke_2)}{k}\cos kM_2\right)\left(\frac{\gamma_1 a_1}{r_1}\right)^2 \times \tag{2.117}$$
$$\times\left[\left(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1-\{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\right)\cos\Omega_1-\left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1+\{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin\Omega_1\cos i_1\right]\times$$
$$\left[\left(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2-\{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\right)\cos\Omega_2-\left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2+\{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin\Omega_2\cos i_2\right]+$$
$$+\left[\left(\{\cos\theta_1\}\cos\omega_1-\{\sin\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin\Omega_1+\left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1+\{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\cos\Omega_1\cos i_1\right]\times$$
$$\times\left[\left(\{\cos\theta_2\}\cos\omega_2-\{\sin\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin\Omega_2+\left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2+\{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\cos\Omega_2\cos i_2\right]+$$
$$+\left[\left(\{\sin\theta_1\}\cos\omega_1+\{\cos\theta_1\}\sin\omega_1\right)\sin i_1\right]\cdot\left[\left(\{\sin\theta_2\}\cos\omega_2+\{\cos\theta_2\}\sin\omega_2\right)\sin i_2\right]$$

Выше уже отмечалось, что $\cos\{\theta\}$, $\sin\{\theta\}$ в фигурных скобках разлагается в бесконечный ряд через M_j. В формулах (2.116), (2.117) выражаем среднюю аномалию M_j согласно формуле (2.82).

2.5 Уравнения вековых возмущений двухпланетной задачи трех тел с переменнными массами

Уравнения возмущенного движения двух планет в относительной системе координат

Уравнения возмущенного движения двух планет в относительной системе координат напишем в виде [27, 42, 25]:

$$\ddot{\vec{r}}_1 + f\left(m_0+m_1\right)\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1}\vec{r}_1 = grad_{\vec{r}_1}\tilde{W}_1, \tag{2.118}$$

$$\tilde{W}_1 = \tilde{U}_1 + F_{1x}x_1 + F_{1y}y_1 + F_{1z}z_1 - \frac{\ddot{\gamma}_1}{2\gamma_1}r_1^2, \quad j = 1,2, \quad (2.119)$$

$$\tilde{U}_1 = \mu_2\left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_2^3}\right), \quad (2.120)$$

$$r_{21} = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| = r_{12} \quad \gamma_1 = \frac{m_0(t_0) + m_1(t_0)}{m_0(t) + m_1(t)} = \gamma_1(t), \quad \mu_1 = fm_1 \quad (2.121)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 + f\left(m_0 + m_2\right)\frac{\vec{r}_2}{r_2^3} - \frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2}\vec{r}_2 = grad_{\vec{r}_2}\tilde{W}_2, \quad (2.122)$$

$$\tilde{W}_2 = \tilde{U}_2 + F_{2x}x_2 + F_{2y}y_2 + F_{2z}z_2 - \frac{\ddot{\gamma}_2}{2\gamma_2}r_2^2 \quad (2.123)$$

$$\tilde{U}_2 = \mu_1\left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{r_1^3}\right), \quad (2.124)$$

$$r_{21} = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| = r_{12} \quad \gamma_2 = \frac{m_0(t_0) + m_2(t_0)}{m_0(t) + m_2(t)} = \gamma_2(t), \quad \mu_2 = fm_2, \quad (2.125)$$

где $\tilde{U}_j$ – силовые функции ньютоновского взаимодействия тел, $\vec{F}_j = \vec{F}_j\left(F_{jx}(t), F_{jy}(t), F_{jz}(t)\right) = \vec{F}_j(t)$ – реактивные силы, которые считаются известными функциями времени.

Уравнения возмущенного движения двухпланетной задачи трех тел при наличии реактивных сил

Выразим все слагаемые возмущающих функций $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_2$ через орбитальные элементы невозмущенного движения.

Из них наиболее сложным является разложение в ряд главной части силовой функции ньютоновских взаимодействия тел $\tilde{U}_1$, $\tilde{U}_2$. Следуя по классической схеме [7], целесообразно выделить главную и косвенную часть возмущающих функций:

$$\tilde{U}_1 = \frac{\mu_2}{\gamma_2 a_2}U_{1гл} - \frac{\mu_2}{\gamma_2 a_2}\alpha U_{1косв}, \quad (2.126)$$

$$\tilde{U}_{1гл}=\frac{\gamma_2 a_2}{r_{12}}=\gamma_2 a_2\left(\frac{1}{r_{12}}\right),\qquad \tilde{U}_{1косв}=\left(\frac{r_1}{\gamma_1 a_1}\right)\left(\frac{\gamma_2 a_2}{r_2}\right)^2\cos\psi, \tag{2.127}$$

$$\alpha=\alpha(t)=\frac{\gamma_1 a_1}{\gamma_2 a_2}<1, \tag{2.128}$$

$$\tilde{U}_2=\frac{\mu_1}{\gamma_2 a_2}U_{2гл}-\frac{\mu_1}{\gamma_2 a_2}\frac{1}{\alpha^2}U_{2косв}, \tag{2.129}$$

$$\tilde{U}_{2гл}=\frac{\gamma_2 a_2}{r_{21}}=\gamma_2 a_2\left(\frac{1}{r_{21}}\right),\quad \tilde{U}_{2косв}=\left(\frac{r_2}{\gamma_2 a_2}\right)\left(\frac{\gamma_1 a_1}{r_1}\right)^2\cos\psi. \tag{2.130}$$

Выражения в правых частях этих уравнений разлагаются в ряд по оскулирующим элементам апериодического движения по квазиоконическому сечению.

Разложения возмущающих функций, кроме $\tilde{U}_{jгл}$, не представляют особой сложности, так как аналитические выражения координат и квадрата модуля радиуса-вектора простые [4, 27]

$$\begin{aligned} x_j&=\gamma_j\rho_j\left[\cos u_j\cdot\cos\Omega_j-\sin u_j\cdot\sin\Omega_j\cdot\cos i_j\right],\\ y_j&=\gamma_j\rho_j\left[\cos u_j\cdot\sin\Omega_j+\sin u_j\cdot\cos\Omega_j\cdot\cos i_j\right],\\ z_j&=\gamma_j\rho_j\left[\sin u_j\cdot\sin i_j\right],\quad u_j=\omega_j+\theta_j, \end{aligned} \tag{2.131}$$

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\vartheta},\quad p=a\left(1-e^2\right) \tag{2.132}$$

p - параметр орбит

$$r_j^{\,2}=x_j^{\,2}+y_j^{\,2}+z_j^{\,2}=\gamma_j^{\,2}\rho_j^{\,2}, \tag{2.133}$$

где, u_j - аргумент широты, ω_j - аргумент перицентра, θ_j - истинная аномалия, i_j - наклонение орбиты, Ω_j - долгота восходящего узла.

Разложения в ряд правой части (2.131), (2.133) известны [27]. Также известны разложения величин:

$$\left(r_j/\gamma_j a_j\right)=\left(\rho_j/a_j\right),\qquad \left(\gamma_j a_j/r_j\right)^2=\left(a_j/\rho_j\right)^2 \tag{2.134}$$

в косвенной части возмущающей функции (2.127), (2.130).

Дифференциальные уравнения, определяющие вековые возмущения орбитальных элементов, получаются, если возмущающие функции $\tilde{W}_j$ в планетарных уравнениях Лагранжа (2.58)-(2.63) заменяются их величинами, усредненными по средним аномалиям M_j тел P_1, P_2 [42, 43].

Соотношение $M_j = \lambda_j - \omega_j - \Omega_j$, позволяет выполнить схему усреднения по средним долготам λ_j.

В третьем порядке по эксцентриситетам e_j и наклонениям s_j возмущающие функции W_j являются полиномами с коэффициентами, являющимися периодическими функциями средних долгот λ_j.

Чтобы выполнить усреднение, необходимо заменить рациональные выражения $1/\rho_0, 1/\rho_0^3, 1/\rho_0^5$ в (2.98) соответствующими рядами Фурье, которые можно записать в виде [44].

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_0} &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \cos\big(k(\lambda_1 - \lambda_2)\big), \\
\frac{\gamma_1\gamma_2 a_1 a_2}{\rho_0^3} &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k \cos\big(k(\lambda_1 - \lambda_2)\big), \\
\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2 a_1^2 a_2^2}{\rho_0^5} &= \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cos\big(k(\lambda_1 - \lambda_2)\big),
\end{aligned} \qquad (2.135)$$

где коэффициенты A_k, B_k, C_k известны как коэффициенты Лапласа и удовлетворяют следующим выражениям

$$A_k = \frac{2k-2}{2k-1}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)A_{k-1} - \frac{2k-3}{2k-1}A_{k-2}, \quad k \geq 2,$$

$$B_k = \frac{(2k+1)\alpha\left(1+\alpha^2\right)}{\left(1-\alpha^2\right)^2}A_k - \frac{2\alpha^2(2k+1)}{\left(1-\alpha^2\right)^2}A_{k+1}, \quad k \geq 0, \qquad (2.136)$$

$$C_i = \frac{(2k+3)\alpha\left(1+\alpha^2\right)}{3\left(1-\alpha^2\right)^2}B_k - \frac{2\alpha^2(2k-1)}{3\left(1-\alpha^2\right)^2}B_{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Все коэффициенты Лапласа могут быть выражены через коэффициенты A_0 и A_1:

$$A_0 = \frac{2}{\pi a_2 \gamma_2}\int_0^{\pi}\frac{d\lambda}{\left(1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda\right)^{1/2}} = \frac{4}{\pi a_2\gamma_2(1+\alpha)}K\left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}\right),$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi a_2 \gamma_2}\int_0^{\pi}\frac{\cos\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda\right)^{1/2}} = \qquad (2.137)$$

$$= \frac{2}{\pi a_2\gamma_2\alpha(1+\alpha)}\left((1+\alpha)^2 K\left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}\right) - (1+\alpha)^2 E\left(\frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}\right)\right),$$

где функции $K\left(4\alpha/(1+\alpha)^2\right)$ и $E\left(4\alpha/(1+\alpha)^2\right)$ - полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно и параметр $\alpha = \dfrac{\gamma_1 a_1}{\gamma_2 a_2} < 1$ [44, 45].

Предполагается, что траектория тела P_1 находится внутри траектории тела P_2, и условие $r_1 < r_2$ выполнятся в любой момент времени.

Усреднение возмущающих функции W_j выполняется по формуле

$$W_j = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} W_j d\lambda_1 d\lambda_2 . \qquad (2.138)$$

В результате получаем вековые части возмущающей функции для первого и второго тела в виде:

$$W_1^{(\sec)} = \frac{Gm_2}{2}\Big(A_0 - B_1\left(s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2\cos\left(\Omega_1 - \Omega_2\right)\right) -$$
$$-\frac{1}{2}e_1^2\left(\frac{3}{2}B_0\alpha + B_1 - \frac{3C_0}{4}\left(5+2\alpha^2\right) + 3\alpha C_1 + \frac{9}{4}C_2\right) -$$
$$-\frac{1}{2}e_2^2\left(\frac{3}{2\alpha}B_0 + B_1 - \frac{3C_0}{4}\left(5+\frac{2}{\alpha^2}\right) + \frac{3}{\alpha}C_1 + \frac{9}{4}C_2\right) +$$
$$+\frac{e_1 e_2}{4}\left(9B_0 + B_2 + \frac{21}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_3 - 9C_0\frac{1+\alpha^2}{\alpha} + 3C_2\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\right)\times$$
$$\times\cos\left(\pi_1 - \pi_2\right)\Big) + F_1^{(\sec)} + P_1^{(\sec)},$$

$$W_2^{(\sec)} = \frac{Gm_1}{2}\Big(A_0 - B_1\left(s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2\cos\left(\Omega_1 - \Omega_2\right)\right) -$$
$$-\frac{1}{2}e_1^2\left(\frac{3}{2}B_0\alpha + B_1 - \frac{3C_0}{4}\left(5+2\alpha^2\right) + 3\alpha C_1 + \frac{9}{4}C_2\right) -$$
$$-\frac{1}{2}e_2^2\left(\frac{3}{2\alpha}B_0 + B_1 - \frac{3C_0}{4}\left(5+\frac{2}{\alpha^2}\right) + \frac{3}{\alpha}C_1 + \frac{9}{4}C_2\right) +$$
$$+\frac{e_1 e_2}{4}\left(9B_0 + B_2 + \frac{21}{2}C_1 + \frac{3}{2}C_3 - 9C_0\frac{1+\alpha^2}{\alpha} + 3C_2\frac{1+\alpha^2}{\alpha}\right)\times \qquad (2.139)$$
$$\times\cos\left(\pi_1 - \pi_2\right)\Big) + F_2^{(\sec)} + P_2^{(\sec)}$$

где $\alpha = \dfrac{\gamma_1 a_1}{\gamma_2 a_2}$, $\omega_1 + \Omega_1 = \pi_1$, $\omega_2 + \Omega_2 = \pi_2$.

$$P_1^{(\sec)} = -\frac{\ddot{\gamma}_1}{2}\gamma_1 a_1^2\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right), \quad P_2^{(\sec)} = -\frac{\ddot{\gamma}_2}{2}\gamma_2 a_2^2\left(1+\frac{3}{2}e_2^2\right), \qquad (2.140)$$

$$
\begin{aligned}
&F_1^{(\sec)} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} a_1\gamma_1 V_{1r}\left(1+\frac{1}{2}e_1^2\right)+\frac{\dot{m}_0}{m_0}a_1\gamma_1 e_1\times\\
&\times\left(V_{0x}\cos\left(\omega_1+\Omega_1\right)+V_{0y}\sin\left(\omega_1+\Omega_1\right)+2s_1V_{0z}\sin\omega_1-\right.\\
&\left.-2s_1^2\sin\omega_1\left(V_{0y}cos\Omega_1-V_{0x}sin\Omega_1\right)\right),\\
&F_2^{(\sec)} = \vec{F}_2\,\vec{r}_2 = \frac{\dot{m}_2}{m_2}a_2\gamma_2 V_{2r}\left(1+\frac{1}{2}e_2^2\right)+\frac{\dot{m}_0}{m_0}a_2\gamma_2 e_2\times\\
&\times\left(V_{0x}\cos\left(\omega_2+\Omega_2\right)+V_{0y}\sin\left(\omega_2+\Omega_2\right)+2s_2V_{0z}\sin\omega_2-\right.\\
&\left.-2s_2^2\sin\omega_2\left(V_{0y}cos\Omega_2-V_{0x}sin\Omega_2\right)\right)
\end{aligned}
\qquad (2.141)
$$

Коэффициенты Лапласа имеют множитель $\dfrac{1}{a_2\gamma_2}$, который можно вынести, что позволяет переписать возмущающие функции $\tilde{W}_1^{(\sec)}, \tilde{W}_2^{(\sec)}$ в виде:

$$
\begin{aligned}
&W_1^{(\sec)} = \frac{Gm_2}{2a_2\gamma_2}\left(A_0-\frac{B_1}{4}\left(i_1^2+i_2^2-2i_1i_2\cos\left(\Omega_1-\Omega_2\right)\right)+\right.\\
&\left.+e_1^2\Pi_{11}+e_2^2\Pi_{22}+2e_1e_2\Pi_{12}\cos\left(\pi_1-\pi_2\right)\right)-\\
&-\frac{1}{2}\gamma_1\ddot{\gamma}_1 a_1^2\left(1+\frac{3}{2}e_1^2\right)+P_1^{(\sec)},\\
&\tilde{W}_2^{(\sec)} = \frac{Gm_1}{2a_2\gamma_2}\left(A_0-\frac{B_1}{4}\left(i_1^2+i_2^2-2i_1i_2\cos\left(\Omega_1-\Omega_2\right)\right)\right.\\
&\left.+e_1^2\Pi_{11}+e_2^2\Pi_{22}+2e_1e_2\Pi_{12}\cos\left(\pi_1-\pi_2\right)\right)-\\
&-\frac{1}{2}\gamma_2\ddot{\gamma}_2 a_2^2\left(1+\frac{3}{2}e_2^2\right)+P_2^{(\sec)}
\end{aligned}
\qquad (2.142)
$$

где

$$\Pi_{12}=\frac{9}{8}B_0+\frac{1}{8}B_2+\frac{21}{16}C_1+\frac{3}{16}C_3-9C_0\frac{1+\alpha^2}{8\alpha}+3C_2\frac{1+\alpha^2}{8\alpha},$$
$$\Pi_{11}=-\frac{3}{4}B_0\alpha-\frac{1}{2}B_1+\frac{3C_0}{8}\left(5+2\alpha^2\right)-\frac{3}{2}\alpha C_1-\frac{9}{8}C_2, \qquad (2.143)$$
$$\Pi_{22}=-\frac{3}{4\alpha}B_0-\frac{1}{2}B_1+\frac{3C_0}{8}\left(5+\frac{2}{\alpha^2}\right)-\frac{3}{2\alpha}C_1-\frac{9}{8}C_2.$$

Заменим $s_j=i_j/2$ и получим реактивные силы в виде:

$$F_1^{(\sec)}=\frac{\dot{m}_1}{m_1}a_1\gamma_1V_{1r}\left(1+\frac{1}{2}e_1^2\right)+\frac{\dot{m}_0}{m_0}a_1\gamma_1e_1\times$$
$$\times\left(V_{0x}\cos\left(\omega_1+\Omega_1\right)+V_{0y}\sin\left(\omega_1+\Omega_1\right)+i_1V_{0z}\sin\left(\omega_1\right)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}i_1^2\sin\left(\omega_1\right)\left(V_{0y}cos\Omega_1-V_{0x}sin\Omega_1\right)\right), \qquad (2.144)$$
$$F_2^{(\sec)}=\frac{\dot{m}_2}{m_2}a_2\gamma_2V_{2r}\left(1+\frac{1}{2}e_2^2\right)+\frac{\dot{m}_0}{m_0}a_2\gamma_2e_2\times$$
$$(V_{0x}\cos\left(\omega_2+\Omega_2\right)+V_{0y}\sin\left(\omega_2+\Omega_2\right)+$$
$$\left.+i_2V_{0z}\sin\left(\omega_2\right)-\frac{1}{2}i_2^2\sin\left(\omega_2\right)\left(V_{0y}cos\Omega_2-V_{0x}sin\Omega_2\right)\right)$$

где $V_{1r},V_{2r},V_{0x},V_{0y},V_{0z}$ считаются заданными функциями времени, мы будем считать их постоянными.

Усредненные уравнения Лагранжа имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\frac{de_j}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e_j^2}}{n_j a_j^2 e_j}\frac{\partial W_j^{(\sec)}}{\partial \pi_1}, \\
\frac{di_j}{dt} &= -\frac{1}{n_j a_j^2 \sqrt{1-e_j^2}\sin i_j}\frac{\partial W_j^{(\sec)}}{\partial \Omega_1} - \frac{tg\left(i_j/2\right)}{n_j a_j^2 \sqrt{1-e_j^2}}\frac{\partial W_j^{(\sec)}}{\partial \pi_1}, \\
\frac{d\pi_j}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e_j^2}}{n_j a_j^2 e_j}\frac{\partial W_j^{(\sec)}}{\partial e_1} + \frac{tg\left(i_j/2\right)}{n_j a_j^2 \sqrt{1-e_j^2}}\frac{\partial W_j^{(\sec)}}{\partial i_1}, \\
\frac{d\Omega_j}{dt} &= \frac{1}{n_j a_j^2 \sqrt{1-e_j^2}\sin i_j}\frac{\partial W_j^{(\sec)}}{\partial i_1}
\end{aligned}
\qquad (2.145)
$$

где

$$
n_j = \sqrt{K_j}\,/\,a_j^{3/2} = const, \quad j = 1,2.
$$

$$
K_1 = G\left(m_{00} + m_{10}\right), \quad K_2 = G\left(m_{00} + m_{20}\right),
$$

Так как усредненные возмущающие функции $\tilde{W}_j^{(\sec)}$ не зависят от координат λ_j, то соответствующая большая полуось $a_j = const$. Производные в правых частях планетарных уравнений Лагранжа определяются как (для малых эксцентриситетов и наклонений мы заменяем в уравнениях Лапласа $\sqrt{1-e_j^2} = 1$, $\sin i_j = i_j$, $\cos i_j = 1$, сохраняя в разложениях члены до третьего порядка включительно)

$$\frac{\partial W_1^{(\sec)}}{\partial \pi_1} = -\frac{Gm_2}{a_2\gamma_2} e_1 e_2 \sin(\pi_1 - \pi_2)\Pi_{12} + \frac{\dot{m}_0}{m_0} a_1\gamma_1 e_1(-V_{0x}\sin(\pi_1) +$$
$$+V_{0y}\cos(\pi_1) + i_1 V_{0z}\cos(\pi_1 - \Omega_1) -$$
$$-\frac{1}{2} i_1^2 \cos(\pi_1 - \Omega_1)\left(V_{0y} cos\Omega_1 - V_{0x} sin\Omega_1\right)\Big),$$
$$\frac{\partial W_1^{(\sec)}}{\partial \Omega_1} = -\frac{Gm_2}{2a_2\gamma_2}\frac{B_1}{2} i_1 i_2 \sin(\Omega_1 - \Omega_2) + \frac{\dot{m}_0}{m_0} a_1\gamma_1 e_1\left(-i_1 V_{0z}\cos(\pi_1 - \Omega_1) +\right.$$
$$\frac{1}{2} i_1^2 \cos(\pi_1 - \Omega_1)\left(V_{0y} cos\Omega_1 - V_{0x} sin\Omega_1\right) +$$
$$+\frac{1}{2} i_1^2 \sin(\pi_1 - \Omega_1)\left(V_{0y}\sin\Omega_1 + V_{0x} cos\Omega_1\right)\Big),$$
$$\frac{\partial W_1^{(\sec)}}{\partial i_1} = -\frac{Gm_2}{2a_2\gamma_2}\frac{B_1}{2}\left(i_1 - i_2\cos(\Omega_1 - \Omega_2)\right) + \frac{\dot{m}_0}{m_0} a_1\gamma_1 e_1 \times$$
$$\times\left(V_{0z}\sin(\pi_1 - \Omega_1) - i_1\sin(\pi_1 - \Omega_1)\left(V_{0y} cos\Omega_1 - V_{0x} sin\Omega_1\right)\right),$$
$$\frac{\partial W_1^{(\sec)}}{\partial e_1} = \frac{Gm_2}{a_2\gamma_2}\left(e_1\Pi_{11} + e_2\Pi_{12}\cos(\pi_1 - \pi_2)\right) -$$
$$-\frac{3}{2}\gamma_1\dot{\gamma}_1 a_1^2 e_1\frac{\dot{m}_1}{m_1} a_1\gamma_1 V_{1r} e_1 + \frac{\dot{m}_0}{m_0} a_1\gamma_1(V_{0x}\cos(\pi_1) + V_{0y}\sin(\pi_1) + \qquad (2.146)$$
$$+i_1 V_{0z}\sin(\pi_1 - \Omega_1) - \frac{1}{2} i_1^2 \sin(\pi_1 - \Omega_1)\left(V_{0y} cos\Omega_1 - V_{0x} sin\Omega_1\right)\Big)$$

Для удобства вычислений введем следующие безразмерные переменные: время t будет измеряться в безразмерных единицах $t^* = n_0 t$ где $n_0 = \sqrt{Gm_{00}/a_1^3}$. Расстояния будут измеряться в единицах измерения $r^* = r/a_1$.

Для измерения массы используем начальную массу тела P_0 и вводим безразмерные массы $m^* = m/m_{00}$: $m_0 = m_{00}m_0^*, \quad m_1 = m_{00}m_1^*, \quad m_2 = m_{00}m_2^*$

Большая полуось: $a_1^* = 1, \quad a_2^* = a_1 a_2^*$

Затем

$$n_1 = \frac{\sqrt{G\left(m_{00}+m_{10}\right)}}{a_1^{3/2}} = n_0\sqrt{1+m_{10}^*},$$

$$n_2 = \frac{\sqrt{G\left(m_{00}+m_{20}\right)}}{a_2^{3/2}} = n_0\frac{\sqrt{1+m_{20}^*}}{a_2^{*3/2}},$$

$$\frac{Gm_2}{n_1a_1^2a_2} = n_0\frac{m_2^*}{a_2^*\sqrt{1+m_{10}^*}}, \quad \frac{Gm_1}{n_2a_2^3} = n_0\frac{m_1^*}{a_2^{*3/2}\sqrt{1+m_{20}^*}}, \tag{2.147}$$

$$\frac{1}{n_1a_1^2}\frac{\dot m_0}{m_0}a_1V_{0x} = n_0\frac{\dot m_0^*}{m_0^*}\frac{V_{0x}^*}{\sqrt{1+m_{10}^*}}, \quad \frac{1}{n_1a_1^2}\frac{\dot m_1}{m_1}a_1V_{1r} = n_0\frac{\dot m_1^*}{m_1^*}\frac{V_{1r}^*}{\sqrt{1+m_{10}^*}},$$

$$\frac{1}{n_2a_2^2}\frac{\dot m_0}{m_0}a_2V_{0x} = n_0\frac{\dot m_0^*}{m_0^*}\frac{\sqrt{a_2^*}V_{0x}^*}{\sqrt{1+m_{20}^*}}, \quad \frac{1}{n_2a_2^2}\frac{\dot m_2}{m_2}a_2V_{2r} = n_0\frac{\dot m_2^*}{m_2^*}\frac{\sqrt{a_2^*}V_{2r}^*}{\sqrt{1+m_{20}^*}}$$

где все переменные со знаком "*" безразмерны и зависят от безразмерного времени t^*. Далее мы будем использовать те же обозначения без знака "*".

В результате мы получаем уравнения движения в виде (напомним, что мы извлекаем коэффициенты, $\frac{1}{a_2\gamma_2}$ из $\Pi_{12}, \Pi_{11}, \Pi_{22}$ которые появляются из коэффициентов Лапласа A_0, A_1)

$$\frac{de_1}{dt} = \frac{m_2^*}{a_2^*\gamma_2\sqrt{1+m_{10}^*}}\Pi_{12}e_2\sin\left(\pi_1-\pi_2\right) - \frac{\dot m_0^*}{m_0^*}\frac{\gamma_1}{\sqrt{1+m_{10}^*}}\left(-V_{0x}\sin\left(\pi_1\right)+V_{0y}\cos\left(\pi_1\right)+\right.$$
$$\left.+i_1V_{0z}\cos\left(\pi_1-\Omega_1\right)-\frac{1}{2}i_1^2\cos\left(\pi_1-\Omega_1\right)\left(V_{0y}cos\Omega_1-V_{0x}sin\Omega_1\right)\right),$$
$$\frac{di_1}{dt} = \frac{m_2^*}{4a_2^*\gamma_2\sqrt{1+m_{10}^*}}B_1i_2\sin\left(\Omega_1-\Omega_2\right) - \frac{\dot m_0^*}{m_0^*}\frac{\gamma_1e_1}{\sqrt{1+m_{10}^*}}\times$$
$$\times\left(-V_{0z}\cos\left(\pi_1-\Omega_1\right)+\frac{1}{2}i_1\left(V_{0y}\cos\left(\pi_1-2\Omega_1\right)+V_{0x}\sin\left(\pi_1-2\Omega_1\right)\right)-\frac{1}{2}i_1V_{0x}\sin\left(\pi_1\right)+\frac{1}{2}i_1V_{0y}\cos\left(\pi_1\right)\right),$$
$$\frac{d\pi_1}{dt} = \frac{m_2^*}{a_2^*\gamma_2\sqrt{1+m_{10}^*}}\left(\Pi_{11}+\Pi_{12}\frac{e_2}{e_1}\cos\left(\pi_1-\pi_2\right)\right)-\frac{3}{2\sqrt{1+m_{10}^*}}\gamma_1\ddot\gamma_1-\frac{m_2^*}{8a_2^*\gamma_2\sqrt{1+m_{10}^*}}B_1i_1\left(i_1-i_2\cos\left(\Omega_1-\Omega_2\right)\right)+$$
$$+\frac{\dot m_1^*}{m_1^*}\frac{\gamma_1V_{1r}}{\sqrt{1+m_{10}^*}}+\frac{\dot m_0^*}{m_0^*}\frac{\gamma_1}{e_1\sqrt{1+m_{10}^*}}\left(V_{0x}cos\pi_1+V_{0y}sin\pi_1\right)+\frac{\dot m_0^*}{m_0^*}\frac{\gamma_1e_1i_1}{2\sqrt{1+m_{10}^*}}V_{0z}\sin\left(\pi_1-\Omega_1\right),$$
$$\frac{d\Omega_1}{dt} = -\frac{m_2^*}{4a_2^*\gamma_2\sqrt{1+m_{10}^*}}B_1\left(1-\frac{i_2}{i_1}\cos\left(\Omega_1-\Omega_2\right)\right)+\frac{\dot m_0^*}{m_0^*}\frac{\gamma_1e_1}{i_1\sqrt{1+m_{10}^*}}\sin\left(\pi_1-\Omega_1\right)\left(V_{0z}-i_1\left(V_{0y}cos\Omega_1-V_{0x}sin\Omega_1\right)\right), \tag{2.148}$$

$$\frac{de_2}{dt} = -\frac{m_1^*}{a_2^{*3/2}\gamma_2\sqrt{1+m_{20}^*}}\Pi_{12}e_1\sin(\pi_1-\pi_2) - \frac{\dot{m}_0^*}{m_0^*}\frac{\gamma_2\sqrt{a_2^*}}{\sqrt{1+m_{20}^*}}(-V_{0x}\sin(\pi_2)+V_{0y}\cos(\pi_2)+$$

$$+i_2V_{0z}\cos(\pi_2-\Omega_2)-\frac{1}{2}i_2^2\cos(\pi_2-\Omega_2)\left(V_{0y}cos\Omega_2-V_{0x}sin\Omega_2\right)),$$

$$\frac{di_2}{dt} = -\frac{m_1^*}{4a_2^{*3/2}\gamma_2\sqrt{1+m_{20}^*}}B_1i_1\sin(\Omega_1-\Omega_2) - \frac{\dot{m}_0^*}{m_0^*}\frac{\gamma_2e_2\sqrt{a_2^*}}{\sqrt{1+m_{20}^*}}\times$$

$$\times\left(-V_{0z}\cos(\pi_2-\Omega_2)+\frac{1}{2}i_2\left(V_{0y}\cos(\pi_2-2\Omega_2)+V_{0x}\sin(\pi_2-2\Omega_2)\right)-\frac{1}{2}i_2V_{0x}\sin(\pi_2)+\frac{1}{2}i_2V_{0y}\cos(\pi_2)\right),$$

$$\frac{d\pi_2}{dt} = \frac{m_1^*}{a_2^{*3/2}\gamma_2\sqrt{1+m_{20}^*}}\left(\Pi_{22}+\Pi_{12}\frac{e_1}{e_2}\cos(\pi_1-\pi_2)\right) - \frac{3a_2^{*3/2}}{2\sqrt{1+m_{20}^*}}\gamma_2\ddot{\gamma}_2 - \frac{m_1^*}{8a_2^{*3/2}\gamma_2\sqrt{1+m_{20}^*}}\times$$

$$\times B_1i_2\left(i_2-i_1\cos(\Omega_1-\Omega_2)\right)+\frac{\dot{m}_2^*}{m_2^*}\frac{\gamma_2V_{2r}\sqrt{a_2^*}}{\sqrt{1+m_{20}^*}}+\frac{\dot{m}_0^*}{m_0^*}\frac{\gamma_2\sqrt{a_2^*}}{e_2\sqrt{1+m_{20}^*}}\left(V_{0x}cos\pi_2+V_{0y}sin\pi_2\right)+$$

$$+\frac{\dot{m}_0^*}{m_0^*}\frac{\gamma_2e_2i_2\sqrt{a_2^*}}{2\sqrt{1+m_{20}^*}}V_{0z}\sin(\pi_2-\Omega_2),$$

$$\frac{d\Omega_2}{dt} = -\frac{m_1^*}{4a_2^{*3/2}\gamma_2\sqrt{1+m_{20}^*}}B_1\left(1-\frac{i_1}{i_2}\cos(\Omega_1-\Omega_2)\right)+\frac{\dot{m}_0^*}{m_0^*}\frac{\gamma_2e_2\sqrt{a_2^*}}{i_2\sqrt{1+m_{20}^*}}\sin(\pi_2-\Omega_2)\times$$

$$\times\left(V_{0z}-i_2\left(V_{0y}cos\Omega_2-V_{0x}sin\Omega_2\right)\right)$$

(2.149)

Уравнения (2.148), (2.149) в безразмерных переменных интегрируется численными методами.

ГЛАВА 3. КАНОНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ

3.1 Интегрирование невозмущенного движения методом Гамильтона-Якоби

В случае, когда рассматриваемая система гравитирующих тел допускает силовую функцию, для исследования более удобно канонические уравнения возмущенного движения, чем уравнение возмущенного движения в форме уравнения Лагранжа.

Рассмотрим дифференциальные уравнения апериодического движения по квазиконическому сечению при наличии возмущающей силы $\vec{F} = grad_r R$ в прямоугольной декартовой системе координат [27]

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -fm\frac{x}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{x} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]x + \frac{\partial R}{\partial x}, \\
\ddot{y} &= -fm\frac{y}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{y} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]y + \frac{\partial R}{\partial y}, \\
\ddot{z} &= -fm\frac{z}{r^3} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\dot{z} + \left[\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right]z + \frac{\partial R}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Перейдем к квазисферическим обобщенным координатам ρ, λ, δ посредством формул

$$x = \gamma\rho\cos\delta\cos\lambda, \quad y = \gamma\rho\cos\delta\sin\lambda, \quad z = \gamma\rho\sin\delta. \tag{3.2}$$

Выражение кинетической энергии имеет вид

$$K = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}\gamma^2\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\cdot\dot{\delta}^2 + \rho^2\cos^2\delta\cdot\dot{\lambda}^2\right) + \gamma\dot{\gamma}\rho\dot{\rho} + \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2\rho^2\cdot$$

Вычисляя по обычным правилам [30, 46] обобщенные импульсы

$$\begin{aligned}
P_\rho &= \frac{\partial K}{\partial\dot{\rho}} = \gamma^2\dot{\rho} + \gamma\dot{\gamma}\rho, \qquad P_\rho = \frac{\partial K}{\partial\dot{\delta}} = \gamma^2\rho^2\dot{\delta}, \\
P_\rho &= \frac{\partial K}{\partial\dot{\lambda}} = \gamma^2\rho^2\cos^2\delta\dot{\lambda}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

перепишем систему (3.1) в следующей форме

$$\dot{\rho}=\frac{\partial H}{\partial P_\rho},\qquad \dot{P}_\rho=-\frac{\partial H}{\partial \rho}+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot m}{m}+\frac{\dot\gamma}{\gamma}\right)P_\rho,$$
$$\dot{\delta}=\frac{\partial H}{\partial P_\delta},\qquad \dot{P}_\delta=-\frac{\partial H}{\partial \delta}+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot m}{m}+\frac{\dot\gamma}{\gamma}\right)P_\delta, \tag{3.4}$$
$$\dot{\lambda}=\frac{\partial H}{\partial P_\lambda},\qquad \dot{P}_\lambda=-\frac{\partial H}{\partial \lambda}+\frac{1}{2}\left(\frac{\dot m}{m}+\frac{\dot\gamma}{\gamma}\right)P_\lambda,$$

где функция Гамильтона H имеет вид

$$H=\frac{1}{2\gamma^2}\left\{\left(P_\rho-\gamma\dot\gamma\rho\right)^2+\frac{P_\delta^2}{\rho^2}+\frac{P_\lambda^2}{\rho^2\cos^2\delta}\right\}-$$
$$-\left\{\frac{fm}{\gamma\rho}+\frac{1}{2}\left[\frac{\ddot\gamma}{\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot m}{m}+\frac{\dot\gamma}{\gamma}\right)\frac{\dot\gamma}{\gamma}\right]\gamma^2\rho^2+\frac{1}{2}\dot\gamma^2\rho^2\right\}-R$$

Переходя к новым импульсам

$$P_\rho=\psi\tilde P_\rho,\qquad P_\delta=\psi\tilde P_\delta,\qquad P_\lambda=\psi\tilde P_\lambda, \tag{3.5}$$

$$\psi=\psi(t)=\left(\frac{m}{m_0}\gamma\right)^{1/2},\qquad m_0=m(t_0), \tag{3.6}$$

придадим системе уравнений (3.4) канонический вид

$$\dot\rho=\frac{\partial\tilde H}{\partial\tilde P_\rho},\qquad \dot\delta=\frac{\partial\tilde H}{\partial\tilde P_\delta},\qquad \dot\lambda=\frac{\partial\tilde H}{\partial\tilde P_\lambda},$$
$$\dot{\tilde P}_\rho=-\frac{\tilde H}{\rho},\qquad \dot{\tilde P}_\delta=-\frac{\tilde H}{\delta},\qquad \dot{\tilde P}_\lambda=-\frac{\tilde H}{\lambda}. \tag{3.7}$$

В системе канонических уравнений (3.7) функция Гамильтона выражается соотношением

$$\tilde H=H_0+H_1, \tag{3.8}$$

$$H_0=\frac{\psi}{2\gamma^2}\left\{\left(\tilde P_\rho-\frac{\gamma\dot\gamma}{\psi}\rho\right)^2+\frac{\tilde P_\delta^2}{\rho^2}+\frac{\tilde P_\lambda^2}{\rho^2\cos^2\delta}\right\}-$$
$$-\frac{1}{\psi}\left\{\frac{fm}{\gamma\rho}+\frac{1}{2}\left[\frac{\ddot\gamma}{\gamma}-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot m}{m}+\frac{\dot\gamma}{\gamma}\right)\frac{\dot\gamma}{\gamma}\right]\gamma^2\rho^2+\frac{1}{2}\dot\gamma^2\rho^2\right\},$$

$$H_1=-\frac{1}{\psi}R(t,\rho,\delta,\lambda)\cdot$$

При $H_1=0$ $\left(R=0\right)$ упрощенная система

$$\dot{\rho}=\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{P}_\rho},\qquad \dot{\delta}=\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{P}_\delta},\qquad \dot{\lambda}=\frac{\partial H_0}{\partial \tilde{P}_\lambda},$$
$$\dot{\tilde{P}}_\rho=-\frac{\partial H_0}{\partial \rho},\quad \dot{\tilde{P}}_\delta=-\frac{\partial H_0}{\partial \delta},\quad \dot{\tilde{P}}_\lambda=-\frac{\partial H_0}{\partial \lambda}. \tag{3.9}$$

интегрируется методом Гамильтона-Якоби [46, 27].

Соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H_0=0$$

имеет полный интеграл

$$S=-\alpha_1\int_{t_0}^{t}\left(\frac{m}{m_0\gamma^3}\right)^{1/2}dt+\frac{\gamma\dot{\gamma}}{2\psi}\rho^2+W_1(\rho)+W_2(\delta)+W_3(\lambda),$$

причем

$$W_1(\rho)=\int_{\rho_1}^{\rho}\left(2\alpha_1-\frac{\alpha_2^2}{\rho^2}+\frac{2fm_0}{\rho}\right)^{1/2}d\rho,\qquad W_2(\delta)=\int_0^{\delta}\left(\alpha_2^2-\frac{\alpha_3^2}{\cos^2\delta}\right)^{1/2}d\delta,$$
$$W_3(\lambda)=\alpha_3\lambda,\qquad 2\alpha_1\rho^2+2fm_0\rho-\alpha_2^2=0$$

где ρ_1-меньший корень уравнения, α_1, α_2, α_3, - произвольные постоянные. В результате находим общий интеграл упрощенной системы (3.9)

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=\beta_1,\qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha_3}=\beta_3,$$
$$\frac{\partial S}{\partial \rho}=\tilde{P}_\rho,\qquad \frac{\partial S}{\partial \rho}=\tilde{P}_\delta,\qquad \frac{\partial S}{\partial \lambda}=\tilde{P}_\lambda,$$

где β_1, β_2, β_3 новые произвольные постоянные.

Учитывая преобразование (3.5)-(3.6) напишем общий интеграл промежуточного движения в виде

$$\int_{\rho_1}^{\rho}\frac{d\rho}{\sqrt{2\alpha_1+2\frac{fm_0}{\rho}-\frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}}=\Phi(t)+\beta_1,$$

$$\alpha_2\int_0^{\delta}\frac{d\delta}{\sqrt{\alpha_2^2-\frac{\alpha_3^2}{\cos^2\delta}}}-\alpha_2\int_{\rho_1}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{2\alpha_1+2\frac{fm_0}{\rho}-\frac{\alpha_2^2}{\rho^2}}}=\beta_2 \tag{3.10}$$

$$\lambda - \alpha_3 \int_0^{\delta} \frac{d\delta}{\cos^2\delta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\delta}}} = \beta_3,$$

$$\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2fm_0}{\rho} - \frac{\alpha_2^2}{\rho^2}} = \frac{\gamma^2}{\psi}\dot{\rho}, \qquad \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\delta}} = \frac{\gamma^2}{\psi}\rho^2\dot{\delta}, \qquad (3.11)$$

$$\alpha_3 = \frac{\gamma^2}{\psi}\rho^2 \cos^2\delta \cdot \dot{\lambda},$$

где $\Phi(t)$ - первообразная функции $\left(m/m_0\gamma^3\right)^{1/2}$.

Соотношение (3.10), (3.11) содержат шесть необходимых для общего интеграла промежуточного движения произвольных постоянных

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3 \qquad (3.12)$$

Которые являются аналогами канонических элементов Якоби кеплеровского движения [4] и превращаются в них при

$$m = const, \qquad \gamma = const.$$

Из системы интегралов (3.10), полагая

$$\sin\delta = \sin i \cdot \sin u,$$

получим

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}, \qquad p = a\left(1 - e^2\right), \qquad \theta = u - \omega \qquad (3.13)$$

причем

$$-2\alpha_1 = \frac{fm_0}{a}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{fm_0 p}, \qquad \alpha_3 = \sqrt{fm_0 p}\cos i, \qquad (3.14)$$
$$\beta_1 = -\Phi(\tau), \qquad \beta_2 = \omega, \qquad \beta_3 = \Omega,$$

где

$$a,\ e,\ \omega,\ \Omega,\ i,\ \Phi(\tau), \qquad (3.15)$$

аналоги классических кеплеровских элементов, введенные нами в работе [27].

Из интегралов (3.10), (3.11) также следуют

$$\dot{\rho} = \frac{\psi}{\gamma^2}\sqrt{\frac{fm_0}{p}}e\sin\theta, \qquad (3.16)$$

$$\dot{u} = \frac{\psi}{\gamma^2}\sqrt{\frac{fm_0 p}{\rho^2}}, \qquad u = \theta + \omega, \tag{3.17}$$

$$\int_0^{\vartheta} \frac{d\theta}{\left(1 + e\cos\theta\right)^2} = \frac{\sqrt{fm_0}}{p^{3/2}}\left[\Phi(t) - \Phi(\tau)\right]. \tag{3.18}$$

Общий анализ рассмотренного промежуточного движения – апериодического движения по квазиконическому сечению выполнен в работе [47].

Соотношение (3.18) в случае квазиэллиптических движений

$$e < 1, \tag{3.19}$$

посредством стандартного преобразования

$$tg\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2},$$

приводится к уравнению Кеплера

$$E - e\sin E = M \tag{3.20}$$

где

$$M = n\left[\Phi(t) - \Phi(\tau)\right], \quad E \tag{3.21}$$

- аналоги средней и эксцентрической аномалий кеплеровского движения, соответственно, а

$$n = \frac{\sqrt{fm_0}}{a^{3/2}} \tag{3.22}$$

есть аналог кеплеровского среднего движения.

Формулы для координат и скорости в прямоугольной декартовой системе координат, для компактности, приведем в системе элементов (3.15)

$$\begin{aligned} x &= \gamma\rho\left[\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i\right], \\ y &= \gamma\rho\left[\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i\right], \\ z &= \gamma\rho\left[\sin u\sin i\right], \qquad r = \gamma\rho, \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\dot{x}=\left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}+\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)x+\gamma\rho\dot{u}\left[-\sin u\cos\Omega-\cos u\sin\Omega\cos i\right],$$

$$\dot{y}=\left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}+\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)y+\gamma\rho\dot{u}\left[\sin u\sin\Omega+\cos u\cos\Omega\cos i\right],$$

$$\dot{z}=\left(\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}+\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right)z+\gamma\rho\dot{u}\left[\cos u\sin i\right].$$

Отметим, что невозмущенное движение в уравнениях (3.1) при $R=0$ может быть описано и в другой форме. Обозначим

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{m}}{m}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)=a(t). \tag{3.24}$$

Тогда уравнения невозмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned}
\ddot{x}&=-fm(t)\frac{x}{r^3}-a(t)\dot{x}+\left(\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}+a\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)x,\\
\ddot{y}&=-fm(t)\frac{y}{r^3}-a(t)\dot{y}+\left(\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}+a\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)y,\\
\ddot{z}&=-fm(t)\frac{z}{r^3}-a(t)\dot{z}+\left(\frac{\ddot{\gamma}}{\gamma}+a\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)z,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

где

$$m=m(t), \qquad a=a(t), \tag{3.26}$$

заданные функции времени, $\gamma=\gamma(t)$ зависит от этих функций и определяется формулой

$$\gamma=\frac{m(t_0)}{m(t)}exp\left[-2\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right]. \tag{3.27}$$

Указанная форма уравнений невозмущенного движения (3.25) при заданном $m(t)$, $a(t)$ дает возможность сразу определить функцию $\gamma=\gamma(t)$.

3.2 Канонические уравнения возмущенного движения в аналогах переменных Якоби и Делоне

Уравнения возмущенного движения (3.7)-(3.8) в системе переменных (3.12), которые являются аналогами переменных Якоби при наличии возмущения $\widetilde{H}_1 \neq 0$ $(W \neq 0)$ имеют вид

$$\dot{\alpha}_k = \frac{\partial \widetilde{R}_1}{\partial \beta_k}, \qquad \dot{\beta}_k = -\frac{\partial \widetilde{R}_1}{\partial \alpha_k}, \qquad k = 1,2,3 \tag{3.28}$$

здесь

$$\widetilde{W} = \frac{1}{\psi} W(t, \alpha_k, \beta_k). \tag{3.29}$$

В силу уравнений Кеплера (3.20)-(3.21) разложение возмущающей функции через оскулирующие элементы будет так же, как и в случае классической задачи двух тел с постоянными массами.

Недостатки уравнений возмущенного движения (3.28) аналогичны с недостатками уравнений возмущенного движения в элементах Якоби в классической теории возмущения тел с постоянными массами.

Поэтому переходим к аналогам элементов Делоне

$$L, \quad G, \quad H, \quad l, \quad g, \quad h \tag{3.30}$$

по следующим формулам

$$\begin{aligned} -2\alpha_1 &= \frac{\tilde{\beta}^4}{L^2}, \qquad \alpha_2 = G, \qquad \alpha_3 = H, \\ \beta_1 &= \frac{l}{n} - \varphi(t), \qquad \beta_2 = g, \qquad \beta_3 = h. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Уравнения возмущенного движения в переменных (3.30) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\partial W^*}{\partial l}, \quad \dot{G} = \frac{\partial W^*}{\partial g}, \quad \dot{H} = \frac{\partial W^*}{\partial h}, \\ \dot{l} &= -\frac{\partial W^*}{\partial L}, \quad \dot{g} = -\frac{\partial W^*}{\partial G}, \quad \dot{h} = -\frac{\partial W^*}{\partial H}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

где

$$W^* = \frac{1}{\nu^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}^4}{2L^2} + \tilde{W}(t, L, G, H, l, g, h). \qquad (3.33)$$

Связь между переменными (3.30) и (3.15) дается следуюшими соотношениями

$$\begin{aligned} &L = \tilde{\beta}\sqrt{a}, \qquad G = \tilde{\beta}\sqrt{p}, \qquad H = \tilde{\beta}\sqrt{p}\cos i, \\ &l = n\left[\phi(t) - \phi(\tau)\right], \qquad g = \omega, \qquad h = \Omega. \end{aligned} \qquad (3.34)$$

Если в гамильтониане (3.33), (3.29) $W = 0$, тогда

$$W^* = \frac{1}{\nu^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}^4}{2\mu_0 L^2}. \qquad (3.35)$$

Уравнения невозмущенного движения в аналогах переменных Делоне (3.30) имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{l} = \frac{\partial F_{\text{пв}}}{\partial L}, \qquad \dot{g} = 0, \qquad \dot{h} = 0, \\ &\dot{L} = 0, \qquad \dot{G} = 0, \qquad \dot{H} = 0. \end{aligned} \qquad (3.36)$$

Отсюда интегралы системы (3.36) будут в следующем виде

$$\begin{aligned} &l = -\frac{\tilde{\beta}^4}{\mu_0 L^3} \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\nu^2(t)} + l_0, \quad L = L_0, \\ &g = g_0, \qquad h = h_0, \\ &G = G_0, \qquad H = H_0, \end{aligned} \qquad (3.37)$$

здесь

$$\begin{aligned} &l_0 = const, \quad g_0 = const, \quad h_0 = const, \\ &L_0 = const, \quad G_0 = const, \quad H_0 = const. \end{aligned}$$

3.3 Канонические уравнения возмущенного движения n планет в оскулирующих аналогах переменных Пуанкаре

Для наших целей предпочтительны аналоги второй системы канонических элементов Пуанкаре, приведенные в работе [43, 48]

$$\Lambda_i,\ \lambda_i,\ \xi_i,\ \eta_i,\ p_i,\ q_i, \tag{3.38}$$

которые вводится согласно формулам

$$\Lambda_i = \sqrt{\mu_{i0}}\sqrt{a_i}, \quad \lambda_i = l_i + \pi_i, \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} \xi_i &= \sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}}\sqrt{a_i}\left(1-\sqrt{1-e_i^2}\right)}Cos\pi_i, \\ \eta_i &= -\sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}}\sqrt{a_i}\left(1-\sqrt{1-e_i^2}\right)}Sin\pi_i, \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} p_i &= \sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}}\sqrt{a_i}\sqrt{1-e_i^2}\,(1-Cosi_i)}Cos\Omega_i, \\ q_i &= -\sqrt{2\sqrt{\mu_{i0}}\sqrt{a_i}\sqrt{1-e_i^2}\,(1-Cosi_i)}Sin\Omega_i. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Где

$$l_i = M_i = \tilde{n}_i\left[\phi_i(t) - \phi_i(\tau_i)\right], \qquad \pi_i = \Omega_i + \omega_i \tag{3.42}$$

Дифференциальные уравнения движения n планет в оскулирующих аналогах второй системы переменных Пуанкаре (3.39)- (3.41) имеют канонический вид

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}_i &= -\frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i}, \quad \dot{\xi}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial q_i}, \\ \dot{\lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i}, \quad \dot{\eta}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial p_i}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

где функции Гамильтона

$$R_i^* = -\frac{\mu_{i0}^2}{2\Lambda_i^2}\cdot\frac{1}{\gamma_i^2(t)} - W_i\left(t, \Lambda_i, \xi_i, p_i, \lambda_i, \eta_i, q_i\right) \tag{3.44}$$

Канонические уравнения возмущенного движения (3.43) удобные для описания динамической эволюции планетных систем, когда аналоги эксцентриситетов и аналоги наклонности орбитальной плоскости планет достаточно малы

$$e_i << 1, \qquad i_i << 1. \tag{3.45}$$

Перепишем канонических уравнении движения (3.43) в виде

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i} = \frac{\mu_{i0}^2}{\gamma_i^2 \Lambda_i^3} - \frac{\partial W_i}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\Lambda}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial W_i}{\partial \lambda_i}, \\
\dot{\eta}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial W_i}{\partial \xi_i}, & \dot{\xi}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i} = \frac{\partial W_i}{\partial \eta_i}, \\
\dot{q}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial p_i} = -\frac{\partial W_i}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i}{\partial q_i}.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

3.4 Разложение возмущающей функции в аналогах второй системы переменных Пуанкаре

Предположим, что при движении выполняется условие (3.45), то есть тела движутся по квазиконусному сечению, с малым эксцентриситетом в окрестности плоскости Лапласа [4]. При таком предположении канонические переменные ξ_i, η_i, p_i, q_i в уравнениях (3.43)-(3.44) являются малыми величинами. Из выражений (3.39)-(3.41) получаем следующие соотношения

$$e_i^2 = \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{\Lambda_i}\left(1 - \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{4\Lambda_i}\right), \tag{3.47}$$

$$sin^2 i_i = \frac{p_i^2 + q_i^2}{\Lambda_i \sqrt{1 - e_i^2}} = \left(1 - \frac{p_i^2 + q_i^2}{4\Lambda_i \sqrt{1 - e_i^2}}\right). \tag{3.48}$$

В соотношениях (3.47)-(3.48) переменные ξ_i, η_i и эксцентриситет e_i, а также переменные p_i, q_i и наклонение i_i являются одинакого порядка. Поэтому в уравнении возмущенного движения (3.46) возмущающую функцию W_i можно упростить, заменив ее выражением, разложенениями в степенной ряд по переменным ξ_i, η_i, p_i, q_i [48].

Для того чтобы написать уравнения (3.46) в явном виде необходимо выразить возмущающую функцию через

оскулирующие элементы. Для удобства предположим, что $\gamma = \gamma(t) = m(t_0)/m(t)$. Выражения через оскулирующие элементы слагаемого возмущающей силы пропорциональный радиус вектору не вызывает затруднений, ее аналитический вид известен [27]. Существенную сложность представляет разложение силовой функции взаимного ньютоновского притяжения тел по рядам через оскулирующие элементы [48]

$$W_{gi} = f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{r_k^3} \right). \tag{3.49}$$

Выражение силовой функции взаимного ньютоновского притяжения тел (3.49) следует разделить на основную и дополнительную часть:

$$\begin{aligned} W_{gi} &= f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_k}{r_k^3} \right) = \\ &= f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} \right) - f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \left(\frac{x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k}{r_k^3} \right) = \\ &= f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} \right) - f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \left(\frac{r_i \cdot r_k \cdot Cos\psi_{ik}}{r_k^3} \right) = \\ &= f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} \right) - f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \left(r_i \cdot \left(\frac{1}{r_k^2} \right) \cdot Cos\psi_{ik} \right). \end{aligned} \tag{3.50}$$

В результате (3.49) выделим основную и дополнительную часть возмущающей функции следующим образом

$$W_{gi,main} = f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \left(\frac{1}{\Delta_{ik}} \right), \tag{3.51}$$

$$W_{gi,add} = -f\sum_{k=1}^{n}{}' m_k \left(r_i \cdot \left(\frac{1}{r_k^2} \right) Cos\left(\psi_{ik}\right) \right). \tag{3.52}$$

Как и в классической проблеме многих тел [7], дополнительная часть возмущающей функции (3.52) не входит в выражение вековой возмущающей функции. Поэтому для получения дифференциальных уравнений вековых возмущений в

канонических элементах (3.39)-(3.41) достаточно взять аналитическое выражение основной части возмущающей функции (3.51).

Разложение основной части возмущающей функции в ряд

Следует отметить, что разложение возмущающих функций $W_{gi,main}$ (3.51) в ряды требует выполнения довольно громоздких символьных вычислений и представляет собой нетривиальную задачу. В работах [42], [49], [50] такие расчеты были выполнены с точностью до второго порядка (включительно) относительно малых величин для двухпланетной задачи трех тел с переменной массами. Рассматриваемая в *n*-планетной задач многих тел с изотропно изменяющимися массами разложение возмущающей функции в ряд выполняется аналогично.

Однако расчет *n*-планетной задачи многих тел становится все более масштабным. В работе [48] описан эффективный алгоритм решения этой задачи с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Сначала выразим из соотношений (2.40) переменные e_i и π_i через ξ_i и η_i. Используя разложение

$$\sqrt{1-\sqrt{1-e_i^2}} = \frac{e_i}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{e_i^2}{8}+\frac{7e_i^4}{128}+\ldots\right), \tag{3.53}$$

подставляем вместо e_j^2 его точное выражение из (3.47) и, выполняя в (3.53) разложение в степенной ряд по переменным ξ_i, η_i, находим:

$$\begin{aligned} e_i \sin\pi_i &= -\frac{\eta_i}{\sqrt{\Lambda_i}}\left(1-\frac{\xi_i^2+\eta_i^2}{8\Lambda_i}+\ldots\right), \\ e_i \cos\pi_i &= -\frac{\xi_i}{\sqrt{\Lambda_i}}\left(1-\frac{\xi_i^2+\eta_i^2}{8\Lambda_i}+\ldots\right), \end{aligned} \tag{3.54}$$

В формуле (3.54) разложения получены с помощью встроенной функции *Series* (см. [8]) с точностью до четвертого

порядка. Поскольку разложения производятся независимо по двум переменным ξ_i и η_i, в получаемом выражении могут содержаться произведения $\xi_i^m \eta_i^k$, $(k,m=0,1,...,4)$, вплоть до восьмого порядка включительно, например, $\xi_i^4 \eta_i^4$, $(k,m=0,1,...,4)$. Чтобы ограничиться только членами четвертого порядка, в разлагаемой функции удобно сделать подстановку $\eta_i \to \varepsilon\eta_i$ и $\xi_i \to \varepsilon\xi_i$ и выполнить разложение функции по переменной ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$ с точностью до четвертого порядка, применяя функцию *Series*. В результате получим многочлен четвертого порядка по переменной ε, причем коэффициенты при ε^i $(i=0,1,...,4)$ будут содержать только произведения $\xi_i^m \eta_i^k$, $(k,m=0,1,...,4)$ j-го порядка, удовлетворяющие условию $k+m=i$. Поскольку переменная ε была введена только для упрощения вычислений, в полученном выражении достаточно положить $\varepsilon = 1$.

Аналогично получим [48]:

$$\sin i_i \sin \Omega_i = -\frac{q_i}{\sqrt{\Lambda_i}}\left(1 - \frac{p_i^2+q_i^2}{8\Lambda_i} + \frac{\xi_i^2+\eta_i^2}{4\Lambda_i}\right),$$
$$\sin i_i \cos \Omega_i = -\frac{p_i}{\sqrt{\Lambda_i}}\left(1 - \frac{p_i^2+q_i^2}{8\Lambda_i} + \frac{\xi_i^2+\eta_i^2}{4\Lambda_i}\right). \qquad (3.55)$$

Отметим, что соотношения (3.54), (3.55) представляют собой разложения в степенные ряды по ξ_i, η_i и p_i, q_i не самих переменных $e_i, \pi_i, i_i, \Omega_i$ а произведений $e_i \sin\pi_i, e_i \cos\pi_i, \sin i_i \sin\Omega_i, \sin i_i \cos\Omega_i$ которые входят в выражения (3.23) для декартовых координат тел X_j, Y_j, Z_j.

Кроме переменных $e_i, \omega_i, i_i, \Omega_i$ выражения (3.23) содержат аналог истинной аномалии θ_i, которую также следует выразить через элементы Пуанкаре. Для этого можно воспользоваться известным решением уравнения Кеплера (3.20),

которое определяет эксцентрическую аномалию E_i в виде сходящегося при $e_i << 1$ степенного ряда (см. [7, 48])

$$E_i = M_i + e_i \sin M_i + \frac{e_i^2}{2}\sin\left(2M_i\right) + ... \qquad (3.56)$$

Подчеркнем, что встроенная функция *Series* существенно упрощает вычисления и позволяет производить разложения выражений в степенные ряды с любой требуемой точностью (см. [8]). Для получения коэффициентов разложения (3.56), например, с точностью до *n*-го порядка по e_i можно использовать функцию $solE[n]$, записанную на языке *Wolfram Mathematica*:

$$solE[n\_] := w - e_j Sin[w] - M_j / w \rightarrow$$
$$Sum[e_j^k w_k, \{k, 0, n\}] \; // \; Series[\#, \{e_j, 0, n\}] \; \& \; // \; //$$
$$Normal \; // \; Collect\left[\#, e_j, Simplify\right] \&;$$

Выполнение команды $solE$ [8], например, приводит к результату

$$-M_j + w_0 + e_j(-Sin[w_0] + w_1) +$$
$$+ e_j^2(-Cos[w_0]w_1 + w_2) +$$
$$+ e_j^3\left(\frac{1}{2}Sin[w_0]w_1^2 - Cos[w_0]w_2 + w_3\right)$$

Выделяя в полученном выражении с помощью функции *Coefficient* коэффициенты при e_j^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и приравнивая их к нулю, получаем систему уравнений, из которой последовательно находим коэффициенты w_k разложения (3.56).

Поскольку увеличение точности вычислений приводит ко все более громоздким символьным выражениям, далее ограничимся вычислениями с точностью до второго порядка по переменным ξ_i, η_i и p_i, q_i. Используя (3.56), находим

$$\cos E_j = \cos M_j - e_j \sin^2 M_j - \frac{3e_j^2}{2}\cos M_j \sin^2 M_j,$$

$$\sin E_j = \sin M_j + \frac{e_j}{2}\sin(2M_j) + \\ + \frac{e_j^2}{8}\left(3\sin(3M_j) - \sin M_j\right). \tag{3.57}$$

Учитывая формулы взаимосвязи аналогов истинной аномалии и эксцентрической аномалии, получаем

$$\cos\theta_j = \frac{\cos E_j - e_j}{1 - e_j\cos E_j} = \cos M_j - \\ - e_j(1 - \cos(2M_j)) + \frac{9}{8}e_j^2\left(\cos(3M_j) - \cos M_j\right), \\ \sin\theta_j = \frac{\sin E_j\sqrt{1-e_j^2}}{1 - e_j\cos E_j} = \sin M_j + \\ + e_j\sin(2M_j) + \frac{e_j^2}{8}(9\sin(3M_j) - 7\sin M_j). \tag{3.58}$$

Выполняя необходимые подстановки и разложения, перепишем (3.58) в виде

$$\frac{\rho_j}{a_j} = 1 - e_j\cos E_j = 1 + \frac{\eta_j\sin\lambda_j}{\sqrt{\Lambda_j}} - \frac{\xi_j\cos\lambda_j}{\sqrt{\Lambda_j}} + \\ + \frac{\eta_j^2}{2\Lambda_j}\left(1 + \cos(2\lambda_j)\right) + \frac{\xi_j^2}{2\Lambda_j}\left(1 - \cos(2\lambda_j)\right) + \\ + \frac{\eta_j\xi_j}{\Lambda_j}\sin(2\lambda_j). \tag{3.59}$$

Наконец, используя разложения (3.47)–(3.59), выражения (3.23) для декартовых координат тел P_i с точностью до второго порядка по переменным Пуанкаре ξ_i, η_i и p_i, q_i получаем в виде

$$\frac{X_j}{\gamma_j a_j} = \cos\lambda_j - \frac{\xi_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}(3 - \cos(2\lambda_j)) -$$
$$- \frac{\eta_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}\sin(2\lambda_j) + \frac{3\xi_j^2}{8\Lambda_j}\left(\cos(3\lambda_j) - \cos\lambda_j\right) -$$
$$- \frac{\xi_j\eta_j}{4\Lambda_j}\left(3\sin(3\lambda_j) + \sin\lambda_j\right) - \frac{\eta_j^2}{8\Lambda_j}\left(3\cos(3\lambda_j) +\right.$$
$$\left. - 5\cos\lambda_j\right) - \frac{p_j q_j}{2\Lambda_j}\sin\lambda_j - \frac{q_j^2}{2\Lambda_j}\cos\lambda_j,$$

$$\frac{Y_j}{\gamma_j a_j} = \sin\lambda_j + \frac{\eta_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}(3 + \cos(2\lambda_j)) +$$
$$+ \frac{\xi_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}\sin(2\lambda_j) - \frac{3\eta_j^2}{8\Lambda_j}(\sin(3\lambda_j) + \sin\lambda_j) +$$
$$+ \frac{\xi_j\eta_j}{4\Lambda_j}(3\cos(3\lambda_j) - \cos\lambda_j) + \frac{\xi_j^2}{8\Lambda_j}(3\sin(3\lambda_j) - \quad (3.60)$$
$$- 5\sin\lambda_j) - \frac{p_j q_j}{2\Lambda_j}\cos\lambda_j - \frac{p_j^2}{2\Lambda_j}\sin\lambda_j,$$

$$\frac{Z_j}{\gamma_j a_j} = \frac{p_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\sin\lambda_j + \frac{q_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\cos\lambda_j +$$
$$+ \frac{\xi_j p_j}{2\Lambda_j}\sin(2\lambda_j) - \frac{\xi_j q_j}{2\Lambda_j}(3 - \cos(2\lambda_j)) +$$
$$+ \frac{\eta_j p_j}{2\Lambda_j}(3 + \cos(2\lambda_j)) - \frac{\eta_j q_j}{2\Lambda_j}\sin(2\lambda_j).$$

Используя полученные выражения и применяя функцию *Series*, получаем следующие выражения, которые будут

использованы далее при вычислении разложений возмущающих функций [48]:

$$\frac{R_j^2}{\gamma_j^2 a_j^2} = 1 + \frac{2}{\sqrt{\Lambda_j}}(\eta_j \sin\lambda_j - \xi_j \cos\lambda_j) + \\ + \frac{\eta_j^2}{2\Lambda_j}(3 + \cos(2\lambda_j)) + \frac{\eta_j \xi_j}{\Lambda_j}\sin(2\lambda_j) + \\ + \frac{\xi_j^2}{2\Lambda_j}(3 - \cos(2\lambda_j)), \tag{3.61}$$

$$\frac{\gamma_j^3 a_j^3}{R_j^3} = 1 - \frac{3\eta_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\sin\lambda_j + \frac{3\xi_j}{\sqrt{\Lambda_j}}\cos\lambda_j + \\ + \frac{3\eta_j^2}{2\Lambda_j}(1 - 3\cos(2\lambda_j)) - \frac{9\eta_j \xi_j}{\Lambda_j}\sin(2\lambda_j) + \\ + \frac{3\xi_j^2}{2\Lambda_j}(1 + 3\cos(2\lambda_j)). \tag{3.62}$$

$$\frac{\vec{R}_i \cdot \vec{R}_j}{a_i a_j \gamma_i \gamma_j} = \cos(\lambda_i - \lambda_j) + \frac{\eta_i}{2\sqrt{\Lambda_i}}(3\sin\lambda_j - \\ - \sin(2\lambda_i - \lambda_j)) + \frac{\eta_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}(3\sin\lambda_i + \sin(\lambda_i - 2\lambda_j)) - \\ - \frac{\xi_i}{2\sqrt{\Lambda_i}}(3\cos\lambda_j - \cos(2\lambda_i - \lambda_j)) - \frac{\xi_j}{2\sqrt{\Lambda_j}}(3\cos\lambda_i - \\ - \cos(\lambda_i - 2\lambda_j)) - \frac{\eta_i^2}{4\Lambda_i}\cos\lambda_i(3\cos(2\lambda_i - \lambda_j) + \cos\lambda_j) - \\ - \frac{\eta_j^2}{4\Lambda_j}\cos\lambda_j(3\cos(\lambda_i - 2\lambda_j) + \cos\lambda_i) - \\ - \frac{\xi_i^2}{4\Lambda_i}\sin\lambda_i(3\sin(2\lambda_i - \lambda_j) + \sin\lambda_j) +$$

$$+\frac{\xi_j^2}{4\Lambda_j}\sin\lambda_j(3\sin(\lambda_i-2\lambda_j)-\sin\lambda_i)+$$

$$+\frac{\eta_i\eta_j}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}(9+3\cos(2\lambda_i)+$$

$$+\cos(2(\lambda_i-\lambda_j))+3\cos(2\lambda_j))+$$

$$+\frac{\xi_i\xi_j}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}(9-3\cos(2\lambda_i)+$$

$$+\cos(2(\lambda_i-\lambda_j))-3\cos(2\lambda_j))-$$

$$-\frac{\eta_i\xi_i}{4\Lambda_i}(3\sin(3\lambda_i-\lambda_j)+\sin(\lambda_i+\lambda_j))+$$

$$+\frac{\eta_j\xi_j}{4\Lambda_j}(3\sin(\lambda_i-3\lambda_j)-\sin(\lambda_i+\lambda_j))+$$

$$+\frac{\eta_i\xi_j}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}(3\sin(2\lambda_i)+3\sin(2\lambda_j)-\sin(2(\lambda_i-\lambda_j)))+$$

$$+\frac{\eta_j\xi_i}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}(3\sin(2\lambda_i)+3\sin(2\lambda_j)+\sin(2(\lambda_i-\lambda_j)))-$$

$$-\frac{1}{2\Lambda_i}(q_i^2\cos\lambda_i\cos\lambda_j+p_i^2\sin\lambda_i\sin\lambda_j)-$$

$$-\frac{1}{2\Lambda_j}(q_j^2\cos\lambda_i\cos\lambda_j+p_j^2\sin\lambda_i\sin\lambda_j)- \qquad (3.63)$$

$$-\frac{q_ip_i}{2\Lambda_i}\sin(\lambda_i+\lambda_j)-\frac{q_jp_j}{2\Lambda_j}\sin(\lambda_i+\lambda_j)+$$

$$+\frac{q_ip_j}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}\cos\lambda_i\sin\lambda_j+\frac{q_jp_i}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}\cos\lambda_j\sin\lambda_i+$$

$$+\frac{q_iq_j}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}\cos\lambda_i\cos\lambda_j+\frac{p_ip_j}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_j}}\sin\lambda_i\sin\lambda_j.$$

Используя (3.61), (3.63) и соотношение

$$R_{ij}=\sqrt{R_i^2+R_j^2-2\vec{R}_i\cdot\vec{R}_j},$$

вычисляем R_{ij} и далее находим разложение выражения $1/R_{ij}$, которое описывает возмущения, связанные с гравитационным взаимодействием тел и P_i и P_j. Поскольку получаемое выражение более громоздко, мы его не приводим. Отметим только, что в результате получается многочлен второго порядка относительно переменных Пуанкаре ξ_i, η_i и p_i, q_i коэффициенты которого являются периодическими функциями средних долгот λ_j и представляют собой рациональные выражения, в числителях которых содержатся тригонометрические функции $\sin(k\lambda_j)$, $\cos(k\lambda_j)$, $\sin(k\lambda_i \pm n\lambda_j)$ и $\cos(k\lambda_i \pm n\lambda_j)$ $(k, n = 1, 2, 3, \ldots)$, а знаменатели содержат выражения Δ_{ij}, Δ_{ij}^3, и Δ_{ij}^5, где

$$\Delta_{ij} = (a_i^2\gamma_i^2 + a_j^2\gamma_j^2 - 2a_i a_j \gamma_i \gamma_j \cos(\lambda_i - \lambda_j))^{1/2}.$$

Вековая часть возмущающей функции

Поскольку нас интересует эволюция орбитальных параметров тел на больших интервалах времени, короткопериодические возмущения, связанные с орбитальным движением тел, следует устранить путем усреднения возмущающих функций W_i по средним долготам (см. [7, 48]). Усреднение многочленов W_i, приводящее к вековой части возмущающих функций, сводится к вычислению интегралов

$$W_i^{(sec)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} d\lambda_1 \ldots \int_0^{2\pi} d\lambda_n W_i. \qquad (3.64)$$

Поскольку возмущающие функции W_i представляют собой суммы большого числа слагаемых, каждое из которых может зависеть не более чем от двух средних долгот λ_i и λ_j интеграл (3.64) сводится к двукратному интегралу по переменным λ_i и λ_j.

В результате получим следующие вековые части возмущающих функций:

$$
\begin{aligned}
&W_i^{(\sec)} = \\
&= f\sum_{s=1}^{i-1} m_s \left(\frac{A_0^{is}}{2} + \Pi_{ii}^{is} \frac{\eta_i^2 + \xi_i^2}{2\Lambda_i} + \Pi_{is}^{is} \frac{\eta_i\eta_s + \xi_i\xi_s}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_s}} + \right. \\
&+ \Pi_{ss}^{is} \frac{\eta_s^2 + \xi_s^2}{2\Lambda_s} - -B_1^{is} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2}{8\Lambda_i} - \frac{p_i p_s + q_i q_s}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_s}} + \frac{p_s^2 + q_s^2}{8\Lambda_s} \right) \Bigg) + \\
&+ f\sum_{k=i+1}^{n} m_k \left(\frac{A_0^{ik}}{2} + \Pi_{ii}^{ik} \frac{\eta_i^2 + \xi_i^2}{2\Lambda_i} + \Pi_{ik}^{ik} \frac{\eta_i\eta_k + \xi_i\xi_k}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_k}} + \right. \\
&+ \Pi_{kk}^{ik} \frac{\eta_k^2 + \xi_k^2}{2\Lambda_k} - -B_1^{ik} \left(\frac{p_i^2 + q_i^2}{8\Lambda_i} - \frac{p_i p_k + q_i q_k}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_k}} + \frac{p_k^2 + q_k^2}{8\Lambda_k} \right) \Bigg) - \\
&- \frac{\ddot{\gamma}_i \Lambda_i^4}{2\gamma_i \mu_{i0}^2} \left(1 + \frac{3}{2\Lambda_i} \left(\xi_i^2 + \eta_i^2 \right) \right)
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

где приняты следующие обозначения для внутренних планет $\left(s < i\right)$:

$$
\begin{aligned}
\Pi_{ii}^{is} &= -\frac{3\alpha_{is}}{4} B_0^{is} - \frac{1}{2} B_1^{is} + \frac{15 + 6\alpha_{is}^2}{8} C_0^{is} - \frac{3\alpha_{is}}{2} C_1^{is} - \frac{9}{8} C_2^{is} \\
\Pi_{is}^{is} &= \frac{1}{8}\left(9B_0^{is} + B_2^{is} \right) - \frac{9\left(1 + \alpha_{is}^2\right)}{8\alpha_{is}} C_0^{is} + \frac{21}{16} C_1^{is} + \frac{3\left(1 + \alpha_{is}^2\right)}{8\alpha_{is}} C_2^{is} + \frac{3}{16} C_3^{is} \\
\Pi_{ss}^{is} &= -\frac{3}{4\alpha_{is}} B_0^{is} - \frac{1}{2} B_1^{is} + \frac{15\alpha_{is}^2 + 6}{8\alpha_{is}^2} C_0^{is} - \frac{3}{2\alpha_{is}} C_1^{is} - \frac{9}{8} C_2^{is}
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

$$
A_0^{is} = \frac{2}{\pi a_i \gamma_i} \int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{\left(1 + \alpha_{is}^2 - 2\alpha_{is}\cos\lambda\right)^{1/2}} \tag{3.67}
$$

$$B_0^{is} = \frac{2a_s\gamma_s}{\pi\left(a_i\gamma_i\right)^2}\int_0^{\pi}\frac{d\lambda}{\left(1+\alpha_{is}^2-2\alpha_{is}\cos\lambda\right)^{3/2}}$$

$$B_1^{is} = \frac{2a_s\gamma_s}{\pi\left(a_i\gamma_i\right)^2}\int_0^{\pi}\frac{\cos\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha_{is}^2-2\alpha_{is}\cos\lambda\right)^{3/2}}, \qquad (3.68)$$

$$B_2^{is} = \frac{2a_s\gamma_s}{\pi\left(a_i\gamma_i\right)^2}\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha_{is}^2-2\alpha_{is}\cos\lambda\right)^{3/2}}$$

$$C_0^{is} = \frac{2\left(a_s\gamma_s\right)^2}{\pi\left(a_i\gamma_i\right)^3}\int_0^{\pi}\frac{d\lambda}{\left(1+\alpha_{is}^2-2\alpha_{is}\cos\lambda\right)^{5/2}}$$

$$C_1^{is} = \frac{2\left(a_s\gamma_s\right)^2}{\pi\left(a_i\gamma_i\right)^3}\int_0^{\pi}\frac{\cos\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha_{is}^2-2\alpha_{is}\cos\lambda\right)^{5/2}} \qquad (3.69)$$

$$C_2^{is} = \frac{2\left(a_s\gamma_s\right)^2}{\pi\left(a_i\gamma_i\right)^3}\int_0^{\pi}\frac{\cos 2\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha_{is}^2-2\alpha_{is}\cos\lambda\right)^{5/2}}$$

$$C_3^{is} = \frac{2\left(a_s\gamma_s\right)^2}{\pi\left(a_i\gamma_i\right)^3}\int_0^{\pi}\frac{\cos 3\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha_{is}^2-2\alpha_{is}\cos\lambda\right)^{5/2}}$$

и введен параметр

$$\alpha_{is} = \frac{\gamma_s a_s}{\gamma_i a_i} = \alpha_{is}\left(t\right) < 1, \qquad (3.70)$$

здесь следующие обозначения обозначают влияние внешних планет $\left(\ i<k\right)$

$$\Pi_{ii}^{ik} = -\frac{3\alpha_{ik}}{4} B_0^{ik} - \frac{1}{2} B_1^{ik} + \frac{15+6\alpha_{ik}^2}{8} C_0^{ik} - \frac{3\alpha_{ik}}{2} C_1^{ik} - \frac{9}{8} C_2^{ik},$$

$$\Pi_{ik}^{ik} = \frac{1}{8}\left(9B_0^{ik} + B_2^{ik}\right) - \frac{9\left(1+\alpha_{ik}^2\right)}{8\alpha_{ik}} C_0^{ik} + \frac{21}{16} C_1^{ik} + \frac{3\left(1+\alpha_{ik}^2\right)}{8\alpha_{ik}} C_2^{ik} + \frac{3}{16} C_3^{ik}, \quad (3.71)$$

$$\Pi_{kk}^{ik} = -\frac{3}{4\alpha_{ik}} B_0^{ik} - \frac{1}{2} B_1^{ik} + \frac{15\alpha_{ik}^2+6}{8\alpha_{ik}^2} C_0^{ik} - \frac{3}{2\alpha_{ik}} C_1^{ik} - \frac{9}{8} C_2^{ik},$$

$$A_0^{ik} = \frac{2}{\pi a_k \gamma_k} \int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{\left(1+\alpha_{ik}^2 - 2\alpha_{ik}\cos\lambda\right)^{1/2}}, \quad (3.72)$$

$$B_0^{ik} = \frac{2a_i\gamma_i}{\pi\left(a_k\gamma_k\right)^2} \int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{\left(1+\alpha_{ik}^2 - 2\alpha_{ik}\cos\lambda\right)^{3/2}},$$

$$B_1^{ik} = \frac{2a_i\gamma_i}{\pi\left(a_k\gamma_k\right)^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha_{ik}^2 - 2\alpha_{ik}\cos\lambda\right)^{3/2}},, \quad (3.73)$$

$$B_k^{ik} = \frac{2a_i\gamma_i}{\pi\left(a_k\gamma_k\right)^2} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha_{ik}^2 - 2\alpha_{ik}\cos\lambda\right)^{3/2}},$$

$$C_0^{ik} = \frac{2\left(a_i\gamma_i\right)^2}{\pi\left(a_k\gamma_k\right)^3} \int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{\left(1+\alpha_{ik}^2 - 2\alpha_{ik}\cos\lambda\right)^{5/2}},$$

$$C_1^{ik} = \frac{2\left(a_i\gamma_i\right)^2}{\pi\left(a_k\gamma_k\right)^3} \int_0^{\pi} \frac{\cos\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha_{ik}^2 - 2\alpha_{ik}\cos\lambda\right)^{5/2}}, \quad (3.74)$$

$$C_2^{ik} = \frac{2\left(a_i\gamma_i\right)^2}{\pi\left(a_k\gamma_k\right)^3} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha_{ik}^2 - 2\alpha_{ik}\cos\lambda\right)^{5/2}},$$

$$C_3^{ik} = \frac{2\left(a_i\gamma_i\right)^2}{\pi\left(a_k\gamma_k\right)^3} \int_0^{\pi} \frac{\cos 3\lambda d\lambda}{\left(1+\alpha_{ik}^2 - 2\alpha_{ik}\cos\lambda\right)^{5/2}}.$$

Дано условие, что орбиты внешних планет и орбита рассматриваемой планеты не пересекаются:

$$\alpha_{ik} = \frac{\gamma_i a_i}{\gamma_k a_k} = \alpha_{ik}(t) < 1, \tag{3.75}$$

Коэффициенты Лапласа A_0^{ij}, B_0^{ij}, B_1^{ij}, B_2^{ij}, C_0^{ij}, C_1^{ij}, C_2^{ij}, C_3^{ij} $(i \neq j)$ в этих выражениях связаны реккурентными отношениями и выражаются эллиптическими интегралами первого и второго порядка с помощью пакета *Wolfram Mathematica*.

Если в системе канонических уравнений возмущенного движения вместо возмущающей функции поставить ее усредненную форму (3.64), то получим вековые возмущенного уравнения. Вековые уравнения возмущения определяют параметры орбиты на больших временных интервалах.

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i} = \frac{\mu_{i0}^2}{\gamma_i^2 \Lambda_i^3} - \frac{\partial W_i^{(\sec)}}{\partial \Lambda_i}, && \dot{\Lambda}_i = 0, \\
&\dot{\eta}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial W_i^{(\sec)}}{\partial \xi_i}, && \dot{\xi}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i} = \frac{\partial W_i^{(\sec)}}{\partial \eta_i}, \\
&\dot{q}_i = -\frac{\partial R_i^*}{\partial p_i} = -\frac{\partial W_i^{(\sec)}}{\partial p_i}, && \dot{p}_i = \frac{\partial R_i^*}{\partial q_i} = \frac{\partial W_i^{(\sec)}}{\partial q_i}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Вековая часть возмущающей функции в уравнениях (3.76) имеет следующий вид [48]

$$W_i^{(\sec)} = W_{is,\text{гл}}^{(\sec)} + W_{ik,\text{гл}}^{(\sec)} + W_{ri}^{(\sec)} \tag{3.77}$$

Из выражения (3.76) видно, что определяется следующий интеграл:

$$\Lambda_i = const \quad \text{или} \quad a_i = const \tag{3.78}$$

средняя долгота λ_i рассчитывается после определения других канонических переменных.

Итак, система дифференциальных уравнений (3.76) выглядит следующим образом

$$\dot{\eta}_i = -\frac{\partial W_i^{(\sec)}}{\partial \xi_i}, \qquad \dot{\xi}_i = \frac{\partial W_i^{(\sec)}}{\partial \eta_i},$$
$$\dot{q}_i = -\frac{\partial W_i^{(\sec)}}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial W_i^{(\sec)}}{\partial q_i}. \qquad i = 1,2,..,n, \tag{3.79}$$

Если в выражении возмущающей функции ограничиться с точностью (включительно) до второго порядка малых величин система уравнений (3.76) становится линейной неавтономной системой. Кроме того, приближенные формулы взаимосвязи различных систем элементов оскуляции имеют вид

$$\begin{gathered} \xi_i = \sqrt{\Lambda_i} e_i \cos \pi_i, \qquad \eta_i = -\sqrt{\Lambda_i} e_i \sin \pi_i, \\ \Lambda_i e_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2, \qquad tg\,\pi_i = -\eta_i / \xi_i, \\ p_i = \sqrt{\Lambda_i} \sin i_i \cos \Omega_i, \qquad q_i = -\sqrt{\Lambda_i} \sin i_i \sin \Omega_i, \\ \Lambda_i \sin^2 i_i = p_i^2 + q_i^2, \qquad tg\Omega_i = -q_i / p_i. \end{gathered} \tag{3.80}$$

Тогда, в первую очередь, сама полученная система канонических уравнений (3.79) делится на две отдельные подсистемы (детали см. [48]). Первая система определяет уравнения векового возмущения для эксцентрических элементов (ξ_i, η_i). Вторая система определяет уравнения векового возмущения для наклонных (облических) элементов (p_i, q_i). Линейность системы (3.79) дифференциальных уравнений с приближениями (3.80) в постановке рассматриваемой задачи значительно упрощает изучение неавтономной системы канонических дифференциальных уравнений векового возмущения.

Вековые возмущения элементов Пуанкаре определяется как решение системы линейных дифференциальных уравнений со сложным коэффициентом $4n$.

3.5 Уравнения вековых возмущении циркумбинарных двухпланетных систем с изотропно изменяющимися массами

С момента подтверждения первой экзопланеты в 1992 году число экзопланет постоянно растет, и за это время было собрано много наблюдательного материала. Это стимулирует изучение динамической эволюции экзопланетных систем и делает данную проблему очень актуальной.

Проблема усложняется, если вокруг звезды движутся циркумбинарные планеты и эволюция их орбитальных элементов определяется как потерей звездной массы, так и взаимным планетарным взаимодействием [51]. Другая интересная проблема возникает, если планеты движутся вокруг бинарной системы и учитывается потеря звездной массы [52, 53]. Однако учет нестационарности небесных тел существенно усложняет исследование системы и требует разработки новых математических моделей для их описания.

Наша цель - исследовать влияние изотропной вариации массы на динамическую эволюцию циркумбинарной 2-планетной системы, состоящей из бинарных звезд, на орбите которых вращаются две планеты. Мы рассматриваем простейший случай, когда две звезды бинарной системы теряют свои массы независимо друг от друга с разными скоростями, и учитываем взаимное взаимодействие тел. Дифференциальные уравнения, определяющие светскую эволюцию системы, записываются в терминах оскулирующих аналогов канонических элементов Пуанкаре.

Отметим, что при различных значениях орбитального периода большинство орбит тел в экзопланетных системах имеют малый эксцентриситет и располагаются практически в одной плоскости. Поэтому в рамках разработанной математической модели мы рассматриваем планетные системы с малыми эксцентриситетами и наклонениям $\left(e_j << 1,\ e_j << 1,\ j = 1,2,\ldots n\right)$ и используем для описания их движения аналоги канонических переменных Пуанкаре. Такое приближение также часто применяется при изучении систем многих тел с постоянными массами (см., например, [4], [7]). Для демонстрации

динамических особенностей нашей модели мы используем известные параметры бинарной системы TOI-1338, открытой в 2009 году (см. [54], [55]), и решаем эволюционные уравнения численно. Полученные результаты сравниваются со случаем постоянной массы. Все соответствующие символьные и численные расчеты выполнены с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica [8].

Рассматривается система, состоящая из двух звезд P_0, P_1 с массами $m_0 = m_0(t)$, $m_1 = m_1(t)$ и двух планет P_2, P_3 с массами $m_0 = m_0(t)$, $m_2 = m_2(t)$, $m_3 = m_3(t)$, притягивающихся друг к другу согласно закону всемирного тяготения Ньютона. Массы тел удовлетворяют условию $m_0, m_1 \gg m_2, m_3$ и изменяются с разными скоростями:

$$\frac{\dot{m}_0}{m_0} \neq \frac{\dot{m}_i}{m_i}, \frac{\dot{m}_i}{m_i} \neq \frac{\dot{m}_j}{m_j}, \; i, j = 1,2,3, \quad i \neq j \tag{3.81}$$

Предполагается, что массы всех тел изменяются изотропно, а импульс ускользающей (или падающей) массы каждого тела равен импульсу, который эта масса имела бы, если бы была прикреплена к движущемуся телу в его центре масс (см. [21]). Динамика такой системы может быть изучена в рамках общей задачи четырех тел, и уравнения движения выглядят аналогично случаю тел с постоянной массой. Используя относительную систему координат с началом координат в центре самой массивной звезды P_0, можно записать уравнения движения в виде

$$\ddot{\vec{r}}_i = -f\frac{(m_0 + m_i)}{r_i^3}\vec{r}_i + f\sum_{j=1}^{3}{}'\left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3}\right), \tag{3.82}$$

где f - гравитационная постоянная, радиус-вектор $\vec{r}_i$ определяет положение тела $P_i(i = 1,2,3)$ относительно звезды P_0, $r_i = |\vec{r}_i|$, Δ_{ij} - взаимные расстояния центров тел, причем прайм в сумме означает, что $i \neq j$.

Известно, что даже в случае постоянных масс дифференциальные уравнения (3.82) не являются интегрируемыми для трех и более взаимодействующих тел, и для их исследования обычно используется теория возмущений. Поскольку общее решение задачи о двух телах постоянной массы известно и описывает их движение по коническим сечениям, естественно рассматривать это движение как невозмущенное. Однако в случае переменных масс общее решение задачи двух тел не может быть записано в символической форме, и поэтому прямое обобщение пертурбативных методов, развитых в случае постоянных масс, невозможно. Поэтому мы применяем здесь каноническую теорию возмущений, основанную на апериодическом движении вдоль квазиконического сечения, которая позволяет получить достаточно общие результаты (см. [27], [48]).

Отметим, что дифференциальные уравнения движения (3.82) могут быть также решены численно, и такое решение будет детально описывать движение тел. Однако из-за орбитального движения тел вокруг родительской звезды возмущающие функции в правой части (3.82) включают много членов, описывающих короткопериодические колебания. Поэтому для получения решения с высокой точностью необходимо выбирать очень малый размер шага или использовать метод адоптивного размера шага, что существенно увеличивает время расчета. Поскольку нас интересует долговременное поведение системы, необходимо провести дополнительные расчеты, чтобы извлечь секулярную часть решения. Применяя каноническую теорию возмущений, основанную на апериодическом движении вдоль квазиконического сечения, и усредняя дифференциальные уравнения движения, мы получаем непосредственно эволюционные уравнения, состоящие из 12 неавтономных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Коэффициенты этих уравнений медленно меняются со временем, и мы можем легко получить их численные решения для очень больших временных интервалов и исследовать светскую эволюцию системы. Такой подход является лишь обобщением

методов, используемых при изучении светской эволюции системы многих тел с постоянной массой [7].

Пренебрегая вторым членом в правой части уравнения (3.82), мы получаем классическую нестационарную задачу Гильден-Мессерского для двух тел, которая интегрируема только при некоторых специальных законах изменения массы $\left(m_0(t)+m_i(t)\right)$ [37]. В общем случае такую задачу можно рассматривать как возмущенную задачу двух тел, в которую в качестве возмущения вводится дополнительная сила, пропорциональная скорости изменения массы [21], [20]. В результате кеплеровские орбитальные параметры тел становятся функциями времени даже в рамках задачи двух тел с переменной массой. Учет взаимного взаимодействия тел приводит к дополнительному возмущению орбитальных элементов, и задача значительно усложняется.

Для $e_i \square 1$, $i_i \square 1$ канонические переменные ξ_i, η_i, p_i, p_i малы (см. [48]) и возмущающие функции в правых частях дифференциальных уравнений (3.82) можно заменить их разложениями в степенные ряды по этим переменным. Применяя методы компьютерной алгебры, можно вычислить такие разложения с любой требуемой точностью, но соответствующие выражения становятся очень громоздкими в терминах более высокого порядка. Здесь мы ограничимся вычислениями до второго порядка и получим дифференциальные уравнения для канонических переменных ξ_i, η_i, p_i, p_i. Предполагая, что траектории звезды P_1 и планет P_2, P_3 не пересекаются, и усредняя эти уравнения по средним долготам тел в отсутствие среднеподвижных резонансов, получаем дифференциальные уравнения, описывающие секулярную эволюцию аналогов элементов Пуанкаре, в виде

$$\dot{\xi}_i = f\sum_{s=1}^{i-1} m_s\left(\frac{\Pi_{ii}^{is}}{\Lambda_i}\eta_i + \frac{\Pi_{is}^{is}}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_s}}\eta_s\right) +$$

$$+ f\sum_{k=i+1}^{3} m_k\left(\frac{\Pi_{kk}^{ik}}{\Lambda_i}\eta_i + \frac{\Pi_{ik}^{ik}}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_k}}\eta_k\right) - \frac{3\ddot{\gamma}_i\gamma_i\Lambda_i^3}{2\mu_{i0}^2}\eta_i,$$

$$\dot{\eta}_i = -f\sum_{s=1}^{i-1} m_s\left(\frac{\Pi_{ii}^{is}}{\Lambda_i}\xi_i + \frac{\Pi_{is}^{is}}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_s}}\xi_s\right) -$$

$$- f\sum_{k=i+1}^{3} m_k\left(\frac{\Pi_{kk}^{ik}}{\Lambda_i}\xi_i + \frac{\Pi_{ik}^{ik}}{\sqrt{\Lambda_i\Lambda_k}}\xi_k\right) + \frac{3\ddot{\gamma}_i\gamma_i\Lambda_i^3}{2\mu_{i0}^2}\xi_i$$

$$\dot{p}_i = -f\sum_{s=1}^{i-1} m_s B_1^{is}\left(\frac{q_i}{4\Lambda_i} - \frac{q_s}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_s}}\right) -$$

$$- f\sum_{k=i+1}^{3} m_k B_1^{ik}\left(\frac{q_i}{4\Lambda_i} - \frac{q_k}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_k}}\right)$$

$$\dot{q}_i = f\sum_{s=1}^{i-1} m_s B_1^{is}\left(\frac{p_i}{4\Lambda_i} - \frac{p_s}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_s}}\right)$$

$$+ f\sum_{k=i+1}^{3} m_k B_1^{ik}\left(\frac{p_i}{4\Lambda_i} - \frac{p_k}{4\sqrt{\Lambda_i\Lambda_k}}\right), \qquad i,j = 1,2,3.$$

Выражения для коэффициентов $\Pi_{ii}^{is}, \Pi_{is}^{is}, \Pi_{ii}^{ik}, \Pi_{ik}^{ik}$ и B_1^{is}, B_1^{ik} в (3.83), (3.84) можно найти в работе [48].

Следует подчеркнуть, что эволюционные уравнения (3.83), (3.84) справедливы для любого закона изменения массы и могут быть обобщены на любое число планет. Они могут быть использованы для изучения эффектов изменчивости массы в любой планетарной системе. Предполагается только, что массы изменяются изотропно и поэтому реактивные силы не возникают.

Кроме того, скорости изменения масс тел достаточно медленные, и можно считать, что среднее значение массы каждого тела остается постоянным в течение одного оборота.

Отметим, что коэффициенты дифференциальных уравнений (3.83), (3.84) зависят от времени и имеют сложный вид, поэтому получить их аналитические решения не представляется возможным. Далее они будут исследованы численными методами.

Численное решение системы (3.83), (3.84) дает нам значения аналогов элементов Пуанкаре (3.38). Отсюда мы перейдем к элементам апериодического движения по квазиоконическому сечению. Переменные

$$a_i, e_i, i_i, \omega_i, \Omega_i, \phi(\tau_i) \tag{3.85}$$

являются аналогами кеплеровских элементов. С квадратичной точностью мы можем записать

$$sin^2 i_i \approx \frac{p_i^2 + q_i^2}{\Lambda_i}, \qquad e_i^2 \approx \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{\Lambda_i}, \tag{3.86}$$

$$\pi_i = -arctg\frac{\eta_i}{\xi_i}, \qquad \Omega_i = -arctg\frac{q_i}{p_i}, \qquad \omega_i = \pi_i - \Omega_i \tag{3.87}$$

Обычно в астрономии используются оскулирующие элементы эллиптического движения. В динамике планетарных систем с переменной массой предпочтительнее использовать оскулирующие элементы апериодического движения по коническому сечению [51], которые впервые были предложены [20] и [21]. Как показали Омаров и Хаджидеметриу, они геометрически совпадают с оскулирующими элементами классического кеплеровского движения в задаче двух тел с постоянными массами, отнесенными в данный момент времени к текущему значению переменной массы. Другими словами, оскулирующие элементы апериодического движения вдоль конического сечения совпадают с кеплеровскими оскулирующими элементами в смысле Армеллини-Джинса.

Разница между ними обнаруживается только в одном динамическом элементе, а именно в моменте прохождения через перицентр [22]. В данной работе мы приводим графические иллюстрации оскулирующих элементов апериодического движения по эллипсу.

Независимо от системы оскулирующих переменных, в которой описывается движение, значения радиус-вектора и компонент скорости по радиальному и нормальному направлениям одинаковы [56]

$$r_i^{(ell)} = r = r_i, \quad V_{r_i}^{(ell)} = V_r = V_{r_i}, \quad V_{n_i}^{(ell)} = V_n = V_{n_i}, \tag{3.88}$$

Для апериодических элементов движения вдоль эллипса [20] и квазиэллипсных апериодических элементов движения (3.15) уравнения (3.88) в явном виде имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{p_{ell}}{1+e_{ell}\cos\theta_{ell}} = \frac{\gamma p}{1+e\cos\theta}, \\ &\frac{\sqrt{fm}}{\sqrt{p_{ell}}} e_{ell}\sin\theta_{ell} = \frac{\dot\gamma}{\gamma} r + \sqrt{\frac{fm}{p_{ell}}} e\sin\theta, \\ &\sqrt{\frac{fm}{p_{ell}}}\left(1+e_{ell}\cos\theta_{ell}\right) = \sqrt{\frac{fm}{p}}\left(1+e\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{3.89}$$

Из уравнений (3.89) следует

$$p_{ell} = \gamma p, \qquad a_{ell}\left(1-e_{ell}^2\right) = \gamma\left[a\left(1-e^2\right)\right], \tag{3.90}$$

$$e_{ell}\cos\theta_{ell} = e\cos\theta,$$

$$e_{ell}\sin\theta_{ell} = e_i\cos\theta_i + \frac{\dot\gamma_i\sqrt{\gamma_i p_i^3}}{\sqrt{fm_i}\left(1+e_i\cos\theta_i\right)}, \tag{3.91}$$

и

$$e_{ell}^2 = e_i^2 + \frac{2\dot\gamma_i\sqrt{\gamma_i p_i^3}\sin\theta_i}{\sqrt{fm_i}\left(1+e_i\cos\theta_i\right)} + \left[\frac{\dot\gamma_i\sqrt{\gamma_i p_i^3}}{\sqrt{fm_i}\left(1+e_i\cos\theta_i\right)}\right]^2. \tag{3.92}$$

Из этих формул для секулярных возмущений, усредненных по средней долготе, получаем

$$e_{ell} = \left[e_i + \frac{1}{2}a_i^2\left(2-3e_i\right)\dot\gamma_i^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad a_{ell} = \gamma_i a_i. \tag{3.93}$$

Расчеты показывают, что практически $e_{ell} = e$. Поэтому ниже приведены иллюстрации в оскулирующих системах

$$a_{ell}, \quad e_{ell}, \quad i_{ell} = i, \quad \Omega_{ell} = \Omega, \quad \pi_{ell} = \pi. \qquad (3.94)$$

Эволюционные уравнения в безразмерных переменных

Для численного исследования эволюционных уравнений (3.83) и (3.84) целесообразно использовать безразмерные переменные. Например, мы можем использовать начальные значения большой полуоси $a_{10} = a_1(t_0)$ звезды P_1 и массы m_{00} самой массивной звезды P_0 в качестве единиц расстояния и массы, соответственно, и определить безразмерную полуось a_j^* массу m_j^* и время t^*

$$a_i^* = \frac{a_i}{a_{10}}, \qquad m_0^* = \frac{m_i}{m_{00}}, \qquad m_i^* = \frac{m_i}{m_{00}}$$

$$t^* = t\frac{\sqrt{\mu_{10}}}{a_{10}^{3/2}}, \qquad i = 1,2,3.$$

Тогда безразмерные канонические переменные Пуанкаре ξ_i, η_i, p_i, p_i определяются как

$$\xi_i^* = \frac{\xi_i}{(\mu_{10}a_{10})^{1/4}}, \qquad \eta_i^* = \frac{\eta_i}{(\mu_{10}a_{10})^{1/4}},$$

$$q_i^* = \frac{q_i}{(\mu_{10}a_{10})^{1/4}}, \qquad p_i^* = \frac{p_i}{(\mu_{10}a_{10})^{1/4}}, \ i = 1,2,3.$$

Используя безразмерные переменные, мы можем переписать уравнения (3.83) для эксцентрических аналогов элементов Пуанкаре $\xi_i, \eta_i, (i = 1,2,3)$ в виде

$$\dot{\xi}_1^* = \left(m_2^* \Pi_{11}^{12*} + m_3^* \Pi_{11}^{13*} - \frac{3}{2\sqrt{1+m_{10}^*}} \gamma_1 \ddot{\gamma}_1 \right) \cdot \eta_1^* + \frac{m_2^*}{2} \Pi_{12}^{12*} \eta_2^* + \frac{m_3^*}{2} \Pi_{13}^{13*} \eta_3^*,$$

$$\dot{\eta}_1^* = -\left(m_2^* \Pi_{11}^{12*} + m_3^* \Pi_{11}^{13*} - \frac{3}{2\sqrt{1+m_{10}^*}} \gamma_1 \ddot{\gamma}_1 \right) \cdot \xi_1^* - \frac{m_2^*}{2} \Pi_{12}^{12*} \xi_2^* - \frac{m_3^*}{2} \Pi_{13}^{13*} \xi_3^*,$$

$$\dot{\xi}_2^* = \left(m_1^* \Pi_{22}^{12*} + m_3^* \Pi_{22}^{23*} - \frac{3}{2\sqrt{1+m_{20}^*}} \gamma_2 \ddot{\gamma}_2 \right) \cdot \eta_2^* + \frac{m_1^*}{2} \Pi_{12}^{12*} \eta_1^* + \frac{m_3^*}{2} \Pi_{23}^{23*} \eta_3^*, \quad (3.96)$$

$$\dot{\eta}_2^* = -\left(m_1^* \Pi_{22}^{12*} + m_3^* \Pi_{22}^{23*} - \frac{3}{2\sqrt{1+m_{20}^*}} \gamma_2 \ddot{\gamma}_2 \right) \cdot \xi_2^* - \frac{m_1^*}{2} \Pi_{12}^{12*} \xi_1^* - \frac{m_3^*}{2} \Pi_{23}^{23*} \xi_3^*,$$

$$\dot{\xi}_3^* = \left(m_1^* \Pi_{33}^{13*} + m_2^* \Pi_{33}^{23*} - \frac{3}{2\sqrt{1+m_{30}^*}} \gamma_3 \ddot{\gamma}_3 \right) \cdot \eta_3^* + \frac{m_1^*}{2} \Pi_{13}^{13*} \eta_1^* + \frac{m_2^*}{2} \Pi_{23}^{23*} \eta_2^*,$$

$$\dot{\eta}_3^* = -\left(m_1^* \Pi_{33}^{13*} + m_2^* \Pi_{33}^{23*} - \frac{3}{2\sqrt{1+m_{30}^*}} \gamma_3 \ddot{\gamma}_3 \right) \cdot \xi_3^* - \frac{m_1^*}{2} \Pi_{13}^{13*} \xi_1^* + \frac{m_2^*}{2} \Pi_{23}^{23*} \xi_2^*,$$

Уравнения (3.84) для облических аналогов элементов Пуанкаре $q_i, p_i, (i = 1,2,3)$ имеют вид

$$\dot{p}_1 = -\frac{m_2^*}{4} B_1^{12*} \left(\frac{q_1^*}{\sqrt{1+m_{10}^*}} - \frac{q_2^*}{\left(\left(1+m_{10}^*\right)\left(1+m_{20}^*\right) a_2^* \right)^{1/4}} \right) -$$

$$- \frac{m_3^*}{4} B_1^{13*} \left(\frac{q_1^*}{\sqrt{1+m_{10}^*}} - \frac{q_3^*}{\left(\left(1+m_{10}^*\right)\left(1+m_{30}^*\right) a_3^* \right)^{1/4}} \right)$$

$$\dot{q}_1 = \frac{m_2^*}{4} B_1^{12*} \left(\frac{p_1^*}{\sqrt{1+m_{10}^*}} - \frac{p_2^*}{\left(\left(1+m_{10}^*\right)\left(1+m_{20}^*\right) a_2^* \right)^{1/4}} \right) +$$

$$+ \frac{m_3^*}{4} B_1^{13*} \left(\frac{p_1^*}{\sqrt{1+m_{10}^*}} - \frac{p_3^*}{\left(\left(1+m_{10}^*\right)\left(1+m_{30}^*\right) a_3^* \right)^{1/4}} \right)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{m_1^*}{4} B_1^{12*} \left(\frac{q_2^*}{\sqrt{\left(1+m_{20}^*\right) a_2^*}} - \frac{q_1^*}{\left(\left(1+m_{10}^*\right)\left(1+m_{20}^*\right) a_2^* \right)^{1/4}} \right) -$$

$$- \frac{m_3^*}{4} B_1^{23*} \left(\frac{q_2^*}{\sqrt{\left(1+m_{20}^*\right) a_2^*}} - \frac{q_3^*}{\left(\left(1+m_{20}^*\right)\left(1+m_{30}^*\right) a_2^* a_3^* \right)^{1/4}} \right)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{m_1^*}{4} B_1^{12*} \left(\frac{p_2^*}{\sqrt{\left(1+m_{20}^*\right) a_2^*}} - \frac{p_1^*}{\left(\left(1+m_{10}^*\right)\left(1+m_{20}^*\right) a_2^* \right)^{1/4}} \right) +$$

$$+ \frac{m_3^*}{4} B_1^{23*} \left(\frac{p_2^*}{\sqrt{\left(1+m_{20}^*\right) a_2^*}} - \frac{p_3^*}{\left(\left(1+m_{20}^*\right)\left(1+m_{30}^*\right) a_2^* a_3^* \right)^{1/4}} \right)$$

$$\dot{p}_3 = -\frac{m_1^*}{4} B_1^{13*} \left(\frac{q_3^*}{\sqrt{\left(1+m_{30}^*\right) a_3^*}} - \frac{q_1^*}{\left(\left(1+m_{10}^*\right)\left(1+m_{30}^*\right) a_3^* \right)^{1/4}} \right) -$$

$$- \frac{m_2^*}{4} B_1^{23*} \left(\frac{q_3^*}{\sqrt{\left(1+m_{30}^*\right) a_3^*}} - \frac{q_2^*}{\left(\left(1+m_{20}^*\right)\left(1+m_{30}^*\right) a_2^* a_3^* \right)^{1/4}} \right)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{m_1^*}{4} B_1^{13*} \left(\frac{p_3^*}{\sqrt{\left(1+m_{30}^*\right) a_3^*}} - \frac{p_1^*}{\left(\left(1+m_{10}^*\right)\left(1+m_{30}^*\right) a_3^* \right)^{1/4}} \right) + \qquad (3.97)$$

$$+ \frac{m_2^*}{4} B_1^{23*} \left(\frac{p_3^*}{\sqrt{\left(1+m_{30}^*\right) a_3^*}} - \frac{p_2^*}{\left(\left(1+m_{20}^*\right)\left(1+m_{30}^*\right) a_2^* a_3^* \right)^{1/4}} \right)$$

Коэффициенты $\Pi_{ii}^{ik}, \Pi_{ik}^{ik}$ и B_1^{ik} неавтономных уравнений (3.96), (3.97) зависят от соответствующих коэффициентов Лапласа, записанных в безразмерных переменных [48].

Рассмотрим некоторую циркумбинарную систему с двумя планетами, вращающимися вокруг бинарной конфигурации. Для моделирования эволюции системы нам необходимо выбрать некоторый закон изменения массы каждого тела. Для звезд можно использовать закон Эддингтона-Джинса, но здесь мы для простоты предположим, что звезды P_0, P_1 бинарной системы теряют свои массы независимо друг от друга с постоянной скоростью

$$\dot{m}_0 = 7.5 \cdot 10^{-6} M_{\odot} / yr, \; \dot{m}_0 = 1.56 \cdot 10^{-6} M_{\odot} / yr. \qquad (3.98)$$

Отметим, что такие скорости соответствуют максимальным скоростям потери массы на этапе постглавной последовательности звездной эволюции [57]. В реальности на ранних этапах постглавной последовательности темпы потери массы гораздо меньше и могут достигать таких значений за сотни миллионов лет. Однако моделирование динамической эволюции циркумбинарной системы на таких временных интервалах требует больших вычислительных затрат. С другой стороны, существенного влияния потери массы на эволюцию системы можно ожидать только при достаточно большом изменении массы. Выбирая скорости потери массы (3.98), мы можем интегрировать эволюционные уравнения (3.96) и (3.97) на меньшем временном интервале и получить результаты, реалистичные для звездной эволюции.

Следует также отметить, что скорость потери массы у звезды P_1 должна быть на порядки меньше, чем у звезды P_0 [58]. Кроме того, взаимное взаимодействие двух звезд усложняет их эволюцию и может изменять законы изменения их массы. Но здесь мы рассматриваем простейшую модель циркумбинарной 2-планетной системы и сосредоточимся на влиянии изменения массы на элементы орбиты. Поскольку массы планет P_2, P_3 очень малы по сравнению с массами звезд P_0, P_1 можно предположить, что влияние изотропного изменения массы планет на секулярные

возмущения элементов орбит пренебрежимо мало. Наши предварительные расчеты показали, что это предположение обоснованно, поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что массы планет постоянны.

Для выбора реалистичных значений параметров мы предполагаем, что рассматриваемая система имеет общие параметры с TOI-1338 [55], и рассматриваем следующие начальные данные:

$$m_{00} = 1.127 M_{\sqcup},\ m_{10} = 0.313 M_{\sqcup},$$

$$m_{20} = 9.90901 \times 10^{-5} M_{\sqcup}, m_{30} = 1.95778 \times 10^{(-4)} M_{\sqcup},$$

$$a_{10} = 0.1321 AU,\ a_{20} = 0.4607 AU,\ a_{30} = 0.794 AU,$$

$$e_{10} = 0.155522,\ e_{20} = 0.0880,\ e_{30} = 0.16,$$

$$i_{10} = 0.35^{\circ}, i_{20} = 0.63^{\circ}, i_{30} = 0.5^{\circ},$$

$$\Omega_{10} = 0^{\circ}, \Omega_{20} = 0.91^{\circ}, \Omega_{30} = 40^{\circ},$$

$$\omega_{10} = 117.77^{\circ}, \omega_{20} = 258.6^{\circ}, \omega_{30} = 220^{\circ}.$$

Выбирая начальные значения элементов орбиты, мы использовали данные [2], [55], [54] и [59]. Поскольку данных о наклонении внешней планеты P_1, P_3 системы TOI-1338 нет, мы выбрали вполне разумное значение $i_{30} = 0.5^{\circ}$ (по рекомендации авторов [55]).

На основе уравнений (3.96), (3.97) численными методами были рассчитаны секулярные возмущения элементов орбиты рассматриваемой экзопланетной системы. Результаты, полученные в диапазоне около 5000 000 оборотов звезды P_1, представлены на работе [26].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей монографии изложены основы теории возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению разработанная нами для гравитирующих систем с переменными массами. Приведены различные формы уравнения возмущенного движения и в разных переменных. Дифференциальные уравнения невозмущенного движения проинтегрированы различными методами, соответственно выведены уравнения возмущенного движения в разной форме.

Выведены уравнения возмущенного движения в форме уравнения Ньютона в орбитальной системе координат. Полученная форма уравнения Ньютона удобно для исследования динамической эволюции гравитирующих систем, когда массы тел изменяется со временем не изотропно при наличии реактивных сил. В книге приведены применения уравнении Ньютона для задачи двух тел с не изотропно изменяющимися массами при наличии реактивных сил. Получены система дифференциальных уравнений вековых возмущений, которая допускает один точный интеграл. Аналитический вид интеграла очень простой, что делает его удобным в приложениях.

Исходя из уравнений возмущенного движения в форме уравнения Ньютона получены уравнения возмущенного движения в форме Лагранжа. Уравнение Лагранжа удобны, когда возмущающие силы допускают силовую функцию и простые в применении. В монографии приведены уравнения Лагранжа в различных системах оскулирующих элементов. Главная проблема в применении уравнении возмущенного движения – выражения возмущающей функции через оскулирующие элементы детально изложена. На практике эти громоздкие и объемные аналитические вычисления выполняется с использованием компьютерной алгебры в различных системах аналитических вычислении. В книге для разложения возмущающей функции используется система аналитических вычислении Mathematica. Как пример использования уравнения вековых возмущении в форме уравнения Лагранжа исследована двух планетная задача трех тел с переменными массами. Отметим, что двух планетная задача трех тел с переменными

массами является важным промежуточным этапом в исследовании много планетной задачи с переменными массами.

В исследовании динамики гравитирующих систем с переменными массами уравнения возмущенного движения в форме уравнения Ньютона и Лагранжа приводят к громоздким и объемным аналитическим вычислениям. По-видимому, наиболее удобная и компактная форма уравнения, возмущенного движения - это каноническая теория возмущения. В монографии приведены интегрирование методом Гамильтона-Якоби апериодического движения по квазиконическому сечению как невозмущенное движение. Далее выведены уравнения возмущенного движения в оскулирующих аналогах элементов Якоби, Делоне и второй системы Пуанкаре. Уравнения возмущенного движения в канонических аналогах элементов второй системы Пуанкаре особенно удобны для исследования многопланетных систем с переменными массами в случае, когда аналоги эксцентриситетов и наклонности очень малы. Как пример рассмотрены циркумбинарная двух планетная система с изотропно изменяющимися массами в различных темпах. Получены уравнения вековых возмущении в аналогах оскулирующих элементов второй системы Пуанкаре.

Следует отметить, в мировой литературе отсутствует последовательное и детальное изложение теории возмущении для исследования гравитирующих систем с переменными массами с формулами разложения возмущающей силы. Настоящая монография — это первая попытка восполнить этот пробел и может быть рекомендована для практического применения.

Теория возмущения, построенная на базе апериодического движения по квазиконическому сечению, открывает новые горизонты в исследовании гравитирующих систем с переменными массами. Приведенные в монографии различные формы уравнения возмущенного движения, в различных системах оскулирующих переменных, открывают новые перспективы в исследовании эффектов переменности масс в реальных космических системах в области астрономии и астрофизики.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Wolszczan A., Frail D. A., 1992, Nature, 355(6356), 145
2. NASA Exoplanet Archive Portal, https://filtergraph.com/nea/default/index/4707728
3. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит. – 1968. – 808 с.
4. Дубошин Г.Н. Небесная механика: Основные задачи и методы. М.: Наука.1975. - 799 с.
5. Morbidelli A. Modern Celestial Mechanics. Aspects of Solar System Dynamics. 2011. https://books.google.kz/books?id=efIvjgEACAAJ
6. Celletti, A.: Stability and Chaos in Celestial Mechanics. Springer Praxis Books. Springer. 2010. https://doi.org/10.1007/978-3-540-85146-2
7. Мюррей К., Дермотт С. Динамика солнечной системы. Пер. с англ. Москва. Физматлит. - 2010. - 588 с.
8. Wolfram S. An Elementary Introduction to the Wolfram Language. Champaign, IL: Wolfram Media. 2015. – 324 p.
9. Eggleton P. Evolutionary processes in binary and multiple stars. Cambridge University Press. – 2006. – P.332.
10. Черепащюк А.М. Тесные двойные звезды. Часть II. Москва. Физматлит. - 2013. – 572 с.
11. Gillon M. et.al. Seven temperate terrestrial planets around the nearby ultracool dwarf star TRAPPIST-1 //Nature. - 2017. – V.542. № 7642. - P. 456-460. doi:10.1038/nature21360
12. Shallue C. J., Vanderburg A. Identifying Exoplanets with Deep Learning: A Five-planet Resonant Chain around Kepler-80 and an Eighth Planet around Kepler-90 //The Astronomical Journal. - 2018. – V.155. №2. article id. 94. 21 pp. doi: 10.3847/1538-3881/aa9e09
13. Perminov A.S., Kuznetsov E.D.: The implementation of hori–deprit method to the construction averaged planetary motion theory by means of computeralgebra system piranha. Mathematics in Computer Science 14, 305–316 (2020)n https://doi.org/10.1007/s11786-019-00441-4

14. Kuznetsov E. D. Orbital evolution of phaethon cluster B: Meteoritics & Planetary Science. -2021. – 56 p.
15. Kuznetsov E.D., Rosaev A.E., Plavalova E., Safronova V.S., Vasileva M.A. A Search for Young Asteroid Pairs with Close Orbits //Solar System Research. – 2020. - V. 54. № 3. – P. 236-252. doi: 10.1134/s0038094620030077
16. Perminov A.S., Kuznetsov E.D.: The orbital evolution of the sun–jupiter–saturn–uranus–neptune system on long time scales //Astrophysics and Space Science 365. 2020 https://doi.org/10.1007/s10509-020-03855-w
17. Perminov, A.S., Kuznetsov, E.D.: Orbital evolution of the extrasolar planetary systems HD 39194, HD 141399, and HD 160691 //Astronomy Reports. - 2019. - Vol.63. - P.795–813 https://doi.org/10.1134/S1063772919090075
18. Tamayo D. et al. Stability Constrained Characterization of Multiplanet Systems //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2021. -Vol.501, Issue 4. P.4798–4811 https://doi.org/10.1093/mnras/staa3887
19. Veras D., Hadjidemetriou J.D., Tout C.A. An Exoplanet's Response to Anisotropic Stellar Mass-Loss during Birth and Death //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2013. – Vol.435. - P.2416. doi: 10.1093/mnras/stt1451
20. Omarov T.B. Two-body motion with corpuscular radiation //Soviet Astronomy. - 1964. – Vol.7 - P. 707–719.
21. Hadjidemetriou J.D. Two-body problem with variable mass: A new approach //Icarus. - 1963. - Vol.2. - P. 440-451. doi:10.1016/0019-1035(63)90072-1
22. Омаров Т.Б. Динамика гравитирующих систем метагалактики //Изд. Наука, Казахской ССР. Алма-Ата. – 1975. -144с.
23. Лурье А.И. Уравнение возмущенного движения в задаче Кеплера //Прикладная математика и механика. – 1959. – Т.23, №2. – С.412-414.
24. Ibraimova A.T., Minglibayev M.Zh. To The Dynamics of the Two-Body Problem with Variable Masses in the Presence of Reactive Forces //Proceedings of the International Astronomical Union. - 2021. - Vol.17 (s370). - P.281-282.

doi: 10.1017/s1743921322003611
25. Minglibayev M., Prokopenya A., Shomshekova S. Computing perturbations in the two-planetary three-body problem with masses varying non-isotropically at different rates // Mathematics in Computer Science. - 2020. -Vol.14, no. 2, P. 241 – 251.
26. Mukhtar Zh Minglibayev, Alexander N Prokopenya, Aiken B Kosherbayeva, Secular evolution of circumbinary 2-planet systems with isotropically varying masses //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2024. - Vol.530, Issue 2. – P. 2156–2165. https://doi.org/10.1093/mnras/stae1015
27. Минглибаев М.Дж. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение. LAP LAMBERT Academic Publishing, Германия. 2012. 229 с.
28. Майлыбаев А.Т. О периодическом движении по квазиэллипсу и его приложении к динамике бинарных систем переменной массы //Тез. докл. IX Республ. Межвуз. науч. конф. по матем. и мех. – Алма-Ата: 1989. - Ч. 3. - С. 18.
29. Minglibayev M.Zh., Omarov Ch.T., Ibraimova A.T. New forms of the perturbed motion equation //Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2020. – V.2 (330). – P.5-13. doi: 10.32014/2020.2518-1483.25
30. Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г.Н. Дубошина. М.: Наука. 1976. - 864 с.
31. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Движение натурального триэдра траектории точки. В кн. Курс теоретической механики. Том 1, 6-изд. ГИТТЛ. Москва. – 1955. – 375с.
32. Минглибаев М.Дж Модельные задачи гравитирующих систем переменной массы: Автореф. дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.02.01. – Алма-ата: КазГУ, 1989. -16 с.
33. Ibraimova A.T. Evolution equations of the restricted three-body problem with variable masses //News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-mathematical series. – 2021. - Vol.3(337). - P.65-74. https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.48

34. M. Minglibayev, A. Kosherbayeva. Evolution equations of multi-planet systems with variable masses //Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. - 2022. - Vol.116, № 4. P.35-45. https://doi.org/10.26577/JMMCS.2022.v116.i4.04
35. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1952. -281 с.
36. Лукьянов Л.Г. Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс //Астрон.журн. – 2008. – Т.85, №8. – С.755-768.
37. Berkovich L.M. Gylden-Meščerskii problem //Celestial Mechanics. 1981. Volume 24, Issue 4, P.407-429
38. Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения.– Ижевск: НИЦ РХД, 2002. – 464 с.
39. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы небесной механики. – М.: Наука, 1971. - 444 с
40. Bizhanova S.B., Minglibayev M.Zh., Prokopenya A.N. A Study of Secular Perturbations of Translational-Rotational Motion in a Nonstationary Two-Body Problem Using Computer Algebra //Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 2020. - Vol.60, №1. P.26–35. doi: 10.1134/S0965542520010054
41. Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р. Небесная механика (Общий курс). - 2007. - 550 с.
42. Prokopenya A. N., Minglibayev M. Zh., Shomshekova S. A. Applications of Computer Algebra in the Study of the Two-Planet Problem of Three Bodies with Variable Masses //Programming and Computer Software. - 2019. – V. 45. – № 2. – P.73–80. doi:10.1134/S0361768819020087.
43. Minglibayev M. Zh., Mayemerova G. M. Evolution of the orbital-plane orientations in the two-protoplanet three-body problem with variable masses //Astronomy Reports. - 2014. - Vol. 58, no. 9, P.667 – 677.
44. Ибраимова А.Т., Минглибаев М.Дж., Прокопеня А.Н. Исследование вековых возмущений в ограниченной задаче трех тел переменной массы с применением компьютерной

алгебры //Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2023. -V.63 (1). - С.154–164
45. Chichurin A., Prokopenya A., Minglibayev M., Kosherbayeva A. Symbolic-Numeric Computation in Modeling the Dynamics of the Many-Body System TRAPPIST. In: Mikyška J., de Mulatier C., Paszynski M., Krzhizhanovskaya V.V., Dongarra J.J., Sloot P.M. (eds) Computational Science – ICCS 2023. ICCS 2023. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Cham. 2023. V.14075. P.469–482 https://doi.org/10.1007/978-3-031-36024-4_36
46. Беков А.А., Омаров Т.Б. Интегрируемые случаи уравнения Гамильтона-Якоби и некоторые нестационарные задачи небесной механики //Астрон. ж. – 1978.– Т. 55, вып.3. - С. 635-644.
47. Минглибаев М.Дж., Омаров Т.Б. К нестационарным модельным задачам небесной механики //Труды АФН АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1984.- Т.43.- С. 3-11.
48. Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Kosherbayeva A.B. Derivation of Evolutionary Equations in the Many – Body Problem with Isotropically Varying Masses Using Computer Algebra //Programming and Computer Software. – 2022. –V.48. – № 2. – P.107–115.
49. Прокопеня А. Н., Минглибаев М. Дж., Маемерова Г. М. Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами //Программирование. - 2014. - Т. 40, № 2. - С. 51-59.
50. Prokopenya A., Minglibayev M., Kosherbayeva A. Modeling the Dynamics of a Multi-planetary System with Anisotropic Mass Variation. In: Franco L., de Mulatier C., Paszynski M., Krzhizhanovskaya V.V., Dongarra J.J., Sloot P.M.A. (eds) Computational Science – ICCS 2024. ICCS 2024. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Cham. 2024. V.14836. P.181–196 https://doi.org/10.1007/978-3-031-63775-9_13
51. Voyatzis, G., Hadjidemetriou, J.D., Veras, D., H., V.: Multiplanet destabilization and escape in post-main-sequence systems // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 430(4), 3383–3396 (2013)

https://doi.org/10.1093/mnras/stt137
52. Kostov, V.B., Moore, K., Tamayo, D., R., J., Rinehart, S.A.: Tatooine's future: The eccentric response of kepler's circumbinary planets to common-envelope evolution of their host stars //The Astrophysical Journal. 832(2). 30 (2016) https: //doi.org/10.3847/0004-637X/832/2/183
53. Veras D., Mustill A.J., Gansicke B.T. The orbital evolution of asteroids, pebbles and planets from giant branch stellar radiation and winds //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2015. – Vol. 451, Issue 3. - P.2814–2834 https://doi.org/10.1093/mnras/stv1047
54. Kostov V. B., et al. Multiple Transits during a Single Conjunction: Identifying Transiting Circumbinary Planetary Candidates from TESS //Astronomical Journal. – 2020. 160. 174. doi: 10.3847/1538-3881/abad40
55. Standing M.R., Sairam L., Martin D.V. et al. Radial-velocity discovery of a second planet in the TOI-1338/BEBOP-1 circumbinary system //Nature Astronomy. – 2023. - Vol.7. –P. 702–714. https://doi.org/10.1038/s41550-023-01948-4
56. Минглибаев М.Дж., Омаров Т.Б. К нестационарным модельным задачам небесной механики //Труды АФИ АН КазССР. – Алма-Ата: Наука, 1984. - Т.43. - С. 3-11.
57. Veras D. Post-main-sequence planetary system evolution //Royal Soc. Open Science. - 2016. DOI: 10.1098/rsos.150571
58. Veras D. Explicit relations and criteria for eclipses, transits and occulations //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2019. –Vol. 483. – Issue 3. – P.3919-3949.
59. Gaki D., Gourgouliatos K.N. Orbits of the TOI-1338 and TIC-172900988 systems //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. - 2023. - Vol.519, Issue 3. – P.3832–3842. https://doi.org/10.1093/mnras/stac3782

Научное издание

Минглибаев Мухтар Джумабекович

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ
НА БАЗЕ АПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ
ПО КВАЗИКОНИЧЕСКОМУ СЕЧЕНИЮ

Монография

Выпущено в авторской редакции

ИБ 15504

Подписана в печать 16.10.2024. Формат 60x84/16.
Объем 6,8 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 11691.

Отпечатано в типографии издательского дома
«Қазақ университеті»
г. Алматы, проспект аль-Фараби 71.