

ISSN 1563 – 0277
eISSN 2617 – 4871
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ХАБАРШЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№ 4 (104)

Алматы
«Қазақ университеті»
2019

Зарегистрирован в Министерстве информации и коммуникаций Республики Казахстан, свидетельство № 16508-Ж от 04.05.2017 г. (Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.). Язык издания: казахский, русский, английский. Выходит 4 раза в год. Тематическая направленность: теоретическая и прикладная математика, механика, информатика.

Редакционная коллегия

научный редактор – Б.Е. Кангузин, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби,
заместитель научного редактора – Д.И. Борисов, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Россия,
ответственный секретарь – Г.М. Даирбаева, к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., Университет международного бизнеса, Казахстан

Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Бектемесов М.А. – д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан

Жакебаев Д.Б. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия

Кыдырбекулы А.Б. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института аэродинамики, Германия

Малышкин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия

Ракишева З.Б. – к.ф.-м.н., доцент, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания

Сагитов С.М. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Гетеборга, Швеция

Сукачев Ф.А. – профессор, академик АН Австралии, Университет Нового Южного Уэльса

Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

Темляков В.Н. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Южной Каролины, США

Токмагамбетов Н.Е. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Шиничи Накасука – PhD доктор, профессор, Университет Токио, Япония

Научное издание

Вестник. Серия математика, механика, информатика, № 4(104) 2019.

Редактор – Г.М. Даирбаева. Компьютерная верстка – Г.М. Даирбаева

ИБ N 13253

Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 9,2 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ N 8629. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

MPHTI 27.29.19

<https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m1>¹Аймал Раса Гулам Хазрат , ²Г.С. Аузерхан , ³А.А. Бейсенбай ¹PhD докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан, E-mail: aimal.rasa14@gmail.com²PhD докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан, E-mail: auzerkhanova@gmail.com³магистр, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан, E-mail: arayb1502@gmail.com

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ФУНКЦИИ ГРИНА В ОКРЕСТНОСТИ ПРОСТОГО ПОЛЮСА

Аннотация. Известно, что функция Грина краевой задачи представляет мероморфную функцию от спектрального параметра. Когда краевые условия содержат интегро-дифференциальные члены, то мероморфность функции Грина такой задачи также можно доказать. При этом удается выписать структуру вычета в особых точках функции Грина краевой задачи с интегродифференциальными возмущениями. Анализ структуры вычета позволяет утверждать, что собственные функций исходного оператора достаточно гладкие функции. Удивительно, что сопряженный оператор может иметь негладкие собственные функции. В работе выяснена степень негладкости собственной функции сопряженного оператора к оператору с интегро-дифференциальными краевыми условиями. Указывается, что даже сопряженные к многоточечным граничным задачам обладают негладкими собственными функциями. **Ключевые слова:** оценка, полюс, собственные значения, интегро-дифференциальные условия, единственное решение, ряд Лорана, сопряженный оператор, собственная функция, возмущенная краевая задача, граничные условия, функция Грина, резольвента, базис Рисса, простой нуль.

¹Аймал Раса Гулам Хазрат, ²Г.С. Аузерхан, ³А.А. Бейсенбай¹PhD докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: aimal.rasa14@gmail.com²PhD докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: auzerkhanova@gmail.com³магистр, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: arayb1502@gmail.com

Қарапайым полюс маңайындағы Грин функциясының аналитикалық табиғаты

Аңдатпа. Шекаралық есептің Грин функциясы спектральды параметрдің мероморфтық функциясы екені белгілі. Егер шекаралық шарттарда интегро-дифференциалды мүшелер болса, онда мұндай есептің Грин функциясының мероморфтылығын да дәлелдеуге болады. Бұл жағдайда ауытқыған интегро-дифференциалды шекаралық есептердің Грин функциясының сингулярлы нүктелеріндегі шегерімнің құрылымын жазуға болады. Қалдық құрылымын талдау бастапқы оператордың меншікті функциялары жеткілікті тегіс функция болатынын тұжырымдауға мүмкіндік береді. Бір таңқаларлығы, түйіндес оператордың тегіс емес меншікті функциялары болуы мүмкін. Бұл жұмыста интегро-дифференциалды шекаралық шарттар бар операторға түйіндес оператордың меншікті функциясының тегіс еместігінің деңгейі анықталды. Көпнүктелі шекаралық есептерге түйіндестердің де тегіс емес меншікті функцияларға ие болатыны көрсетілген.

Түйін сөздер: бағалау, полюс, меншікті мәндер, интегро-дифференциалды шарттар, жалғыз шешім, Лоран тізбегі, түйіндес оператор, меншікті функция, шекаралық ауытқыған есеп, шекаралық шарттар, Грин функциясы, резольвента, Рисс базисі, жай нөл.

¹Ghulam Hazrat Aimal Rasa, ²G.S. Auzerkhan, ³A.A. Beisenbay
¹PhD doctoral, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: aimal.rasa14@gmail.com
²PhD doctoral, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: auzerkhanova@gmail.com
³master, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: arayb1502@gmail.com

The analytical nature of the Green's function in the vicinity of a simple pole

Abstract. It is known that the Green function of a boundary value problem is a meromorphic function of a spectral parameter. When the boundary conditions contain integro-differential terms, then the meromorphism of the Green's function of such a problem can also be proved. In this case, it is possible to write out the structure of the residue at the singular points of the Green's function of the boundary value problem with integro-differential perturbations. An analysis of the structure of the residue allows us to state that the eigenfunction functions of the original operator are sufficiently smooth functions. Surprisingly, the adjoint operator can have non-smooth eigenfunctions. The degree of non-smoothness of the eigenfunction of the adjoint operator to an operator with integro-differential boundary conditions is clarified. It is indicated that even those conjugate to multipoint boundary value problems have non-smooth eigenfunctions.

Key words: estimate, pole, eigenvalues, integro-differential conditions, unique solution, Laurent series, adjoint operator, eigenfunction, perturbed boundary, value problem, boundary conditions, Green's function, resolution, Riesz basis, simple zero.

1 Введение

Пусть $0 < x < 1$ и задано дифференциальное выражение

$$L(y) = y^n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)}(x), 0 < x < 1$$

с гладкими коэффициентами $p_k \in C^k[0, 1], k = 0, 1, \dots, n-1$. Дальнейшие все рассуждения показаны для случая $n=3$, однако приводимые результаты (при соответствующей их модификации) выполняются для произвольных n . Найдем набор чисел $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ таких, что $\theta_0 \neq 0$ и $\theta_1 \neq 0$, где

$$\theta_0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{(\gamma_1)} & \alpha_1 \omega_2^{(\gamma_1)} & \beta_1 \omega_3^{(\gamma_1)} \\ \alpha_2 \omega_1^{(\gamma_2)} & \alpha_2 \omega_2^{(\gamma_2)} & \beta_2 \omega_3^{(\gamma_2)} \\ \alpha_3 \omega_1^{(\gamma_3)} & \alpha_3 \omega_2^{(\gamma_3)} & \beta_3 \omega_3^{(\gamma_3)} \end{vmatrix}, \theta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{(\gamma_1)} & \beta_1 \omega_2^{(\gamma_1)} & \beta_1 \omega_3^{(\gamma_1)} \\ \alpha_2 \omega_1^{(\gamma_2)} & \beta_2 \omega_2^{(\gamma_2)} & \beta_2 \omega_3^{(\gamma_2)} \\ \alpha_3 \omega_1^{(\gamma_3)} & \beta_3 \omega_2^{(\gamma_3)} & \beta_3 \omega_3^{(\gamma_3)} \end{vmatrix},$$

$$\omega_1 = -1, \omega_2 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \omega_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Из результатов работ [1], [2] вытекает, что совокупность граничных условий

$$\begin{aligned} U_1(y) &= \alpha_1 y^{(\gamma_1)}(0) + \beta_1 y^{(\gamma_1)}(1) = 0, \\ U_2(y) &= \alpha_2 y^{(\gamma_2)}(0) + \beta_2 y^{(\gamma_2)}(1) = 0, \\ U_3(y) &= \alpha_3 y^{(\gamma_3)}(0) + \beta_3 y^{(\gamma_3)}(1) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

представляют усиленно-регулярные краевые условия. Поэтому система собственных функций задачи на собственные значения

$$L(y) = \lambda y, \quad 0 < x < 1 \quad (2)$$

с краевыми условиями (1) образуют базис Рисса в функциональном пространстве $L_2(0, 1)$. Согласно монографии [3], асимптотика одной серии собственных значений краевой задачи (1), (2) имеет вид

$$\lambda'_k = (-2k\pi i)^3 \left[1 - \frac{3 \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]$$

Другая серия собственных значений краевой задачи (1), (2) имеет аналогичный вид. Из результатов работы [4], вытекает, что следующие краевые условия

$$V_j(y) \equiv U_j(y) + \sum_{s=0}^{\gamma_j} \int_0^1 y^{(s)}(t) \rho_{sj}(t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

также представляют усиленно-краевые условия. Поэтому остаются справедливыми результаты работ [1], [2], так что система собственных и присоединенных функции оператора с краевыми условиями (3) образуют базис Рисса в функциональном пространстве $L_2(0, 1)$. Для дальнейших целей краевые условия (3) удобно переписать в каноническом виде, предложенном в работе [5]. Уравнение $L(y) = f(x)$, $0 < x < 1$ с интегродифференциальными условиями вида

$$V_j(y) \equiv U_j(y) - \int_0^1 L(y) \overline{\sigma_j(x)} dx = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (4)$$

при произвольном наборе граничных функции

$$\sigma_1 \in L_2(0, 1), \quad \sigma_2 \in L_2(0, 1), \quad \sigma_3 \in L_2(0, 1).$$

имеет единственное решение $y(x)$ при любом f из $L_2(0, 1)$ причем справедлива оценка $\|y\|_{L_2(0,1)} \leq c \|f(x)\|_{L_2(0,1)}$. Обратное утверждение также верно. Если уравнение $L(y) = f(x)$, $0 < x < 1$ с некоторыми дополнительными линейными условиями при любом f из $L_2(0, 1)$ имеет единственное решение с требованием $\|y\|_{L_2(0,1)} \leq c \|f(x)\|_{L_2(0,1)}$ то найдется такой набор граничных функции $\sigma_1 \in L_2(0, 1)$, $\sigma_2 \in L_2(0, 1)$, $\sigma_3 \in L_2(0, 1)$, что дополнительные условия будут эквивалентны условиям (3).

Согласно приведенной теореме условия (3) эквивалентны условиям (4) при некоторых $\sigma_1 \in L_2(0, 1)$, $\sigma_2 \in L_2(0, 1)$, $\sigma_3 \in L_2(0, 1)$. Подробности вычисления граничных функции σ_1 , σ_2 , σ_3 по функциям $\{\rho_{sj}(t)\}$ можно найти в работе [6].

2 Обзор литературы

Статья посвящена построению функции Грина краевой задачи для дифференциального уравнения с усиленно-регулярными краевыми условиями в окрестности полюса. Вопросы, как построение функции Грина и разложение по собственным функциям для

дифференциальных операторов с усиленно-регулярными краевыми условиями мало изучены. Для изучения аналитической природы функции Грина мы развиваем идеи работ [Кангужин, Вычетное и спектральное разложения дифференциального оператора на графе-звезде, Вестник КазНУ, 2018], [Келдыш]. Отметим работы [9], [10] посвящены разложению по собственным функциям дифференциальных самосопряженных и несамопряженных операторов.

В работе [14] изучены обратные задачи для дифференциальных операторов с регулярно краевыми условиями для 2-го порядка. В работе [17] рассмотрены спектральные задачи для дифференциального оператора нечетного порядка. В работе [13], [15], [18],[19], [20] приведены некоторые вопросы спектрального анализа обратных задач для дифференциальных операторов.

А в данной работе выведена формула разложения функции Грина по собственным функциям дифференциального оператора 3-го порядка с усиленно-регулярными краевыми условиями.

3 Функция Грина невозмущенной краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} L(y) &= f(x), \quad 0 < x < 1 \\ U_1(y) &= 0, \quad U_2(y) = 0, \quad U_3(y) = 0 \end{aligned}$$

Резольвента оператора L имеет вид

$$(L_0 - \lambda I)^{-1} f = \int_0^1 G_0(x, t, \lambda) f(t) dt$$

где

$$G_0(x, t, \lambda) = - \frac{\begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_3(x, \lambda) & g(x, t) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(g) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(g) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(g) \end{vmatrix}}{\Delta_0(\lambda)}$$

- функция Грина оператора L_0 . Здесь при $x > t$ функция $g(x, t)$ имеет следующий вид:

$$g(x, t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix}$$

если $x \leq t$, тогда $g(x, t) = 0$.

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) \end{vmatrix}$$

3.1 Возмущенная краевая задача и ее функция Грина

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} L(y) &= f(x), \quad 0 < x < 1 \\ V_1(y) &\equiv U_1(y) - \int_0^1 L(y) \overline{\sigma_1(x)} dx = 0 \\ U_2(y) &= 0, \quad U_3(y) = 0 \end{aligned}$$

Резольвента оператора L имеет вид

$$(L - \lambda I)^{-1} f(x) = \int_0^1 G(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad 0 < x < 1$$

где

$$G(x, t, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \kappa_1(x, \lambda) & G_0(x, t, \lambda) \\ V_1(\kappa_1) & V_1(G_0) \end{vmatrix}}{V_1(\kappa_1)} = G_0(x, t, \lambda) - \frac{\kappa_1(x, \lambda) V_1(G_0)}{V_1(\kappa_1)}$$

-функция Грина оператора L .

Здесь $\kappa_1(x, \lambda)$ - решение однородного уравнения

$$L(\kappa_1) = \lambda \kappa_1, \quad 0 < x < 1,$$

с неоднородными краевыми условиями

$$U_1(\kappa_1) = 1, \quad U_2(\kappa_1) = 0, \quad U_3(\kappa_1) = 0.$$

3.2 Главная часть разложения в ряд Лорана функции Грина

В этом пункте вычислена главная часть разложения в ряд Лорана функции Грина возмущенного оператора в окрестности простого собственного значения. В нашем случае, нули функции $V_1(\kappa_1)$ являются полюсами резольвенты $(L - \lambda I)^{-1}$. Пусть λ_0 -простой нуль функции $V_1(\kappa_1) = 0$ $\frac{d}{d\lambda} V_1(\kappa) \Big|_{\lambda_0} \neq 0$. Тогда разложение в ряд Лорана в окрестности простого полюса примет вид

$$G(x, t, \lambda) = - \frac{\text{res}_{\lambda_0} G(x, t, \lambda)}{\lambda - \lambda_0} + \text{прав. часть}$$

где

$$\text{res}_{\lambda_0} G(x, t, \lambda) = - \frac{\kappa_1(x, \lambda) V_1(G_0)}{\frac{d}{d\lambda} V_1(\kappa_1) \Big|_{\lambda=\lambda_0}} \quad (5)$$

По теореме Келдыша [7] известно, что

$$G(x, t, \lambda) = - \frac{u_0(x) \overline{v_0(t)}}{\lambda - \lambda_0} + h_0(x, t, \lambda), \quad (6)$$

где $h_0(x, t, \lambda)$ –регулярная в окрестности точки λ_0 .Здесь $u_0(x)$ –собственная функция оператора L , а $v_0(t)$ - собственная функция сопряженного оператора L^* к оператору L , то есть

$$\begin{aligned} L(u_0) &= \lambda_0 u_0, & u_0 &\in D(L), \\ L^*(v_0) &= \overline{\lambda_0} v_0, & v_0 &\in D(L^*). \end{aligned}$$

Сравнивая соотношения (5) и (6), получим равенства

$$u_0(x) = \kappa_1(x, \lambda_0), \quad v_0(t) = \frac{V_1(G_0)}{\left. \frac{d}{d\lambda} V_1(\kappa_1) \right|_{\lambda=\lambda_0}}$$

Теорема 1. Если λ_0 -простое собственное значение оператора L , тогда собственная функция оператора L имеет следующий вид

$$\kappa_1(x, \lambda_0) = \frac{1}{\Delta_0(\lambda_0)} \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda_0) & y_2(x, \lambda_0) & y_3(x, \lambda_0) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) \end{vmatrix}$$

То есть удовлетворяет следующей возмущенной краевой задаче

$$\begin{aligned} L\kappa_1(x, \lambda_0) &= \lambda_0 \kappa_1(x, \lambda_0), \\ V_1 \kappa_1(x, \lambda_0) &= U_1 \kappa_1(x, \lambda_0) - \int_0^1 L(\kappa_1(x, \lambda_0)) \overline{\sigma_1(x)} dx = 0, \\ U_2 \kappa_1(x, \lambda_0) &= U_3(\kappa_1(x, \lambda_0)) = 0 \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть λ_0 – простой нуль функции $V_1(\kappa_1)$. Тогда функция Грина оператора L в окрестности простого полюса имеет представление

$$G(x, t, \lambda) = \frac{\kappa_1(x, \lambda_0) V_1(G_0)}{\left. \frac{d}{d\lambda} V_1(\kappa_1) \right|_{\lambda=\lambda_0}} + G_0(x, t, \lambda_0)$$

Здесь $\kappa_1(x, \lambda_0)$ - собственная функция оператора L , $V_1(G_0)$ - собственная функция сопряженного оператора L^* к оператору L . Причем она определяется по формуле

$$V_1(G_0) = \sigma_1(t) + \overline{\lambda_0} \int_t^1 \overline{g(x, t, \lambda)} \sigma_1(x) dx + \frac{\overline{\lambda_0}}{\Delta_0(\lambda_0)}$$

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1^{(1)}(t) & y_2^{(1)}(t) & y_3^{(1)}(t) \\ \int_0^1 \sum_{k=1}^2 \beta_{k+1} y_1^{(k)}(1) A_3 \overline{\sigma_1(x)} dx & \int_0^1 \sum_{k=1}^2 \beta_{k+1} y_2^{(k)}(1) A_3 \overline{\sigma_1(x)} dx & \int_0^1 \sum_{k=1}^2 \beta_{k+1} y_3^{(k)}(1) A_3 \overline{\sigma_1(x)} dx \end{vmatrix}$$

4 Заключение

В заключении отметим, что собственная функция исходного оператора гладкая функция. В то же время собственная функция сопряженного оператора может быть негладкой и степень ее гладкости зависит от гладкости граничного возмущения. Эти выводы вытекают из представления собственных функций данных в теореме 2. В частности даже сопряженные к многоточечным граничным задачам обладают негладкими собственными функциями. В данной теореме 2 приведены результаты, касающиеся возмущения только одного граничного условия. Аналогичные результаты получаются, когда возмущению подвергаются все три граничных условия.

Список литературы

- [1] Михайлов В.П. О базисах Рисса // ДАН СССР. – 1962. – № 5 (144). – С. 981-984.
- [2] Кесельман Г.М. Обезусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. Вузov СССР, Математика. – 1964. – № 2. – С. 82-93.
- [3] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М., 1969. – 528 с.
- [4] Шкаликoв А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. Мат. Мех. – 1982. – № 6. – С. 12-21.
- [5] Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширений и сужений операторов // Докл. АН СССР. – 1983. – № 6 (271). – С. 1307-1313.
- [6] Кангужин Б.Е., Даирбаева Г., Мадибайулы Ж. Идентификация граничных условий дифференциального оператора // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2019. – № 3 (103). – С.13-18
- [7] Дезин А.А. Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. МИАН. М., Наука. МАИК «Наука/Интерпериодика». – 2000. – № 229. – С.3-175
- [8] Левитан Б.М. Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля в случае конечно-зонных и бесконечно-зонных потенциалов // Труды Моск. Матем.об-во.-МГУ.-М. – 1982. – С. 3-36.
- [9] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям. – М.-Л, 1950.
- [10] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова Думка, 1965. – 798 с.
- [11] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова Думка, 1977. – 329 с.
- [12] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
- [13] Лейбензон З.Л. Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков / З.Л. Лейбензон // Труды Москов. мат. об-ва. – 1966. – Т. 15. – С. 70-144.
- [14] Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями / В.А. Юрко // Мат. заметки. – 1975. – Т. 18. – № 4. – С. 569-576.
- [15] Садовничий В.А. О связи между спектром дифференциального оператора с симметричными коэффициентами и краевыми условиями / В.А. Садовничий, Б.Е. Кангужин // ДАН СССР. – 1982. – Т. 267. – №2. – С. 310-313.
- [16] Шкаликoв А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями / А.А. Шкаликoв // Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех. – 1982. – № 6. – С. 12-21
- [17] Станкевич М. Об одной обратной задаче спектрального анализа для обыкновенного дифференциального оператора четного порядка / М. Станкевич // Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех. – 1981. – № 4. – С. 24-28.
- [18] Ахтямов А.М. Обобщения теоремы единственности Борга на случай неразделенных граничных условий / А.М. Ахтямов В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев // Евразийская математика. – 2012. – Т. 3. – №4. – С. 10-22.

- [19] Ахтямов А.М. Обратная задача для пучка операторов с неразделенными граничными условиями / А.М. Ахтямов В.А. Садовничий, Я.Т. Султанаев // Евразийский матем. – 2010. – Т. 1. – №2. – С. 5-16.
- [20] Садовничий В.А. Теорема единственности решения обратной задачи спектрального анализа в случае дифференциального уравнения с периодическими граничными условиями // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 2. – С. 271–277.

References

- [1] Mihaylov V.P. "O bazisah Rissa [On Riesz bases]", *DAN SSSR* No 5 (144) (1962): 981-984.
- [2] Keselman G.M. "Obezuslovnoy shodimosti razlozheniy po sobstvennyim funktsiyam nekotorykh differentsialnykh operatorov [Unconditional convergence of expansions in eigenfunctions of certain differential operators]", *Izv. Vuzov SSSR, Matematika* No 2 (1964): 82-93.
- [3] Naymark M.A. *Lineynyye differentsialnyye operatory* [Linear differential operators] (M.: 1969): 528.
- [4] Shkalikov A.A. "O bazisnosti sobstvennykh funktsiy obyknovennykh differentsialnykh operatorov s integralnyimi kraevymi usloviyami [On the basis property of the Eigen functions of ordinary differential operators with integral boundary conditions]", *Vestn. MGU. Ser. Mat. Meh.* No 6 (1982): 12-21.
- [5] Kokebaev B.K., Otelbaev M., Shyinyibekov A.N. "K voprosam rasshireniy i suzheniy operatorov [To questions of extensions and restrictions of operators]", *Dokl. AN SSSR* No 6 (271) (1983): 1307-1313.
- [6] Kanguzhin B.E., Dairbaeva G., Madibayulyi Zh. "Identifikatsiya granichnykh usloviy differentsialnogo operatora [Identification of the boundary conditions of a differential operator]", *Vestnik KazNU. Seriya matematika, mehanika, informatika*. No 3 (103) (2019): 13-18
- [7] Dezin A.A. "Differentsialno-operatornyye uravneniya. Metod modelnykh operatorov v teorii granichnykh zadach [Differential operator equations. The method of model operators in the theory of boundary value problems]", *Tr. MIAN. M., Nauka. MAIK «Nauka/Interperiodika»* No 229 (2000): 3-175
- [8] Levitan B.M. "Obratnaya zadacha dlya operatora Shturma-Liuvillya v sluchae konechno-zonnykh i beskonechno-zonnykh potentsialov [The inverse problem for the Sturm-Liouville operator in the case of finite-band and infinitely-band potentials]", *Trudy Mosk. Matem.ob-vo. MGU. M.* (1982): 3-36.
- [9] Berezanskiy Yu.M. *Razlozhenie po sobstvennyim funktsiyam* [Expansion in eigenfunctions] (M.-L.: 1950).
- [10] Berezanskiy Yu.M. *Razlozhenie po sobstvennyim funktsiyam samosopryazhennykh operatorov* [Expansion in eigenfunctions of self-adjoint operators] (Kiev: Naukova Dumka, 1965): 798.
- [11] Marchenko V.A. *Operatory Shturma-Liuvillya i ih prilozheniya* [Sturm-Louisville Operators and their Applications] (Kiev: Naukova Dumka, 1977): 329.
- [12] Kato T. *Teoriya vozmuschennykh lineynykh operatorov* [Perturbation theory of linear operators] (M.: Mir, 1972): 740.
- [13] Leybenzon Z.L. "Obratnaya zadacha spektralnogo analiza obyknovennykh differentsialnykh operatorov vysshikh poradyakov / Z.L. Leybenzon [The inverse problem of spectral analysis of ordinary differential operators of higher orders]", *Trudy Moskov. mat. ob-va* Vol. 15 (1966): 70-144.
- [14] Yurko V.A. "Obratnaya zadacha dlya differentsialnykh operatorov vtorogo poradyaka s regul'yarnymi kraevymi usloviyami / V.A. Yurko [The inverse problem for second-order differential operators with regular boundary conditions]", *Mat. zametki* Vol. 18, No 4 (1975): 569-576.
- [15] Sadovnichiy V.A. "O svyazi mezhdu spektrom differentsialnogo operatora s simmetrichnymi koeffitsientami i kraevymi usloviyami / V.A. Sadovnichiy, B.E. Kanguzhin [On the relationship between the spectrum of a differential operator with symmetric coefficients and boundary conditions]", *DAN SSSR* Vol. 267, No 2 (1982): 310-313.
- [16] Shkalikov A.A. "O bazisnosti sobstvennykh funktsiy obyknovennykh differentsialnykh operatorov s integralnyimi kraevymi usloviyami / A.A. Shkalikov [On the basis property of the eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions]", *Vestnik MGU. Ser. Mat. Meh.* No 6 (1982): 12-21
- [17] Stankevich M. "Ob odnoy obratnoy zadache spektralnogo analiza dlya obyknove inogo differentsialnogo operatora chetnogo poradyaka / M. Stankevich [On an inverse problem of spectral analysis for an ordinary other differential operator of even order]", *Bestnik MGU. Ser. Mat. Meh.* No 4 (1981): 24-28.

-
- [18] Ahtyamov A.M. "Obobscheniya teoremyi edinstvennosti Borga na sluchay nerazdelennykh granichnykh usloviy / A.M. Ahtyamov V.A. Sadovnichiy, Ya.T. Sultanaev [Generalizations of Borg's uniqueness theorem to the case of nonseparated boundary conditions]", *Evrasiyskaya matematika* Vol. 3, No 4 (2012): 10-22.
- [19] Ahtyamov A.M. "Obratnaya zadacha dlya puchka operatorov s nerazdelennymi granichnymi usloviyami / A.M. Ahtyamov V.A. Sadovnichiy, Ya.T. Sultanaev [Inverse problem for an operator pencil with nonseparated boundary conditions]", *Evrasiyskiy matem.* Vol. 1, No 2 (2010): 5-16.
- [20] Sadovnichiy V.A. "Teorema edinstvennosti resheniya obratnoy zadachi spektralnogo analiza v sluchae differentsialnogo uravneniya s periodicheskimi granichnymi usloviyami [Uniqueness theorem for the inverse problem of spectral analysis in the case of differential equations with periodic boundary conditions]", *Differents. uravneniya* Vol. 9, No 2 (1973): 271-277.

МРНТИ 27.29.19; 27.31.17; 27.39.21

<https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m2>¹Н.С. Иманбаев, ²М.А. Садыбеков¹к.ф.-м.н., профессор, Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Южно-Казахстанский государственный педагогический университет,

г. Шымкент, Казахстан, E-mail: imanbaevnur@mail.ru

²д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. НАН РК,

Институт математики и математического моделирования,

г. Алматы, Казахстан, E-mail: sadybekov@math.kz

ПОСТРОЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ОДНОГО ТИПА ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ДВУХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ

Аннотация. Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора. Для случая произвольного обыкновенного дифференциального оператора, когда невозмущенные краевые условия являются усиленно регулярными, вопрос об устойчивости свойства базисности корневых векторов при их интегральном возмущении положительно решен в работах А.А. Шкаликова. В серии наших предыдущих работ рассматривался вопрос о построении характеристического определителя и об устойчивости свойства базисности корневых векторов при интегральном возмущении одного из краевых условий. Были рассмотрены практически все возможные типы краевых условий, которые являются регулярными, но не усиленно регулярными. В настоящей работе рассматривается спектральная задача для оператора кратного дифференцирования при интегральном возмущении краевых условий одного типа, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными. В отличие от предыдущих работ нами рассматривается случай, когда интегральное возмущение присутствует в обоих краевых условиях. Первым основным результатом работы является построение характеристического определителя спектральной задачи. На основании полученной формулы делаются выводы об асимптотике собственных значений и собственных функций задачи. Вторым основным результатом работы является обоснование базисности Рисса системы корневых функций рассматриваемой задачи при интегральном возмущении двух краевых условий.

Ключевые слова: характеристический определитель, базис Рисса, усиленно регулярные краевые условия, корневые функции, интегральное возмущение краевого условия.

¹Н.С. Иманбаев, ²М.А. Садыбеков¹ф.-м.г.к., профессор, Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университеті, Шымкент қ., Қазақстан,

E-mail: imanbaevnur@mail.ru

²ф.-м.г.д., профессор, ҚР ҰҒА корреспондент-мүшесі,

Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан,

E-mail: sadybekov@math.kz

Қос шеттік шарттарға да интегралдық әсер етумен толқытылған меншікті мәндерін зерттеу есебінің бір типінің характеристикалық анықтаушыын құру

Аңдатпа. Кез-келген өзіне-өзі түйіндес шеттік шарттармен және өзіне-өзі түйіндес формальді дифференциалдық амалмен берілген, спектрі дискретті болатын оператордың меншікті функцияларының жүйесінің ортонормаланған базис құрайтындығы белгілі жәй. Көптеген жұмыстарда (әлсіз мағынада) толқытылған бастапқы берілген оператордың базистілік қасиетінің сақталу мәселесі зерттелген. Толқытылмаған шеттік шарттары күшейтілмеген регулярлы болған жағдайдағы қарапайым дифференциалдық оператор үшін шеттік шарттарын интегралдық толқытқандағы түбірлік векторлардың базистілік қасиеттерінің орнықтылығы туралы мәселе А.А. Шкаликотың жұмыстарында дұрыс шешімін тапқан. Алдыңғы жарияланған біздің сериялық жұмыстарымызда характеристикалық анықтауышты құру және шеттік шарттардың кез-келген біреуін интегралдық толқытқандағы түбірлік векторлардың базистілік қасиеттерінің орнықтылығын анықтау сұрақтары зерттелген болатын. Регулярлы, бірақ күшейтілмеген регулярлы шеттік шарттардың барлық мүмкін болатын типтері түгелдей дерлік қарастырылды. Осы жұмыста регулярлы, бірақ күшейтілмеген, бір типтегі интегралдық толқытылған шеттік шарттармен берілген еселі дифференциалдау операторы үшін спектралдық есебі қарастырылады. Шеттік шарттардың екеуіне де интегралдық толқыту арқылы әсер еткендігімен алдыңғы жарыққа шыққан жұмыстардан бұл жұмыс ерекшеленеді. Бірінші кезектегі қол жеткізген нәтиже, ол қарастырылып отырған спектралдық есептің характеристикалық анықтауышының құрылуы. Алынған формуланың негізінде спектралдық есептің меншікті мәндері мен меншікті функцияларының асимптотикалары туралы қорытынды жасалады. Екінші кезектегі алынған негізгі нәтиже, осы спектралдық есептің, шеттік шарттарының екеуіне де интегралдық толқытумен әсер еткендегі түбірлік функциялар жүйесінің Рисс базистілігін тұжырымдау болып табылады.

Түйін сөздер: характеристикалық анықтауыш, Рисс базисі, күшейтілген регулярлы шеттік шарттар, түбірлік функциялар, шеттік шарттардың интегралдық толқытылуы.

¹N.S. Imanbaev, ²M.A. Sadybekov

¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty,
South Kazakhstan State Pedagogical University, Shymkent, Kazakhstan,
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Corresponding Member of NAS RK,
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,
E-mail: sadybekov@math.kz

Construction of a characteristic determinant for one type of eigenvalue problems under integral perturbation of two boundary conditions

Abstract. It is well known that the system of eigenfunctions of an operator given by a formally self-adjoint differential expression, with arbitrary self-adjoint boundary conditions providing a discrete spectrum, forms an orthonormal basis. In many papers, the question on saving basis properties under some (weak in a certain sense) perturbation of the initial operator has been investigated. For the case of an arbitrary ordinary differential operator, when unperturbed boundary conditions are strongly regular, the question of the stability of the basis property of root vectors under their integral perturbation is positively solved in papers of A.A. Shkalikov. In a series of our previous papers, we have considered the question of constructing a characteristic determinant and of the stability of the basis property of the root vectors under the integral perturbation of one of the boundary conditions. Almost all possible types of the boundary conditions that are regular but not strongly regular have been considered. In the present paper, a spectral problem for the multiple differentiation operator under the integral perturbation of one type boundary conditions being regular but not strongly regular is considered. In contrast to the previous papers we consider a case when the integral perturbation is present in both boundary conditions. The first main result of the paper is to construct a characteristic determinant of the spectral problem. Based on the obtained formula, we come to the conclusion about the asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the problem. The second main result of the paper is to justify the Riesz basis property of the system of root functions of the problem under consideration under the integral perturbation of two boundary conditions.

Key words: characteristic determinant, Riesz basis property, strongly regular boundary conditions, root functions, integral perturbation of boundary condition.

1 Введение

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства L_2 . Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора. Например, для случая самосопряженного исходного оператора аналогичный вопрос исследовался в [1-3], а для несамосопряженного – в [4-6].

В серии наших предыдущих работ [7-14] рассматривался вопрос о построении характеристического определителя и об устойчивости свойства базисности корневых векторов при интегральном возмущении одного краевого условия. Были рассмотрены практически все возможные типы краевых условий. Заключительные формулировки можно найти в нашей обзорной статье [15].

В настоящей работе мы исследуем спектральные свойства задачи, в которой оба краевых условия имеют интегральное возмущение:

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) + \alpha u(0) = \int_0^1 \overline{p_1(x)} u(x) dx, \quad p_1(x) \in L_2(0, 1), \quad (2)$$

$$U_2(u) \equiv u(0) - u(1) = \int_0^1 \overline{p_2(x)} u(x) dx, \quad p_2(x) \in L_2(0, 1). \quad (3)$$

Здесь $\alpha \neq 0$ - произвольное комплексное число.

В [3] были исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи (случай $\alpha = 0$) для уравнения (1), при интегральном возмущении второго краевого условия ($p_1(x) \equiv 0$). Было доказано, что множество P функций $p_2(x)$, при которых задача обладает свойством базисности собственных функций - плотно в $L_1(0, 1)$, множество $L_1(0, 1) \setminus P$ также плотно в $L_1(0, 1)$.

В нашей работе [7] были исследованы вопросы устойчивости базисных свойств этой задачи в случае $\alpha \neq 0$ при интегральном возмущении второго краевого условия ($p_1(x) \equiv 0$). Было доказано, что свойство базисности Рисса систем корневых функций задачи является устойчивым относительно интегрального возмущения краевого условия. В частности, показано, что в случае, когда $\alpha \neq 0$ и $p_1(x) \equiv 0$, система корневых функций задачи (1)-(3) образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$ при любых возмущениях $p_2(x) \in W_2^1(0, 1)$.

Вопрос о базисности корневых функций оператора с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [5-6], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу [16, с. 66-67] краевых условий невозмущенной задачи; а при дополнительном предположении усиленной регулярности - базисность Рисса. В нашем случае невозмущенные (при $p_1(x) \equiv p_2(x) \equiv 0$) краевые условия (2), (3) являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями.

Поэтому в этом случае для исследования базисности Рисса не применимы результаты [5-6], а требуется дополнительное подробное исследование.

Из [5] следует, что система собственных и присоединенных функций задачи (1)-(3) полна и минимальна в $L_2(0, 1)$. В настоящей работе мы построим характеристический определитель спектральной задачи (1)-(3). На основании полученной формулы может быть доказана устойчивость свойства базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций задачи при интегральном возмущении краевых условий.

В качестве невозмущенной задачи мы принимаем задачу, рассмотренную нами в [7], то есть задачу (1)-(3) при $p_2(x) \equiv 0$. И рассмотрим спектральные свойства задачи при возмущении второго краевого условия (3) интегральным членом с плотностью $p_2(x)$.

2 Невозмущенная задача

В этом пункте $p_2(x) \equiv 0$. Как следует из [7], при любых $\alpha \neq 0$ невозмущенная задача

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad U_1(u) = \int_0^1 \overline{p_1(x)} u(x) dx, \quad U_2(u) = 0 \quad (4)$$

обладает асимптотически простым спектром, а система ее нормированных собственных функций образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$. Сформулируем этот результат более подробно, в виде леммы.

Лемма 1 ([7]) Пусть $p_1(x) \in W_2^1(0, 1)$. Тогда собственные значения невозмущенной задачи – задачи (4) – образуют две серии:

$$\begin{aligned} \lambda_{1k}^0 &= (2\pi k + \delta_{1k})^2, \quad k = 1, 2, \dots, \\ \lambda_{2k}^0 &= (2\pi k + \delta_{2k})^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где δ_{1k} и δ_{2k} – убывающие к нулю коэффициенты такие, что $\{k\delta_{1k}\} \in l_2$ и $\{k\delta_{2k}\} \in l_2$. Эти собственные значения асимптотически простые, то есть $\delta_{1k} \neq \delta_{2k}$ для всех достаточно больших номеров k .

Задача (4) имеет не более, чем конечное число присоединенных функций.

Собственные функции задачи асимптотически имеют вид

$$\begin{aligned} u_{1k}^0(x) &= \sqrt{2} \sin(\lambda_{1k}^0 x) + \beta_{1k} \cos(\lambda_{1k}^0 x), \\ u_{2k}^0(x) &= \sqrt{2} \cos(\lambda_{2k}^0 x) + \beta_{2k} \sin(\lambda_{2k}^0 x), \end{aligned} \quad (5)$$

где последовательности β_{1k} и β_{2k} – убывающие к нулю так, что $\{k\beta_{1k}\} \in l_2$ и $\{k\beta_{2k}\} \in l_2$.

Система нормированных собственных функций и присоединенных функций (если существуют) задачи (4) образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$.

Через $\{v_{1k}^0(x), v_{2k}^0(x)\}$ обозначим систему, биортогональную системе собственных и присоединенных функций задачи (4). Нумерация выбрана таким образом, чтобы выполнялись условия биортогональности

$$(u_{jk}^0, v_{nm}^0) = \delta_{jn} \delta_{km}, \quad j, n = 1, 2.$$

В силу леммы 1, эта система также образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$.

Поэтому функция $p_2(x)$ представима в виде ряда Фурье по базису Рисса $\{v_{1k}^0(x), v_{2k}^0(x)\}$:

$$p_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} v_{1k}^0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} v_{2k}^0(x). \quad (6)$$

Система $\{v_{1k}^0(x), v_{2k}^0(x)\}$ является системой корневых функций задачи, сопряженной к задаче (4). Следует отметить, что впервые построение сопряженных операторов в случае интегральных краевых условий проводилось в статье А.М. Krall [17].

Непосредственным вычислением не сложно убедиться, что спектральная задача, сопряженная задаче (4) – это задача для нагруженного дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями:

$$l^*(v) \equiv -v''(x) + p_1(x)v(0) = \bar{\lambda}v(x), \quad 0 < x < 1, \quad (7)$$

$$V_1(u) \equiv v'(0) - v'(1) + \bar{\alpha}v(0) = 0, \quad (8)$$

$$V_2(u) \equiv v(0) - v(1) = 0. \quad (9)$$

3 Характеристический определитель задачи (1)-(3)

Удовлетворяя общее решение $u(x, \lambda) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$ уравнения (1) условиям (2), (3), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k :

$$\begin{cases} C_1 \left[\alpha + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos \sqrt{\lambda}x dx \right] + \\ C_2 \left[\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx \right] = 0, \\ C_1 \left[1 - \cos \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_2(x)} \cos \sqrt{\lambda}x dx \right] + \\ C_2 \left[-\sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_2(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx \right] = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1)-(3):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos \sqrt{\lambda}x dx & 1 - \cos \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_2(x)} \cos \sqrt{\lambda}x dx \\ \sqrt{\lambda}(1 - \cos \sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx & -\sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_2(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Легко видеть, что характеристический определитель невозмущенной задачи (1)-(3) получается отсюда при $p_2(x) \equiv 0$. Обозначим его через

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos \sqrt{\lambda}x dx & 1 - \cos \sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}(1 - \cos \sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \sin \sqrt{\lambda}x dx & -\sin \sqrt{\lambda} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Используя разложение (6), найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим входящие в (11) интегралы. Для простоты демонстрации

вычислений будем считать, что все собственные значения невозмущенной задачи (4) - простые (нет присоединенных функций).

Принимая во внимание уравнение (7) и краевые условия (8), (9), которым удовлетворяют функции $v_{jk}^0(x)$, вычисляем:

$$\begin{aligned}
 (\lambda - \lambda_{jk}^0) \int_0^1 \overline{v_{jk}^0(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx &= \int_0^1 \overline{v_{jk}^0(x)} \lambda \cos \sqrt{\lambda} x dx - \int_0^1 \overline{\lambda^0 v_{jk}^0(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx = \\
 &= - \int_0^1 \overline{v_{jk}^0(x)} \left(\cos \sqrt{\lambda} x \right)'' dx + \int_0^1 \overline{v_{jk}^{0''}(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx - \overline{v_{jk}^0(0)} \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx = \\
 &= \int_0^1 \left\{ -\overline{v_{jk}^0(x)} \left(\cos \sqrt{\lambda} x \right)' + \overline{v_{jk}^{0'}(x)} \cos \sqrt{\lambda} x \right\}' dx - \overline{v_{jk}^0(0)} \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx = \\
 &= \overline{v_{jk}^0(0)} \left[\alpha + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx \right] + \overline{v_{jk}^0(1)} \left[\cos \sqrt{\lambda} - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется и второй интеграл

$$\begin{aligned}
 (\lambda - \lambda_{jk}^0) \int_0^1 \overline{v_{jk}^0(x)} \sin \sqrt{\lambda} x dx &= \\
 &= \overline{v_{jk}^0(0)} \left[\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \sin \sqrt{\lambda} x dx \right] + \overline{v_{jk}^0(1)} \left[\sin \sqrt{\lambda} \right].
 \end{aligned}$$

Поэтому из разложения (6) будем иметь представления:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \overline{p_2(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx &= A(\lambda) \left[\cos \sqrt{\lambda} - 1 \right] + B(\lambda) \left[\alpha + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx \right], \\
 \int_0^1 \overline{p_2(x)} \sin \sqrt{\lambda} x dx &= A(\lambda) \left[\sin \sqrt{\lambda} \right] + B(\lambda) \left[\sqrt{\lambda} (1 - \cos \sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \sin \sqrt{\lambda} x dx \right],
 \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
 A(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{a_{1k}}}{\lambda - \lambda_{1k}^0} \overline{v_{1k'}^0(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_{2k}}}{\lambda - \lambda_{2k}^0} \overline{v_{2k'}^0(1)}, \\
 B(\lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{a_{1k}}}{\lambda - \lambda_{1k}^0} \overline{v_{1k}^0(0)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_{2k}}}{\lambda - \lambda_{2k}^0} \overline{v_{2k}^0(0)}.
 \end{aligned}$$

Используя полученное, стандартными преобразованиями определитель (9) приводится к виду:

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) [1 + A(\lambda)] \equiv \Delta_0(\lambda) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{a_{1k}}}{\lambda - \lambda_{1k}^0} \overline{v_{1k'}^0(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_{2k}}}{\lambda - \lambda_{2k}^0} \overline{v_{2k'}^0(1)} \right]. \quad (13)$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1 Характеристический определитель задачи (1)-(3) с возмущенными интегралом условиями представим в виде (13), где $\Delta_0(\lambda)$ – характеристический определитель невозмущенной задачи (4), λ_{jk}^0 – собственные значения невозмущенной задачи (4), а a_{jk} – коэффициенты разложения (6) функции $p_2(x)$ в биортogonalный ряд по базису Рисса $\{v_{1k}^0(x), v_{2k}^0(x)\}$ являющегося системой корневых функций задачи, сопряженной к задаче (4).

Замечание 1 В представлении (13) функция $A(\lambda)$ имеет полюса в точках $\lambda = \lambda_{1k}^0$ первого порядка. Однако в этих же точках функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули первого порядка. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (13) является целой аналитической функцией переменной λ .

4 Собственные значения задачи (1)-(3)

Из анализа формулы (13) легко видеть, что собственные значения λ_{jk}^0 невозмущенной задачи (4) являются собственными значениями возмущенной задачи (1)-(3), если для этих номеров j, k соответствующий коэффициент Фурье в разложении (6) равен нулю: $a_{jk} = 0$.

Случай простого вида характеристического определителя (13) – когда $p_2(x)$ представляется в виде (6) с конечной суммой слагаемых. То есть, когда существует такой номер N , что $a_{jk} = 0$ для всех $k > N$, $j = 1, 2$. В этом случае формула (13) принимает вид

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) [1 + A(\lambda)] \equiv \Delta_0(\lambda) \left[1 + \sum_{k=1}^N \frac{\overline{a_{1k}}}{\lambda - \lambda_{1k}^0} \overline{v_{1k'}^0(1)} + \sum_{k=0}^N \frac{\overline{a_{2k}}}{\lambda - \lambda_{2k}^0} \overline{v_{2k'}^0(1)} \right].$$

Из этого частного случая формулы (13) легко обосновать следующую

Лемма 2 Для любых наперед заданных чисел – комплексного $\hat{\lambda}$ и натурального $\hat{m}$ – всегда существует такая функция $p_2(x)$, что $\hat{\lambda}$ будет являться собственным значением задачи (1)-(3) кратности $\hat{m}$.

В силу этой леммы возмущенная задача может иметь любое конечное число кратных собственных значений. Поэтому ее корневые подпространства состоят из собственных и (может быть) присоединенных функций.

Перейдем к определению асимптотики собственных значений возмущенной задачи в общем случае. Обозначим собственные значения возмущенной задачи через λ_{jk}^1 .

Стандартными рассуждениями, связанными с применением теоремы Руше, находим, что для достаточно больших номеров k нули характеристического определителя (13) имеют вид

$$\sqrt{\lambda_{jk}^1} = 2\pi k + \gamma_{jk}, \quad |\gamma_{jk}| < 1.$$

Уточним асимптотику δ_{jk} . Из (13) легко видеть, что имеет место асимптотика

$$|\gamma_{jk}| = |a_{jk}| \cdot |O(1)|. \quad (14)$$

Так как коэффициенты Фурье по базису Рисса принадлежат пространству последовательностей l_2 , то отсюда следует, что числовая последовательность $\{\gamma_{jk}\} \in l_2, j = 1, 2$. Это и дает искомую асимптотику собственных значений. Таким образом, доказана

Лемма 3 Пусть $p_2(x) \in L_2(0, 1)$. Тогда собственные значения задачи (1)-(3) образуют две серии:

$$\begin{aligned}\lambda_{1k}^1 &= (2\pi k + \gamma_{1k})^2, k = 1, 2, \dots, \\ \lambda_{2k}^1 &= (2\pi k + \gamma_{2k})^2, k = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{15}$$

где $\{\gamma_{jk}\} \in l_2, j = 1, 2$. Причем $\gamma_{jk} = \delta_{jk}$ при $a_{jk} = 0$.

Эти собственные значения асимптотически простые, то есть $\gamma_{1k} \neq \gamma_{2k}, j = 1, 2$, для всех достаточно больших номеров k .

Для более гладких функций $p_2(x)$ асимптотика собственных значений может быть уточнена.

Лемма 4 Если $p_2(x) \in W_2^1(0, 1)$, то собственные значения задачи (1)-(3) имеют асимптотику (15), где $\{k\gamma_{jk}\} \in l_2, j = 1, 2$. Собственные значения задачи (1)-(3) асимптотически простые и отделенные.

Доказательство этой леммы проводится по классической схеме с использованием повышенной гладкости функции $p_2(x) \in W_2^1(0, 1)$. Здесь на подробностях вычислений мы останавливаться не будем.

Используя обозначения п.3, систему (10) можем переписать в виде

$$\begin{cases} C_1 \left[\alpha + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx \right] + \\ + C_2 \left[\sqrt{\lambda} (1 - \cos \sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \sin \sqrt{\lambda} x dx \right] = 0, \\ \left\{ C_1 [1 - \cos \sqrt{\lambda}] + C_2 [-\sin \sqrt{\lambda}] \right\} [1 + A(\lambda)] = 0. \end{cases}\tag{16}$$

Соответственно, характеристический определитель (11) возмущенной задачи запишется в виде

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha + \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \cos \sqrt{\lambda} x dx & [1 - \cos \sqrt{\lambda}] [1 + A(\lambda)] \\ \sqrt{\lambda} (1 - \cos \sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p_1(x)} \sin \sqrt{\lambda} x dx & [-\sin \sqrt{\lambda}] [1 + A(\lambda)] \end{vmatrix}.\tag{17}$$

Из этого представления явно видно, что при интегральном возмущении второго краевого условия, собственные значения первой серии не изменяются и совпадают с собственными значениями невозмущенной задачи (4). Таким образом доказана следующая теорема о собственных значениях возмущенной задачи (1)-(3).

Теорема 2 Пусть $p_1(x) \in W_2^1(0, 1)$ и $p_2(x) \in W_2^1(0, 1)$. Тогда собственные значения возмущенной задачи – задачи (1)-(3) – образуют две серии. Первая серия собственных значений совпадает с первой серией собственных значений невозмущенной задачи (4):

$$\lambda_{1k}^1 \equiv \lambda_{1k}^0 = (2\pi k + \delta_{1k})^2, k = 1, 2, \dots,$$

где δ_{1k} – убывающие к нулю коэффициенты из леммы 1, такие, что $\{k\delta_{1k}\} \in l_2$. Вторая серия собственных значений имеет вид

$$\lambda_{2k}^1 = (2\pi k + \gamma_{2k})^2, k = 0, 1, 2, \dots,$$

где γ_{2k} – убывающие к нулю коэффициенты такие, что $\{k\gamma_{2k}\} \in l_2$. Эти собственные значения асимптотически простые, то есть $\delta_{1k} \neq \gamma_{2k}$ для всех достаточно больших номеров k .

5 Собственные функции задачи (1)-(3)

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $p_1(x) \in W_2^1(0, 1)$ и $p_2(x) \in W_2^1(0, 1)$. Используя обозначения п.3, систему (10) можем переписать в виде (16). Анализируя (16) легко видеть, что собственные функции, соответствующие первой серии собственных значений задачи, не меняются при интегральном возмущении второго краевого условия. То есть собственные функции, соответствующие первой серии собственных значений задачи, у возмущенной и невозмущенной задач совпадают.

Это позволяет выписать асимптотику собственных функций возмущенной задачи и показать, что эта асимптотика совпадает с асимптотикой собственных функций невозмущенной спектральной задачи (4). На подробностях вычислений мы не будем здесь останавливаться.

Принимая во внимание результат наших работ [3-1], сформулированный в лемме 1, приходим к следующей теореме.

Теорема 3 Пусть $p_1(x) \in W_2^1(0, 1)$ и $p_2(x) \in W_2^1(0, 1)$. Тогда спектр задачи (1)-(3) асимптотически простой. Задача (1)-(3) может иметь не более, чем конечное число присоединенных функций. Собственные функции возмущенной задачи – задачи (1)-(3) – образуют две серии. Первая серия собственных функций совпадает с первой серией собственных функций невозмущенной задачи (4):

$$u_{1k}^1(x) \equiv u_{1k}^0(x) = \sqrt{2} \sin(\lambda_{1k}^0 x) + \beta_{1k} \cos(\lambda_{1k}^0 x),$$

где последовательность β_{1k} – последовательность из Леммы 1 – убывающая к нулю так, что $\{k\beta_{1k}\} \in l_2$.

Вторая серия собственных функций имеет асимптотику

$$u_{2k}^1(x) = \sqrt{2} \cos(\lambda_{2k}^0 x) + \mu_{2k} \sin(\lambda_{2k}^0 x),$$

где последовательность μ_{2k} – убывающая к нулю так, что $\{k\mu_{2k}\} \in l_2$.

Система нормированных собственных функций и присоединенных функций (если существуют) задачи (1)-(3) образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$.

Следствие 1 Если $p_1(x) \in W_2^1(0, 1)$ и $p_2(x) \in W_2^1(0, 1)$, то свойство базисности Рисса в $L_2(0, 1)$ системы корневых функций задачи (1)-(3) сохраняется при интегральном возмущении краевых условий.

6 Заключение

Необходимо отметить, что для дифференциального оператора заданного выражением $l(u) = -u''(x)$ на отрезке $(0, 1)$ и краевыми условиями на концах этого отрезка вопросы полноты и базисности систем корневых функций полностью решены в работе Р. Lang и J. Locker [18]. В случае же, когда дифференциальный оператор задается тем же дифференциальным выражением $l(u) = -u''(x)$ на отрезке $(0, 1)$, но с более общими условиями (не краевыми) вопросы о существовании собственных значений, о полноте и о базисности системы корневых функций окончательно еще далеко не решен.

В связи с этим возникает необходимость отдельного исследования конкретных задач с нелокальными возмущениями краевых условий. Предыдущие наши работы демонстрировали различные варианты – и устойчивости и неустойчивости свойства базисности – при интегральном возмущении одного краевого условия. В настоящей работе исследован случай, когда интегральное возмущение присутствует в обоих краевых условиях.

Результаты настоящей работы демонстрируют устойчивость свойств базисности корневых функций при интегральном возмущении обоих краевых условий для одного типа задач, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

7 Благодарности

Авторы благодарят профессора Б.Е. Кангужина за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Первый автор поддержан грантом AP05132587 (рук. проф. Дауылбаев М.К.), второй автор поддержан грантом AP05133271 (рук. проф. Садыбеков М.А.) грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан на 2018-2020 годы.

Список литературы

- [1] Маркус А.С. О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора // Докл. АН СССР. - 1962. - Т.142, № 3. - С. 538 - 541.
- [2] Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // Матем. заметки. - 1998. - Т.64, Вып. 4. - С. 448 - 563.
- [3] Макин А.С. О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференц. уравнения. - 2006. - Т. 42, №4. - С. 560-562.
- [4] Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. - Т. 96. М.: ВИНТИ. - 2006. - С. 5-105.
- [5] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Математика и механика. - 1982, № 6. - С. 12-21.
- [6] Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. - 1979. - Т. 34, № 5. - С. 235-236.
- [7] Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. Stability of basis property of a type of problems on eigenvalues with nonlocal perturbation of boundary conditions // Ufmsk. Mat. Zh. - 2011. - V. 3, no. 2. - P. 28-33.
- [8] Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On the Basis Property of Root Functions of a Periodic Problem with an Integral Perturbation of the Boundary Condition // Differential Equations. - 2012. - V. 48, no. 6. - P. 896-900.

- [9] Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // *Eurasian Mathematical Journal*. - 2013. - V. 4, no. 3. - P. 53-62.
- [10] Imanbaev N.S. On stability of the basis property of the system of root vectors of the Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of the boundary conditions in a not strengthened regular problems of Samarskii-Ionkin type // *Математический журнал*. - 2015. - Т. 15, № 3. - С. 96-107.
- [11] Imanbaev N. Stability of the basis property of system of root functions of Sturm-Liouville operator with integral boundary condition // *Математический журнал*. - 2016. - Т. 16, № 3. - С. 125-136.
- [12] Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On a problem not having the property of basis property of root vectors, connected with the perturbed regular operator of multiple differentiation // *Математический журнал*. - 2017. - Т. 17, № 3. - С. 117-125.
- [13] Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. A Regular Differential Operator with Perturbed Boundary Condition // *Mathematical Notes*. - 2017. - V. 101, no. 5. - P. 878-887.
- [14] Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property // *Eurasian Math. J.* - 2017. - V. 8, no. 2. - P. 40-46.
- [15] Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. Regular Sturm-Liouville Operators with Integral Perturbation of Boundary Condition // *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. - 2017. - V. 216. - P. 222-234.
- [16] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - М. - 1969.
- [17] Krall A.M. The development of general differential and general differential-boundary systems // *Rocky Mountain J. Math.* - 1975. - V. 5, no. 4. - P. 493-542.
- [18] Lang P., Locker J. Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by $-D^2$ // *J. Math. Anal. And Appl.* - 1990. - V. 146, №1. - P.148-191.

References

- [1] Markus A.S., "O razlozhenii po kornevym vektoram slabo vozmushchennogo samosopryazhennogo operatora", *Dokl. AN SSSR* V.142, no. 3 (1962): 538-541.
- [2] Kerimov N.B. and Mamedov K.R., "On the Riesz basis property of the root functions in certain regular boundary value problems", *Mathematical Notes* V. 64, no. 3-4(1998): 483-487.
- [3] Makin A.S., "On a nonlocal perturbation of a periodic eigenvalue problem", *Differential Equations* 42(2006): 599-602.
- [4] Il'in V.A and Kritskov L.V., "Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators", *Journal of Mathematical Sciences (New York)* V.116, no.5 (2003): 3489-3550.
- [5] Shkalikov A.A., "Basis Property of Eigenfunctions of Ordinary Differential Operators with Integral Boundary Conditions", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mech.* 6(1982): 12-21.
- [6] Shkalikov A.A., "On the basis problem of the eigenfunctions of an ordinary differential operator", *Russian Math. Surveys* 34 (1979): 249-250.
- [7] Imanbaev N.S. and Sadybekov M.A., "Stability of basis property of a type of problems on eigenvalues with nonlocal perturbation of boundary conditions", *Ufmsk. Mat. Zh.* 3(2011): 28-33.
- [8] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S., "On the Basis Property of Root Functions of a Periodic Problem with an Integral Perturbation of the Boundary Condition", *Differential Equations* 48(2012): 896-900.
- [9] Imanbaev N.S. and Sadybekov M.A., "On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition", *Eurasian Mathematical Journal* 4(2013): 53-62.
- [10] Imanbaev N.S., "On stability of the basis property of the system of root vectors of the Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of the boundary conditions in a not strengthened regular problems of Samarskii-Ionkin type", *Matematicheskii zhurnal* 15(2015): 96-107.
- [11] Imanbaev N., "Stability of the basis property of system of root functions of Sturm-Liouville operator with integral boundary condition", *Matematicheskii zhurnal* 16(2016): 125-136.

- [12] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S., "On a problem not having the property of basis property of root vectors, connected with the perturbed regular operator of multiple differentiation", *Matematicheskii zhurnal* 17(2017): 117–125.
- [13] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S., "A Regular Differential Operator with Perturbed Boundary Condition", *Mathematical Notes* V. 101, no. 5(2017): 878–887.
- [14] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S., "Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property", *Eurasian Math. J.* 8(2017): 40–46.
- [15] Imanbaev N.S. and Sadybekov M.A., "Regular Sturm-Liouville Operators with Integral Perturbation of Boundary Condition", *Functional Analysis in Interdisciplinary Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* 216(2017): 222–234.
- [16] Naymark M.A., "Lineynyye differentsial'nyye operatory Moskva, 1969.
- [17] Krall A.M., "The development of general differential and general differential-boundary systems", *Rocky Mountain J. Math* 5(1975): 493–542.
- [18] Lang P. and Locker J., "Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by $-D^2$ ", *J. Math. Anal. And Appl* 146(1990): 148–191.

МРНТИ 27.29.21, УДК 517.925

<https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m3>¹Х.К.Ишкин, ²А.А.Набиуллина¹д.ф.-м. н., доцент, Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия,

E-mail: Ishkin62@mail.ru

²студент, Башкирский государственный университет, г. Уфа, Россия,

E-mail: nabiulina.alina.2000@mail.ru

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С МЕРОМОРФНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Аннотация. В предлагаемой работе изучается вопрос о влиянии полюсов потенциала на асимптотику решений соответствующего уравнения Штурма–Лиувилля при больших значениях спектрального параметра. Показано, что асимптотика решений в существенном зависит от того, выполняется или нет для полюсов потенциала условие тривиальной монодромии. Так, если кривая и стягивающая ее хорда не содержат полюсов потенциала, а все полюса, лежащие внутри области, ограниченной кривой и ее хордой, удовлетворяют условию тривиальной монодромии, то результат аналитического продолжения вдоль этой кривой решения с любыми начальными условиями на одном из концов кривой имеет такую же асимптотику, как в случае голоморфного потенциала. Если внутри области, ограниченной кривой и ее хордой, есть хотя бы один полюс, не удовлетворяющий условию тривиальной монодромии, то асимптотика аналитического продолжения вдоль рассматриваемой кривой любого фиксированного решения будет определяться матрицами монодромии части полюсов, лежащих внутри указанной области. Основываясь на полученных оценках, найдена асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой, потенциал которого имеет внутри выпуклой оболочки указанной кривой один полюс второго порядка, не удовлетворяющий условию тривиальной монодромии.

Ключевые слова: уравнение Штурма–Лиувилля, асимптотика решений, безмонодромные потенциалы

¹Kh.K. Ishkin, ²A.A. Nabiullina¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Bashkir State University, Ufa, Russia,

E-mail: Ishkin62@mail.ru

¹undergraduate student, Bashkir State University, Ufa, Russia,

E-mail: nabiulina.alina.2000@mail.ru

Asymptotics of solutions of the Sturm–Liouville equation with meromorphic potential

Abstract. In the present paper, we study the asymptotics for large spectral parameter of the solutions of the Sturm–Liouville equation with a meromorphic potential. It is shown that the asymptotic behavior of solutions depends entirely on the location of the poles and on the fulfillment of the condition of trivial monodromy. So, if a smooth curve γ , free from poles, and a solution φ with Cauchy data at one of the ends of γ are given, then provided that the chord contracting γ also does not contain poles, and all the poles lying inside the domain g bounded by γ and chord satisfy the trivial monodromy condition, the φ and its derivative at the other end of γ obtained by analytic continuation along γ have the same asymptotics as in the case of a holomorphic potential. The situation is greatly complicated if the domain g contains at least one pole that does not satisfy the condition of trivial monodromy. In this case, the asymptotics of φ and its derivative will be determined by the monodromy matrices of the part of the poles lying inside g . Based on the estimates obtained, we found the spectrum asymptotics of the Sturm–Liouville operator on some smooth curve γ , with a potential having inside the convex hull γ a unique second-order pole that does not satisfy the trivial monodromy condition.

Key words: Sturm–Liouville equation, asymptotics of solutions, monodromy-free potentials

1 Введение

Рассмотрим уравнение

$$-v'' = \lambda^2 \rho(t)v, \quad t \in D, \quad (1)$$

где λ – большой параметр, $D \subset \mathbb{C}$ – область, функция ρ голоморфна в D . При определенных условиях на D и функцию ρ для решений этого уравнения справедливы ВКБ-оценки [1, Гл. II, § 2]

$$v_{\pm} \sim \exp\left(\pm i\lambda \int_{t_0}^t \sqrt{\rho} dt\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right], \quad (2)$$

равномерно по $t \in D$. Нули функции ρ называют точками поворота. Вблизи них формулы (2) не работают. Причина этого становится особенно наглядной, если в уравнении (1) сделать подстановку Лиувилля:

$$z(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\rho(s)} ds, \quad v(t, \lambda) = \rho^{-1/4}(t)y(z, \lambda). \quad (3)$$

В результате приходим к следующему уравнению для y

$$-y''(z) + q(z)y(z) = \lambda^2 y(z), \quad z \in \Omega, \quad (4)$$

где

$$q(z) = -p''(z)/p(z), \quad p(z) = \rho^{1/4}(t(z)). \quad (5)$$

Ω – образ области D при отображении (3). Из равенства (5) видно, что если a точка поворота уравнения (1), то $b = z(a)$ полюс 2-го порядка функции q . Ясно, что асимптотика решений уравнения (5) будет существенно зависеть от полюсов функции q . На наш взгляд, уравнение (4) проще для исследования поведения его решений при больших λ . Между тем нет ни одной работы, специально посвященной исследованию этого вопроса для уравнений с мероморфными коэффициентами. В то же время спектральные задачи с особыми точками и с точками поворота естественным образом возникают в различных разделах математической физики [1, Гл. III], [3, 4, 5].

В предлагаемой работе мы изучаем вопрос: каким образом полюса функции q влияют на асимптотику решений уравнения (5)?

2 Обзор литературы

Первое систематическое исследование поведения решений дифференциальных уравнений с голоморфными в некоторой области комплексной плоскости коэффициентами, зависящими от некоторого большого параметра, было проделано Р.Е. Лангером [2]. Впоследствии результаты Лангера обобщались многими авторами в различных направлениях, в том числе на случай мероморфных коэффициентов (см. [6, 7, 8] и имеющиеся там ссылки).

Укажем также на широкий круг задач, связанных с преобразованием Дарбу [9], где естественным образом возникают уравнения с регулярными особыми точками, — квантовая механика для конструирования точно решаемых потенциалов [10, 11], теория солитонов для нахождения решений уравнения Кортевега де Фриза [12], спектральная теория [13, 14].

3 Материалы и методы

С этого момента мы будем иметь дело только с уравнением (4) (вне связи с (1)), поэтому считаем, что Ω – произвольная область в $\mathbb{C}$ и функция q мероморфна в Ω . Далее пусть K – односвязный компакт из Ω с кусочно-гладкой жордановой границей γ . Без ограничения общности можно считать, что γ содержит точку 0 и функция q голоморфна в 0. Обозначим через $e_{\pm}$ решения уравнения (4), удовлетворяющие начальным условиям

$$e_{\pm}(0, \lambda) = 1, \quad e'_{\pm}(0, \lambda) = \pm i\lambda. \quad (6)$$

Поставим вопрос: при каких условиях на q и кривую γ можно получить асимптотические оценки для $e_{\pm}(z, \lambda)$ при больших λ из некоторого луча или сектора комплексной плоскости?

Начнем с простейшей ситуации: K не содержит полюсов q . Пусть $[0, a] \subset K$. Из работы Лангера [2] следует, что если в замыкании области Ω_{γ} , ограниченной кривой γ и отрезком $[0, a]$ не содержится полюсов функции q , то для значений $e_{\pm}$ и их производных на отрезке $[0, a]$ можно выписать полные асимптотические разложения при больших λ из соответствующих полуплоскостей $\Pi_{\pm} = \{\pm \Im(\lambda a) \geq 0\}$. Так, для e_{-} эти разложения имеют вид

$$e_{-}^{(k)}(z, \lambda) = e^{-i\lambda z} (-i\lambda)^k \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{kn}(z) \lambda^{-n} \right), \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (7)$$

равномерно по $z \in [0, a]$ и $\arg \lambda \in [-\arg a, -\arg a + \pi]$. Здесь $u_k(z)$ – известные функции, которые выражаются через функцию q и первые $k - 1$ производных [16, Гл. 1, § 4].

3.1 Случай тривиальной монодромии

Пусть функция q голоморфна на границе K и все ее полюса $z_1, \dots, z_n$, лежащие внутри K , удовлетворяют условию безмонодромности [15]:

существуют $\nu_k \in \mathbb{N}$, $\delta_k > 0$ ($k = \overline{1, n}$), такие, что

$$q(z) = \frac{\nu_k(\nu_k - 1)}{(z - z_k)^2} + \sum_{i=0}^{\nu_k-1} c_{ki}(z - z_k)^{2i} + (z - z_k)^{2\nu_k-1} q_k(z), \quad 0 < |z| < \delta_k, \quad (8)$$

где $c_{k0}, \dots, c_{k, \nu_k-1}$ – произвольные числа, функция q_k голоморфна в круге $\{|z| < \delta_k\}$.

Как известно [15], при выполнении условий (8) любое решение уравнения (4) при любом значении λ является мероморфной функцией z на K . Другими словами, если $T_k(\lambda)$ – матрица монодромии в точке z_k для ФСР уравнения (4), задаваемой условиями (6), то $T_k(\lambda) \equiv I$.

Введем обозначения. Если $\varepsilon > 0$, то $K(\varepsilon)$ – часть K , полученная удалением ε -окрестностей точек $z_1, \dots, z_n$. Далее пусть $K_{\beta} = \{e^{i\beta} z, z \in K\}$.

Определение 1 Точку A , лежащую на границе K , назовем верхней (нижней) для K , если все точки K лежат не выше (соответственно не ниже) прямой $\Im(z - A) = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 Пусть 0 лежит на границе K , функция q голоморфна на границе K , мероморфна внутри K с полюсами $z_1, \dots, z_n$, удовлетворяющими условию (8). Тогда справедливы утверждения:

1) если для любого $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ 0 – верхняя точка для K_β , то

$$e_+^{(k)}(z, \lambda) \sim (i\lambda)^k e^{i\lambda z} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, \quad (9)$$

равномерно по $z \in K(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ и $\beta_1 \leq \arg \lambda \leq \beta_2$;

2) если для любого $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ 0 – нижняя точка для K_β , то

$$e_-^{(k)}(z, \lambda) \sim (-i\lambda)^k e^{-i\lambda z} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad k = 0, 1, \quad (10)$$

равномерно по $z \in K(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ и $\beta_1 \leq \arg \lambda \leq \beta_2$.

Следствие 1 Пусть $\gamma \subset K$ – гладкая кривая с началом 0 и концом b , не проходящая через полюса q . Тогда если отрезок $[0, a]$ не содержит полюсов q , то для решения e_- справедлива оценка (7), равномерная по $z \in [0, a]$ и $\arg \lambda \in [-\arg a, -\arg a + \pi]$.

Таким образом, при выполнении условий (8) оценки для функции e_- и ее производной на любом отрезке свободном от полюсов q такая же, что и в случае, когда полюсов нет вообще.

Если кривая γ выпукла, то есть является частью границы некоторой выпуклой области, то для выполнения оценок (9) и (10) (при определенных значениях β_1, β_2) нет необходимости требовать голоморфность q – достаточно лишь суммируемость q на γ .

Пример 1 Пусть γ – кривая с параметризацией

$$z(x) = x + is(x), \quad x \in [0, 1], \quad (11)$$

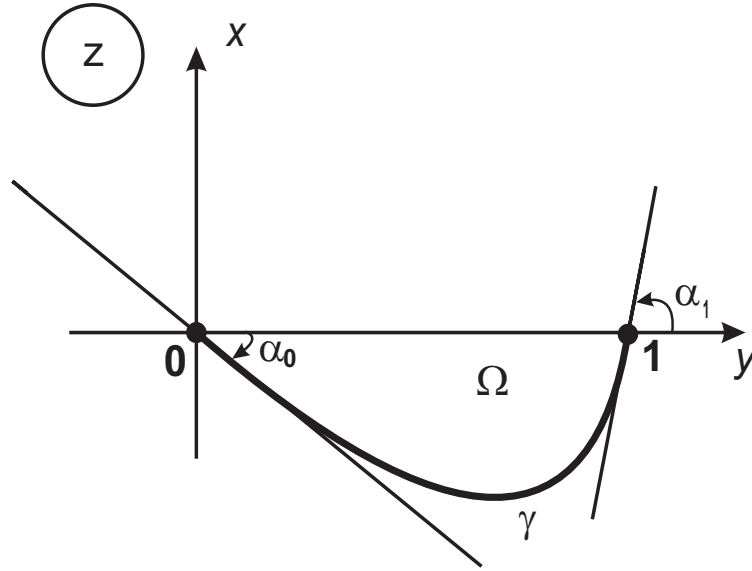
где s – непрерывно дифференцируемая выпуклая вниз функция, такая, что $s(0) = s(1) = 0$.

Обозначим $\alpha_z = \operatorname{arctg} s'(\Re z)$, $z \in \gamma$. Тогда $-\pi/2 < \alpha_0 < 0 < \alpha_1 < \pi/2$.

Теорема 2 Пусть функция $q \in L^1(\gamma)$. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ для $e_+(z, \lambda)$ ($e_-(z, \lambda)$) имеют место оценки (9) (соответственно (10)), равномерные по $z \in \gamma$ и $\arg \lambda \in [-\pi - \alpha_0, -\alpha_1]$ (соответственно $\arg \lambda \in [-\alpha_0, \pi - \alpha_1]$).

При $\gamma = [0, 1]$ $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, так что утверждение теоремы 2 представляет собой хорошо известные [1, гл. II, § 2] ВКБ-оценки решений классического уравнения Штурма–Лиувилля на отрезке.

С другой стороны, если функция q голоморфна в области Ω , ограниченной кривой γ и отрезком $[0, 1]$, и непрерывна на замыкании области Ω , то, очевидно, что функции $e_\pm(\cdot, \lambda)$ при каждом $\lambda \in \mathbb{C}$ обладают такими же свойствами. Следовательно, для функций $e_\pm(t, \lambda)$ справедливы указанные ВКБ-оценки, равномерные по $t \in [0, 1]$ и $\pm \arg \lambda \in [-\pi, 0]$. Но точно так же мы можем применить теорему 2, выбирая в качестве γ отрезок $[0, z]$, где z – произвольная точка Ω . Отсюда, в частности, следует

Рисунок 1: Кривая γ

Теорема 3 Если функция q голоморфна в области Ω и непрерывна на $\bar{\Omega}$, то при каждом фиксированном $z \in \gamma$

$$e_{\pm}^{(k)}(t, \lambda) \sim (\pm i\lambda)^k e^{\pm it\lambda} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (12)$$

равномерно по $t \in \gamma_{0z}$ и $\arg \lambda \in [-\pi - \alpha_z, -\alpha_z]$ (соответственно $\arg \lambda \in [-\alpha_z, \pi - \alpha_z]$). Здесь $\gamma_{\alpha\beta}$ означает дугу кривой γ с началом и концом в точках α и β .

3.2 Случай ветвления решений

Предположим теперь, что внутри K имеются полюса q , не удовлетворяющие условию (8). Наличие полюсов, порождающих ветвление решений, сильно усложняет дело: если кривая γ не является *каноническим путем* [1, гл. III, § 2] и не *гомотонна*¹ какому-либо каноническому пути $\tilde{\gamma} \subset \Omega$, стандартный метод ВКБ уже неприменим.

Мы ограничимся примером 1 в случае одного полюса

$$q(x) = \frac{k(k+1)}{(x-a)^2} + V, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}, \quad (13)$$

где $a \in \Omega$ и функция V голоморфна на $\bar{\Omega}$. Случай $k \notin \mathbb{N}$, $V = 0$ изучен достаточно подробно (см. [17, п. 10]) и на нем останавливаться не будем. Функция q не удовлетворяет условию (8), когда k не целое или k целое и хотя бы один из коэффициентов $V_1, V_3, \dots, V_{2k-1}$ не равен 0. Остановимся на втором случае.

Наша цель — показать, что в условиях ветвления решений справедливо утверждение, близкое к теореме 2. Введем обозначения: пусть $\varepsilon > 0$, a_ε — точка пересечения лучей

$$\{x e^{i(\alpha_0 - \varepsilon)}, x \geq 0\} \quad \text{и} \quad \{1 + x e^{i(-\pi + \alpha_1 + \varepsilon)}, x \geq 0\},$$

¹То есть кривые γ и $\tilde{\gamma} \subset \Omega$ имеют одинаковые начало и конец, и в замыкании области, ограниченной этими кривыми, нет полюсов q .

P_ε – ломаная, составленная из отрезков $[0, a_\varepsilon]$ и $[a_\varepsilon, 1]$, Δ_ε – область, ограниченная P_ε и отрезком $[0, 1]$.

Теорема 4 При любом $\varepsilon > 0$ для e_- и e'_- имеют место оценки

$$e_-^{(k)}(z, \lambda) \sim (-i\lambda)^k e^{-iz\lambda} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (14)$$

равномерно по $z \in P_\varepsilon$ и $\arg \lambda \in [-\alpha_0 + \varepsilon, \pi - \alpha_1 - \varepsilon]$.

Доказательство. Пусть β – произвольная кривая, лежащая в $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \{a\}$ и соединяющая точки 0 и 1. Обозначим через $f_\beta(\lambda)$ результат аналитического продолжения e_- вдоль β . Тогда $f_\gamma(\lambda) \equiv f_\beta(\lambda)$ для любой кривой β , гомотопной γ , то есть обходящей точку a снизу. Возьмем в качестве β ломаную P_ε . Если $\alpha_0(\varepsilon) \leq \theta \leq \pi - \alpha_1(\varepsilon)$, то 0 – нижняя точка треугольника $e^{i\theta} \Delta_\varepsilon$, поэтому для получения оценки (14) достаточно применить Лемму 1 из [19]. Лемма доказана.

Для нахождения асимптотики $e_-(1, \lambda)$ и $e'_-(1, \lambda)$, когда λ уходит в бесконечность вне сектора $\arg \lambda \in [-\alpha_0 + \varepsilon, \pi - \alpha_1 - \varepsilon]$ необходимо изучать поведение решения e_- вблизи точки a , что требует большой работы и гораздо более тонкой техники. Не вдаваясь в подробности, мы приведем один результат, основанный на указанных асимптотических оценках.

3.3 Оператор Штурма–Лиувилля на кривой с мероморфным потенциалом

Пусть γ – кривая из примера 1. Обозначим через L оператор с областью определения

$$D(L) = \{y \in L^2(\gamma) : y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma), y(0) = y(1) = 0\}$$

и действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу

$$Ly = -y'' + qy.$$

Точно так же, как в случае $\gamma = [0, 1]$ [22, § 17], доказываем, что L – замкнутый оператор с плотной областью определения. Известно [19, Лемма 2], что спектр оператора L дискретен и за исключением конечного числа лежит в угле $\{\mu \in \mathbb{C} : -2\alpha_1 \leq \arg \mu \leq -2\alpha_0\}$. Обозначим через $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^\infty$ ($-\pi/2 < \arg(\lambda_k) \leq \pi/2$) собственные числа L , пронумерованные в порядке возрастания их модулей с учетом алгебраических кратностей.

Теорема 5 Пусть потенциал q имеет вид (13), где $k \in \mathbb{N}$ и $m := \min\{j : V_{2j-1} \neq 0\} \leq k$. Тогда спектр оператора L состоит из 2 серий $\{\lambda_j^{(1)}\}$ и $\{\lambda_j^{(2)}\}$, для которых справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\lambda_j^{(1)} = \left(\frac{\pi j}{a}\right)^2 \left[1 + \frac{2m-2}{\pi j i} \ln \left(\frac{C_1 j}{2^{m-2} \sqrt{V_{2m-1}}}\right) + O\left(\frac{\ln^2 j}{j^2}\right)\right] \quad (15)$$

$$\lambda_j^{(2)} = \left(\frac{\pi j}{1-a}\right)^2 \left[1 + \frac{2m-2}{\pi j i} \ln \left(\frac{C_2 j}{2^{m-2} \sqrt{V_{2m-1}}}\right) + O\left(\frac{\ln^2 j}{j^2}\right)\right], \quad (16)$$

где C_1, C_2 – явно вычисляемые положительные постоянные.

4 Необходимость условия безмонодромности

Утверждение теоремы 3 сильнее по сравнению с утверждением теоремы 2. Это и понятно, ведь в условии теоремы 2 предполагается лишь суммируемость q на γ , что гораздо слабее условий теоремы 3. В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли ослабить в теореме 3 условия на q , сохранив при этом само утверждение.

В работе [20] показано, что при незначительном ослаблении эти условия оказываются уже необходимыми для выполнения оценок (12).

Теорема 6 Пусть функция q суммируема. Тогда если существует мероморфная в Ω функция Q , для которой выполнены условия:

(i) Q имеет конечное число полюсов $\{z_k\}_1^n$, каждый из которых удовлетворяет условию (8),

(ii) функция

$$\tilde{Q}(z) = Q(z) - \sum_{k=1}^n \frac{\nu_k(\nu_k - 1)}{(z - z_k)^2}$$

принадлежит пространству Смирнова $E_1(\Omega)$ [21, гл. III, § 6],

(iii) при почти всех $x \in \gamma$ угловое граничное значение функции $\tilde{Q}$ в точке x совпадает с $q(x)$,

то справедливы оценки (12) равномерно по $t \in \gamma_{0z}$ и $\arg \lambda \in [-\pi - \alpha_z, -\alpha_z]$ (соответственно $\arg \lambda \in [-\alpha_z, \pi - \alpha_z]$).

Обратно, если при каждом $z \in \gamma$

$$e_-^{(k)}(z, \lambda) \sim (-i\lambda)^k e^{\pm it\lambda} [1 + O(\lambda^{-1})], \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (17)$$

равномерно по $\arg \lambda \in [-\alpha_z, \pi - \alpha_z]$, то существует мероморфная в Ω функция Q , удовлетворяющая условиям (i) – (iii).

5 Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

Список литературы

- [1] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.
- [2] Langer R.E. The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain // Trans. Amer. Math. Soc. – 1939. – Vol. 46. – P. 151–190.

-
- [3] Федорюк М.В. Аналитическая структура решений задачи Штурма–Лиувилля с регулярными особенностями // Дифференц. уравнения. – 1990. – Vol. 26, № 9. – С. 1648–1650.
- [4] Федорюк М.В. Изомонодромные деформации уравнений с иррегулярными особенностями // Матем. сб. – 1990. – Vol. 181, № 12. – 1623–1639.
- [5] Mennicken R., Möller M. Non-Self-Adjoint Boundary Eigenvalue Problems. Amsterdam – London: Elsevier, 2003. – 500 p.
- [6] Olver F. Asymptotics and Special Functions. London–New York: Taylor and Francis, 1997. – 592 p.
- [7] Wazow W. Asymptotic Expansions for Solutions of Ordinary Differential Equations. New York–London–Sydney: Interscience Publishers [John Wiley and Sons, Inc.], 1965. – 384 p.
- [8] Heading J. An Introduction to Phase Integral Methods. – London: Methuen and Co., Ltd., 1961. – 160 p.
- [9] Darboux G. Sur une proposition relative aux équations linéaires // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1882. Vol. 94. – P. 1456–1459.
- [10] Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. Преобразование Дарбу, факторизация, суперсимметрия в одномерной квантовой механике // ТМФ. – 1995. – Vol. 104, № 2. – С. 356–367.
- [11] Багров В.Г., Самсонов Б.Ф. // Преобразование Дарбу уравнения Шредингера // ЭЧАЯ. – 1997. – Т. 28. – С. 951–1012.
- [12] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М: Наука, 1980.
- [13] Обломков А.А. Безмонодромные операторы Шредингера с квадратично растущим потенциалом // ТМФ. – 1999. – Т. 121, № 3. – С. 374–386.
- [14] Gibbons J., Veselov A.P. On the rational monodromy-free potentials with sextic growth // J. Math. Phys. – 2009. – Vol. 50, № 1. – P. 013513.
- [15] Duistermaat J.J. and Grünbaum F.A. Differential equations in the spectral parameter // Commun. Math. Phys. – 1986. – Vol. 103. – P. 177–240.
- [16] Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка. – 1977. – 332 с.
- [17] Ишкин Х.К. О критерии однозначности решений уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. – 2008. – Т. 84, № 4. – С. 552–566.
- [18] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир. – 1970. – 720 с.
- [19] Ишкин Х.К. О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма–Лиувилля на кривой // Матем. заметки. – 2005. Т. 78, № 1. – С. 72–84.
- [20] Ишкин Х.К. О критерии безмонодромности уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. – 2013. Т. 94, № 4. – С. 552–568.
- [21] Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М.–Л.: ГИТТЛ. 1950. – 337 с.
- [22] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

МРНТИ 27.31.17

<https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m4>¹А.А.Калыбай, ²Д.С.Каратаева¹PhD, доцент, Университет КИМЭП, г. Алматы, Казахстан, E-mail: kalybay@kimep.kz²докторант, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,

г. Нур-Султан, Казахстан, E-mail: danagul83@inbox.ru

**СИЛЬНАЯ НЕОСЦИЛЛЯТОРНОСТЬ И ОСЦИЛЛЯТОРНОСТЬ
ПОЛУЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Аннотация. Настоящая статья посвящена исследованию признаков сильной осцилляторности и неосцилляторности одного класса квазилинейных и линейных разностных уравнений второго порядка. К вопросу осцилляционных свойств разностных уравнений посвящены достаточно много статей, монографии и книг. Более сильно исследованы линейные, квазилинейные разностные уравнения второго порядка с различными методами. Среди разнообразных методов исследования осцилляционных свойств дифференциальных и разностных уравнения имеются два основных метода, один из которых называется "техника Риккати исходящий из теории линейных дифференциальных и разностных уравнений, а другой "вариационный принцип" или просто "вариационный метод". В большинстве работ, посвященных к осцилляционным свойствам дифференциальных и разностных уравнений, используются техника Риккати. Это связано тем, что в вариационном методе задача сводится к исследованию выполнения некоторого весового неравенства на множестве финитных последовательности, который является не менее сложная задача. В данной работе используя результаты авторов по весовым неравенствам Харди в разностной форме и на основе вариационного принципа получены различные необходимые и достаточные условия сильной осцилляторности и неосцилляторности для двухчленного полулинейного и линейного разностного уравнения второго порядка. Как приложение полученных результатов даны критерии ограниченности снизу и дискретности спектра одного одночленного разностного оператора второго порядка.

Ключевые слова: полулинейное разностное уравнение, сильная неосцилляторность, сильная осцилляторность, весовое дискретное неравенство Харди, последовательность чисел, дискретный оператор, дискретность спектра.

Ә.А. Қалыбай, PhD докторы, ҚМЭБИ университеті, Алматы қ., Қазақстан, E-mail: kalybay@kimep.kz

Д.С. Қаратаева, докторант, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ.,

Қазақстан, E-mail: danagul83@inbox.ru

Екінші ретті жартылай сызықты айырымдық теңдеудің күшті тербелімсіздігі және тербелімділігі

Аңдатпа. Бұл мақала екінші ретті квазисызықты және сызықтық айырымдық теңдеулердің бір класының қатты тербелімділік және тербелімсіздік белгілерін зерттеуге арналған. Айырымдық теңдеулердің тербелімділік қасиеттері туралы көптеген мақалалар, монографиялар мен кітаптар берілген. Екінші ретті сызықтық, квазисызықтық айырымдық теңдеулер әртүрлі әдістермен неғұрлым күшті зерттелген. Дифференциалдық және айырымдық теңдеулердің тербелімділік қасиеттерін зерттеудің әртүрлі әдістерінің ішінде екі негізгі әдіс бар, олардың бірі сызықтық дифференциалдық және айырымдық теңдеулер теориясынан шығатын "Риккати техникасы" деп аталады, ал екіншісі – "вариативті принцип" немесе жай "вариациялық әдіс". Дифференциалдық және айырымдық теңдеулердің тербелімділік қасиеттеріне арналған көптеген жұмыстарда Риккати әдісі қолданылады. Бұл вариациялық әдісте, есеп финитті тізбектер жиынындағы қандайда бір салмақты теңсіздікті зерттеуге әкелінетініне байланысты, мұның өзі оңай есеп емес. Бұл жұмыста авторлардың айырымдық түрдегі салмақты Харди теңсіздіктерінің нәтижелерін қолдана отырып және вариациялық принцип негізінде екінші ретті екімүшелі жартылайсызықты және сызықты айырымдық теңдеуі үшін күшті тербелімділік пен тербелімсіздіктің әртүрлі қажеттілік және жеткіліктілік шарттары алынды. Алынған нәтижелерге сүйене отырып, төменнен шенелгендік және екінші ретті бір бірмүшелі айырымдық оператордың спектрінің дискреттілігі критерилері берілген.

Түйін сөздер: жартылай сызықты айырымдық теңдеу, күшті тербелімсіздік, күшті тербелімділік, салмақты дискретті Харди теңсіздігі, сандық тізбектер, дискретті оператор, спектрдің дискреттілігі.

¹A.A.Kalybay, ²D.S.Karatayeva¹PhD, docent, KIMEP University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: kalybay@kimep.kz²doctoral student, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan,
E-mail: danagul83@inbox.ru**Strong non-oscillation and Oscillation second order half-linear difference equation**

Abstract. This article is devoted to the study of the signs of strong oscillation and non-oscillation of one class of second-order quasilinear and linear difference equations. A lot of articles, monographs and books are devoted to the question of the oscillatory properties of difference equations. More strongly investigated are linear, quasilinear difference equations of the second order with various methods. Among the various methods for studying the oscillation properties of differential and difference equations, there are two main methods, one of which is called the "Riccati technique", which proceeds from the theory of linear differential and difference equations, and the other is the "variational principle" or simply the "variational method". In most works devoted to the oscillatory properties of differential and difference equations, the Riccati technique is used. This is due to the fact that in the variational method the problem is reduced to studying the fulfillment of some weighted inequality on the set of compactly supported sequences, which is an equally difficult task. In this paper, using the results of the authors on the Hardy weight inequalities in difference form and based on the variational principle, various necessary and sufficient conditions for strong oscillation and non-oscillation for the two-term half-linear and linear difference equation of the second order are obtained. As an application of the results obtained, criteria are given for boundedness below and discreteness of the spectrum of a one-term difference operator of the second order.

Key words: half-linear difference equation, strong non-oscillation, strong oscillation, discrete Hardy weighted inequality, sequence of numbers, discrete operator, discreteness of the spectrum.

1 Введение

Рассмотрим полулинейное разностное уравнение второго порядка:

$$\Delta(\rho_i |\Delta y_i|^{p-2} \Delta y_i) + \lambda v_i |y_{i+1}|^{p-2} y_{i+1} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\lambda > 0$, $1 < p < \infty$ и $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Относительно коэффициентов уравнения (1) полагаем, что $v = \{v_i\}$ и $\rho = \{\rho_i\}$ являются последовательностями неотрицательных действительных чисел. Более того, пусть $\rho_i > 0$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$ и для каждого $m > 1$ существует $i > m$ такой, что $v_i \neq 0$.

Приведем необходимые для настоящей работы определения и утверждения. Пусть $m \geq 0$ и $n \geq 0$ – целые числа. Для краткости будем писать "интервал", подразумевая "дискретный интервал".

– Говорят, что интервал $(m, m + 1]$ содержит обобщённый нуль нетривиального решения $y = \{y_i\}$ уравнения (1), если $y_m \neq 0$ и $y_m y_{m+1} < 0$.

– Нетривиальное решение y уравнения (1) называется осцилляторным, если оно имеет бесконечное число обобщённых нулей, в противном случае оно называется неосцилляторным.

– Уравнение (1) называется осцилляторным, если все его нетривиальные решения являются осцилляторными, в противном случае оно называется неосцилляторным.

– В силу теоремы Штурма о разделении нулей [1, Theorem 3], уравнение (1) осцилляторно, если одно его нетривиальное решение осцилляторно.

– Уравнение (1) называется сильно осцилляторным или неосцилляторным, если оно при всех $\lambda > 0$ соответственно является осцилляторными или неосцилляторным.

Уравнение (1) и его частный случай при $p = 2$ является дискретным уравнением Штурма-Лиувилля

$$\Delta(\rho_i \Delta y_i) + \lambda v_i y_{i+1} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

Уравнение (1) и (2) являются разностным аналогом следующих дифференциальных уравнении

$$(\rho(t) |y'(t)|^{p-2} y'(t))' + v(t) |y(t)|^{p-2} y(t) = 0, \quad p > 1, \quad (3)$$

$$(\rho(t) y'(t))' + v(t) y(t) = 0, \quad (4)$$

соответственно.

Кроме того сильной неосцилляторностью уравнения (2) тесно связано со спектральным свойством соответствующего оператора. Основной целью этой работы является получение необходимые и достаточные условия сильной неосцилляторности и осцилляторности уравнения (1).

2 Обзор литературы и методы исследования

Исследования осцилляционных свойств уравнения (4) начинается в знаменитой работе Штурма [14] и развивается в настоящее время. В начале прошлого века стали интенсивно исследовать осцилляционные свойства и нелинейные дифференциальные уравнения. Отметим книгу [15], в которых даны достаточные успехи в этой области в первой половине прошлого века. Позже стало увеличиваться количество работ, посвященных этой тематике, в связи с применением результатов в различных направлениях качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка, например в спектральной теории дифференциальных операторов [17].

Исследования свойств решения уравнения (3) начались с работы Бихари [11], Эльберта [13] и Мирзова [12], которых обычно называют "пионерами" качественной теории (НЛ).

Основные результаты и методы исследования качественной теории уравнения (3) и уравнения (1) до 2005 года изложены в прекрасной книге Досли и Рехака [8], где первый автор вложил много сил для развития качественной теории (3).

Интерес к качественной теории (3) связан с одной стороны, как обобщение линейного уравнения (4), с другой стороны, как одномерный случай дифференциальных уравнений в частных производных с так называемым p -Лапласианом, имеющие большие приложения в физике, биологии, а также в теории не Ньютонской среды или в некоторых моделях гласеологии [16]. Исследования уравнения (1) начались в 70 годах прошлого века и как дискретный аналог уравнения (3) имеют многочисленные приложения (см., например, [9], [10]).

Среди разнообразных методов исследования осцилляционных свойств уравнения (1) имеются два основных метода, один из которых называется "техника Риккати", исходящий из теории линейных уравнений (2), а другой "вариационный принцип" или просто "вариационный метод" [8]. Большая часть работы посвященные к осцилляционным

свойствам уравнения (1) и (2) используют технику Риккати и ее различные обобщения (см., например, [1], [4], [5], [6]) и приведенные там ссылки). Однако этой техникой очень трудно получить результаты в виде критерии. Как показана будет ниже, вариационный метод сводится к установлению весового разностного неравенства на множестве финитных последовательности. Но, когда коэффициенты уравнения (1), (2) произвольные последовательности установление соответствующего неравенства во многих случаях является открытой проблемой. В работе [2] применяя вариационный метод, при условии

$$\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'} = \infty, \quad (5)$$

получены достаточные, а также необходимые условия осцилляторности и неосцилляторности уравнения (1) и (2). Здесь использованы результаты весового дискретного неравенства Харди [18], [19], [20]. В работах [21], [22] успешно применены результаты весового интегрального неравенства Харди [23] для установления осцилляционных свойства уравнения вида (3).

В данной работе применяя вариационный принцип получены критерии сильной осцилляторности и неосцилляторности уравнения (1) и (2), но выполнение условия (5) предполагается.

3 Основные результаты

Исследование уравнения (1) опирается на следующий вариационный принцип, приведенный в работе [1].

Теорема А Пусть $0 \leq t < \infty$. Уравнение (1) является неосцилляторным тогда и только тогда, когда существует $t > 1$ и выполняется неравенство

$$\sum_{i=m}^{\infty} (\rho_i |\Delta y_i|^p - \lambda v_i |y_{i+1}|^p) \geq 0 \quad (6)$$

для всех нетривиальных $y = \{y_i\}_{i=m}^{n+1}$, $y_m = 0$ и $y_{n+1} = 0$

Здесь нам понадобится утверждение, эквивалентное теореме А, доказательство которого приведено в работе [3]. Для этого эквивалентного утверждения дадим определение множества $\mathring{Y}(t, n)$ для $0 \leq t < n \leq \infty$. Нетривиальную числовую последовательность $y = \{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ назовем финитной, если конечное число её членов отлично от нуля, а множество $\text{supp } y := \{i \geq 0 : y_i \neq 0\}$ назовем её носителем. Обозначим через $\mathring{Y}(t, n)$ совокупность всех финитных последовательностей y , у которых $\text{supp } y \subset [t+1, n]$, $n < \infty$. При $n = \infty$ мы полагаем, что для любого y найдётся целое число $k = k(y) : t < k < \infty$ такое, что $\text{supp } y \subset [t+1, k]$.

Теорема В Пусть $0 \leq t < n \leq \infty$. Уравнение (1) является неосцилляторным тогда и только тогда, когда существует $t > 1$ и выполняется неравенство

$$\sum_{i=m}^{\infty} \lambda v_{i-1} |y_i|^p \leq \sum_{i=m}^{\infty} \rho_i |\Delta y_i|^p, \quad y \in \mathring{Y}(t, n), \quad (7)$$

где $v_{-1} = 0$.

В случае $\lambda = 1$ уравнение (1) и соотношение (7) соответственно имеет вид

$$\Delta(\rho_i |\Delta y_i|^{p-2} \Delta y_i) + v_i |y_{i+1}|^{p-2} y_{i+1} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$\sum_{i=m}^{\infty} v_{i-1} |y_i|^p \leq \sum_{i=m}^{\infty} \rho_i |\Delta y_i|^p, \quad y \in \mathring{Y}(m, n), \quad (9)$$

где $v_{-1} = 0$.

Рассмотрим весовое неравенство Харди в разностной форме

$$\sum_{i=m}^{\infty} v_{i-1} |y_i|^p \leq C_m \sum_{i=m}^{\infty} \rho_i |\Delta y_i|^p, \quad y \in \mathring{Y}(m, n), \quad (10)$$

Лемма 1. Пусть $1 < p < \infty$ и C_m – наилучшей константа в (10). Тогда уравнение (1)

(i) неосцилляторно тогда и только тогда, когда существует $m > 1$ и выполнено $0 < C_m \leq 1$;

(ii) осцилляторно тогда и только тогда, когда для любого $m > 1$ выполнено $C_m > 1$.

Доказательство леммы 1. Так как утверждение (ii) является отрицанием утверждения (i), то достаточно доказать утверждение (i). Пусть уравнение (8) неосцилляторно. Тогда, в силу теоремы В, существует $m > 1$ и выполняется неравенство (9) для всех $y \in \mathring{Y}(m, n)$. Это означает, что $0 < C_m \leq 1$. Обратно, пусть существует $m > 1$ и выполнено $0 < C_m \leq 1$. Тогда для $m > 1$ выполнено (9) для всех $y \in \mathring{Y}(m, n)$. Поэтому на основании теоремы В уравнение (8) неосцилляторно. Лемма 1 доказана.

В работе [7] найден критерий выполнения неравенства (10) вместе с оценкой его наилучшей константы C_m :

Теорема С. Пусть $0 \leq m < n \leq \infty$ и $1 < p < \infty$. Неравенство (10) выполняется тогда и только тогда, когда $B(m, n) < \infty$. Более того, для наименьшей константы в (10) выполняется

$$B(m, n) \leq C_m \leq 2\tilde{\gamma}_p B(m, n), \quad (11)$$

где

$$B(m, n) \equiv B_{v, \rho}(m, n) = \sup_{m < t \leq s < n} \left(\sum_{i=t}^{s-1} v_i \right) \left(\left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^n \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} \right)^{-1}$$

и

$$\tilde{\gamma}_p = \inf_{1 < \mu} \frac{\mu^p (\mu^p - 1)}{(\mu - 1)^p}.$$

Умножая обе части неравенства (10) на $\lambda > 0$ получим неравенство Харди соответствующее неравенству (7)

$$\sum_{i=m}^{\infty} \lambda v_{i-1} |y_i|^p \leq \lambda C_m \sum_{i=m}^{\infty} \rho_i |\Delta y_i|^p, \quad y \in \mathring{Y}(m, n), \quad (12)$$

при этом в неравенстве (12) наилучшая константа будет λC_m , где C_m –наилучшая константа в неравенстве (10).

Теперь, на основании леммы 1 и теоремы С имеем

Теорема 1. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда уравнение (1)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B(m, \infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m < t \leq s < \infty} \frac{\sum_{i=t}^{s-1} v_i}{\left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p}} = 0 \quad (13)$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} B(m, \infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m < t \leq s < \infty} \frac{\sum_{i=t}^{s-1} v_i}{\left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'} \right)^{1-p}} = \infty \quad (14)$$

Доказательство теоремы 1. Часть (i). Пусть уравнение (1) сильно неосцилляторно. Тогда, в силу леммы 1, для любого $\lambda > 0$ существует $m(\lambda) > 1$ и выполнено $\lambda C_{m(\lambda)} \leq 1$. Откуда $C_{m(\lambda)} \leq \frac{1}{\lambda}$ и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C_{m(\lambda)} = 0. \quad (15)$$

Так как из $0 < \lambda < \lambda_1$ и $\lambda_1 C_{m(\lambda_1)} \leq 1$ следует $\lambda C_{m(\lambda_1)} \leq 1$, то $m(\lambda) \leq m(\lambda_1)$, т.е., $m(\lambda)$ не убывает по $\lambda > 0$. Поэтому существует $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m(\lambda) = m(\infty)$. Если $m(\infty) < \infty$, то из (11) и (15) имели бы $B(m(\infty), \infty) = 0$, что невозможно в силу наложенных условия на последовательности v, ρ . Следовательно $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m(\lambda) = \infty$ и из (15) имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} C_m = 0$. Тогда из (11) следует выполнение (13).

Обратно, пусть выполнено (13). Тогда для любого $\lambda > 0$ существует $m(\lambda)$ такой, что $B(m(\lambda), \infty) \leq \frac{1}{2\tilde{\gamma}_p \lambda}$, т.е., $\lambda 2\tilde{\gamma}_p B(m(\lambda), \infty) \leq 1$. Откуда из (11) имеем $\lambda C_{m(\lambda)} \leq 1$ для любого $\lambda > 0$. Тогда по лемме 1 уравнение (1) неосцилляторно для любого $\lambda > 0$, т.е., уравнение (1) сильно неосцилляторно.

Теперь докажем утверждение (ii). Пусть уравнение (1) сильно осцилляторно. Тогда по лемме 1 для любого $\lambda > 0$ и для любого $m > 1$ выполнено $\lambda C_m > 1$ или $C_m \geq \frac{1}{\lambda}$. Откуда при $\lambda \rightarrow 0$ имеем $C_m = \infty$ для любого $m > 1$ и в частности при $\lim_{m \rightarrow \infty} C_m = \infty$. Тогда из (11) следует (14).

Обратно, пусть выполнено (14). Тогда $B(m, \infty) = \infty$ и из (11) следует $C_m = \infty$, т.е., $\lambda C_m = \infty$ для любого $\lambda > 0$. Следовательно по лемме уравнение (1) сильно осцилляторно. Теорема 1 доказана.

Если

$$\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{1-p'} = \infty \quad (16)$$

то

$$B(m, \infty) = \sup_{m < t} \sum_{i=t}^{\infty} v_i \left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{1-p'} \right)^{p-1}$$

Поэтому из теоремы 1 имеем.

Следствие 1. Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (16). Тогда уравнение (1)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=t}^{\infty} v_i \left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{1-p'} \right)^{p-1} = 0;$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=t}^{\infty} v_i \left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{1-p'} \right)^{p-1} = \infty.$$

Из теоремы 1 как следствие получаем сильной осцилляторности и неосцилляторности уравнение (2).

Следствие 2. Уравнение (2)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m < t \leq s < \infty} \frac{\sum_{i=t}^{s-1} v_i}{\left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{-1} \right)^{-1} + \left(\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{-1} \right)^{-1}} = 0$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m < t \leq s < \infty} \frac{\sum_{i=t}^{s-1} v_i}{\left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{-1} \right)^{-1} + \left(\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{-1} \right)^{-1}} = \infty$$

Пусть

$$\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{-1} = \infty \tag{17}$$

Следствие 3. Пусть выполнено (17). Уравнение (2)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=t}^{\infty} v_i \left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{-1} \right) = 0;$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=t}^{\infty} v_i \left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{-1} \right) = \infty.$$

Далее, мы предположим, что последовательности $v = \{v_i\}$ и $\rho = \{\rho_i\}$ положительные. Тогда на основании принципа взаимности [8] уравнение (1) и взаимное уравнение

$$\Delta (v^{-1} |\Delta y_i|^{p-2} \Delta y_i) + \lambda \rho_i^{-1} |y_{i+1}|^{p-2} y_{i+1} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

одновременно осцилляторно или неосцилляторно.

Применяя принцип взаимности, на основе теоремы 1 и следствие 1, 2 и 3 получаем следующее утверждения.

Теорема 2. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда уравнение (1)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m < t \leq s < \infty} \frac{\sum_{i=t}^{s-1} \rho_i^{-1}}{\left(\sum_{i=m}^t v_i^{p'-1} \right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{\infty} v_i^{p'-1} \right)^{1-p}} = 0$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m < t \leq s < \infty} \frac{\sum_{i=t}^{s-1} \rho_i^{-1}}{\left(\sum_{i=m}^t v_i^{p'-1} \right)^{1-p} + \left(\sum_{i=s}^{\infty} v_i^{p'-1} \right)^{1-p}} = \infty$$

Пусть

$$\sum_{i=s}^{\infty} v_i^{p'-1} = \infty \quad (19)$$

Следствие 4. Пусть $1 < p < \infty$ и выполнено (19). Тогда уравнение (1)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=t}^{\infty} \rho_i^{-1} \left(\sum_{i=m}^t v_i^{p'-1} \right)^{p-1} = 0;$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=t}^{\infty} \rho_i^{-1} \left(\sum_{i=m}^t v_i^{p'-1} \right)^{p-1} = \infty.$$

Из теоремы 2 и следствие 4 для уравнение (2) имеем.

Следствие 5. Уравнение (2)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m < t \leq s < \infty} \frac{\sum_{i=t}^{s-1} \rho_i^{-1}}{\left(\sum_{i=m}^t v_i\right)^{-1} + \left(\sum_{i=s}^{\infty} v_i\right)^{-1}} = 0$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m < t \leq s < \infty} \frac{\sum_{i=t}^{s-1} \rho_i^{-1}}{\left(\sum_{i=m}^t v_i\right)^{-1} + \left(\sum_{i=s}^{\infty} v_i\right)^{-1}} = \infty$$

Пусть

$$\sum_{i=s}^{\infty} v_i = \infty \tag{20}$$

Следствие 6. Пусть выполнено (20). Уравнение (2)

(i) сильно неосцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=t}^{\infty} \rho_i^{-1} \left(\sum_{i=m}^t v_i \right) = 0;$$

(ii) сильно осцилляторно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=t}^{\infty} \rho_i^{-1} \left(\sum_{i=m}^t v_i \right) = \infty.$$

Утверждения следствия 1,3,4 и 6 дополняют результаты работы [2].

Пусть минимальный дискретный оператор $L_{\min}$, порожденный разностным выражением

$$l(y)_i = \frac{1}{u_i} \Delta(\rho_i \Delta y_i), \quad i \geq 1$$

в пространстве $l_{2,u}$ со скалярным произведением $(f, g)_{2,u} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i u_i$ (т.е. $L_{\min}(y) = l(y)$) является оператором с областью определения

$$D(L_{\min}) = \{y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty} : y \in \overset{\circ}{Y}(1, \infty)\}.$$

Известно, что все самосопряженные расширения L минимального оператора имеют подобные спектры, см., [17].

Рассмотрим вопрос ограниченности снизу и дискретности спектра оператора L .

Связь между осцилляторностью уравнения (2) и спектральными свойствами оператора L показано в следующем утверждении.

Лемма 2. [17] Оператор L ограничен снизу и имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда уравнение (2) сильно неосцилляторно.

На основании следствия 2 и 5, имеем

Теорема 3. Пусть последовательности ρ , v положительные. Тогда оператор L ограничен снизу и имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда выполняются

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m < t \leq s < \infty} \frac{\sum_{i=t}^{s-1} v_i}{\left(\sum_{i=m}^t \rho_i^{-1} \right)^{-1} + \left(\sum_{i=s}^{\infty} \rho_i^{-1} \right)^{-1}} = 0$$

или

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{m < t \leq s < \infty} \frac{\sum_{i=t}^{s-1} \rho_i^{-1}}{\left(\sum_{i=m}^t v_i \right)^{-1} + \left(\sum_{i=s}^{\infty} v_i \right)^{-1}} = 0$$

4 Заключение

Основной целью работы был получение необходимых и достаточных условий сильной осцилляторности и неосцилляторности двухчленного полулинейного и линейного разностного уравнения второго порядка. Используя ранее полученным результатом по весовому разностному неравенству Харди на множестве финитных последовательностей, и применяя вариационный принцип в теории осцилляции полулинейных разностных уравнений получены критерии сильной осцилляторности и неосцилляторности двухчленного полулинейного и линейного разностного уравнения второго порядка. Как приложение этих результатов получено критерии ограниченности снизу и дискретности спектра одного одно членного дискретного оператора. Здесь предполагалось, что коэффициенты рассматриваемого уравнения неотрицательные последовательности. Методы исследования могут быть применен, когда один из коэффициентов уравнения меняет свой знак.

5 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования проектов Министерством образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05130975, 2018-2020 годы)

Список литературы

- [1] Rehak P. Oscillatory properties of second order half-linear difference equations // Czech. Math. J. – 2001. – V. 51, No. 126. – P. 303-321.
- [2] Алимагамбетова А.З., Ойнаров Р. Критерии осцилляторности и неосцилляторности полулинейного разностного уравнения второго порядка // Математический журнал. – 2007. – Т. 7, № 1 (23). – С. 15-24.

-
- [3] Алимагамбетова А.З., Ойнаров Р. Двухсторонние оценки для решений одного класса нелинейных разностных уравнений второго порядка // Математический журнал. – 2008. – Т. 8, № 3(29). – С. 12-21.
 - [4] Hasil P., Vesely M. Oscillation constants for half-linear difference equations with coefficients having mean values // Advances in difference equations. – 2015. – V. 2015:20. – doi: <http://dx.doi.org/10.1186/1313662-015-0544-1>.
 - [5] Jiang J., Tang X. Oscillation of second order half-linear difference equations (I) // Applied Math. Sciences. – 2014. – V. 8, No. 40. – P. 1957-1968.
 - [6] Rehak P. Comparison theorems and strong oscillation in the half-linear discrete oscillation theory // Rocky Mountain J. Math. – 2003. – V. 33, No. 1. – P. 333-352.
 - [7] Kalybay A., Karatayeva D., Oinarov R., Temirkhanova A. Oscillation of a second order half-linear difference equation and the discrete Hardy inequality // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2017. – No. 43. – P. 1-16. - doi: <http://dx.doi.org/10.14232/ejqtde.2017.1.43>.
 - [8] Dosly O., Rehak P. Half-linear differential equations. – North-Holland, Math. Studies, 2005. – V. 202. – 517 p.
 - [9] Agarwal R.P. Difference equations and inequalities, second ed. // Pure Appl. Math. Dekker. New York. – 2000. – Vol. 228.
 - [10] Ahlbrand C.D., Peterson A.C. Discrete Hamiltonian Systems: Difference equations, Continued Fractions, and Riccati equations. – Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.
 - [11] Bihari I. An oscillation theorem concerning the half-linear differential equation of the second order // Publ. Math. Ins. Hunger. Acad. Sci. A 8. – 1964. – P. 275-280.
 - [12] Mirzov J.D. On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems // J.Math.Anal. Appl. – 1976. – Vol. 53. – P. 418-425.
 - [13] Elbert A. A half linear second order differential equations // Colloq. Math. Soc. Janos Bolayi. – 1979. – Vol. 30. – P. 158-180.
 - [14] Sturm C. Sur les equations differentielles lineaires du second ordre // J.Math. Pures. Appl. – 1836. –1. – P. 106-186.
 - [15] Sansone G. Equazioni differenziali nel campo reale I, II. – Zanichelli, Bologna, 1949.
 - [16] Diaz J.I. Nonlinear partial differential equations and free boundaries Vol I. – Elliptic Equations, Pitman, London, 1985.
 - [17] Глазман Н.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. – М.: Физматгиз, 1963. – 340 с.
 - [18] Bennett G. Some elementary inequalities // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1987. (2) 38, No. 152. – C. 401-425.
 - [19] Bennett G. Some elementary inequalities II // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1988. (2) 39, No. 156. – C. 385-400.
 - [20] Bennett G. Some elementary inequalities III // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1991. (2) 42, No. 166. – C. 149-174.
 - [21] Oinarov R. and Rakhimova S.Y. Weighted Hardy inequalities and their application to oscillation theory of half-linear differential equation // Eurasian Math. J., Kazakhstan. – 2010. – V.1, No. 42. – P. 110-124.
 - [22] Oinarov R. and Rakhimova S.Y. Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order // E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Hungary. – 2010. – No. 49. – P. 1-15.
 - [23] Kufner A., Maligranda L. and Persson L-E. The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results // Vydavatelský servis, 2007. – 161 p.

References

- [1] Rehak P. "Oscillatory properties of second order half-linear difference equations" *Czech. Math. J.* V. 51, No. 126 (2001): 303-321.
- [2] Alimagambetova A.Z., Oynarov R. "Kriterii ostillyatornosti i neostillyatornosti polulineynogo raznostnogo uravneniya vtorogo poryadka [Oscillator and non-oscillator criteria for a second-order nonlinear difference equation]", *Matematicheskii zhurnal* Vol. 7, No 1 (23) (2007): 15-24.
- [3] Alimagambetova A.Z., Oynarov R. "Dvuhstoronnie otsenki dlya resheniy odnogo klassa nelineynykh raznostnykh uravneniy vtorogo poryadka [Bilateral estimates for solutions of one class of second-order nonlinear difference equations]", *Matematicheskii zhurnal* Vol. 8, No 3(29) (2008): 12-21.
- [4] Hasil P., Vesely M. "Oscillation constants for half-linear difference equations with coefficients having mean values" *Advances in difference equations* V. 2015:20 (2015) – doi: <http://dx.doi.org/10.11861313662-015-0544-1>.
- [5] Jiang J., Tang X. "Oscillation of second order half-linear difference equations (I)" *Applied Math. Sciences* V. 8, No. 40 (2014): 1957-1968.
- [6] Rehak P. "Comparison theorems and strong oscillation in the half-linear discrete oscillation theory" *Rocky Mountain J. Math.* V. 33, No. 1 (2003): 333-352.
- [7] Kalybay A., Karatayeva D., Oinarov R., Temirkhanova A. "Oscillation of a second order half-linear difference equation and the discrete Hardy inequality" *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* No. 43 (2017): 1-16. – doi: <http://dx.doi.org/10.14232/ejqtde.2017.1.43>.
- [8] Dosly O., Rehak P. *Half-linear differential equations* V. 202 (North-Holland, Math. Studies, 2005): 517.
- [9] Agarwal R.P. "Difference equations and inequalities, second ed." *Pure Appl. Math. Dekker. New York*. Vol. 228 (2000).
- [10] Ahlbrand C.D., Peterson A.C. *Discrete Hamiltonian Systems: Difference equations, Continued Fractions, and Riccati equations* (Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996).
- [11] Bihari I. "An oscillation theorem concerning the half-linear differential equation of the second order" *Publ. Math. Ins. Hungar. Acad. Sci.* A 8 (1964): 275–280.
- [12] Mirzov J.D. "On some analogs of Sturm's and Kneser's theorems for nonlinear systems" *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 53 (1976): 418-425.
- [13] Elbert A. "A half linear second order differential equations" *Colloq. Math. Soc. Janos Bolayi* Vol. 30 (1979): 158-180.
- [14] Sturm C. "Sur les equations differentielles lineaires du second ordre" *J. Math. Pures. Appl.* 1 (1836): 106-186.
- [15] Sansone G. *Equazioni differenziali nel campo reale I, II* (Zanichelli, Bologna, 1949).
- [16] Diaz J.I. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries Vol I, Elliptic Equations* (Pitman, London, 1985).
- [17] Glazman N.M. *Pryamyie metodyi kachestvennogo spektralnogo analiza singulyarnykh differentsialnykh operatorov* [Direct methods for the qualitative spectral analysis of singular differential operators] (M.: Fizmatgiz, 1963): 340.
- [18] Bennett G. "Some elementary inequalities" *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 38, No. 152 (1987): 401-425.
- [19] Bennett G. "Some elementary inequalities II" *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 39, No. 156 (1988): 385-400.
- [20] Bennett G. "Some elementary inequalities III" *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 42, No. 166 (1991): 149-174.
- [21] Oinarov R. and Rakhimova S.Y. "Weighted Hardy inequalities and their application to oscillation theory of half-linear differential equation" *Eurasian Math. J., Kazakhstan* V.1, No. 42 (2010): 110–124.
- [22] Oinarov R. and Rakhimova S.Y. "Oscillation and nonoscillation of two terms linear and half-linear equations of higher order" *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Hungary* No. 49 (2010): 1-15.
- [23] Kufner A., Maligranda L. and Persson L-E. "The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results" *Vydavateľský servis* (2007): 161.

MPНТИ 27.39.21

<https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m5>¹Кангужин Б.Е.^{id}, ²Даирбаева Г.^{id}, ³Мадібайұлы Ж.¹д.ф.-м.н, профессор, E-mail: kanbalta@mail.ru²к.ф.-м.н., доцент, E-mail: lazat.dairbayeva@gmail.com

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

³докторант, Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: zhumabaymadibaiuly@gmail.com

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПО НАБОРУ СПЕКТРОВ

Аннотация. В данной работе приведена постановка обратной задачи восстановления краевых условий дифференциального оператора четвертого порядка на конечном отрезке по набору спектров четырех родственных операторов. Доказана теорема единственности восстановления граничных функций по набору спектров четырех родственных операторов. Фиксированное линейное дифференциальное выражение четвертого порядка рассматривается с произвольными усиленно регулярными двухточечными граничными условиями. Считается, что об этом операторе известна полная информация о собственных значениях и собственных функциях. Далее поочередно возмущаем граничные условия. Сначала только к первому краевому условию добавляется интегральное возмущение. Затем возмущаем интегральными членами первое и второе краевые условия. Так строятся четыре родственных краевые задачи. Обратная задача заключается в том, чтобы по четырем спектрам родственных краевых задач восстановить добавленные интегральные возмущения граничных условий. Доказана однозначность восстановления интегральных возмущений. Отметим, что интегральные возмущения могут содержать производные решений. Однако на порядок производной накладываются естественные ограничения. В случае многоточечных краевых задач результаты работы значительно упрощаются.

Ключевые слова: граничные условия, корректное сужение, интегральное возмущение.

¹Б.Е. Кангужин, ²Г. Даирбаева, ³Ж. Мәдібайұлы¹ф.-м.ғ.д., профессор, E-mail: kanbalta@mail.ru²ф.-м.ғ.к., доцент, E-mail: lazat.dairbayeva@gmail.com

эл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³докторант, Академик Ө.А. Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институты,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: zhumabaymadibaiuly@gmail.com

Дифференциалдық оператордың спектрлар жиынтығы бойынша шектік шарттарды қалпына келтірудің жалғыздығы

Аңдатпа. Бұл жұмыста төртінші ретті дифференциалдық оператордың ақырлы кесіндідегі туыстас төрт спектр жиынтығы бойынша шекаралық шарттарды қалпына келтірудің кері есебінің қойылымы келтірілді. Төрт байланысты оператордың спектрлер жиынтығынан шекаралық функцияларды қалпына келтірудің бірегейлігі туралы теорема дәлелденді. Туыстас төрт операторлардың жиынтығы бойынша шекаралық функцияның қалпына келтіруінің жалғыздық теоремасы дәлелденеді. Төртінші ретті белгіленген сызықты дифференциалдық өрнек ерікті қарқынды тұрақты екі нүктелі шекаралық шарттармен қарастырылады. Бұл оператор туралы барлық мәліметтер меншікті мәндері мен меншікті функциялары белгілі. Содан кейін біз кезек-кезек шекара шарттарын бұзамыз. Біріншіден, интегралды бұзылу тек бірінші шекаралық шартқа қосылады. Содан кейін интегралдық мүшелермен бірінші және екінші шекаралық шарттарды бұзамыз. Осылайша төрт туыстас шекаралық шарттар құрылады. Кері есептің мәні төрт спектр туыстас шекаралық есеп арқылы шекаралық шарттардың интегралдық бұзылуынан қалпына келтіру. Интегралдық бұзылулардың ішінде туындылы шешімдері

болатынын атап өткеніміз жөн. Дегенмен туындының ретіне табиғи түрде шектеу қойылады. Көпнүктелі шекаралық есептің жағдайындағы жұмыстың нәтижесі біршама жеңілдетіледі.
Түйін сөздер: шекаралық шарттар, дұрыс тарылту, интегралдық бұзылу.

¹B.E. Kanguzhin, ²G. Dairbayeva, ³Zh. Madibaiuly

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, E-mail: kanbalta@mail.ru

²Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, E-mail: lazat.dairbayeva@gmail.com
 al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

³doctoral student, Institute of Mechanics and Mechanical Engineering named after Academician
 U.A. Zholdasbekov, Almaty, Kazakhstan, E-mail: zhumabaymadibaiuly@gmail.com

Uniqueness of the restoration of boundary conditions differential operator on a set of spectra

Abstract. In this paper, we pose the inverse problem of reconstructing the boundary conditions of a fourth-order differential operator on a finite interval from the set of spectra of four related operators. The uniqueness theorem for the restoration of boundary functions from the set of spectra of four related operators is proved. A fourth-order fixed linear differential expression is considered with arbitrary intensely regular two-point boundary conditions. It is believed that complete information about eigenvalues and eigenfunctions is known about this operator. Then we alternately perturb the boundary conditions. First, an integral perturbation is added only to the first boundary condition. Then we perturb the first and second boundary conditions with integral terms. Thus, four related boundary value problems are constructed. The inverse problem is to reconstruct the added integral perturbations of the boundary conditions from the four spectra of related boundary value problems. The uniqueness of the restoration of integral perturbations is proved. Note that integral perturbations may contain derivatives of solutions. However, the order of the derivative is subject to natural restrictions. In the case of multipoint boundary value problems, the results are greatly simplified.

Key words: boundary conditions, correct narrowing, integral disturbance.

1 Введение и обзор литературы

Задача восстановления граничных условий дифференциального оператора по набору спектров относится к обратным задачам спектрального анализа. Истоки указанного научного направления определяются основополагающей работой И.М.Гельфанда, Б.М. Левитана [1]. В их постановке восстановление дифференциального оператора происходило по спектральной функции оператора. В дальнейшем вместо спектральной функции оператора изучались задачи восстановления дифференциального оператора второго порядка по двум спектрам. Наиболее продвинутые результаты в этом направлении можно найти в обзорной статье Б.М. Левитана, М.Г. Гасимова [2]. Подобный подход для дифференциальных операторов высших порядков можно найти в работах З.Л. Лейбензона [3] и В.А. Юрко [4]. В частности, результаты З.Л. Лейбензона касаются дифференциальных операторов высших порядков с не распадающимися краевыми условиями. В то же время исследования В. А. Юрко охватывают случай не распадающихся граничных условий. Несколько с иных позиции обратные задачи спектрального анализа для дифференциальных операторов второго порядка с не распадающимися граничными условиями рассматривал В.А. Садовничий [5].

В настоящей работе изучается вопрос восстановления дифференциальных операторов с интегро-дифференциальными условиями по некоторому набору спектров. Вообще говоря, в таком случае восстановление оператора соответствует однозначному нахождению как коэффициентов дифференциального выражения, так и определению функций, входящих в граничные условия. Однако в данной работе восстанавливаются только

граничные коэффициенты. При этом считаем, что коэффициенты дифференциального выражения заданы. Поэтому изучаемые в данной работе проблемы относятся к восстановлению граничных условий оператора при заданном дифференциальном выражении, порождающий искомый оператор. Абстрактная постановка подобной проблемы сформулирована в работе авторов [6]. Ниже в данной статье сохраняются обозначения работы [6].

2 Материал и методы

2.1 Вспомогательные предложения и обозначения

В данном пункте напомним постановку задачи восстановления граничных условий и некоторые предложения из работы [6] переформируем в удобной для дальнейшего форме.

В функциональном пространстве $L_2(0, 1)$ рассмотрим оператор $B_{\max}$, порожденный линейным дифференциальным выражением четвертого порядка с гладкими коэффициентами

$$l(y) \equiv y^{(4)}(x) + \sum_{k=0}^2 p_k(x)y^{(k)}(x)$$

по формуле $B_{\max}y(x) = l(y)$ на области определения $D(B_{\max}) = W_2^4[0, 1]$. Заметим, что $Ran(B_{\max}) = L_2(0, 1)$ и $\dim(Ker(B_{\max})) = 4$. По теореме Михайлова-Кесельмана [7, 8] существует набор двухточечных граничных условий вида

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \quad j = 1, \dots, 4$$

таких, что если выбрать область определения оператора S_U (который представляет сужение $B_{\max}$) в виде

$$D(S_U) = \{y \in W_2^n[0, 1] : U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \quad j = 1, \dots, 4\}$$

то система корневых функций оператора S_U образует базис Рисса в $L_2(0, 1)$. В дальнейшем считаем, что набор форм $\{U_j\}$ фиксирован и выбран по Михайлову-Кесельману. А.А. Шкаликов [9] заметил, что сужение S_V сохраняет свойство базисности, если набор форм $\{U_j\}$ заменить на другой набор форм $\{V_j\}$ где

$$V_j(y) = U_j(y) + \sum_{k=0}^{\gamma_j-1} (\alpha_{jk} y^{(k)}(0) + \beta_{jk} y^{(k)}(1)) + \sum_{k=0}^{\gamma_j} \int_0^1 y^{(k)}(t) \sigma_{jk}(t) dt$$

Всюду будем предполагать, что S_V – сужение максимального оператора $B_{\max}$ является ограниченно обратимым в пространстве $L_2(0, 1)$.

В следующей теореме набор граничных форм $\{V_j\}$ заменен на другой эквивалентный набор форм.

Теорема 1 *Область определения*

$$D(S_V) = \{y \in W_2^2[0, 1] : V_j(y) = 0, \quad j = 1, \dots, 4\}$$

оператора S_V может быть записана в виде

$$D(S_V) = \left\{ y \in W_2^2[0, 1] : U_j(y) + \int_0^1 \sigma_j(t) l(y) dt = 0, \quad j = 1, \dots, 4 \right\}$$

Детали доказательства теоремы 1 можно найти в работе [6]. Для дальнейших целей удобно операторы S_U и S_V переобозначить через S_0 и S_4 , а также ввести операторы S_1, S_2, S_3 . Оператор S_k вводится по формуле

$$S_k y(x) = B_{\max} y(x)$$

$$U_j(y) + \int_0^1 \sigma_j(t) B_{\max} y(t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, k$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = k + 1, \dots, 4$$

Согласно работе [6] вытекает следующая постановка задачи: по максимальному оператору $B_{\max}$, граничным формам $\{U_j\}$ и набору спектров $\{\sigma(S_k), k = 1, \dots, 4$ операторов S_1, S_2, S_3, S_4 требуется восстановить граничные функций $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t), \sigma_4(t)\}$.

2.2 Основной результат

В данном пункте сформулирован и доказан основной результат данной статьи. Для этого удобно операторы S_1, S_2, S_3, S_4 обозначать через $S_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), S_2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), S_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), S_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Теорема 2 Пусть имеются два набора граничных функций $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t), \sigma_4(t)\}$ и $\{\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t), \tau_4(t)\}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1 из работы [6]. Пусть спектры операторов $S_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ и $S_i(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ при $i = 1, 2, 3, 4$ попарно совпадают. Тогда справедливы равенства $\sigma_i(t) = \tau_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ при почти всех $t \in (0, 1)$.

Для доказательства теоремы 2 удобно сформулировать следующие следствия из нее.

Следствие 1 Пусть имеются два набора граничных функций $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t), \sigma_4(t)\}$ и $\{\tau_1(t), \tau_2(t), \tau_3(t), \tau_4(t)\}$, удовлетворяющих условиям теоремы 1 из работы [6]. Фиксируем k из множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Пусть спектры операторов $S_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ и $S_i(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ при $i = 1, \dots, k$ попарно совпадают. Тогда справедливы равенства $\sigma_i(t) = \tau_i(t)$, $i = 1, \dots, k$ при почти всех $t \in (0, 1)$.

Достаточно доказать следствие при $k = 1$. При других k доказывается по индукции.

Доказательство следствия при $k = 1$. Сначала напомним известные свойства указанных операторов S_1, S_0 . Граничные условия

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \quad j = 1, \dots, 4,$$

выбранные согласно теореме Михайлова-Кесельмана, часто называют усиленно-регулярными граничными условиями [7, 8]. Поэтому собственные значения оператора

S_0 асимптотически простые и отделены [10], то есть найдется положительное число δ при котором любые два собственных значения оператора S_0 отстоят друг от друга на расстояние больше чем δ . Также из работ [7, 8] следует, что система собственных и присоединенных функций оператора S_0 образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$. Заметим, что оператор S_1 обладает теми же свойствами, что и оператор S_0 . Обозначим целую функцию $\Delta_0(\lambda)$, нули которой однозначно с учетом кратностей определяют собственные значения оператора S_0 . Детали можно найти в монографии [10]. Введем решение однородного уравнения

$$l(y) = \lambda y$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$U_j(y) = \alpha_j y^{(\gamma_j)}(0) + \beta_j y^{(\gamma_j)}(1) = 0, \quad j = 2, \dots, 4,$$

$$\alpha_1 y^{(\gamma_1)}(0) + \beta_1 y^{(\gamma_1)}(1) = \Delta_0(\lambda)$$

и обозначим такое решение через $\Theta_1(x, \lambda)$. Пусть λ_1 простое собственное значение оператора S_1 . Тогда $\Theta_1(x, \lambda_1)$ представляет собственную функцию оператора S_1 соответствующую собственному значению λ_1 . Поскольку λ_1 собственное значение оператора S_1 , то

$$U_1(\Theta_1(x, \lambda_1)) + \int_0^1 \sigma_1(t) l(\Theta_1(x, \lambda_1)) dt = 0$$

С другой стороны, имеем равенство $l(\Theta_1(x, \lambda_1)) = \lambda_1 \Theta_1(x, \lambda_1)$. Следовательно, можем записать соотношение

$$U_1(\Theta_1(x, \lambda_1)) + \lambda_1 \int_0^1 \sigma_1(t) \Theta_1(x, \lambda_1) dt = 0$$

Таким образом, находим один из коэффициентов Фурье функции $\sigma_1(t)$ по системе корневых функций сопряженного оператора S_1^* к оператору S_1 . Поскольку система корневых функций образует базис Рисса в пространстве $L_2(0, 1)$, то функция $\sigma_1(t)$ по полному набору ее коэффициентов Фурье восстанавливается однозначно. Так как коэффициенты Фурье функции $\sigma_1(t)$ и $\tau_1(t)$ совпадают между собой, то $\sigma_1(t) = \tau_1(t)$ почти всюду. Следствие при $k = 1$ полностью доказано.

3 Заключение

Результаты данной статьи сформулированы для случая оператора четвертого порядка. Однако все результаты справедливы для произвольных операторов высших порядков.

При гладких $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t), \sigma_4(t)\}$ предлагаемые граничные возмущения охватывают многоточечные краевые задачи. В отдельной работе будет изучено восстановление многоточечных граничных условий. Приведем численное восстановление многоточечных граничных условий.

Список литературы

- [1] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – 15:4. – С. 309-360.
- [2] Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // УМН. – 1964. – 19:2(116). – С. 3-63.
- [3] Лейбензон З.Л. Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Тр. ММО. – 1966. – 15. – С. 70-144
- [4] Юрко В.А. Восстановление дифференциальных операторов высших порядков // Дифференц. уравнения. – 1989. – 25:9. – С. 1540-1550
- [5] Садовничий В.А. Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями. Регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя // Докл. АН СССР. – 1972. – 206:2. – С. 293-296
- [6] Кангужин Б.Е., Даирбаева Г., Мадибайулы Ж. Идентификация граничных условий дифференциального оператора // Вестник КазНУ, серия математика. – 2019. – № 3 (103). – С. 13-18
- [7] Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0; 1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – 144, № 5. – С. 981-984.
- [8] Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР. Математика. – 1964. – № 2. – С. 82-93.
- [9] Шкаликков А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. Мат. Мех. – 1982. – № 6. – С. 12-21.
- [10] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.

References

- [1] Gelfand I.M., Levitan B.M., "Ob opredelenii differentsialnogo uravneniya po ego spektralnoy funktsii [On the definition of a differential equation by its spectral function]", *Izv. AN SSSR. Ser. matem.* 15:4 (1951): 309–360.
- [2] Levitan B.M., Gasyimov M.G., "Opredelenie differentsialnogo uravneniya po dvum spektram [Determination of a differential equation by two spectra]", *UMN* 19:2 (116) (1964): 3–63.
- [3] Leybenzon Z.L., "Obratnaya zadacha spektralnogo analiza obyiknovennyih differentsialnyih operatorov vyisshih poryadkov [The inverse problem of spectral analysis of ordinary differential operators of higher orders]", *Tr. MMO* 15 (1966): 70–144
- [4] Yurko V.A., "Vosstanovlenie differentsialnyih operatorov vyisshih poryadkov [Recovering differential operators of higher orders]", *Differents. uravneniya* 25:9 (1989): 1540–1550.
- [5] Sadovnichiy V.A., "Edinstvennost resheniya obratnoy zadachi v sluchae uravneniya vtorogo poryadka s neraspadayuschimisya kraevymi usloviyami. Regularizovannyye summy chasti sobstvennyih chisel. Faktorizatsiya harakteristicheskogo opredelitelya [The uniqueness of the solution of the inverse problem in the case of a second-order equation with non-decaying boundary conditions. The regularized sums of a part of the eigenvalues. Factorization of the characteristic determinant]", *Dokl. AN SSSR* 206:2 (1972): 293–296
- [6] Kanguzhin B.E., Dairbaeva G., Madibayuly Zh., "Identifikatsiya granichnyih usloviy differentsialnogo operatora [Identification of boundary conditions of a differential operator]", *Vestnik KazNU, seriya matematika* No 3 (103) (2019): 13-18
- [7] Mikhailov V.P., "O bazisah Rissa v $L_2(0; 1)$ [On the basis of Riesz in $L_2(0; 1)$]", *Docl. USSR Academy of Sciences* 144, No 5 (1962): 981-984.
- [8] Keselman G.M., "O bezuslovnoj shodimosti razlozhenij po sobstvennym funkciyam nekotoryh differentsialnyh operatorov [On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of some differential equations operators]", *Iz. VUZ USSR. Mathematics* No 2 (1964): 82-93.
- [9] Shkalikov A.A., "O bazisnosti sobstvennyh funktsij obyiknovennyh differentsialnyh operatorov s integralnymi kraevymi usloviyami [On the basis of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions]", *Westn. Moscow State University. Ser. Math. Mech.* No 6 (1982): 12-21.
- [10] Naymark M.A., *Lineinye differentsial'nye operatory* (M.: Nauka, 1969).

¹М.Т. Космакова, ²Л.Ж. Касымова¹PhD, доцент, E-mail: svetlanamir578@gmail.com²докторант PhD, E-mail: l.kasymova2017@mail.ruКарагандинский государственный университет имени академика Е.А. Букетова,
г. Караганды, Казахстан

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ДРОБНОЙ НАГРУЗКОЙ

Аннотация. В работе исследуются проблемы разрешимости неоднородной краевой задачи в первом квадранте для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что, во-первых, нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто по временной переменной, во-вторых, порядок производной в нагруженном слагаемом меньше порядка дифференциальной части и, в-третьих, точка нагрузки является движущейся (с постоянной или переменной скоростями). Обращением дифференциальной части задача сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, ядро которого содержит функцию параболического цилиндра. Произведена оценка ядра полученного интегрального уравнения и показано, что ядро уравнения имеет слабую особенность (при определенных ограничениях на нагрузку), что является основанием для утверждения, что нагруженное слагаемое в уравнении является слабым возмущением его дифференциальной части. Кроме того, исследованы предельные случаи порядка дробной производной. Доказано, что по порядку дробной производной имеет место непрерывность справа. Непрерывность слева нарушается. Результаты статьи могут оказаться полезными при исследовании дробно-нагруженных уравнений теплопроводности в случае, когда нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто по пространственной переменной.

Ключевые слова: нагрузка, дробная производная, уравнение Вольтерра.

¹М.Т.Космакова, ²Л.Ж.Қасымова¹PhD, доцент, E-mail: svetlanamir578@gmail.com²PhD студентті, E-mail: l.kasymova2017@mail.ru

Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қарағанды қ., Қазақстан

Бөлшек жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуінің шешуіне әкелу

Аңдатпа. Жұмыста бірінші квадранттағы бөлшек-жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін біртекті емес шеттік есептің шешу мәселесі

и зерттеледі. Қарастырылатын есептің ерекшелігі, біріншіден, жүктелген қосылғыш уақыт айнаымалысы бойынша Капуто бөлшек туындысы түріне келтірілген, екіншіден, жүктелген қосылғыштағы туындының реті дифференциалды бөліктің ретінен кіші, үшіншіден, жүктеме нүктесі қозғалмалы болады (тұрақты немесе айнаымалы жылдымдықтармен). Есеп ядросы параболалық цилиндрді қамтитын функция болатын екінші текті Вольтерр интегралдық теңдеуіне дифференциалдық бөлікті айналдыру арқылы келтіріледі. Алынған интегралдық теңдеудің ядросы бағаланды және теңдеу ядросының аз ерекшелігі бары көрсетілді (жүктемеге белгілі бір шектеулерде), осы жағдай негізінде теңдеудегі жүктелген қосылғыш оның дифференциалдық бөлігінің әлсіз ауытқуы болып табылады деп тұжырым жасауға болады. Сонымен қоса, бөлшек туындының ретінің шектік жағдайлары зерттелді. Бөлшек туындының реті бойынша оң жақты үздіксіздік орын алатыны дәлелденді. Солжақты үздіксіздік бұзылады. Мақала нәтижелерін жүктелген қосылғыш Капуто кеңістіктік айнаымалы бойынша бөлшекті туындысы түрінде берілген жағдайда жылуөткізгіштіктің бөлшек-жүктелген теңдеулерін зерттеуде қолдануға болады.

Түйін сөздер: жүктеме, бөлшек туынды, Вольтерра теңдеуі.

¹ M.T.Kosmakova, ²L.Zh.Kasymova¹PhD, docent, svetlanamir578@gmail.com²PhD doctoral student, l.kasymova2017@mail.ru

E. A. Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan

To solving the heat equation with fractional load

Abstract. In the paper, the solvability problems of an nonhomogeneous boundary value problem in the first quadrant for a fractionally loaded heat equation are studied. Feature of this problem is that, firstly, the loaded term is presented in the form of the Caputo fractional derivative with respect to the time variable, secondly, the order of the derivative in the loaded term is less than the order of the differential part and, thirdly, the point of load is moving (with constant or variable velocity). By inverting the differential part, the problem is reduced to the Volterra integral equation of the second kind, the kernel of which contains the function of a parabolic cylinder. The kernel of the obtained integral equation is estimated and it is shown that the kernel of the equation has a weak singularity (under certain restrictions on the load), this is the basis for the statement that the loaded term in the equation is a weak perturbation of its differential part. In addition, the limiting cases of the order of the fractional derivative are considered. It is proved that there is continuity on the right in the order of the fractional derivative. Continuity on the left is broken. The results of the paper may turn out to be useful in the study of fractionally loaded heat equations in the case, when the loaded term is presented in the form of a Caputo fractional derivative with respect to the spatial variable.

Key words: load, fractional derivative, Volterra equation.

1 Введение

Неослабевающий интерес к изучению нагруженных дифференциальных уравнений объясняется как расширяющимся объемом их приложений, так и тем фактом, что нагруженные уравнения составляют особый класс уравнений со своими специфическими задачами. Наиболее общее определение нагруженного уравнения впервые было дано А.М. Нахушевым [1] - [3]. В монографии [1] им даются понятия и подробная классификация различных нагруженных уравнений: нагруженных дифференциальных, нагруженных интегральных, нагруженных интегро-дифференциальных, нагруженных функциональных уравнений, и их многочисленные приложения и к задачам биологии.

Исследование обобщенной разрешимости неоднородных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений в соболевских пространствах проводилось в работах [4] -[5]. Помимо этого, в работах [4, 6] приводится обзор по нагруженным уравнениям. В монографии [7] исследуются граничные задачи для нагруженного оператора теплопроводности в ограниченной и неограниченной областях, когда порядок производной в нагруженном слагаемом равен или выше порядка дифференциальной части уравнения.

2 Обзор литературы

На сегодняшний день наблюдается бурное развитие дробного исчисления как в теоретическом плане, так и в его применениях. Данный раздел математического анализа превратился в инструмент математического моделирования сложнейших динамических процессов в различных (обычных и фрактальных) средах. С помощью дробного исчисления сегодня возможно решать различные задачи анализа, синтеза, диагностики и создания новых систем управления.

В последние годы возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и приложениями аппарата дробного интегрирования и дифференцирования в различных областях науки [8] – [13].

Некоторыми авторами [14] – [15] исследованы нагруженные дифференциальные уравнения, которые содержат дробные производные от следов искомой функции по временной переменной, но порядок производной в нагруженном слагаемом строго меньше соответствующего порядка дифференциальной части уравнения и точка нагрузки фиксирована, то есть, неподвижна.

Для практических приложений является значительным определение производных нецелого порядка по Капуто. Оно отличается от определения Римана-Лиувилля тем, что функция сначала подвергается дифференцированию с наименьшим целым порядком, превышающим некоторый нецелый порядок, а затем результат интегрируется с порядка, являющимся их разностью.

Интерес представляют краевой задачи для нагруженного уравнения теплопроводности, когда нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто [16] – [17]:

$${}_c D_{a,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau; \quad \beta, a \in \mathbb{R}, \quad n-1 < \beta < n.$$

при $a = 0$ и $n = 1$, поэтому $0 < \beta < 1$, то есть

$${}_c D_{0,t}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau.$$

и точка нагрузки движется с переменной скоростью.

3 Материал и методы

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим задачу в области: $Q = \{x > 0, t > 0\}$

$$u_t - u_{xx} + \lambda \left\{ D_{0,t}^\beta u(x, t) \right\} \Big|_{x=\alpha(t)} = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = 0; \quad 0 < \beta < 1, \quad (2)$$

Введем обозначение

$$\left\{ D_{0,t}^\beta u(x, t) \right\} \Big|_{x=\alpha(t)} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left\{ \int_0^t \frac{u'_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau \right\} \Big|_{x=\alpha(t)} = \mu(\tau). \quad (3)$$

3.2 Сведение задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

Обратим дифференциальную часть задачи (1)-(2) [18, с.57]

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) \mu(\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x + \xi)^2}{4t}\right) \right\}$$

С учетом соотношения

$$\int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) d\xi = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t - \tau}}\right)$$

получим следующие представление решение задачи (1)-(2):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t - \tau}}\right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t), \quad (4)$$

где

$$f_1(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Для нахождения неизвестной функции $\mu(t)$ произведем следующую процедуру: возьмём по формуле (*) производную порядка β по переменной t в обеих частях соотношения (4) и положим затем $E = \alpha(t)$. Тогда с учётом (3) имеем,

$$\mu(t) = -\lambda \left\{ D_{0,t}^\beta \left[\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t - \tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right] \right\} \Big|_{x=\alpha(t)} + f_2(t), \quad (5)$$

где

$$f_2(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \frac{f'_{1\tau}(x, \tau)}{(t - \tau)^\beta} d\tau \Big|_{x=\alpha(t)}. \quad (6)$$

Вычислим дробную производную

$$\begin{aligned} D_{0,t}^\beta \left[\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t - \tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right] &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau - \eta}}\right) \mu(\eta) d\eta \right] d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \frac{1}{(t - \tau)^\beta} \left[\mu(\tau) + \int_0^\tau \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{E^2}{4(\tau - \eta)}} \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(\tau - \eta)^{\frac{3}{2}}} \right) \mu(\eta) d\eta \right] d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{x}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \mu(\eta) \left\{ \int_\eta^t \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\eta)}\right)}{2\sqrt{\pi} (t-\tau)^\beta \cdot (\tau-\eta)^{\frac{3}{2}}} d\tau \right\} d\eta. \\
&\Rightarrow D_{0,t}^\beta \left[\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau \right] = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{x}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \mu(\eta) I(t, \beta, \eta) d\tau,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
I(t, \beta, \eta) &= \int_\eta^t \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-\eta)}\right)}{2\sqrt{\pi} (t-\tau)^\beta (\tau-\eta)^{\frac{3}{2}}} d\tau = \left\| \begin{aligned} z &= \frac{\tau-\eta}{t-\tau}; \quad zt - z\tau = \tau - \eta; \quad \tau = \frac{zt + \eta}{1+z}; \\ t - \tau &= t - \frac{zt + \eta}{1+z} = \frac{t + zt - zt - \eta}{1+z} = \end{aligned} \right. \\
&= \frac{t-\eta}{1+z} \Rightarrow t - \tau = \frac{t-\eta}{1+z}; \quad \tau - \eta = \frac{zt + \eta}{1+z} - \eta = \frac{z(t-\eta)}{1+z} \Rightarrow \tau - \eta = \frac{z(t-\eta)}{1+z}; \left\| \right. \\
d\tau &= \frac{t(1+z) - zt - \eta}{(1+z)^2} dz = \frac{(t-\eta)}{(1+z)^2} dz, \quad \tau \rightarrow \eta \Rightarrow z = 0, \quad \tau \rightarrow t \Rightarrow z \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(t, \beta, \eta) &= \int_0^{+\infty} \frac{(1+z)^\beta (1+z)^{\frac{3}{2}} (t-\eta)}{2\sqrt{\pi} (t-\eta)^\beta z^{\frac{3}{2}} (\tau-\eta)^{\frac{3}{2}} \cdot (1+z)^2} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)} \cdot \frac{1+z}{z}\right) dz = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(t-\eta)^{\beta+\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right) \cdot \int_0^{+\infty} z^{-\frac{3}{2}} (1+z)^{\beta-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)} \cdot \frac{1}{z}\right) dz.
\end{aligned}$$

Итак,

$$I(t, \beta, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} (t-\eta)^{\beta+\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)}\right) \cdot J(t, \beta, \eta), \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
J(t; \beta; \eta) &= \int_0^{+\infty} z^{-\frac{3}{2}} (1+z)^{\beta-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)} \cdot \frac{1}{z}\right) dz = \left\| u = \frac{1}{z}; \quad du = -\frac{dz}{z^2} \right\| = \\
&= \int_0^{+\infty} u^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{\beta-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)} \cdot u\right) \frac{du}{u^2} = \\
&= \int_0^{+\infty} (u+1)^{\beta-\frac{1}{2}} \cdot u^{-\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)} \cdot u\right) du
\end{aligned}$$

. Используем формулу 2.3.6 (12) из [19, стр.262]:

$$\left\| \begin{aligned} \int_0^\infty x^{\alpha-1} (x+z)^{\pm\frac{1}{2}-\alpha} e^{-px} dx &= 2^\alpha \cdot (2\pi)^{\frac{1}{2}} \gamma^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\alpha) e^{\frac{pz}{2}} \cdot D_{1-2\alpha}(\sqrt{2pz}); \\ \alpha - 1 &= -\beta \Rightarrow \alpha = 1 - \beta; \quad z = 1; \quad \pm\frac{1}{2} - \alpha = \beta - \frac{1}{2} \Rightarrow \pm\frac{1}{2} - 1 + \beta = \beta - \frac{1}{2}; \\ \operatorname{Re} \alpha &= \operatorname{Re}(1 - \beta) > 0, \quad 0 < \beta < 1, \\ \operatorname{Re} p &= \operatorname{Re} \frac{x^2}{4(t-\eta)} > 0; \quad |\arg z| = 0 < \pi \end{aligned} \right\|$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 J(t; \beta; \eta) &= 2^{1-\beta} \Gamma(1-\beta) \cdot \exp\left(\frac{x^2}{8(t-\eta)}\right) \cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\eta)}}\right) \cdot \left(2 \cdot \frac{x^2}{4(t-\eta)}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\
 &= 2^{\frac{3}{2}-\beta} \cdot \frac{\Gamma(1-\beta)}{x} \cdot \sqrt{t-\eta} \exp\left(\frac{x^2}{8(t-\eta)}\right) \cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\eta)}}\right) \Rightarrow \\
 J(t; \beta; \eta) &= 2^{\frac{3}{2}-\beta} \Gamma(1-\beta) \cdot \frac{\sqrt{t-\eta}}{x} \exp\left(\frac{x^2}{8(t-\eta)}\right) \cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\eta)}}\right). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Подставив выражение (9) в (8), получим

$$\begin{aligned}
 I(t; \beta; \eta) &= \frac{2^{\frac{3}{2}-\beta} \cdot (t-\eta)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi} \cdot (t-\eta)^{\beta+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(1-\beta)}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\eta)} + \frac{x^2}{8(t-\eta)}\right) \cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\eta)}}\right) = \\
 &= \frac{2^{\frac{1}{2}-\beta} \Gamma(1-\beta)}{\sqrt{\pi} \cdot x (t-\eta)^\beta} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{8(t-\eta)}\right) \cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\eta)}}\right), \quad (10)
 \end{aligned}$$

где $D_p(z)$ — функция параболического цилиндра.

Далее (7) с учетом (10) примет вид:

$$\begin{aligned}
 D_{0,t}^\beta \left[\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \mu(\tau) d\tau \right] &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \cdot \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \\
 &- \frac{x}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \mu(\tau) \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}-\beta}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(1-\beta)}{x (t-\tau)^\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{8(t-\tau)}\right) D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right) d\tau = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \cdot \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{2^{\frac{1}{2}-\beta}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{8(t-\tau)}\right) D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right) \mu(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

. Окончательно получим

$$D_{0,t}^\beta \left[\int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \mu(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \cdot \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \int_0^t K(t, \tau) \mu(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{2^{\frac{1}{2}-\beta}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^\beta} \exp\left(-\frac{x^2}{8(t-\tau)}\right) \cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right)$$

. Тогда с учетом (11) уравнение (5) примет вид интегрального уравнения Вольтерра

$$\mu(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \lambda \int_0^t K_\beta(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t), \quad (12)$$

где ядро имеет вид

$$K_\beta(t, \tau) = \frac{1}{2^\beta} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{(t-\tau)^\beta} \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)}\right) \cdot D_{2\beta-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right), \quad (13)$$

$$|0 < \beta < 1 \Rightarrow -1 < 2\beta - 1 < 1|$$

. Здесь [20]:

$$D_p(z) = 2^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-p}{2})} \Phi\left(-\frac{p}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2\pi}z}{\Gamma(-\frac{p}{2})} \Phi\left(\frac{1-p}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right\}.$$

- функция параболического цилиндра,

$$\Phi(\alpha; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots -$$

- вырожденная гипергеометрическая функция.

$$\left\| p = 2\beta - 1; z = \frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}} \Rightarrow -\frac{p}{2} = \frac{1-2\beta}{2} = \frac{1}{2} - \beta; \frac{1-p}{2} = \frac{1-2\beta+1}{2} = 1 - \beta \right\|$$

. Тогда

$$\begin{aligned} & \Phi\left(-\frac{p}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \Big|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}} = 1 + \frac{\frac{1}{2} - \beta}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{(\frac{1}{2} - \beta) \cdot (\frac{3}{2} - \beta)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} \cdot \frac{z^2}{2!} + \\ & + \frac{(\frac{1}{2} - \beta) \cdot (\frac{3}{2} - \beta) (\frac{5}{2} - \beta)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots \Big|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}} = \\ & = 1 + \frac{(1-2\beta)}{1!!} \frac{z}{1!} + \frac{(1-2\beta)(3-2\beta)}{3!!} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{(1-2\beta)(3-2\beta)(5-2\beta)}{5!!} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots \Big|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}}; \\ & \Phi\left(\frac{1-p}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \Big|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}} = \\ & = 1 + \frac{1-\beta}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{(1-\beta) \cdot (2-\beta)}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{(1-\beta) \cdot (2-\beta)(3-\beta)}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots \Big|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}} = \\ & = 1 + \frac{2(1-\beta)}{3!!} \frac{z}{1!} + \frac{2^2(1-\beta)(2-\beta)}{5!!} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{2^3(1-\beta)(2-\beta)(3-\beta)}{7!!} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots \Big|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}} \\ & D_{2\beta-1}(z) = 2^{\beta-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4}} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-p)} \left[1 + \frac{(1-2\beta)}{1!!} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{(1-2\beta)(3-2\beta)}{3!!} \cdot \frac{z^2}{2!} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(1-2\beta) \cdot (3-2\beta)(5-2\beta)}{5!!} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}-\beta)} \left[z + \frac{2(1-\beta)}{3!!} \frac{z^2}{1!} + \frac{2^2(1-\beta)(2-\beta)}{5!!} \cdot \frac{z^3}{2!} + \frac{2^3(1-\beta)(2-\beta)(3-\beta)}{7!!} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots \right] \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

3.3 Пределные случаи β

Рассмотрим случаи β

I. $\beta = 1$. Тогда [9] $D_{0,t}^\beta f(t) = f'(t)$.

Задача (1) – (2) примет вид:

$$u_t - u_{xx} + \lambda u_t(x, t)|_{x=\alpha(t)} = f(x, t),$$

$$u(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = 0.$$

Следуя [7, с.206], обратим дифференциальную часть в полученной задаче:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty u_\tau(x, \tau)|_{x=\alpha(\tau)} G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4t} \right] - \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4t} \right] \right\}$$

или

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t u_\tau(\alpha(\tau), \tau) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t - \tau}} \right) d\tau + \int_0^t \int_0^\infty f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi d\tau. \quad (15)$$

Введя обозначение $\mu(t) = u_t(\alpha(t), t)$, из (15) получим

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{1 + \lambda} \int_0^t \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi} (t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left(-\frac{\alpha^2(t)}{4(t - \tau)} \right) \cdot \mu(\tau) d\tau = \frac{1}{1 + \lambda} f_2(t),$$

или

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{1 + \lambda} \int_0^t K(t, \tau) \cdot \mu(\tau) d\tau = \frac{1}{1 + \lambda} f_2(t), \quad (16)$$

где

$$K(t, \tau) = \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi} (t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left(-\frac{\alpha^2(t)}{4(t - \tau)} \right)$$

.

Заметим, что

$$\int_0^t K(t, \tau) d\tau = \left\| \xi = \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t - \tau}}; \quad d\xi = \frac{\alpha(t)}{4(t - \tau)^{\frac{3}{2}}} \right\| = \int_{\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} d\xi = \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t}} \right),$$

.

Отсюда, например, при $\alpha(t) \approx t^\omega$, $\omega > \frac{1}{2}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K(t, \tau) d\tau = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t K(t, \tau) d\tau = 0.$$

Тогда норма $\|K(t, \tau)\|$ в пространстве непрерывных функций равна 1. Поэтому решение уравнения (16) $\mu(t)$ не может быть найдено методом последовательных приближений.

Так как [20, формула 9.251]

$$D_1(z) = -e^{\frac{z^2}{4}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} (-z) = z \cdot e^{-\frac{z^2}{4}} \Big|_{z=\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}}$$

то из (13) при $\beta = 1$

$$\begin{aligned} K_1(t, \tau) &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{t-\tau} \exp \left(-\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)} \right) \cdot \frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}} \exp \left\{ -\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)} \right\} = \\ &= \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp \left\{ -\frac{\alpha^2(t)}{4(t-\tau)} \right\}. \end{aligned}$$

Из (12) при $\beta = 1$

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t \frac{\alpha(t)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp \left(-\frac{\alpha^2(t)}{4(t-\tau)} \right) \cdot \mu(\tau) d\tau = f_2(t),$$

С уравнением (16) не совпадает. Поэтому непрерывности слева по порядку при $\beta = 1$ нет.

II. $\beta = 0$

Из (3) имеем:

$$D_{0,t}^0 u(x, t) \Big|_{x=\alpha(t)} = \int_0^t u_\tau(x, \tau) d\tau \Big|_{x=\alpha(t)} = u(\alpha(t); t) = \mu(t)$$

Из (1)-(2) получим задачу:

$$u_t - u_{xx} + \lambda u(\alpha(t); t) = f(x, t)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = 0.$$

Её решение:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \cdot u(\alpha(\tau); \tau) d\tau + \underbrace{\int_0^t \int_0^{+\infty} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau}_{f_1(x, t)}$$

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \cdot \mu(\tau) d\tau = f_2(t), \quad (17)$$

где $f_2(t) = f_1(\alpha(t); t)$.

Из (14) при $\beta = 0$ имеем: [20, формула 9.254(1)]

$$D_{-1}(z) = e^{\frac{z^2}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \right).$$

Из (13) при $\beta = 0$

$$K_0(t, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)}\right) \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$$

. Из (12) при $\beta = 0$

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t \mu(\tau) d\tau - \lambda \int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau = f_2(t)$$

или

$$\mu(t) + \lambda \int_0^t \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \mu(\tau) d\tau = f_2(t),$$

где $f_2(t) = f_1(\alpha(t); t)$ (Ср с (17))

Значит, при $\beta = 0$ решения задачи (1)-(2) и решение, полученное из (12), совпадают.

3.4 Оценка ядра интегрального уравнения

Оценим ядро в (12).

Исследуем ядро интегрального уравнения (12) $K_\beta(t, \tau)$, которое имеет особенность при $\tau = t$.

Найдем $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K_\beta(t, \tau) d\tau$

Так как $\arg z = \arg\left(\frac{\alpha(t)}{2\sqrt{t-\tau}}\right) = 0 < \frac{3\pi}{4}$, то при больших z имеем [20]

$$D_p(z) \approx e^{-\frac{z^2}{4}} z^p \left(1 - \frac{p(p-1)}{2z^2} + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{2 \cdot 4 \cdot z^4} - \dots\right)$$

При $p = 2\beta - 1$ и $z = \frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}$ имеем при малых $(t - \tau)$ и при $\alpha(t) \approx t^\omega$, $\omega < \frac{1}{2}$

$$D_{2\beta-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right) \approx \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)}\right) \cdot \left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right)^{2\beta-1} \times \\ \times \left(1 - \frac{(2\beta-1)(2\beta-2)}{2 \cdot \frac{\alpha^2(t)}{2(t-\tau)}} + \frac{(2\beta-1)(2\beta-2)(2\beta-3)}{8 \cdot \frac{\alpha^4(t)}{4(t-\tau)^2}} - \dots\right).$$

Тогда в ядре (13) при малых $(t - \tau)$ и при $\alpha(t) \approx t^\omega$, $\omega < \frac{1}{2}$:

$$\left| \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{8(t-\tau)}\right) D_{2\beta-1}\left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right) \right| = \exp\left(-\frac{\alpha^2(t)}{4(t-\tau)}\right) \left(\frac{\alpha(t)}{\sqrt{2(t-\tau)}}\right)^{2\beta-1} \times \\ \times \left| 1 - (2\beta-1)(2\beta-2) \frac{t-\tau}{\alpha^2(t)} + (2\beta-1)(2\beta-2)(2\beta-3) \frac{(t-\tau)^2}{2\alpha^4(t)} - \dots \right| < M$$

где $M = \text{const}$ при малых $(t - \tau)$ и при $\alpha(t) \approx t^\omega$, $\omega < \frac{1}{2}$.

Тогда ядро (13) $K_\beta(t, \tau)$ при $0 < \beta < 1$ имеет слабую особенность. Уравнение (12) будет иметь единственное решение при любой правой части $f_2(t)$ и $\forall \tau$, которое можно найти методом последовательных приближений.

4 Результаты и обсуждение

Доказана теорема:

Теорема. *Интегральное уравнение (12) с ядром вида (13) при $0 < \beta < 1$ и при $\alpha(t) \approx t^\omega$, $\omega < \frac{1}{2}$ однозначно разрешимо в классе непрерывных функций при любой правой части из класса непрерывных функций.*

Результаты работы согласуются с результатами исследования, приведенными в монографии [7]: в случае, если порядок производной в нагруженном слагаемом равен или выше порядка дифференциальной части уравнения (такие уравнения в [7] названы "существенно"нагруженными), нагруженное слагаемое в уравнении не является слабым возмущением его дифференциальной части. Выше было получен похожий результат для уравнения (12).

5 Заключение

Исследованы проблемы разрешимости неоднородной краевой задачи в первом квадранте для нагруженного уравнения теплопроводности, в котором нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной Капуто по временной переменной, причем порядок производной в нагруженном слагаемом меньше порядка дифференциальной части, и точка нагрузки движется (с постоянной или переменной скоростями).

Предполагается дальнейшее исследование поставленной задачи в случае представления нагруженного слагаемого в форме дробной производной Капуто по пространственной переменной.

Список литературы

- [1] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995. - 205 с.
- [2] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. - 1983. - Т.19, №1. - С.86-94.
- [3] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро - дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. - 1976. - Т.12, №1. - С.103-108.
- [4] Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. - Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995. - 270с.
- [5] Дженалиев М.Т. О нагруженных уравнениях с периодическими граничными условиями // Дифференц. уравнения. - 2001. - Т.37, №1. - С.48-54.
- [6] Дженалиев М.Т. Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями // Дифференц. уравнения. - 1991. - Т.27, №10. - С.1825-1827.
- [7] Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения - как возмущения дифференциальных уравнений. - Алматы: ГЫЛЫМ, 2010. - 334с.
- [8] Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. - New York-London: Academic Press, 1974.
- [9] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника, 1987. - 688с.
- [10] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. - New York: Gordon and Breach, 1993. - 1006p.
- [11] Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их приложения. - Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2000. - 298с.

- [12] Le Mehaute A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J. (eds.) Fractional Differentiation and its Applications. - Bordeaux: Bordeaux Univ, 2005.
- [13] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. - М.: Наука, 2005. - 199с.
- [14] Геккиева С.Х. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений с дробной производной по времени: автореф. ... канд. физ.-мат. наук.:01.01.02. - Нальчик: НИИ ПМА Каб.-Балк. научн. Центра РАН, 2003. - 14с.
- [15] Керемов А.А., Шхануков-Лафишев М.Х., Кулиев Р.С. Краевые задачи для нагруженного уравнения теплопроводности с нелокальными условиями типа Стеклова // Неклассические уравнения математической физики: труды семинара, посвященного 60-летию профессора В.Н. Врагова. - Новосибирск: Изд-во ИМ, 2005. - С.152-159.
- [16] Caputo M. Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent - II // Geophys. J. Astronom. Soc. - 1967. - Vol. 13. - P.529-539.
- [17] Caputo M. Elasticita e Dissipazione. - Bologna: Zanichelli, 1969.
- [18] Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 576 с.
- [19] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т.1. Элементарные функции. — 2-е изд., исправ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 632 с.
- [20] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products / Seventh Edition, AP, New York, 2007. - 171 p.

References

- [1] Nakhushev A.M. "Uravnenija matematicheskoi biologii [Equations of Mathematical Biology]", M.: Vysshaja shkola, (1995): 205.
- [2] Nakhushev A.M. "Nagruzhennye uravnenija i ih prilozhenija [Loaded equations and their applications]", *Diff. equations* vol. 19, no 1 (1983): 86-94.
- [3] Nakhushev A.M. "O zadache Darbu dlja odnogo vyrozhdajushhegosja nagruzhennogo integro - differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka [The Darboux problem for a certain degenerate second order loaded integrodifferential equation]", *Diff. equations* vol. 12, no 1 (1976): 103-108.
- [4] Dzhenaliev M.T. "K teorii linejnyh kraevyh zadach dlja nagruzhennyh differencial'nyh uravnenij [On the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations]", *Almaty: ITPM Computer Center* (1995): 270.
- [5] Dzhenaliev M.T. "O nagruzhennyh uravnenijah s periodicheskimi granichnymi uslovijami [On loaded equations with periodic boundary conditions]", *Diff. equations* vol. 37, no 1 (2001): 48-54.
- [6] Dzhenaliev M.T. "Ob odnoj kraevoj zadache dlja linejnogo nagruzhennogo parabolicheskogo uravnenija s nelokal'nymi granichnymi uslovijami [About Boundary Value Problem for Linear Loaded Parabolic Equation with Non-local Boundary Conditions]", *Diff. equations* vol. 27, no 10 (1991): 1825-1827.
- [7] Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I. "Nagruzhennye uravnenija - kak vozmushhenija differencial'nyh uravnenij [Loaded equations as perturbations of differential equations]", *Almaty: Gylm* (2010): 334.
- [8] Oldham K.B., Spanier J. "The Fractional Calculus", *New York-London: Academic Press* (1974).
- [9] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. "Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i nekotorye ih prilozhenija [Integrals and derivatives of fractional order, and some applications]", *Minsk: Nauka i tehnika* (1987): 688.
- [10] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. "Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications", *New York: Gordon and Breach* (1993): 1006.
- [11] Nakhushev A.M. "Jelementy drobnogo ischislenija i ih prilozhenija [Elements of fractional calculus and their applications]", *Nal'chik: NII PMA KBNC RAN*, (2000): 298.
- [12] Le Mehaute A., Tenreiro Machado J.A., Trigeassou J.C., Sabatier J. "(eds.) Fractional Differentiation and its Applications", *Bordeaux: Bordeaux Univ*, (2005).
- [13] Pskhu A.V. "Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka [Partial differential equations of fractional order]", *M.: Nauka*, (2005): 199.

- [14] Gekkieva S.Kh. "Kraevye zadachi dlja nagruzhenykh parabolicheskikh uravnenij s drobnnoj proizvodnoj po vremeni: avtoref. ... kand. fiz.-mat. nauk:.01.01.02 [Boundary value problems for loaded parabolic equations with a fractional time derivative: author. ... cand. Phys.-Math. Sciences: .01.01.02]" , *Nal'chik: NII PMA KBNC RAN*, (2003): 14.
- [15] Kerefov A.A., Shkhanukov-Lafishev M.Kh., Kuliev R.S. "Kraevye zadachi dlja nagruzhenogo uravnenija teploprovodnosti s nelokal'nymi uslovijami tipa Steklova //Neklassicheskie uravnenija matematicheskoy fiziki: trudy seminara, posvjashhennogo 60-letiju professora V.N. Vragova [Boundary value problems for the loaded heat equation with non-local conditions of Steklov type // Non-classical equations of mathematical physics: proceedings of a seminar dedicated to the 60th anniversary of Professor V.N. Vragov]" , *Novosibirsk: Izd-vo IM*, (2005): 152-159.
- [16] Caputo M. "Lineal model of dissipation whose Q is almost frequency independent - II" , *Geophys. J. Astronom. Soc.*, vol. 13 (1967): 529-539.
- [17] Caputo M. "Elasticita e Dissipazione" , *Bologna: Zanichelli*, 1969.
- [18] Polyanin A.D. "Spravochnik po linejnym uravnenijam matematicheskoy fiziki [Handbook of linear equations of mathematical physics]" , *M.: FIZMATLIT*, (2001): 576.
- [19] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. "Integraly i rjady. T.1. Jelementarnye funkci. — 2-e izd [Integrals and series. V.1. Elementary functions. - 2nd ed.]" , *M.: FIZMATLIT*, (2002): 632.
- [20] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. "Table of Integrals, Series, and Products / Seventh Edition" , *New York: AP*, (2007): 171.

МРНТИ 27.21.19

<https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m7>¹Ж. Нұрпейіс , ²Ж.Т. Таласбаева , ³А.Д. Мажитова ¹к.ф.-м.н., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан,
E-mail: aladinnur@mail.ru²к.ф.-м.н., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан,
E-mail: talasbaeva1979@gmail.com³PhD, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан,
E-mail: akmaral010179@gmail.com

К ГЕОМЕТРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В E_n

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена выделению и изучению многомерных сетей, конструктивно связанных распределением. В первоначальном подходе к выделению сетей существенно используется вектор средней кривизны распределения. Поэтому такое выделение осуществимо лишь в метрических пространствах (в работе этот вопрос исследуется в евклидовом n -пространстве). В статье исследуются условия существования канонических распределений плоскостей, принадлежащих касательной плоскости поверхности евклидова пространства. В данной статье введено понятие параллельного переноса площадки вдоль интегральных кривых однораспределения. Доказано утверждение о том, что векторные поля коллинеарны тогда и только тогда, когда геометрический объект тензор кривизны является нулевым.

Выведены дифференциальные уравнения однораспределения и найдено необходимое и достаточное условие, для того чтобы геодезическая линия однораспределения была плоской, а также найдены условия, при которых интегральные кривые однораспределения являются линиями кривизны относительно однораспределения. Доказано утверждение о том, что линия будет геодезической, тогда и только тогда, когда ее главные нормали совпадают с нормальными поверхностями, на которых эта линия расположена. Получены дифференциальные уравнения геодезической плоской линии.

Ключевые слова: Структурные уравнения, параллельный перенос площадки (гиперраспределение) $\Delta_{n-1}(x)$ вдоль интегральных кривых однораспределения $\Delta(y)$, Λ_{ij}^n – тензор, R_{jpr}^i – скалярная кривизна гиперраспределения, геодезические однораспределения линии $\Delta(y)$.

¹Ж. Нұрпейіс, ²Ж.Т. Таласбаева, ³А.Д. Мажитова¹ф.-м.ғ.к., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан,
E-mail: aladinnur@mail.ru²ф.-м.ғ.к., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ. Қазақстан,
E-mail: talasbaeva1979@gmail.com³PhD, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан,
E-mail: akmaral010179@gmail.com E_n кеңістігінде интегралданатын таралымдардың геометриясына

Аңдатпа. Қарастырып отырылған торды зерттеуде таралымның орта иілімнің векторы алынып зерттелді. Мұндай қарастыру тек метрикалық кеңістіктерде ғана жүзеге асырылады (Бұл сұрақ n -өлшемді векторлық кеңістікте зерттелді). Ұсынылып отырылған жұмыста жазықтық таралымдарының табылу шарты зерттелді және таралымдар евклидік кеңістіктегі беттің жанама жазықтығында жатуына байланысты айтылды. Таралымдардың торларының ажыратылатын торлардың беттегі теориясы зерттелді. Беттің барлық нүктелерінде геодезиялық иілім нөлге тең болса онда мұндай қисық геодезиялық сызық болады. Мақалада гипертаралымның біртаралымның интегралдық қисығының параллель жылжу ұғымы енгізілді. Векторлық өрістердің коллинеар болуы үшін беттің тензор иілімдерінің нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

Біртаралымының геодезиялық қисығының жазық қисық болуының дифференциалдық теңдеулері қорытылып шығарылды. Сонымен қатар біртаралымның интегралдық қисығы біртаралымның иілім сызығы болуының қажетті және жеткілікті шарты табылды. Структуралық теңдеуі $(n-1)$ -өлшемді гипертаралымының біртаралымның интеграл қисығының бойымен параллель жылжудағы структуралық теңдеуі алынды. Бұл жағдайда иілім тензоры мен бұралым тензорының нөлге айналуы жеткілікті.

Түйін сөздер: Структуралық теңдеулер, бірөлшемді $\Delta(y)$ таралымның интеграл қисығының бойымен $\Delta_{n-1}(x)$ – гипертаралымның параллель көшірілімі, Λ_{ij}^n – тензоры, $R_{j pq}^i$ – гипертаралымның скаляр иілімі, $\Delta(y)$ біртаралымның интеграл қисығының геодезиялық сызық болуы.

¹Z. Nurpeyis, ²Z.T. Talasbayeva, ³A.D. Mazhitova

¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences,

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: aladinnur@mail.ru

²Candidate of Physical and Mathematical Sciences,

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail: talasbaeva1979@gmail.com

³PhD, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

E-mail: akmaral010179@gmail.com

To geometry of integrable distributions in E_n

Abstract. The proposed work is devoted to the identification and study of multidimensional networks constructively connected by distribution. In the initial approach to the selection of networks, the vector of average distribution curvature is essentially used. Therefore, such a separation is feasible only in metric spaces (in the work this question is studied in Euclidean n -space). The article investigates the conditions for the existence of canonical distributions of planes belonging to the tangent plane of the surface of Euclidean space. This article introduces the concept of parallel site transfer along integral unidistribution curves. The statement is proved that vector fields are collinear if and only if the geometric object has a zero curvature tensor.

Differential equations of unidistribution are derived and a necessary and sufficient condition is found for the geodesic line of unidistribution to be flat, and conditions are found under which the integral curves of unidistribution are curvature lines with respect to unidistribution. The statement is proved that the line will be geodesic if and only if its main normals coincide with the normals of the surface on which this line is located. Differential equations of a geodesic flat line are obtained.

Key words: Structural equations, parallel transfer of the hyperdistribution $\Delta_{n-1}(x)$ along integral unidistribution curves $\Delta(y)$, Λ_{ij}^n is the tensor, $R_{j pq}^i$ is the scalar curvature of the hyperdistribution, geodesic unidistributions of the line $\Delta(y)$.

1 Введение

Если на гладком p -мерном многообразии x_p заданы p линейно независимых дифференцируемых одномерных распределений, то p семейств интегральных кривых этих распределений образуют сеть Σ_p линий на многообразии x_n .

В настоящее время теория многомерных сетей занимает определенное место в дифференциальной геометрии пространств различной структуры. Ее развитие происходит, в основном, в двух направлениях:

1. Строятся различные обобщения богатой результатами теории двумерных сетей;
2. Даются новые способы определения сетей, учитывающие специфику многомерной геометрии.

2 Обзор литературы

Обзор работ по многомерным сетям опубликован в 1965 году В.Т. Базылевым [1-4]. В докладе [5], прочитанном Н.М. Остиану, где освещены некоторые вопросы дальнейшего развития этого раздела геометрии. Систематический же обзор рассматриваемого направления за последние годы не проводился. Укажем кратко лишь те работы, которые в известной мере определили круг вопросов нашего исследования. Некоторые начальные исследования сделаны в работах [6-14]. Например, в работах [1-4], [9], [12] проводится обобщение понятий и результатов дифференциальной геометрии сетей на дифференцируемых многообразиях. Введено понятие сетевого модуля, позволяющего проводить классификацию сетей на гладких многообразиях.

3 Постановка задачи

В настоящей работе рассмотрены некоторые геометрические свойства $(n - 1)$ – распределения в евклидовом пространстве E_n .

Пусть n -мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $R^x = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, инфинитезимальное перемещение которого определяется дифференциальными уравнениями:

$$d\vec{x} = \omega^J \vec{e}_J, \quad d\vec{e}_J = \omega_J^K \vec{e}_K, \quad (J, K, L, \dots = 1, 2, \dots, n; \quad i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n - 1). \quad (1)$$

Формы ω^J и ω_J^K удовлетворяют структурным уравнениям:

$$D\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J, \quad D\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K. \quad (2)$$

Пусть в некоторой области $G \subset E_n$ задана вещественная функция $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Условие $f = \text{const}$ расслаивает область G на ∞^1 поверхностей V_{n-1} (поверхностей уровня этого инварианта), касательные пространства к этим поверхностям задают в области G $(n - 1)$ – распределение Δ_{n-1} .

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$ репера расположим в площадке $V_{n-1}(x)$. Тогда дифференциальные уравнения распределения будут:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ix}^n \omega^x, \quad (\Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ji}^n). \quad (3)$$

Вектор $\vec{e}_n$ репера R^* направим по направлению X ортогональному площадке $\Delta_{n-1}(x)$. Получим $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_n = 0$, следовательно,

$$\omega_i^n = +\gamma_{ij} \omega_n^j = 0, \quad (4)$$

где $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$.

Продолжив систему уравнений (3), перенеся все слагаемые, содержащие главные форму, в первую часть, находим:

$$d\Lambda_{ij}^n - \Lambda_{it}^n \omega_j^t - \Lambda_{tj}^n \omega_i^t = \Lambda_{ijk}^n \omega^k,$$

$$d\Lambda_{in}^n - \Lambda_{kn}^n \omega_i^k = \Lambda_{ink}^n \omega^k.$$

Система величин Λ_{ij}^n образует тензор; мы будем предполагать $\det \|\Lambda_{ij}^n\| \neq 0$; Λ_{in}^n образуют геометрический объект типа ковектора.

В силу равенства (4) скалярная кривизна гиперповерхности V_{n-1} представится в виде:

$$R_{jpr}^i = \gamma_{ik}(\Lambda_{kp}^n \Lambda_{jq}^n - \Lambda_{kq}^n \Lambda_{jp}^n),$$

отсюда

$$R_{sjpq} = \Lambda_{sp}^n \Lambda_{jq}^n - \Lambda_{sq}^n \Lambda_{jp}^n. \quad (5)$$

Пусть площадки $\Delta_{n-1}(x) = \Delta(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ параллельно переносятся вдоль интегральных кривых 1-распределения $\Lambda(y)$, $y \notin \Delta_{n-1}(x)$. Если $\vec{H} \in \Delta_{n-1}(x)$ и точка x смещается вдоль интегральной кривой распределения $\Delta(y)$, то

$$(d\vec{H})/y \in \Delta_{n-1}(x). \quad (6)$$

Пусть $\vec{H} = h^i \vec{e}_i$, $\vec{y} = \eta^K \vec{e}_K$. Учитывая соотношения (3) и (6), получим

$$\eta^K h^i \Lambda_{ik}^n = 0. \quad (7)$$

В частности, условию (7) удовлетворяют базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1}$, тогда $h^i = \delta^{ij}$ и

$$\eta^K \Lambda_{ik}^n = 0. \quad (8)$$

Теорема 1 Для того, чтобы выполнялось соотношение $\vec{y} = t\vec{X}$, необходимо и достаточно, чтобы геометрический объект Λ_{in}^n был нулевым.

Доказательство. Пусть $y = tX$, тогда $\eta^i = 0$, $\eta^n \neq 0$. Из соотношения (8) следует $\Lambda_{in}^n = 0$. Обратно, система $\eta^i \Lambda_{ij}^n = 0$ имеет единственное нулевое решение, $\eta^i = 0$, значит, $y = tX$.

Имеем направление X , ортогональное распределению Δ_{n-1} , тогда в E_n возникает двумерное распределение $\Delta_2 = \Delta(X, Y)$, где вдоль интегральной кривой 1-распределения $\Delta(Y)$ имеем параллельное перенесение площадок $\Delta_{n-1}(x) = \Delta(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n-1})$.

Это распределение и $(n-1)$ -распределение $\Delta_{n-1} = \Delta(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ пересекаются по однородному распределению Δ_1 :

$$\Delta_1 = \Delta_2 \cap \Delta_{n-1}.$$

Пусть векторное поле $\vec{u}$ порождает это 1-распределение Δ_1 : $\Delta_1 = \Delta(\vec{u})$. Тогда $\vec{u} \in \Delta_2$ и имеем

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \lambda \vec{e}_n + \mu \vec{Y} = \mu \eta^i \vec{e}_i + (\lambda + \mu \eta^n) \vec{e}_n, \\ \vec{u} &= u^i \vec{e}_i. \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$u^i = \mu \eta^i, \quad \lambda + \mu \eta^i, \quad \lambda + \mu \eta^n = 0,$$

то есть

$$u^i = (-1)^{i-1} \mu \det \|\Lambda_{kJ_i}^n\| \\ (J_i \neq i; \quad J_i = 1, 2, \dots, n).$$

Когда точка x смещается вдоль интегральных кривых 1-распределения $\Delta(\vec{u})$ на поверхности V_{n-1} ($\omega^n = 0$) имеем: $\omega^i = \Theta_1 u^i$, где Θ_1 параметрическая форма, $D\Theta_1 = \Theta_2 \wedge \Theta_1$. Для точки $\vec{F} = \vec{x} + \lambda \vec{e}_n$ ортогонального направления $\Delta(X)$ находим

$$d\vec{F} = (\omega^i + \lambda \omega_n^i) \vec{e}_i + d\lambda \vec{e}_n.$$

Чтобы имело место соотношение: $d\vec{F} \in \Delta(X)$, смещение точки x вдоль интегральной кривой $\Delta(\vec{u})$ должно удовлетворять условию [1]:

$$\omega^i + \lambda \omega_n^i = \Theta_1 u^i + \lambda \omega_n^i = 0$$

или в силу (3) и (4):

$$(\Lambda_{ki}^n - \rho \gamma_{ki}) u^i = 0,$$

где $\rho = \frac{1}{\lambda}$. Допустим, что корни ρ_i уравнения

$$\det \|\Lambda_{ki}^n - \rho \gamma_{ki}\| = 0$$

простые, тогда уравнения

$$(\Lambda_{tk}^n - \rho_i \gamma_{tk}) u^k = 0$$

определяют в точке x попарно ортогональных $(n-1)$ направлений (главные направления тензора Λ_{tk}^n [2]). Отсюда следует:

Теорема 2 *Интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u})$ являются линиями кривизны относительно $\Delta(X)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_k (-1)^{k-1} (\Lambda_{jk}^n - \rho \gamma_{jk}) \det \|\Lambda_{iL_k}^n\| = 0 \quad (L_k \neq k),$$

где ρ – корень уравнения $\det \|\Lambda_{ik}^n - \rho \gamma_{ik}\| = 0$.

Выясним, когда интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u})$ являются геодезически-ми. При смещении точки x вдоль интегральной кривой этого распределения имеем:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i = \Theta_1 u^i \vec{e}_i = \Theta_1 \vec{u}. \quad (9)$$

Находим

$$d^2 \vec{x} = d\Theta_1 \vec{u} + \Theta_1 (du^i + u^j \omega_j^i) \vec{e}_i + \Theta_1 u^i \omega_i^n \vec{e}_n.$$

Соприкасающаяся плоскость в точке x этой кривой

$$\Pi_2(\vec{u}) = [x, d\vec{x}, d^2 \vec{x}].$$

Чтобы линия была геодезической ($\Pi_2(\vec{u}) \supset \Delta(X)$), должно быть:

$$du^i + u^j \omega_j^i = 0. \quad (10)$$

Положим $\vec{e}_1 \in \Delta(\vec{u})$, тогда из соотношения (10) следует:

$$\omega_1^i = 0. \quad (11)$$

Продолжив уравнение (11), находим:

$$D\omega_1^i = 2\gamma^{ij}(\Lambda_{jp}^n \Lambda_{1q}^n - \Lambda_{jq}^n \Lambda_{1p}^n) \omega_p^j \wedge \omega_q^i = 0,$$

то есть

$$\gamma^{ij}(\Lambda_{jp}^n \Lambda_{1q}^n - \Lambda_{jq}^n \Lambda_{1p}^n) = 0;$$

умножив на γ_{ti} и суммируя по i , получим

$$\Lambda_{tp}^n \Lambda_{1q}^n - \Lambda_{tq}^n \Lambda_{1p}^n = 0.$$

Поэтому верна.

Теорема 3 Если интегральные кривые распределения $\Delta(\vec{u})$, $\vec{e}_1 \in \Delta(\vec{u})$ являются геодезическими, то $\det \|\Lambda_{iL_k}^n\| = 0$ и тензор кривизны гиперповерхности V_{n-1} удовлетворяет условию: $R_{stpq} = 0$, если хотя бы один из индексов равен единице ($L_k \neq k$; $k \neq 1$).

Аналогично убеждаемся, что справедлива

Теорема 4 Чтобы геодезическая линия $\Delta(\vec{u})$, $\vec{e}_1 \in \Delta(\vec{u})$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma^{ik} \Lambda_{k1}^n = 0 \quad (i \neq 1).$$

4 Заключение

Аналогия между геометрией распределения, определяемой полями его фундаментальных подбъектов, и геометрией поверхности позволяет перенести известные свойства линий на поверхностях на линии, принадлежащие распределению.

Рассмотрению дифференциально-геометрических свойств интегрируемых распределений и сетей, определяемых гиперраспределениями в n -мерном евклидовом пространстве E_n , посвящена настоящая статья авторов.

Найдено необходимое и достаточное условия коллинеарности векторных полей $\vec{Y}$ и $\vec{X}$.

Список литературы

- [1] Базылев В.Т. Сети на многообразиях // Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ. – 1974. – № 6. – С. 189-205.
- [2] Базылев В.Т. О V -сопряженных сетях в пространстве аффинной связности // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. – 1974. – № 5. – С. 25-30.
- [3] Базылев В.Т. О многомерных сетях и их преобразованиях // Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ. – 1965. – № 3. – С. 138-164.
- [4] Базылев В.Т. Об одном замечательном классе сетей // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники). – 1975. – № 7. – С. 105-116.
- [5] Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в проективной связности // Труды геометрического семинара. Всесоюзный институт научной и технической информации Академии Наук СССР. – 1971. – № 3. – С. 40-47.
- [6] Норден А.П. Пространства аффинной связности. Изд. 2-е, исправл. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
- [7] Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – Гостехиздат, 1948. – 482 с.
- [8] Тихонов В.А. Об одном преобразовании плоских сетей, присоединенных к гиперраспределениям в аффинном пространстве // Тезисы докл. 6-й Всес. геометр. конф. по совр. пробл. геометрии. Вильнюс. – 1975. – С. 238-239.
- [9] Кузьмин М.К. О канонических сетях распределений на поверхностях евклидова пространства // В сб. «Пробл. геометрии (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». – 1975. – Т. 7. – С. 231-248.
- [10] Гудзь Л.П. Об одном классе ортогональных сетей на гиперповерхности четырехмерного евклидова пространства // Сборник "Геометрия погруженных многообразий", М. – 1972. – С. 39-45.
- [11] Остиану Н.М. Дифференциально-геометрические структуры на дифференцируемых многообразиях // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники). – 1976. – Т. 8. – С. 89-111.
- [12] Тихонов В.А. Сети, определяемые гиперраспределениями в аффинном пространстве и их обобщения // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники). – 1976. – Т. 8. – С. 199-225.
- [13] Эли Картан. Риманова геометрия в ортогональном репере. – Издательство Московского университета, 1970.
- [14] Васильев А.М., Соловьев Ю.П. Дифференциальная геометрия. – Издательство Московского университета, 1981.

References

- [1] Bazyilev V.T. "Seti na mnogoobraziyah [Networks on manifolds]", *Tr. Geometr. seminar. Vses. in-t nauch. i tehn. inform.* No 6 (1974): 189-205.
- [2] Bazyilev V.T. "O V -sopryazhennykh setyakh v prostranstve affinnoy svyaznosti [About V -adjoint networks in a space of affine connection]", *Izv. vyssh. uchebn. zavedeniy. Matematika.* No 5 (1974): 25-30.
- [3] Bazyilev V.T. "O mnogomernykh setyakh i ih preobrazovaniyakh [About multidimensional networks and their transformations]", *Tr. Geometr. seminar. Vses. in-t nauch. i tehn. inform.* No 3 (1965): 138-164.
- [4] Bazyilev V.T. "Ob odnom zamechatel'nom klasse setey [On one great class of networks]", *Problemy geometrii (Itogi nauki i tekhniki)* No 7 (1975): 105-116.
- [5] Ostianu N.M. "Raspredeleniya m -mernykh lineynykh elementov v proektivnoy svyaznosti [Distributions of m -dimensional linear elements in projective connection]", *Trudyi geometricheskogo seminar. Vsesoyuznyiye institut nauchnoy i tekhnicheskoy informatsii Akkademii Nauk SSSR* No 3 (1971): 40-47.
- [6] Norden A.P. *Prostranstva affinnoy svyaznosti* [Spaces of affine connection] Izd. 2-e, ispravl. (M.: Nauka, 1976): 432.
- [7] Finikov S.P. *Metod vneshnih form Kartana v differentsialnoy geometrii* [The method of external Cartan forms in differential geometry] (Gostehizdat, 1948): 482.

-
- [8] Tihonov V.A. "Ob odnom preobrazovanii ploskih setey, prisoedinennykh k giperraspredeleniyam v affinnom prostranstve [About a transformation of planar networks connected to hyperdistributions in an affine space]", *Tezisy dokl. 6-y Vses. geometr. konf. po sovr. probl. geometrii. Vilnyus* (1975): 238-239.
- [9] Kuzmin M.K. "O kanonicheskikh setyah raspredeleniy na poverhnostyakh evklidova prostranstva [About canonical distribution networks on the surfaces of Euclidean space]", *V sb. «Probl. geometrii (Itogi nauki i tehn. VINITI AN SSSR)»* Vol. 7 (1975): 231-248.
- [10] Gudz L.P. "Ob odnom klasse ortogonalnykh setey na giperpoverhnosti chetyrehmernogo evklidova prostranstva [On a class of orthogonal networks on hypersurfaces of a four-dimensional Euclidean space]", *Sbornik "Geometriya pogruzhennykh mnogoobraziy"*, M. (1972): 39-45.
- [11] Ostianu N.M. "Differentsialno-geometricheskie struktury na differentsiruemykh mnogoobraziyakh [Differential-geometric structures on differentiable manifolds]", *Problemy geometrii (Itogi nauki i tekhniki)* Vol. 8 (1976): 89-111.
- [12] Tihonov V.A. "Seti, opredelyaemye giperraspredeleniyami v affinnom prostranstve i ih obobshcheniya [Networks defined by hyperdistributions in affine space and their generalizations]", *Problemy geometrii (Itogi nauki i tekhniki)* Vol. 8 (1976): 199-225.
- [13] Eli Kartan. *Rimanova geometriya v ortogonalnom repere* [Riemannian geometry in the orthogonal frame] (Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, 1970).
- [14] Vasilev A.M., Solov'ev Yu.P. *Differentsialnaya geometriya* [Differential geometry] (Izdatelstvo Moskovskogo universiteta, 1981).

МРНТИ 30.19.33

<https://doi.org/10.26577/JMMCS-2019-4-m8>

¹М.И. Рамазанов, ²А.Ж. Сейтмуратов, ³Л.У. Таймуратова,
⁴Н.К. Медеубаев, ⁵Г.И. Мукеева

¹д.ф.-м.н., профессор, Карагандинский государственный университет имени академика
 Е.А.Букетова, г. Караганда, Казахстан, E-mail: ramamur@mail.ru

²д.ф.-м.н., профессор, Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата,
 г. Кызылорда, Казахстан, E-mail: angisin_@mail.ru

³к.ф.-м.н., ассоциированный профессор, Каспийский государственный университет
 технологий и инжиниринга имени Ш.Есенова, г. Актау, Казахстан,
 E-mail: taimuratova@mail.ru

⁴докторант, Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова,
 г. Караганда, Казахстан, E-mail: medeubaev65@mail.ru

⁵докторант, Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата,
 г. Кызылорда, Казахстан, E-mail: banu73_@mail.ru

ПРИБЛИЖЁННЫЕ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Аннотация. К настоящему времени выполнено огромное число исследований по приведению трехмерной задачи к двумерной инженерными и математическими методами. Но эти исследования не исчерпывают проблему полностью. Решение этой проблемы для тел с различной геометрией продолжается и в наши дни, о чем свидетельствуют публикации отечественных, российских и зарубежных ученых. К ним примыкает и проблема изучения динамического поведения круговых стержней, взаимодействующих с деформируемой среды на основе уравнений колебаний, выведенных с помощью строгого математического аппарата. Приближённые уравнения колебаний стержневых систем выше второго порядка по производным от искомой функции и теории колебаний круглой цилиндрической оболочки, в частности крутильных колебаний, с учетом инерции вращения и деформации поперечного сдвига посвящено сравнительно небольшое число научных публикаций. Приведённые в данной работе приближённые уравнения стержневых систем переменной толщины позволяют строить приближённые теории колебания в зависимости от условий на торцах стержня, от порядка производных, искомым в приближённых уравнениях и начальных условиях. Полученные результаты позволяют формулировать краевые задачи при решении частных задач колебания цилиндрической оболочки при различных условиях на торце оболочки.

Ключевые слова: колебания, стержень, деформация, вращения, напряжение.

¹М.И.Рамазанов, ²А.Ж. Сейтмуратов, ³Л.У. Таймуратова, ⁴Н.К. Медеубаев, ⁵Г.И. Мукеева

¹ф.-м.г.д., профессор, Академик Е.А.Бөкетов атындағы Карағанды мемлекеттік университеті,
 Карағанды қ., Қазақстан, E-mail: ramamur@mail.ru

²ф.-м.г.д., профессор, Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті,
 Қызылорда қ., Қазақстан, E-mail: angisin_@mail.ru

³ф.-м.г.к., қауымдастырылған профессор,
 Ш.Есенов атындағы Каспий мемлекеттік технология және инжиниринг университеті,
 Актау қ., Қазақстан, E-mail: taimuratova@mail.ru

⁴докторант, Академик Е.А.Бөкетов атындағы Карағанды мемлекеттік университеті,
 Карағанды қ., Қазақстан, E-mail: medeubaev65@mail.ru

⁵докторант, Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті
 Қызылорда қ., Қазақстан, E-mail: banu73_@mail.ru

Қалыңдығы өзгермелі цилиндрлік қабықшаның жуық тербеліс теңдеулері

Аңдатпа. Қазіргі таңда үшөлшемді есепті екі өлшемді инженерлік және математикалық әдістер дейіне түсіріп есептеп шешу бағытында көптеген зерттеу ұмыстары жүргізіліп келеді. Бірақ бұл зерттеулер мәселені толығымен шеше алмайды. Әр түрлі геометрия жағдайындағы денелер үшін бұл мәселені шешу бүгінгі күнге дейін жалғасуда, оны отандық, ресейлік және шетелдік ғалымдардың жарияланымдары дәлелдейді. Осыған қоса - қатаң математикалық аппаратты қолдану арқылы берілген тербеліс теңдеулері негізінде деформацияланатын ортамен әрекеттесетін дөңгелек қабықшалардың динамикалық мінез-құлқын зерттеу жұмысы да жатады. Берілген функция туынсы екінші реттіден жоғары және дөңгелек цилиндрлік қабықтың тербеліс теориясына қатысты жүйелерінің тербеліс теңдеуін жуық түрі, атап айтқанда айналу инерциясы мен көлденең ығысу, бұралуының тербеліс жағдайларының мәселелері ғылыми басылымдарда жариялануы өте аз. Осы мақалада келтірілген қалыңдығы өзгермелі цилиндрлік қабықшаның жуық тербеліс теңдеулері бізге тербелістердің жуық теориясын, сонымен қатар жуық теңдеу мен бастапқы шарттарды қанағаттандыратын жағдайын құруға мүмкіндік береді. Алынған нәтижелер цилиндрлік қабықтың тербелістерінің белгілі бір есептерін шешуде және шеттік есептерге тұжырым жасауға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: тербелістер, өзектер, айналу, кернеу, деформация.

¹M.I. Ramazanov, ²A.Zh. Seitmuratov, ³L.U. Taimuratova, ⁴N.K. Medeubaev, ⁵G.I. Mukееva

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan, E-mail: ramamur@mail.ru

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan, E-mail: angisin_@mail.ru

³Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Sh. Esenov Caspian state University of technology and engineering, Aktau, Kazakhstan, E-mail: taimuratova@mail.ru

⁴doctoral student, Buketov Karaganda State University, Karaganda, Kazakhstan, E-mail: medeubaev65@mail.ru

⁵doctoral student, Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakhstan, E-mail: banu73_@mail.ru

The approximate equations oscillations of cylindrical shells of variable thickness

Abstract. To date, a huge number of studies have been carried out to bring a three-dimensional problem to a two-dimensional one by engineering and mathematical methods. But these studies do not exhaust the problem completely. The solution of this problem for bodies with different geometries continues today, as evidenced by the publications of domestic, Russian and foreign scientists. Adjacent to them is the problem of studying the dynamic behavior of circular rods interacting with the deformable medium on the basis of oscillation equations derived using a rigorous mathematical apparatus. Approximate equations of oscillation of rod systems above the second order with respect to the derivatives of the desired function and the theory of oscillations of a circular cylindrical shell, in particular torsional oscillations, taking into account the inertia of rotation and the strain of the transverse shear, are devoted to a relatively small number of scientific publications. The approximate equations of rod systems of variable thickness presented in this paper allow us to construct approximate theories of oscillation depending on the conditions at the ends of the rod, on the order of the derivatives sought in the approximate equations and initial conditions. The results obtained make it possible to formulate boundary value problems in solving particular problems of oscillations of a cylindrical shell under various conditions at the end of the shell.

Key words: oscillations, rod, rotation, strain, deformation.

1 Введение

Цилиндрические оболочки являются элементами многих конструкций и сооружений, в том числе, подземных, а также находят широкое применение в различных областях современной техники. Поэтому усовершенствование методов расчета цилиндрических оболочек является актуальной проблемой, причем наиболее точные данные могут быть получены при исследовании оболочек на основе механики деформируемого твердого тела.

В известных научных источниках проводимые исследования в области колебаний оболочек не были сформулированы краевые задачи колебания, наряду с приближёнными уравнениями колебания отсутствуют строго обоснованные граничные условия на торцах стержней и оболочек, вытекающие из развиваемого математического подхода, а применялись граничные условия из задач статики. Кроме того, не обосновывалось необходимое число начальных условий в зависимости от порядка производных по времени от искомых функций и не исследовались области применимости приближённых уравнений колебаний.

В настоящей работе рассматриваются вопросы для задач цилиндрических оболочек переменной толщины в более общей постановке, которые позволяют сформулировать краевые задачи при решении частных задач колебания цилиндрической оболочки при различных условиях на торце оболочки.

2 Обзор литературы

В исследуемой области получены основополагающие результаты отечественных и зарубежных ученых. Поэтому здесь мы лишь упомянем некоторые основные работы, в основу которых положены наиболее распространенные модели механики механики, применением хорошо апробированных аналитических и численных методов математики.

По этой причине предлагаемой краткий обзор не претендует по полноте охвата всех имеющихся результатов, которые имеют непосредственное отношение к настоящей работе. Будем обращаться к работам лишь близким к вопросам и проблемам, затрагиваемым в настоящей работе, и имеющим фундаментальное значение в механике и математике.

Фундаментальные идеи и подходы в развитии математических моделей, теоретические и экспериментальные исследования в стержневых системах связан с именами таких ученых, как Ж.Д.Ахенбах, Д.Бленд, Э.И.Григолюк, А.А.Ильющин, Н.Н.Лентьев, Г.И.Петрашень, Х.А.Рахматуллин, С.П.Тимошенко, И.Г.Филиппов, В.Г.Чебан, и многие другие [1] [2] [3].

Вопросы распространение волн в упругих и вязкоупругих средах и теории колебаний круглой цилиндрической оболочки изучались в работах ученых Г.Кольского, Э.И.Григолюка. Ю.Н.Работнова. Х.А.Рахматуллина, Ж.Д.Ахенбаха, С.П.Тимошенко, И.Г.Филиппова, А.Я.Александрова, Л.М.Куршина, С.И.Филиппова, М.И.Рамазанова, А.Ж.Сейтмуратова и многих других [4] [7] [8].

Множество актуальных научных и технических проблем связано с исследованием колебательных процессов и распространением волн в сплошных средах. Использование результатов этих исследований приносят огромную пользу при рассмотрении

нестационарных колебательных и волновых процессов. Однако возникает ряд вопросов, связанных с реакцией среды на внешние воздействия, способами возбуждения движений, кинематическими характеристиками волн, геометрией тел, решение которых имеет прикладное значение и достигается при помощи своих, типичных для данной области методов.

Резюмируя приведенный краткий обзор работ, безусловно, не являющийся полным, можно отметить, что решение динамических задач плоских элементов строительных конструкций в виде пластин далек от завершения.

3 Материал и методы

Постановка задачи

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) рассматриваются цилиндрические оболочки переменной толщины, внутренний и внешний радиусы которой равны $r_1 = F_1(z)$ и $r_2 = F_2(z)$ соответственно.

Материал оболочки, в общем случае, изотропный или трансверсально-изотропный с осью изотропии z , однородный и вязкоупругий, если не оговаривается особо.

При постановке общей краевой задачи для оболочки они рассматриваются как трёхмерные сплошные деформируемые тела, поведение материалов которых описываются в рамках линейной теории вязкоупругости.

Зависимости напряжений от деформаций в точках цилиндрических оболочек как трёхмерных деформируемых тел имеют вид

$$\sigma_{rr} = A_{11}(\varepsilon_{rr}) + A_{12}(\varepsilon_{\theta\theta}) + A_{13}(\varepsilon_{zz}) \quad (1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A_{12}(\varepsilon_{rr}) + A_{11}(\varepsilon_{\theta\theta}) + A_{13}(\varepsilon_{zz})$$

$$\sigma_{zz} = A_{13}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + A_{33}(\varepsilon_{zz})$$

$$\sigma_{\theta z} = A_{44}(\varepsilon_{\theta z}) \quad \sigma_{zr} = A_{44}(\varepsilon_{zr}) \quad \sigma_{r\theta} = A_{66}(\varepsilon_{r\theta})$$

где A_{ij} - вязкоупругие операторы

$$A_{ij}(\zeta) = a_{ij} \left[\zeta(t) - \int_0^t f_{ij}(t - \xi) \zeta(\xi) d\xi \right]$$

a_{ij} - упругие постоянные.

Зависимости деформаций ε_{ij} от перемещений u_r, u_θ, u_z в цилиндрической системе координат определяются по известным формулам механики деформируемого твердого тела

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r};$$

Уравнения движения в напряжениях имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\partial^2 u_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

В случае изотропного материала введением потенциалов Φ и ψ^ρ продольных и поперечных волн

$$U^\rho = \text{grad}\Phi + \text{rot}\psi^\rho; \psi^\rho = e_z^\rho \psi_1 + \text{rot}(e_z^\rho \psi_2) \quad (4)$$

уравнения движения приводятся к интегро-дифференциальным уравнениям

$$N(\Delta\Phi) = \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, M(\Delta\psi^\rho) = \rho \frac{\partial^2 \psi^\rho}{\partial t^2}, N = L + 2M \quad (5)$$

а перемещения и деформация через потенциалы выражаются по формулам

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} \quad (6)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right] - \frac{\partial \psi_1}{\partial r}$$

$$u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi^2$$

и

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right] - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}; \quad (7)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\Phi + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi_1 \right];$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi_2;$$

$$\varepsilon_{rz} = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta \partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \psi_2;$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \Phi + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \psi_1 + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \psi_2;$$

$$\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi_2;$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz} = \Delta \Phi$$

Начальные условия нулевые, т.е.

$$u_j = \frac{\partial u_j}{\partial t} = 0 \quad (t = 0; \quad j = r, \theta, z) \quad (8)$$

и аналогично для потенциалов

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \psi_j = \frac{\partial \psi_j}{\partial t} = 0 \quad (t = 0; \quad j = 1, 2)$$

В зависимости от рассматриваемых задач граничные условия на поверхностях трехмерных тел могут встречаться различных типов как основных трех граничных условий, так и более общих, поэтому сформулируем некоторые из них, которые будут использоваться ниже.

Краевая задача крутильных колебаний цилиндрических оболочек переменной толщины

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) пространственная задача крутильных колебаний цилиндрической оболочки сводится к решению уравнения

$$\rho M^{-1} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \right) - \Delta \psi_1 = 0 \quad (9)$$

при граничных условиях на внутренней и внешней поверхности цилиндрической оболочки

$$\sigma_{r\theta} + \frac{(-1)^{i+1}}{\Delta_{oi}} F'_i(z) \sigma_{r\theta} = f_{ns_1}^{(i)} \quad i = (1, 2) \quad (10)$$

при $r = F_i(z)$, где $r = F_1(z)$ и $r = F_2(z)$ - внутренний и внешний радиусы оболочки, соответственно, $\Delta_0 = \sqrt{1 + [F'_i]^2}$.

Представляя потенциал ψ_1 в виде

$$\psi_1 = \int_0^\infty \{ \sin(kz) - \cos(kz) \} dk \int_l \psi_{10} \exp(pt) dp$$

и подставляя его в уравнения (9), получаем для ψ_{10} уравнение

$$\frac{d^2 \psi_{10}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_{10}}{dr} - \beta^2 \psi_{10} = 0; \quad \beta^2 = k^2 + \rho p^2 M_0^{-1}(p) \quad (11)$$

Общее решение уравнения (11) выражается через функции Бесселя мнимого аргумента, и общее решение которого равно

$$\psi_{10} = AI_0(\beta r) + BK_0(\beta r) \quad (12)$$

При этом постоянная интегрирования B в отличие от задачи для стержня отлична от нуля.

Если сдвиговое перемещение u_θ искать в виде смещения u_θ

$$u_\theta = \int_0^\infty \sin(kz) - \cos(kz) dk \int_{(l)} u_{\theta,0} \exp(pt) dp \quad (13)$$

то, разлагая функции Бесселя I_0 и K_0 в ряды, для $u_{\theta,0}^{(0)}$ получаем выражение

$$u_{\theta,0}^{(0)} = \frac{1}{r} A - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_0^{2(n+1)} \left\{ A - B \left[\ln \frac{\beta_0 \xi}{2} - \frac{1}{2} \psi(n+1) - -\frac{1}{2} \psi(n+2) \right] \right\} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!}; \quad (14)$$

где $\psi(n)$ - пси-функция.

Вводя новые величины

$$\begin{aligned}\hat{U}_{\theta,0} &= -\frac{1}{2}\beta_0^2 \left\{ A - B \left[\ln \frac{\beta_0 \xi}{2} - \psi(1) - \frac{1}{2} \right] \right\} \\ \hat{U}_{\theta,1} &= -\frac{A}{\xi}\end{aligned}\quad (15)$$

и подставляя их выражение (14) вместо постоянных A, B получим выражение

$$U_{\theta,0}^{(0)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \beta_0^{2n} \hat{U}_{\theta,0} + \xi \left\{ \left[\frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{1,n}(r) \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \beta_0^{2(n+1)} \right] \hat{U}_{\theta,1} \right\} \quad (16)$$

обращая которое по k и p , для сдвигового перемещения получим окончательное представление

$$U_{\theta}(r, z, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \lambda_0^{(n)} U_{\theta,0} + \xi \left\{ \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{1,n}(r) \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \lambda_0^{(n+1)} \right\} U_{\theta,1}; \quad (17)$$

где $U_{\theta,0}$; $U_{\theta,1}$ имеют очевидный механический смысл, функции $\eta_{1,n}$ равны

$$\eta_{1,n}(r) = \ln \frac{r}{\xi} + \frac{n}{2(n+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (18)$$

Аналогично, для напряжений $\sigma_{r,\theta}$; $\sigma_{z,\theta}$ получаем выражения

$$M^{-1} \sigma_{r,\theta} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+2)!} \lambda_2^{(n+1)} U_{\theta,1} + \frac{\xi}{2} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^{(1)} - \frac{4}{r^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{2,n}(r) \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2(n+1)}}{n!(n+2)!} \lambda_2^{(n+2)} \right\} U_{\theta,1} \quad (19)$$

$$M^{-1} \sigma_{z,\theta} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+2)!} \lambda_2^{(n)} \frac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z} + \xi \left\{ \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{1,n}(r) \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1}}{n!(n+2)!} \lambda_2^{(n)} \right\} \frac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z}$$

где ξ - промежуточная поверхность, определяемая по формуле

$$\xi = \frac{\max [F_1(z)]}{2} \left\{ \chi - \frac{\max [F_1(z)]}{\min [F_2(z)]} \right\} \quad (20)$$

при этом

$$\max [F_1(z)] < \min [F_2(z)]$$

а коэффициент χ удовлетворяет неравенству

$$2 + \frac{\max [F_1(z)]}{\min [F_2(z)]} \leq \chi \leq 2 \frac{\min [F_2(z)]}{\max [F_1(z)]} + \frac{\max [F_1(z)]}{\min [F_2(z)]}$$

Подставляя (19) в граничные условия (10), для определения $U_{\theta,0}$ и $U_{\theta,1}$ получим систему интегро-дифференциальных уравнений, которые также являются и общими уравнениями крутильных колебаний круглой цилиндрической оболочки.

Приведём лишь систему приближённых уравнений крутильного колебания

$$F_i(z) \left[\frac{F_i(z)}{8} \lambda_2^{(1)} - F'_i(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] U_{\theta,0} + \xi \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^{(1)} - \frac{2}{F'_i} - \frac{F'_i(z)}{F_i(z)} \frac{\partial}{\partial z} + \right. \\ \left. + \frac{F_i(z)}{8} \lambda_2^{(1)} \left[\eta_{2,0}(F_i) \frac{F_i}{2} \lambda_2^{(1)} - \eta_{1,0}(F_i) \frac{F'_i(z)}{2} \right] \right\} \frac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z} = \Delta_{0i} M^{-1} f_{ns_1}^{(i)} \quad (i = 1, 2) \quad (21)$$

где

$$\eta_{1,0} = \ln \frac{r}{\xi}; \quad \eta_{2,0}(r) = \ln \frac{r}{\xi} - \frac{1}{2}$$

Для оболочки постоянной толщины с радиусами r_1 и r_2 соответственно, из (21) получим систему

$$\frac{r_i^2}{8} \lambda_2^{(1)} U_{\theta,0} + \xi \left\{ \frac{1}{2} \lambda_2^{(1)} - \frac{2}{r_i^2} + \frac{r_i}{2} \lambda_2^{(1)} \left[\frac{\eta_{2,0}(r_i) r_i}{2} \right] \lambda_2^{(1)} \right\} \quad (22)$$

$$\frac{\partial U_{\theta,1}}{\partial z} = M^{-1} \left[f_{\theta}^{(i)} \right]$$

Граничные условия

Граничные условия для торца оболочки при крутильном колебании выводятся как и для стержня. Приведём лишь граничные условия на торце оболочки, когда при $z = \text{const}$ происходит нормальный удар интенсивности $\sigma_{z\theta} = F(r, t)$. Граничное условие будет иметь вид

$$u_{\theta,0} = M^{-1} [F(0, t)]; \quad \frac{\partial u_{\theta,1}}{\partial z} = 0$$

Уравнения продольного колебания цилиндрических оболочек

Общие уравнения продольно-радиальных колебаний цилиндрической оболочки выводятся как и для стержня переменного радиуса.

Для формулировки различных краевых задач вначале приведём приближённые уравнения продольно-радиальных колебаний

$$\left\{ C + \frac{r_i^2}{2} \left[\lambda_2^{(1)} + C \left(\lambda_1^{(1)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \right\} U_{r,0} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1 - C) + \frac{r_i^2}{8} \left[2 \lambda_2^{(1)} - C \left(\lambda_1^{(1)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \right\} U_{z,0} -$$

$$\begin{aligned}
& -\xi \left\{ -\frac{2}{r_i^2} + \left(\frac{1}{2} + D \ln \frac{r_i}{\xi} \right) \lambda_2^{(1)} + \left(\ln \frac{r_i}{\xi} - \frac{1}{4} \right) (1-D) \lambda_2^{(1)} + \right. \\
& + D \left(\lambda_1^{(1)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \ln \frac{r_i}{\xi} - D \left(\frac{3}{4} \lambda_1^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{r_i^2}{16} \left. \right\} \lambda_2^{(1)} U_{r,1} + \\
& + \xi \left\{ \frac{1}{2} + (1-D) \ln \frac{r_i}{\xi} + \frac{r_i^2}{8} \left[-D \left(\ln \frac{r_i}{\xi} - \frac{3}{4} \right) \lambda_1^{(1)} + D \left(\ln \frac{r_i}{\xi} - \frac{1}{4} \right) \lambda_2^{(1)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(2 \ln \frac{r_i}{\xi} - 1 \right) \left(\lambda_2^{(1)} - D \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \right\} \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} = M^{-1} \left(f_r^{(i)} \right) \quad (i = 1, 2) \\
& \left\{ (1-C) + \frac{r_i^2}{8} \left[(1-C) \lambda_2^{(1)} - 2C \lambda_1^{(1)} \right] \right\} \frac{\partial U_{r,0}}{\partial z} + \\
& + \left\{ (1+C) \lambda_1^{(1)} + \frac{r_i^2}{8} \lambda_1^{(1)} \left[(1+C) \lambda_2^{(1)} - 2C \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \right\} U_{z,0} - \\
& - \xi \left\{ \frac{2}{r_i^2} + (1-D) \ln \frac{r_i}{\xi} \lambda_2^{(1)} + \frac{r_i^2}{8} \left(\ln \frac{r_i}{\xi} - \frac{3}{4} \right) \left[(1-D) \lambda_2^{(1)} - 2D \lambda_1^{(1)} \right] \lambda_2^{(1)} \right\} \times \\
& \times \frac{\partial U_{r,1}}{\partial z} - \xi \left\{ \frac{2}{r_i^2} + \left(\lambda_2^{(1)} - 2D \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \ln \frac{r_i}{\xi} + \frac{r_i^2}{\xi} \left(\ln \frac{r_i}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left[\left(\lambda_2^{(1)} - D \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \lambda_2^{(1)} - 2D \lambda_1^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \right\} U_{z,1} = \frac{2}{r_i^2} M^{-1} \left(f_{rz}^{(i)} \right); \quad (i = 1, 2)
\end{aligned} \tag{23}$$

где $f_r^{(i)}, f_{rz}^{(i)}$ - нагрузки на внешней и внутренней поверхностях оболочек, при этом перемещения u_r, u_z приближённо равны

$$u_z = U_{z,0} - \xi \left(\ln \frac{r}{\xi} + \frac{1}{2} \right) U_{z,1} \tag{24}$$

$$u_r = \frac{r}{2} U_{r,0} - \frac{r\xi}{2} \left[\frac{2}{r^2} + (1-D) \lambda_2^{(1)} \ln \frac{r}{\xi} \right] U_{r,1} + \frac{r\xi}{2} D \ln \frac{r}{\xi} \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}$$

а напряжения

$$M^{-1} \sigma_{zz} = (1+C) \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} - (1-C) U_{r,0} - \xi \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{r}{\xi} \right) \left[(1+2D) \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} - (1-2D) \lambda_2^{(1)} U_{r,1} \right] \tag{25}$$

$$M^{-1} \sigma_{r,z} = \frac{r}{2} \left\{ (1-C) \frac{\partial U_{r,0}}{\partial z} + (1+C) \lambda_1^{(1)} U_{z,0} - \xi \left[\frac{2}{r^2} + (1-2D) \lambda_2^{(1)} \ln \frac{r}{\xi} \right] \frac{\partial U_{r,1}}{\partial z} - \right.$$

$$\left. - \xi \left[\frac{2}{r^2} + \left(\lambda_2^{(1)} - 2D \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \ln \frac{r}{\xi} \right] U_{z,1} \right\};$$

$$M^{-1} \sigma_{r,r} = \left\{ C U_{r,0} - (1-C) \frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} + \xi \left[\left(D \ln \frac{r}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \lambda_2^{(1)} + \frac{2}{r^2} \right] U_{r,1} + \xi \left[(1-D) \ln \frac{r}{\xi} + \frac{1}{2} \right] \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} \right\};$$

$$M^{-1}\sigma_{\theta\theta} = \left\{ CU_{r,0} - (1-C)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} + \frac{\xi}{2} \left[(1-D)\lambda_2^{(1)} + \frac{2}{r^2} \right] U_{r,1} + \xi \left[1-D + 2\ln \frac{r}{\xi} \right] \frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} \right\}$$

$$C = 1 - NM^{-1}; \quad D = 1 - MN^{-1}$$

Здесь $U_{z,0}$ и $U_{r,1}$ - перемещения точек промежуточной поверхности, а $U_{z,1}$ и $U_{r,0}$ - деформации этих точек по радиальной координате.

В начале сформулируем трёхмерные граничные условия для торца оболочки $z = const$.

Свободный или нагруженный нормальным напряжением торец

$$\sigma_{zz} = -F(t); \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (26)$$

Жёстко закреплённый торец

$$u_r = u_z = 0 \quad (27)$$

Идеально закреплённый торец

$$u_z = 0; \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (28)$$

Исходя из приближённых выражений (25) для напряжений, условия (26) для неизвестных U_{rj} , U_{zj} приводят к граничным условиям

$$(1+C)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} - (1-C)U_{r,0} - \frac{\xi}{2}(1+2C)\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z} + \frac{\xi}{2}(1-2C)\lambda_2^{(1)}U_{r,1} = -M^{-1}(F)(1-C)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} + (1+C)\lambda_1^{(1)}U_{z,0} = 0$$

$$\frac{\partial U_{r,1}}{\partial z} + U_{z,1} = 0 \quad (29)$$

Аналогично, условия (27) и (28) приводят к граничным условиям

$$U_{r,0} = U_{r,1} = 0; \quad U_{r,0} = \frac{\xi}{2}U_{z,1} \quad (30)$$

и

$$U_{z,0} = \frac{\xi}{2}U_{z,1}; \quad \frac{\partial U_{r,1}}{\partial z} + U_{z,1} = 0 \quad (31)$$

$$(1-C)\frac{\partial U_{r,0}}{\partial z} + (1-C)\lambda_1^{(1)}U_{z,0} = 0$$

4 Заключение

Граничные условия (29)-(31) отличаются от имеющихся в научной литературе, полученных на основе тех или иных гипотез и предложений механического и геометрического характера, наличием операторов $\lambda_j^{(1)}$, отражающих принцип Даламбера в механике.

Полученные результаты позволяют формулировать краевые задачи при решении частных задач колебания цилиндрической оболочки при различных условиях на торце оболочки.

Список литературы

- [1] Александров А.Я., Куршин Л.М. Многослойные пластинки и оболочки // VII Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1970, с.714-722.
- [2] Бленд Д. Теория линейной вязкоупругости. – М: Мир, 1965. – 428с.
- [3] Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971, 807с.
- [4] Филиппов И.Г., Чебан В.Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: Штиинца, 1988,-190с.
- [5] Seitmuratov A., Taimuratova L., Zhussipbek B., Seitkhanova A., Kainbaeva L. Conditions of extreme stress state // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences. - 2019. Volume 5, -P.202 – 206
- [6] Seitmuratov A., Tileubay S., Toxanova S., Ibragimova N., Doszhanov B., Aitimov M.Zh. The problem of the oscillation of the elastic layer bounded by rigid bouhdaries // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. - 2018. № 5(321). - P.42 – 48
- [7] Филиппов И.Г., Филиппов С.И. Динамическая теория устойчивости стержней.// Труды Российско-Польского семинара «Теоретические основы строительства», Варшава, - 1995, - с.63-69.
- [8] Филиппов И.Г. Динамическая теория относительного движения многокомпонентных сред. // Прикл. механ. – Киев, 1974. – т.7. - № 10. – с.92-99.
- [9] Филиппов И.Г. Егорычев О.А. Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах. // – М: Машиностроение, 1983. – 272с.
- [10] Филиппов И.Г. Точные уравнений поперечных колебаний вязкоупругих плит. // Труды Всесоюз. конф. По динамике оснований, фундаментов и подземных сооружений. – Л., Нарва, 1995, с.63-69.
- [11] Филиппов И.Г., Джанмулдаев Б.Д., Егорычев О.О., Схрупкин С.А., Филиппов С.И. Теория динамического поведения плоских элементов строительных конструкций. // Тезисы и докл.// Российско-Польского семинара «Теоретические основы строительства» - Москва, май, 1993 г.
- [12] Филиппов И.Г. Приближенный метод решения динамических задач для вязкоупругих сред. // – ПММ,т.43, № 1, 1979, с.133-137.
- [13] Филиппов И.Г. К нелинейной теории вязкоупругих изотропных сред. // Киев: Прикл. механика, 1983, т.19, № 3, с.3-8.
- [14] Филиппов И.Г., Ишрипкулов Т.Ш., Мирзанабилов С.М. Нестационарные колебания линейных упругих и вязкоупругих сред. // Ташкент: «ФАН» Уз. ССР – 1909.
- [15] Филиппов И.Г., Филиппов С.И. Уравнения колебания кусочно-однородной пластинки переменной толщины. // – МТТ, 1989, № 5, с.149-157.
- [16] Филиппов И.Г., Филиппов С.И., Костин В.И. Динамика двумерных композитов. // – Труды Междун. конференции по механики и материалам, США, Лос-Анжелес, 1995, с.75-79.

- [17] Филиппов И.Г., Филиппов С.И., Егорычев О.А. Влияние слоистости деформированного основания на колебания плоских элементов. // Сб. трудов Респуб. конфер. «Актуальны проблемы механики контактного взаимодействия», Узбекистан, 1997, с.70-71.
- [18] Филиппов А.И. Распространение волн в упругом стержне, окруженном средой типа Винклера. // Вестник // МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1983, с. 74-78.
- [19] Almagambetova A., Tileubay S., Taimuratova L., Seitmuratov A., Kanibaikyzy K. Problem on the distribution of the harmonic type Relay wave // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of Geology and Technical Sciences. - 2019. №1(433), -P. 242 – 247.
- [20] Seitmuratov A., Zharmenova B., Dauitbayeva A., Bekmuratova A. K., Tulegenova E., Ussenova G. Numerical analysis of the solution of some oscillation problems by the decomposition method // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. - 2019, №1(323), -P. 28 – 37.
- [21] Seitmuratov A., Zhussipbek B., Sydykova G., Seithanova A., Aitimova U. Dynamic stability of wave processes of a round rod // News of NAS RK. Series of physico-mathematical. -2019, №2(324), -P. 90 – 98.
- [22] Seitmuratov A., Ramazanov M., Medeubaev N., Kaliev B. Mathematical theory of vibration of elastic or viscoelastic plates, under non-stationary external influences // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technology sciences. ISSN 2224-5278. Volume 6, Number 426 (2017), 255 – 263.
- [23] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Abzhapbarov A., and Shomanbayeva M. The features of a non-stationary state of stress in the elastic multisupport construction // AIP Conference Proceedings. – 2016.–V. 1759, 020039, <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959653>.
- [24] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Sultanbek T., and Bekmoldayeva R. Modeling and solving the two-dimensional non-stationary problem in an elastic body with a rectangular hole // AIP Conference Proceedings. – 2016.–V. 1759, 020078, <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959692>.
- [25] Ashirbayev N.K., Banas I., Bekmoldayeva R.A. Unified Approach to Some Classes of Nonlinear Integral Equations // Journal of Function Spaces. – Volume 2014, Article ID 306231, 9 pages.

References

- [1] Aleksandrov A.Ja. and Kurshin L.M., "Mnogoslojnye plastinki i obolochki [Multilayer plates and shells]", *VII Vsesojuznaja konferencija po teorii obolochek i plastinok*, (1970): 714-722.
- [2] Blend D., "Teorija linejnoj vjaskouprugosti [The theory of linear viscoelasticity]", (1965): 428.
- [3] Timoshenko S.P., "Ustojchivost' sterzhnej, plastin i obolochek [Stability of rods, plates and shells]", (1971): 807.
- [4] Filippov I.G. and Cheban V.G., "Matematicheskaja teorija kolebanij uprugih i vjaskouprugih plastin i sterzhnej [The mathematical theory of vibrations of elastic and viscoelastic plates and rods]", (1988): 190.
- [5] Seitmuratov A. and Taimuratova L. and Zhussipbek B. and Seitkhanova A. and Kainbaeva L., "Conditions of extreme stress state", *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, no 5(2019): 202-206.
- [6] Seitmuratov A. and Tileubay S. and Toxanova S. and Ibragimova N. and Doszhanov B. and Aitimov M.Z., "The problem of the oscillation of the elastic layer bounded by rigid boundaries", *News of NAS RK. Series of physico-mathematical*, no 5(2018): 42 – 48.
- [7] Filippov I.G. and Filippov S.I., "Dinamicheskaja teorija ustojchivosti sterzhnej [Dynamic Theory of Stability rods]", *Trudy Rossijsko-Pol'skogo seminarja «Teoreticheskie osnovy stroitel'stva»*, (1995): 63-69.
- [8] Filippov I.G., "Dinamicheskaja teorija odnositel'nogo dvizheniya mnogokomponentnyh sred. [Dynamic theory of relative motion of multicomponent media.]", *Prikl. mekhan.*, no 10(1974): 92-94.
- [9] Filippov I.G., Egorichev O.A., "Volnovye processy v linejnyh vjaskouprugih sredah. [Wave processes in linear viscoelastic media.]", *M: Mashinostroenie*, (1983): 272.
- [10] Filippov I.G., "Tochnye uravnenija poperechnykh kolebanij vjaskouprugih plit. [Exact equations of transverse oscillations of viscoelastic plates.]", *Trudy Vsesoyuz. konf. Po dinamike osnovanij, fundamentov i podzemnyh sooruzhenij.*, (1995): 63-69.

- [11] Filippov I.G., Dzhanmuldaev B.D., Egorychev O.O., Skhropkin S.A., Filippov S.I. "Teoriya dinamicheskogo povedeniya ploskih elementov stroitel'nyh konstrukcij. [Theory of dynamic behavior of flat elements of building structures.]", *Tezisy i dokl. // Rossijsko-Pol'skogo seminara "Teoreticheskie osnovy stroitel'stva"*, (1993).
- [12] Filippov I.G. "Priblizhennyj metod resheniya dinamicheskikh zadach dlya vyazkoprugih sred. [Approximate method for solving dynamic problems for viscoelastic media.]", *PMM*, (1979): 133-137.
- [13] Filippov I.G. "K nelinejnoj teorii vyazkoprugih izotropnyh sred. [On the nonlinear theory of viscoelastic isotropic media.]", *Prikl. mekhanika*, no 3(1983): 3-8.
- [14] Filippov I.G., Ishripkulov T.Sh., Mirzanabilov S.M. "Nestacionarnye kolebaniya linejnyh uprugih i vyazkoprugih sred. [Unsteady oscillations of linear elastic and viscoelastic media.]", *«FAN» Uz. SSR*, (1909).
- [15] Filippov I.G., Filippov S.I. "Uravneniya kolebaniya kusochno-odnorodnoj plastinki peremennoj tolshchiny. [Equations of oscillation of a piecewise homogeneous plate of variable thickness.]", *MTT*, no 5(1989): 149-157.
- [16] Filippov I.G., Filippov S.I., Kostin V.I. "Dinamika dvumernyh kompozitov. [Dynamics of two-dimensional composites.]", *Trudy Mezhdun. konferencii po mekhanike i materialam*, (1995): 75-79.
- [17] Filippov I.G., Filippov S.I., Egorychev O.A. "Vliyanie sloistosti deformirovannogo osnovaniya na kolebaniya ploskih elementov. [Influence of stratification of deformed base on vibrations of plane elements.]", *Sb. trudov Respub. konfer. «Aktual'ny problemy mekhaniki kontaktnogo vzaimodejstviya»*, (1997): 70-71.
- [18] Filippov A.I. "Rasprostranenie voln v uprugom sterzhne, okruzhennom sredoj tipa Vinklera. [Propagation of waves in an elastic rod surrounded by a Winkler-type medium.]", *MGU. Ser. 1. Matematika, mekhanika*, (1983): 74-78.
- [19] Almagambetova A. and Tileubay S. and Taimuratova L. and Seitmuratov A. and Kanibaikyzy K, "Problem on the distribution of the harmonic type Relay wave", *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, no 1(2019): 242-247.
- [20] Seitmuratov A. and Zharmenova B. and Dauitbayeva A. and Bekmuratova A. K. and Tulegenova E. and Ussenova G, "Numerical analysis of the solution of some oscillation problems by the decomposition method", *News of NAS RK. Series of physico-mathematical*, no 1(2019): 28 – 37.
- [21] Seitmuratov A. and Zhussipbek B. and Sydykova G. and Seithanova A. and Aitimova U, "Dynamic stability of wave processes of a round rod", *News of NAS RK. Series of physico-mathematical*, no 2(2019): 90 – 98.
- [22] Seitmuratov A., Ramazanov M., Medeubaev N., Kaliev B. "Mathematical theory of vibration of elastic or viscoelastic plates, under non-stationary external influences", *News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Series of geology and technology sciences.*, no 426 (2017), 255-263.
- [23] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Abzhapbarov A., and Shomanbayeva M. "The features of a non-stationary state of stress in the elastic multisupport construction", *AIP Conference Proceedings*, (2016).
- [24] Ashirbayev N., Ashirbayeva Zh., Sultanbek T., and Bekmoldayeva R. "Modeling and solving the two-dimensional non-stationary problem in an elastic body with a rectangular hole", *AIP Conference Proceedings*, (2016).
- [25] Ashirbayev N.K., Banas I., Bekmoldayeva R. "A Unified Approach to Some Classes of Nonlinear Integral Equations", *Journal of Function Spaces*, (2014), 9.

¹N.K. Uteliyeva , ²E.E. Ismail , ³D.F. Akhmetov

¹PhD student, Al-Farabi Kazakh National University,

¹Senior lecturer, Almaty University of Power Engineering and Telecommunications,
Almaty, Kazakhstan, E-mail: nurshatu7@mail.ru

²Candidate of Technical Sciences, Professor,
Almaty University of Power Engineering and Telecommunications,
Almaty, Kazakhstan, E-mail: ismaile@rambler.ru

³Doctor of Engineering, PhD, Rakuno Gakuen University, Hokkaido, Japan,
E-mail: sapalmaty@gmail.com

COMPARATIVE ANALYSIS OF MODELS OF QUALITY OF SOFTWARE TOOLS

Abstract. Although a large number of software quality models (SQMs) have been created at present, there is no universal model that can be applied to various software tools with the best results. To analyze and evaluate the quality of the assessment of a specific SQ, it is necessary to choose an adequate quality model that takes into account their features and requirements for them, and also most accurately describes the quality indicators at various stages of the life cycle. Each specific SQM is usually characterized by its own set of characteristics and quality attributes, has its own advantages and disadvantages. Based on these characteristics, models can be oriented to various fields of application.

In order to understand the appropriateness of using one or another SQM, one or another characteristics and quality attributes of SQ suitable for specific SQ projects, it is necessary to conduct a comprehensive analysis of the features of existing SQM.

The aim of this work is to conduct a comprehensive comparative analysis of the characteristics and features of modern SQMs to assess their capabilities and applicability, the ability to adapt to the features and requirements of the applied problem.

SQM analysis was carried out in the following aspects: structure, number of levels and characteristics and their semantic content, as well as in terms of identifying opportunities and applicability. As a result of a comparative analysis of the main characteristics and sub characteristics of basic SQMs, the most applicable (basic) set of characteristics and sub characteristics of software quality are identified. For application to specific types of software, this basic set can be adapted to the appropriate application conditions by selecting the relevant characteristics and sub characteristics, as well as possibly adding the necessary quality attributes from other models.

Key words: software, quality, safety, the characteristics of the quality, quality model, comparative analysis.

¹Утелиева Н.Қ., PhD докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
аға оқытушы, Алматы энергетика және байланыс университеті,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: nurshatu7@mail.ru

²Исмаил Е.Е., т.ғ.к., профессор, Алматы энергетика және байланыс университеті,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: ismaile@rambler.ru

³Ахметов Д.Ф., Инженерия докторы, PhD, Rakuno Gakuen университеті,
Хоккайдо қ., Жапония, E-mail: sapalmaty@gmail.com

Бағдарламалық қамтамасыз ету сапасының модельдерін салыстырмалы талдау

Аңдатпа. Қазіргі уақытта бағдарламалық жасақтама сапасының көптеген үлгілері (БЖС) жасалғанына қарамастан, ең жақсы нәтижеге ие әртүрлі бағдарламалық құралдарға қолданылатын әмбебап модель жоқ. Белгілі бір БЖ-ді бағалаудың сапасын талдау және бағалау үшін олардың ерекшеліктері мен оларға қойылатын талаптарды ескеретін, сонымен қатар өмірлік циклдің әртүрлі кезеңдеріндегі сапа көрсеткіштерін неғұрлым дәл сипаттайтын сәйкес сапа моделін таңдау қажет.

Әрбір нақты БЖСМ, әдетте, өзіндік сипаттамалары мен сапалық атрибуттарымен сипатталады, өзінің артықшылықтары мен кемшіліктері бар. Осы сипаттамаларға сүйене отырып, модельдер қолданудың әртүрлі салаларына бағытталуы мүмкін.

Белгілі бір БЖ жобаларына сәйкес келетін бір немесе басқа БЖСМ, БЖ сипаттамалары мен сапалық атрибуттарын қолданудың орындылығын түсіну үшін қолданыстағы БЖСМ ерекшеліктеріне жан-жақты талдау жүргізу қажет.

Бұл жұмыстың мақсаты - заманауи БЖСМ-ның сипаттамалары мен ерекшеліктеріне олардың мүмкіндіктері мен қолданылуын, қолданылатын мәселенің ерекшеліктері мен талаптарына бейімделу қабілеттерін бағалау үшін жан-жақты салыстырмалы талдау жүргізу. БЖСМ талдауы келесі аспектілерде жүзеге асырылды: құрылымы, деңгейлері мен сипаттамалары (сипаттамалары бойынша) және олардың семантикалық мазмұны, сонымен қатар мүмкіндіктерді анықтау және қолдану мүмкіндігі.

Негізгі сипаттамаларды және негізгі БЖСМ сипаттамаларын салыстырмалы талдау нәтижесінде бағдарламалық қамтамасыздандырудың сапалық сипаттамаларына ең көп қолданылатын (негізгі) сипаттамалар анықталды. Бағдарламалық жасақтаманың белгілі бір түрлеріне қолдану үшін бұл негізгі жиынтықты нақты сипаттамаларды және сипаттамаларды таңдау арқылы қолданбалы бағдарламаның тиісті жағдайларына бейімдеуге болады, сонымен қатар басқа модельдерден қажетті сапалық атрибуттарды қосуға болады.

Түйін сөздер: бағдарламалық құрал, сапа, сапа сипаттамалары, сапа моделі, салыстырмалық талдау.

Сравнительный анализ моделей качества программных средств

¹Утелиева Н.К., PhD докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, старший преподаватель, Алматинский университет энергетики и связи, г. Алматы, Казахстан, E-mail: nurshatu7@mail.ru

²Исмаил Е.Е., к.т.н., профессор, Алматинский университет энергетики и связи, г. Алматы, Казахстан, E-mail: ismaile@rambler.ru

³Ахметов Д.Ф., доктор инженерии, PhD, Университет Rakuno Gakuen, г. Хоккайдо, Япония, E-mail: sapalmaty@gmail.com

Аннотация. Хотя в настоящее время создано большое количество моделей качества программного обеспечения (МКПО), однако не существует универсальной модели, которая была бы применима для различных программных средств с наилучшими результатами. Для анализа и оценки качества оценки конкретного ПС необходимо выбрать адекватную модель качества, которая учитывала бы их особенности и требования к ним, а также наиболее точно описывала бы показатели качества на различных стадиях жизненного цикла.

Каждая конкретная МКПО обычно характеризуется своим набором характеристик и атрибутов качества, имеет свои достоинства и недостатки. Исходя из этих характеристик, модели могут быть ориентированы на различные сферы применения.

Для того чтобы понять целесообразность использования той или иной МКПО, тех или иных характеристик и атрибутов качества ПС, пригодных для конкретных проектов ПС, необходимо провести комплексный анализ особенностей существующих МКПО.

Целью настоящей работы является проведение комплексного сравнительного анализа характеристик и особенностей современных МКПО для оценки их возможностей и применимости, возможности адаптации к особенностям и требованиям прикладной задачи. Анализ МКПО проведен в следующих аспектах: структура, количество уровней и характеристик (под характеристик) и их смысловое содержание, а также в плане выявления возможностей и применимости. В результате сравнительного анализа основных характеристик и под характеристик базовых МКПО выявлены наиболее применимый (базовый) набор характеристик и под характеристик качества программных средств. Для применения к конкретным типам программных средств этот базовый набор может быть адаптирован к соответствующим условиям применения путем выбора актуальных характеристик и под характеристик, а также возможного добавления необходимых атрибутов качества из других моделей.

Ключевые слова: программное средство, качество, характеристики качества, модель качества, сравнительный анализ.

1 Introduction

The concept of software quality (SQ) is multidimensional and can be expressed adequately only by some structured system of characteristics or attributes, called a quality model. For almost half a century of the development of software engineering, dozens of different software quality models (SQM) have been proposed [1-10]. Characteristics, sub-characteristics and quality attributes of SQ, set in these models, became the basis for the formal description of quality characteristics and their quality assessment in specific projects.

Users and developers have needs for quality models, allowing a formation of the quality indicators structure depending on the specifics and the scope of a particular software product. The SQM may reflect, to varying degrees, the expectations of various categories of participants in a program project: managers, developers, support personnel, users, and must contain an ordered set of characteristics that ensure the consistency of their interests. In order to understand the feasibility of using a particular quality model, certain characteristics and quality characteristics of the SQ, it is necessary to conduct a comprehensive comparative analysis of the characteristics and features of the existing SQM. In a number of papers [11-15], similar studies were performed. However, the purposes of the SQM analysis in the mentioned papers were different, it was carried out mainly at the level of characteristics, and the sub-characteristics were not considered completely, or not studied at all. In some works, the modern standard ISO 25010, which describes the new SQM, adopted in 2010, has not been considered.

The purpose of this work is to conduct a comprehensive comparative analysis of the characteristics and features of modern SQM to assess their capabilities and applicability. The analysis is carried out in the following aspects: evolution, structure, characteristics (sub-characteristics) and their semantic content, as well as general development trends.

The SQM has a hierarchical structure. Its elements are the sets of characteristics (sub-characteristics, attributes) and the subordination relationships between them.

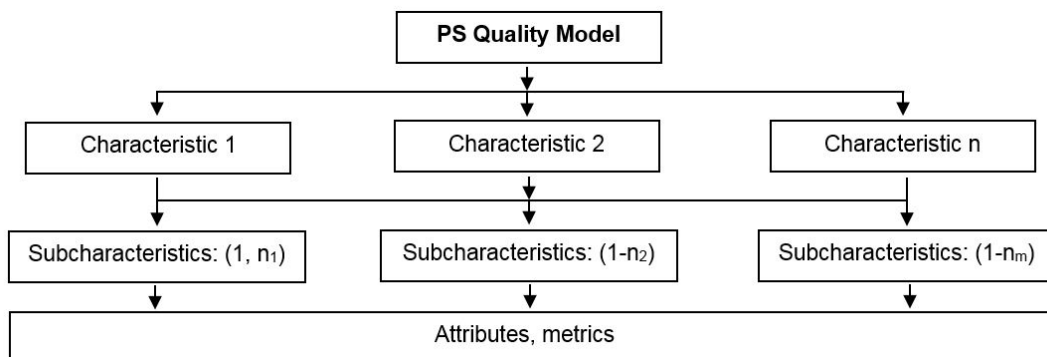


Figure 1 Structure of the PS quality model

2 Literature review

The most of present SQM are hierarchical models consisting of high-level indicators (characteristics) that are detailed by lower-level indicators (sub-characteristics, attributes, metrics)

until decomposition results in atomic and measurable quality elements. (Fig. 1). There are subordination relations between all elements of the SQM.

The structure of the SQM should reflect and bind the interests of the user, i.e. outgoing properties of the system, with internal properties that are understandable to developers.

Table 1 presents the results of the evolutionary analysis of the most well-known SQM with an indication of its main parameters, such as the number of hierarchy levels, the number of characteristics / sub-characteristics by levels / sublevels.

Table 1. – Key parameters of the most well-known SQM

No	Name of the SQM	Year of publication	Number of model levels	Number of characteristics / sub-characteristics	Developer	A source
1	McCall	1977	2	11/35	J. McCall and General Electrics	[1]
2	Boehm	1978	3	3/8/18	B.W. Boehm	[2]
3	FURPS/ FURPS+	1987/2000	2	5/25	R.B. Grady and Hewlett Packard	[3]
4	Ghezzi	1991	1	8	Carlo Ghezzi	[4]
5	ISO 9126	1991	2	6/21 + 4 (for quality in use)	ISO	[5]
6	IEEE	1993	2	6/19	IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers)	[6]
7	Dromey	1995	2	4/13	G.R. Dromey	[7]
8	SATC NASA	1996	2	6/21	SATC (Software Assurance Technology Center NASA)	[8]
9	ISO/IEC 9126-1	2001	2	6/27 + 4 (for quality in use)	ISO/IEC	[9]
10	ISO/IEC 25010	2010	2	8/31 + 5/11(for quality in use)	ISO/IEC	[10]

An analysis of SQM-related studies [11-15] shows that the most significant SQM are: McCall, Boehm, FURPS, Dromy, IEEE, SATC, ISO / IEC 9126, ISO / IEC 25010.

Practically, all considered SQM are based on the formation of a hierarchical structure of quality characteristics. The differences lie in the proposed number of levels of hierarchy, as well as in the characteristics themselves of the upper level of the hierarchy, many of which still coincide. The expediency of the hierarchical structure of the SQM is explained, firstly, by the fact that the multi-level structure of quality indicators makes it possible the systematical description of the requirements for the software, allowing stakeholders to set the properties (characteristics) of the software product that they want to see.

In terms of the development trend of the MQST the following can be noted:

- the range of quality characteristics is expanding;
- the number of hierarchical levels of the model is at least two;
- the structure of the characteristics of quality models is complicated due to their greater detailing at the level of sub-characteristics.

The existing SQMs can be divided into the following categories:

- fundamental or basic models that are the result of the work of authors' teams of international authoritative organizations; respectively, this group includes the quality models IEEE, SATC, ISO 9126, ISO 9126-1 and ISO 25010;

- corporate quality models of PS, which were, as a rule, developed in the interests of certain developers or consumers, and are significantly inferior in terms of the nomenclature of characteristics and their relations to the basic software quality models. The following quality models can be attributed to this group of models: McCall, Boehme, Ghezzi, FURPS, Dromer.

Analysis of the SQM, taking into account their evolutionary development, shows that standardized basic quality models are being developed and improved in accordance with the modern achievements of the theory and practice of software engineering, the growing demand for high-quality software products in various fields. They also take into account the main advantages of corporate SQM. In this regard, in the future it seems appropriate to consider only the basic models: ISO 25010, ISO 9126-1, IEEE and SATC.

3 Material and methods

3.1 Main parameters of the SQM

In order to identify the most applicable characteristics and sub-characteristics of the PS in the above standardized INCD, their comparative analysis was carried out. The results of this analysis are presented in Table 2.

Table 2. – Comparison of the main characteristics and sub-characteristics of the basic SQM

No	PS Quality Characteristics	PS Quality Models			
		ISO 25010 model	ISO 9126-1 model	IEEE model	SATC model
A. PS Quality Characteristics					
1.	Functional suitability	+	+	+	±
2.	Performance efficiency	+	±	±	+
3.	Compatibility	+	±	+	±
4.	Usability	+	+	+	+
5.	Reliability	+	+	+	–
6.	Security	+	+	+	±
7.	Maintainability	+	+	+	+
8.	Portability	+	+	+	±
9.	Efficiency	+	+	+	±
10.	Functionality	+	+	+	±
11.	Supportability	±	±	+	+
12.	Requirements Quality	–	–	–	+
13.	Product (Code) Quality	±	±	±	+
14.	Design Quality	–	–	–	+
15.	Implementation Efficiency	±	±	±	+
16.	Testing Efficiency	±	±	±	+
17.	Installation & Checkout Quality	±	±	±	+
18.	Operation & Maintenance Quality	±	±	±	+
19.	Retirement Quality	–	–	–	+
B. Sub-characteristics of PS quality					
1.	Functional completeness	+	+	+	+
2.	Functional correctness	+	+	+	±
3.	Functional appropriateness	+	+	±	±
4.	Time behaviour	+	+	+	±
5.	Resource utilization	+	+	+	+
6.	Capacity	+	±	±	±
7.	Co-existence	+	+	+	±
8.	Interoperability	+	+	+	±
9.	Recognizability	+	–	–	±

10.	Learnability	+	+	+	+
11.	Operability	+	+	+	±
12.	User error protection	+	–	–	–
13.	User interface aesthetics	+	–	–	+
14.	Accessibility	+	–	–	–
15.	Maturity	+	+	–	–
16.	Fault tolerance	+	+	+	–
17.	Availability	+	–	+	–
18.	Recoverability	+	+	–	–
19.	Confidentiality	+	–	–	–
20.	Integrity	+	–	–	+
21.	Non-repudiation)	+	–	–	–
22.	Accountability	+	–	–	–
23.	Authenticity	+	–	–	–
24.	Modularity	+	–	–	+
25.	Reusability	+	–	+	+
26.	Analysisability	+	+	–	–
27.	Modifiability	+	+	+	±
28.	Testability	+	+	+	+
29.	Adaptivity	+	+	+	±
30.	Installability	+	+	+	+
31.	Replaceability	+	+	±	+
32.	Accuracy	+	+	+	+
33.	Compliance	–	+	–	±
34.	Understandability	±	+	+	+
35.	Volatility	–	–	–	+
36.	Attractiveness	+	+	–	–
37.	Stability	–	+	–	–
38.	Fault-proof	–	–	+	–
39.	Expandability	±	±	+	+
40.	Ambiguity	–	–	–	+
41.	Traceability	–	–	–	+
42.	Complexity	–	–	–	+
43.	Sizing	–	–	–	+

Notes: the sign "+" means applicability and full equivalence of the relevant characteristics (sub-characteristics) in the considered PS quality models, the sign "–" means the absence (inapplicability) of the specified characteristics (sub-characteristics) in the considered quality models, the sign "±" means applicability, but incomplete equivalence of the relevant characteristics (sub-characteristics) in the considered PS quality models.

4 Results and discussions

4.1 Comparative analysis of the characteristics of basic SQM

The results of a comparative analysis of the main characteristics and sub-characteristics of basic SQMs revealed the following.

a) In all four analyzed software quality base models, the following quality characteristics are used:

- Functional suitability;
- Reliability;
- Usability;

- Security;
- Maintainability;
- Portability;
- Efficiency.

b) Also, in fact, in one form or another, the following quality sub-characteristics are used in all four analyzed basic software quality models:

- Functional completeness;
- Functional correctness;
- Functional appropriateness;
- Time behavior;
- Co-existence;
- Interoperability;
- Learnability;
- Operability;
- Reusability;
- Modifiability;
- Testability;
- Installability;
- Accuracy;
- Understandability.

c) The following quality characteristics and sub-characteristics are applied only in one of the four analyzed basic software quality models:

- Requirements Quality;
- Product (Code) Quality;
- Design Quality;
- Implementation Effectivity;
- Testing Effectivity;
- Installation & Checkout Quality;

- Operation & Maintenance Quality;
- Retirement Quality.
- Compliance;
- Requirements volatility;
- Stability;
- Faultlessness;
- Ambiguity;
- Traceability;
- Complexity;
- Sizing;
- Independence from software platform;
- Independence from hardware platform.

Based on the results of a comparative analysis of the characteristics of various SQM s, it can be noted that the ISO / IEC 25010 model, which is the most modern, perfect and universal, can be adopted as the basic model. In this case, consideration of the rest of the SQM may be useful in the aspect of identifying relevant characteristics applicable to certain types of software. To apply to specific types of software, the basic model must be adapted to the relevant conditions of use by selecting relevant characteristics and sub-characteristics, as well as the possible addition of the necessary quality attributes from other SQMs.

5 Conclusion

Summarizing the results of comparing existing models of PS quality, it can be noted that the problem of describing and evaluating SQ quality remains completely unresolved due to the large variety of PS and the narrow specificity of their individual classes. A comparative analysis of the existing SQM revealed a number of their shortcomings, the main of which can be formulated as follows:

- lack of terminological consistency, which leads to ambiguity in the interpretation of similar terms and the use of different terms to describe equivalent concepts;
- existing models are either abstract, widely applicable, or detailed and narrowly applicable, i.e. the level of detail is inversely proportional to the level of applicability;
- the lack of methods to substantiate the process of building a quality model, often quality models were built subjectively, by intuition;

- low degree of formalization, lack of a rigorous mathematical basis for the description of the formal properties of models and methods for their construction and methods of adaptation;
- the absence of mechanisms for establishing a causal link between the quality of a software product and the principles, methods and technologies of their design;
- lack of a clear and effective system for measuring the quality of a software product.

Practice shows that it is impractical and impossible to develop a universal SQM, which establishes a unified system of quality characteristics, which is unchanged in time and regardless of the scope and object of the application. Users and developers feel the need for the development of an SQM applicable to describe and assess the quality of a particular SQ, taking into account its purpose, specifics and conditions of use. However, standardized SQM is not always fully suitable for assessing the quality of specific SQ. For a specific SQ being developed, it is necessary, based on its functional purpose, features, and degree of importance of individual requirements, to form an adapted quality model based on the basic standardized SQM.

To obtain a comprehensive assessment of the quality of critical software (for example, space-based software - SBS) it is advisable to use different software at the same time. Moreover, to assess the quality of each particular software product, an individual system of characteristics, sub characteristics, attributes, as well as metrics for measuring them should be formed.

The expediency of constructing a basic quality model for SBS on the basis of the standard ISO / IEC 25010 model is shown. However, for application to specific types of SBS, it must be adapted taking into account the features, requirements, application conditions by selecting the relevant characteristics and sub-characteristics, as well as the possible addition of additional attributes quality.

References

- [1] McCall J. A., Richards P.K., Walters G.F., "Factors in Software Quality: Concept and Definitions of Software Quality. Final Technical Report", *National Technical Information Service, Springfield* Vol. 1 (1977).
- [2] Boehm B.W., Brown J.R., Kaspar H., Lipow M., MacLeod G.J., Merritt M.J., "Characteristics of Software Quality", *TRW Series of Software Technology, Amsterdam, North Holland* (1978): 166.
- [3] Grady R.B., Caswell D.L., "Software Metrics: Establishing a Company-Wide Program", *Prentice-Hall* (1987): 275.
- [4] Ghezzi C., Jazayeri M., Mandrioli D., "Fundamental of Software Engineering", *Prentice-Hall, NJ, USA.* (1991).
- [5] GOST R YSO/MEK 9126-93. "Informacionnaya tehnologia. Ocenka programnoi produkciy. Harakteristikiy kachestva I rukovodstva po ih primeneniyyu [Information technology. Software product evaluation. Quality characteristics and guidelines for their use, introduction 1994-07-01]", *M.: Izdatelstvo standartov* (1994): 15.
- [6] IEEE 1219-1993. "Standard for Software Maintenance", *Software Engineering Standards Subcommittee of the IEEE Computer Society* (1993): 45.
- [7] Dromey G.R., "A model for software product quality", *IEEE Transactions of Software Engineering* Vol. 21, No. 2 (1995): 146-162.
- [8] Hyatt L.E., Rosenberg L.H., "A Software Quality Model and Metrics for Identifying Project Risks and Assessing Software Quality", *Proceedings of Product Assurance Symposium and Software Product Assurance Workshop. Noordwijk* (1996): 209-212.

- [9] ISO/IEC 9126-1:2001. "Software engineering", *Software product quality. Part 1: Quality model* (2001): 32.
- [10] ISO/IEC 25010:2011. "Systems and software engineering", *Systems and software Quality Requirements and Evaluation (SQuaRE). System and software quality models* (2011): 34.
- [11] Suman Manoj Wadhwa, "A Comparative Study of Software Quality Models", *International Journal of Computer Science and Information Technologies* Vol. 5 (4) (2014): 5634-5638
<http://www.ijcsit.com/docs/Volume%205/vol5issue04/ijcsit20140504177.pdf>
- [12] Sanjay Kumar Dubey, "Comparison of Software Quality Models: An Analytical Approach." Sanjay Kumar Dubey, Soumi Ghosh, Ajay Rana *Int. Journal of Emerging Technology and Adv. Engineering* Vol. 2, Is. 2 (2012): 111-119.
- [13] Jarko E., "Sravnenie modelei kachestva programmnogo obespechenia analiticheskii podhod [Comparision of quality models software analytical approach]", *Trudy. M.: IPU RAN. XII Vserossiiskogo sovechaniya po problemam upravleniya VSPU. Moscow* (2014): 4585-4594.
- [14] Gordeev A., Harchenko V., "Evolusiya modelei kachestva programmnogo obespecheniya: Metodica I rezultati analiza v kontekste standart ISO 25010 [The evolution of software quality models: methodology and analysis results in the context of ISO 25010]", *Systema obrabotki informatsiyi* Vipusk 6 (113) (2013): 13-31.
- [15] Ismail E., "Sovremennyye modeli kachestva programmnykh sredstv I ih osobennosti. [Modern models of software quality and their features]", *MNJ "Poisk"* No 3 (2015): 272-282.
- [16] Larin S.N., Lazareva L.YU., Larina T.S., "Modeli, metody, pokazateli, kharakteristiki i metriki, primenyayemye v ekspertnykh sistemakh otsenki kachestva razrabotki i sozdaniya innovatsionnykh programmnykh proyektov. [Models, methods, indicators, characteristics and metrics used in expert systems for assessing the quality of development and creation of innovative software projects. Regional economics, theory and practice]", *Regional'naya ekonomika: teoriya i praktika* T. 15, Vyp. 6 (2017): 1187-1198
- [17] Bass L., Clements P., Kazman R., "Software Architecture in Practice", *2Ed. Addison Wesley* (2003): 528.
- [18] Chang C., Wu C., Lin H., "Integrating Fuzzy Theory and Hierarchy Concepts to Evaluate Software Quality", *Software Quality Control* Vol. 16, No. 2 (2008): 263-267.
- [19] Sharma A., Kumar R., Grover P.S., "Estimation of Quality for software components: an empirical approach", *ACM SIGSOFT Software Engineering Notes* Vol. 33, No. 6 (2008): 1-10.
- [20] Ajah I. A., & Ugah J.O., "Comparative Analysis of Software Development Methodologies", *International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering* 3(6) (2013).
- [21] Klopper R., Gruner S., & Kourie D., "Assessment of a framework to compare software development methodologies", *The 2007 Annual Research Conference of the South African Institute of Computer Scientists and Information Technologists on IT Research in Developing Countries* (2007).
- [22] Jeff Tian, "Quality-Evaluation Models and Measurements", *IEEE Software* Vol. 21, No. 3 (2004): 84-91.
- [23] Deepshikha Jamwal, "Analysis of Quality Models for Organizations", *International Journal of Latest Trends in Computing* Volume 1, Issue 2 (2010).
- [24] Paulk, Cuttis, Weber, "The Capability Maturity Model for Software", *Institute of Electrical and Electronics Engineers* (1997): 427-438.
- [25] Suryanto Nugroho, Sigit Hadi Waluyo, Luqman Hakim, "Comparative Analysis of Software Development Methods between Parallel V-Shaped and Iterative", *International Journal of Computer Applications* 169(11) (2017): 7-11.

¹О.А. Усатова , ²С.Е. Нысанбаева, ³В. Вуйцик

¹докторант PhD, Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Казахстан, E-mail: olgaussatova@gmail.com

²д.т.н., ассоциированный профессор,
Институт информационных и вычислительных технологий, г. Алматы, Казахстан,
E-mail: sultasha1@mail.ru

³д.т.н., профессор, Люблинский технологический университет, г. Люблин, Польша,
E-mail: waldemar.wojcik@pollub.pl

ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ЗАЩИТЫ БАЗЫ ДАННЫХ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация. В статье описаны методы защиты базы данных и информации, хранящейся в ней. Проведен анализ кибератак на информационные системы. Рассмотрены некоторые компании, которые предоставляют услуги по защите информации хранящейся в базах данных, а также структурированных и неструктурированных данных. Описана разработанная модель защиты базы данных, которая отображает последовательность метод шифрования и дешифрования. Разработан алгоритм методов шифрования / дешифрования информации, который основан на использовании криптографического метода шифрования Base64. Описан фиксированный префикс. Представлен результат перекодировки Base64 для каждого ASCII-читаемого символа и цифры. Кратко описана инфляция префикса. Осуществлена программная реализации описанного алгоритма, разработанная под операционную систему Windows в среде разработки Embarcadero RAD Studio на языке программирования Delphi с применением интеграции с другими языками программирования и подключенных системных библиотек. Дано подробное описание инструкции пользователя рассматриваемого алгоритма. Проведен анализ программной реализации предложенного алгоритма.

Ключевые слова: защита базы данных, защита информации, безопасность данных, модель защиты, приложение, база данных, шифрование, дешифрование.

¹О.А. Усатова, ²С.Е. Нысанбаева, ³В. Вуйцик

¹докторант, әл-Фараби атындағы қазақұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан,
E-mail: olgaussatova@gmail.com

²т.ғ.д., қауымдастырылған профессор, Ақпараттық және есептеу іштехнологиялар институты,
Алматы қ., Қазақстан, E-mail: sultasha1@mail.ru

³т.ғ.д., профессор, Люблин қ. техникалық университеті, Люблин, Польша,
waldemar.wojcik@pollub.pl

Дерекқор қорғанысы ақпараттық жүйесін зерттеу және моделін құру

Аңдатпа. Мақалада деректер базасын және ақпарат қорғаудың тәсілдері сипатталған. Ақпараттық жүйелердегі кибершабуылдарға талдау. Деректер базасында сақталатын ақпаратты, сондайақ құрылымдалған және құрылымданбаған деректерді қорғау қызметтерін ұсынатын кейбір компаниялар қарастырылады. Дерекқорды қорғаудың дамыған моделі сипатталған, онда шифрлау және дешифрлау әдісінің реттілігі көрсетілген. Base64 криптографиялық шифрлау әдісін қолдануға негізделген ақпаратты шифрлау / дешифрлау әдістерінің алгоритмі жасалды. Бекітілген префикс сипатталған. Әр ASCII оқылатын таңба мен сан үшін Base64 кодтау нәтижесі ұсынылған. Қысқа сипатталған инфляция префиксі. Delphi бағдарламалау тілінде Embarcadero RAD Studio дамыту ортасында Windows басқа операциялық жүйелері үшін әзірленген, басқа бағдарламалау тілдерімен және жүйелік кітапханалармен интеграцияны қолдана отырып, сипатталған

алгоритмнің бағдарламалық қамтамасыздандыруы іске асырылған. Пайдаланушыға алгоритм бойынша нұсқаулықтардың толық сипаттамасы келтірілген. Ұсынылған алгоритмнің бағдарламалық қамтамасыз етілуіне талдау жасалған.

Түйін сөздер: дерекқорды қорғау, ақпаратты қорғау, деректер қауіпсіздігі, қорғау моделі, қосымша, дерекқор, шифрлау, дешифрлау.

¹O.A.Ussatova, ²S.E. Nyssanbayeva, ³W. Wojcik

¹doctoral student, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

E-mail: olgaussatova@gmail.com

²Doctor of Engineering, associate professor, Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan, E-mail: sultasha1@mail.ru

³Doctor of Engineering, professor, Lublin University of Technology, Lublin, Poland,

E-mail: waldemar.wojcik@pollub.pl

Research and development of an information system database security model

Abstract. The article describes the methods of protecting the database and the information stored in it. The analysis of cyberattacks on information systems is presented. Some companies that provide services to protect information stored in databases, as well as structured and unstructured data, are considered. The developed database protection model is described, which displays the sequence of the encryption and decryption method. An algorithm of information encryption / decryption methods has been developed, which is based on the use of Base64 cryptographic encryption method. A fixed prefix is described. The Base64 transcoding result for each ASCII-readable character and digit is presented. Briefly described inflation prefix. A software implementation of the described algorithm was implemented, developed for the Windows operating system in the Embarcadero RAD Studio development environment in the Delphi programming language, using integration with other programming languages and connected system libraries. A detailed description of the user instructions for the algorithm in question is given. The analysis of the software implementation of the proposed algorithm is carried out.

Key words: protection of the database, information security, data security, protection model, application, database, enciphering, decoding.

1 Введение

На современной стадии эволюции нашего общества некоторые традиционные ресурсы человеческого развития понемногу утрачивают свое первоначальное предназначение. На смену им приходит новые информационные ресурсы, единственные продукты не убывающие, а растущие со временем. Информация стала в настоящее время одним из основных ресурсов научно-технического и социально-экономического прогресса в мировом сообществе [1]. Информация имеет определенную стоимость, следовательно, сами факты получения данных злоумышленниками приносят им определенные доходы, ослабив тем самым возможность конкурента к равному коммерческому состязательству. Главной целью злоумышленников является получение сведений о составе, состояниях и видах деятельности объектов, являющихся конфиденциальными интересами в целях насыщения своей информационной потребности. Корыстные цели злоумышленников или конкурентов могут заключаться и во внесении определенного изменения в состав данных, которые циркулируют на объектах конфиденциального интереса. Такие действия могут приводить к дезинформации в определенной сфере деятельности с данными, и результатах решения некоторой задачи. Более опасным является уничтожение накопленного информационного массива в документной или компьютерной формах или программного продукта. В связи с этими фактами

большое значение приобретают методы организации и создание эффективных систем информационной безопасности [2]. Информационной безопасностью называется комплекс мер по защите данных от неавторизованного доступа, разрушений, модификаций, раскрытий или задержки при доступе. В информационную безопасность включаются меры по защите процесса создания информации, её ввода, обработки и вывода. Цель информационной безопасности состоит в том, чтобы обезопасить ценность систем, защищать и гарантировать точность и целостность данных, а также минимизировать последствия, которые могут возникнуть в том случае, когда данные будут модифицированы или разрушены. В рамках информационной безопасности требуется учет всех действий, в ходе которых информация создается, подвергается модификации, когда к ней осуществляется доступ или она распространяется по сети [3]. Целью исследования являются средства защиты баз данных для обеспечения безопасности, целостности и конфиденциальности информации. Для решения поставленной цели рассматривались задачи, направленные на исследования атак и средств защиты баз данных. Построена и программно реализована модель защиты баз данных.

2 Обзор литературы

База данных на сегодняшний день является незаменимым инструментом для хранения и обработки информации. Любая компания, хранящая и обрабатывающая информацию в базах данных (БД), может столкнуться с хищением конфиденциальных сведений. Для проведения атак на информационные системы злоумышленники используют широкий спектр «технологий» — DDoS атаки, получение несанкционированного доступа путем компрометации учетных записей пользователей, вредоносное программное обеспечение различных типов, взлом службы доменных имен и приложений. Значительную долю успешных внешних атак на информационные системы были проведены при помощи SQL-инъекций [4]. Проведен анализ кибератак за 2018-2019 год результаты которого приведены на рисунке 1. По ОСИ - X указано количество атак, а по ОСИ - Y - месяца 2018-2019 года. Как видно из приведенных данных, эта проблема актуальна для всего мира. Киберпреступность усиливается с каждым годом, в связи, с чем возникает необходимость в применение средств защиты. Рассмотрим некоторые компании, которые предоставляют услуги по защите информации хранящиеся в БД. - IBM SecurityGuardium: она предотвращает утечки информации из баз данных, хранилищ данных и сред больших данных, таких как Hadoop, обеспечивает целостность информации и автоматизирует контроль соответствия в гетерогенных средах. Решение защищает структурированные и неструктурированные данные в базах данных, средах больших данных и файловых системах от угроз и обеспечивает соответствие требованиям. Также предоставляет масштабируемую платформу, которая обеспечивает непрерывный мониторинг структурированного и неструктурированного трафика данных, а также применение политик для доступа к конфиденциальным данным в масштабах всего предприятия [5].

- Компания Imperva: это мировой лидер в области разработки и производства продуктов для защиты web-приложений и систем управления базами данных (СУБД).

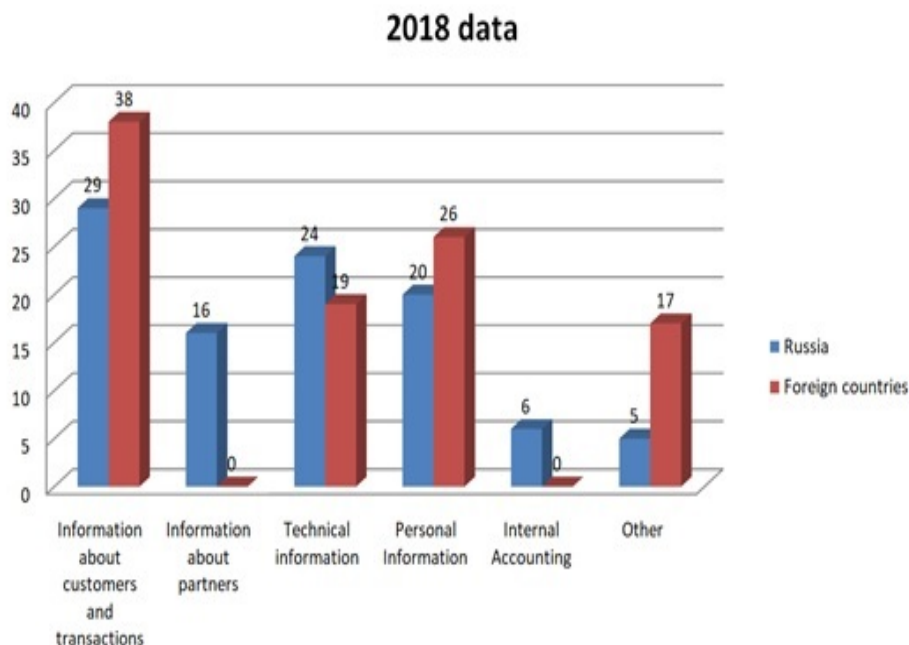


Рисунок 1: Кибератаки за 2018-2019 год

Полноценные решения позволяют производить разносторонний мониторинг и контроль над использованием всех данных и бизнес транзакций внутри дата-центра, от хранилища в базе данных или файлового сервера до использования [6].

- Imperva Database Security Secure Sphere: организации защиты важной информации в базах данных. Продукт обеспечивает комплексную прозрачность использования данных, прав доступа и уязвимостей. SecureSphere также предлагает уникальные возможности по оптимизации разворачивания решений для защиты баз данных за счет использования комбинаций удаленных сканирований и оценок, мониторинга и анализа сетевой активности с помощью программных агентов [7].

- McAfee DataCenter Security Suite for Databases: предоставляет возможность получать полную информацию об общем состоянии и уровне защищенности баз данных. Это программное решение для защиты баз данных не требует ни внесения изменений в архитектуру, ни установки дорогостоящего оборудования. В режиме реального времени решение обнаруживает и блокирует попытки атак и вторжений без необходимости отключать базы данных и тестировать приложения [8].

- McAfee Vulnerability Manager for Databases: автоматическое обнаружение базы данных, имеющиеся в вашей сети, определение установок новейших пакетов исправлений, и проводящие проверку на наличие распространенных уязвимостей [9].

- Trustwave AppDetectivePRO: сканер баз данных и хранилищ BigData, позволяющий мгновенно выявлять ошибки в конфигурации, проблемы идентификации и контроля доступа, недостающие патчи и опасные комбинации настроек, способные привести к атакам типа «повышение привилегий» или DoS-атакам, утечкам и несанкционированному изменению данных. Благодаря простой установке и интуитивно

понятному интерфейсу AppDetectivePRO не требует от пользователя экспертных знаний в области баз данных. Всего за несколько минут вы сможете мгновенно проанализировать состояние безопасности, получить оценку рисков и составить отчет о соответствии требованиям для любых БД и хранилищ BigData – как локальных, так и облачных. AppDetectivePRO является прекрасным дополнением к другим сканерам сетей и приложений [10].

- DbProtect: платформа для обеспечения безопасности данных, позволяющая мгновенно выявлять ошибки в конфигурации, проблемы идентификации и контроля доступа, недостающие патчи и опасные комбинации настроек, способные привести к атакам типа «повышение привилегий» или «отказ в обслуживании» (DoS-атакам), утечкам и несанкционированному изменению данных. За счет использования многопользовательской ролевой модели доступа и распределенной архитектуры с инструментами аналитики и отчетности корпоративного класса DbProtect защищает все реляционные СУБД и хранилища BigData в инфраструктуре компании, развернутые как локально, так и в облаке [11].

- FUDO SECURITY – ведущая польская компания, поставщик инновационных решений в области ИТ- безопасности. Компания специализируется на управлении привилегированным доступом, аутентификации и авторизации пользователей, а так же проверке зашифрованного SSL/TLS трафика [12].

- FUDO PAM – эффективное управление и контроль привилегированных пользователей. FUDO PAM – передовое решение, доступное в виде физического или виртуального устройства. Запись сессии, проактивный мониторинг на основе искусственного интеллекта, современное хранилище паролей и бизнес-аналитика – все это в одном устройстве, которое устанавливается за пару часов.

Все перечисленные компании предоставляют недешёвые услуги в связи, с чем ни каждая компания может себе позволить их приобрести. Для решения проблем связанных с безопасностью данных компании, обычно находят более выгодный и удобный вариант решения проблемы. Один из некоторых рассмотрен в данной статье.

3 Материал и методы

Разработана модель защиты информации, хранящейся в БД. Модель отображает работу системы приложения, основанную на криптографических алгоритмах для работы с входными данными в виде файлов и потоков, хранящихся в БД. Система шифрования, обеспечивающая возможность визуализации основных процедур и проведения проверки эффективности алгоритма шифрования. Производится загрузка файла, где можно произвести выбор метода шифрования или дешифрования, следующим этапом является сохранение документа в базе данных. При работе с БД производится выбор–подключение–отображение–шифрование–сохранение и запись в БД (рисунок 2). Для предложенной модели защиты разработан алгоритм (рисунок 3).

На данной схеме представлен алгоритм описанной системы защиты информации хранящейся в базе данных.

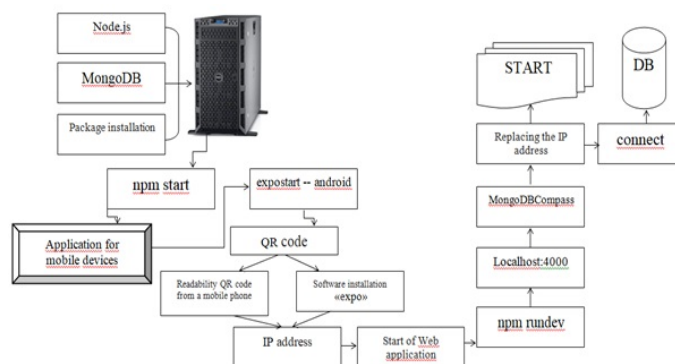


Рисунок 2: Схема работы модели защиты информации

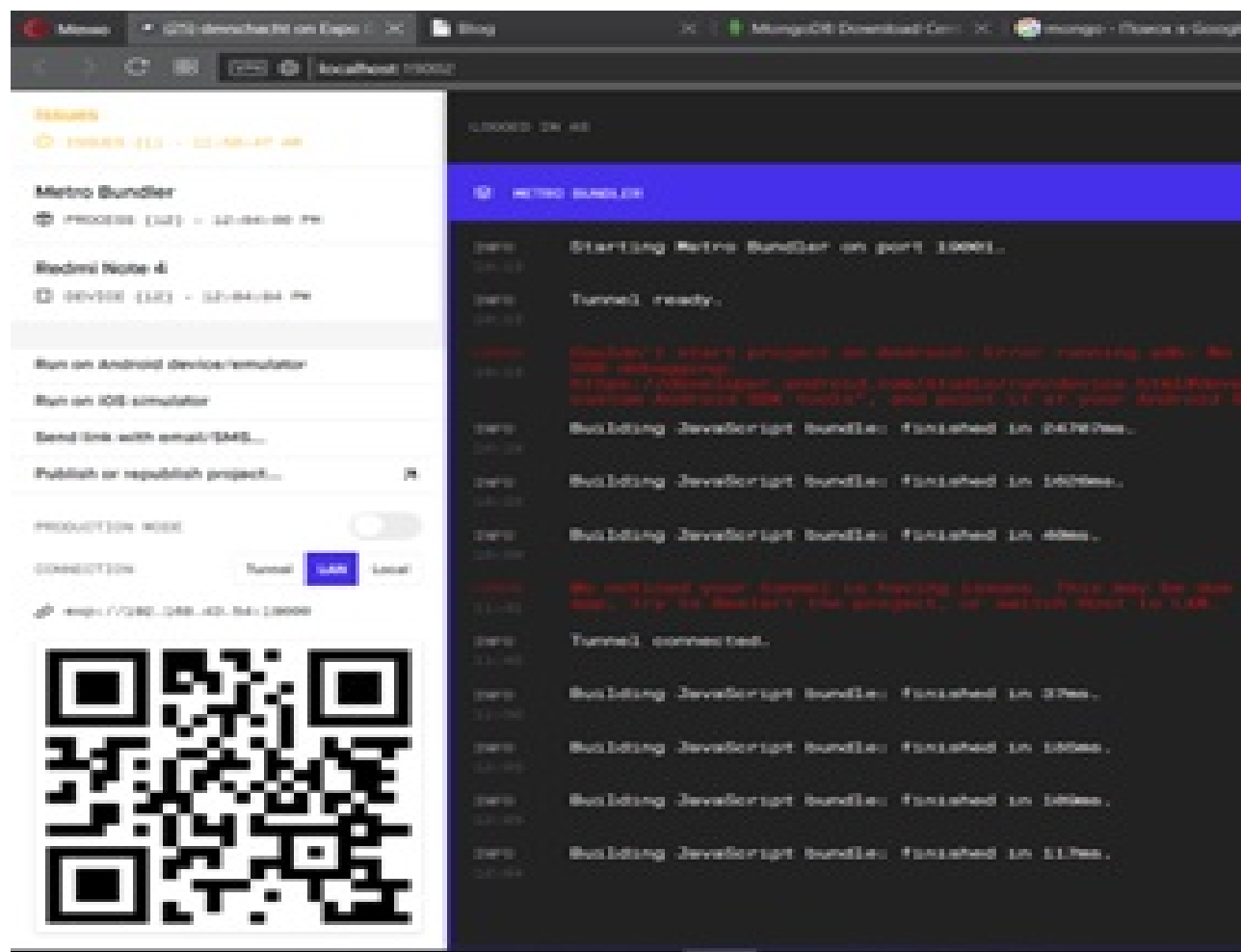


Рисунок 3: Схема работы алгоритма

4 Результаты и обсуждения

Программный модуль системы, обеспечивает возможность визуализации основных процедур и проведение алгоритмов проверки эффективности шифрования. Алгоритм основан на использовании криптографического метода шифрования Base64. Base64 - это механизм кодирования, используемый для представления и потоковой передачи двоичных данных через носители, ограниченные только печатными символами [13]. Основная идея технологии кодирования Base64 состоит в том, чтобы взять три символа, каждый из которых представлен в 8 битах, и превратить их в четыре символа, каждый из которых представлен в 6 битах. Получаем три символа в ASCII. Каждый символ отображается в 8-битное число от 0 до 255 на основе таблицы ASCII. Берем представление трех символов в 8 битах и соединяем их вместе, чтобы получить 24 бита. Затем разбиваем 24 бита на четыре части по 6 бит в каждой части и переводим каждую часть, используя таблицу Base64. Каждые 6 битов имеют 64 варианта символов, доступны следующие символы: цифры, строчные и прописные буквы, а также символы «+» и «/». В целом, кодировка Base64 разбивает входной текст на части по три символа и кодирует эти три символа, как описано выше. В конце процесса можно столкнуться с проблемой, когда не хватает одного или двух символов для завершения последнего трио. Чтобы решить эту проблему, кодирование добавляет один или два символа «0» в конце, чтобы создать последнюю 3-байтовую группу. Затем кодировка Base64 преобразует последние символы в '='. Поэтому иногда видим закодированный в Base64 текст, который заканчивается одним или двумя символами '='. Фиксированный префикс. Независимо от того, какая строка закодирована, после многократного кодирования в Base64 всегда получаем один и тот же фиксированный префикс, который начинается с: «Vm0wd». Причиной этого явления является то, как работает кодировка, как буква «V» ведет себя при кодировании. Кодировем букву «V» с помощью Base64. В ASCII буква «V» равна 86, что в 8-битном представлении переводится в: 01010110. После кодирования и игнорирования заполнения, поскольку нужен только префикс, берем только первые 6 бит представления, что означает 010101. В базе 64 это 21, что на удивление также является «V». Это означает, что каждый раз, когда пытаемся кодировать все, что начинается с буквы «V», получим закодированную строку, которая также начинается с «V». Это бесконечный цикл. Результат перекодировки Base64 для каждого ASCII-читаемого символа и цифры представлен на графике (рисунок 4). Каждый цвет представляет расстояние кодирования до «V»: синий - четыре итерации кодирования; зеленый - три итерации кодирования; желтый - две итерации кодирования; оранжевый - одна итерация кодирования.

Инфляция префикса. После кодирования первых трех букв фиксированного префикса остается остаток в 6 битов. Эти 6 бит будут определять следующую букву префикса. Фактически, для каждых трех букв, добавляемых к фиксированному префиксу, после кодирования остаются дополнительные 6 битов, которые будут определять дополнительный символ префикса. Это означает, что фиксированный префикс будет увеличиваться в каждой дополнительной кодировке на количество букв в префиксе, деленное на три. Например, если в фиксированном префиксе девять символов, то после другой кодировки в фиксированном префиксе будет двенадцать символов [14].

Криптографический метод позволит реализовать описанный алгоритм и будет

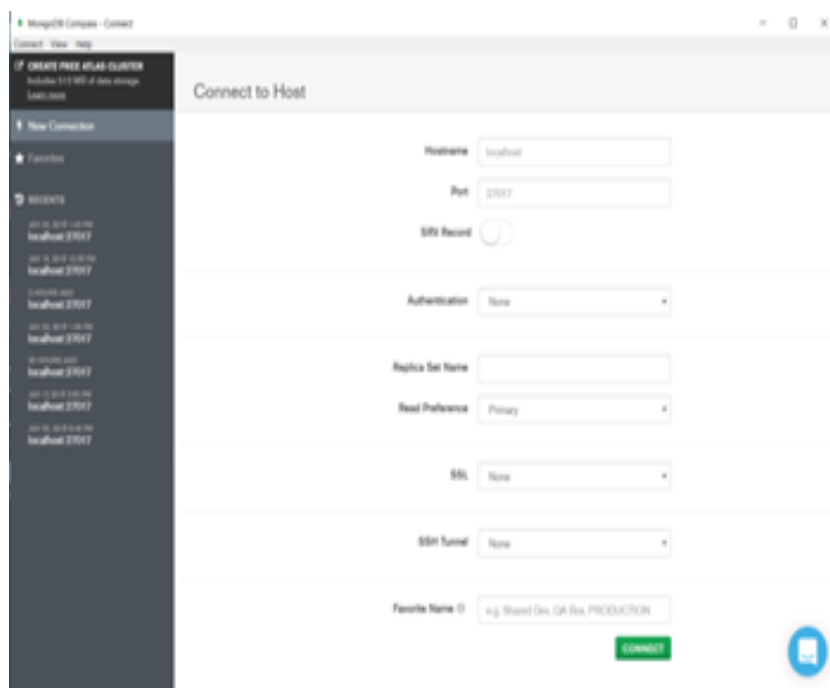


Рисунок 4: График результата перекодировки

использован в программной реализации . Программный продукт реализован под операционную систему Windows в среде разработки Embarcadero RAD Studio. Для работы с БД на сервере необходимо подключение к локальному серверу Firebird3. После загрузки приложения, откроется главное меню приложения, содержащее:

- в верхней части главного окна расположена кнопка «Выбор файла» для шифрования/дешифрования;
- в нижней части расположено меню работы с БД.

Главное окно приложения представлено на (рисунок 5).

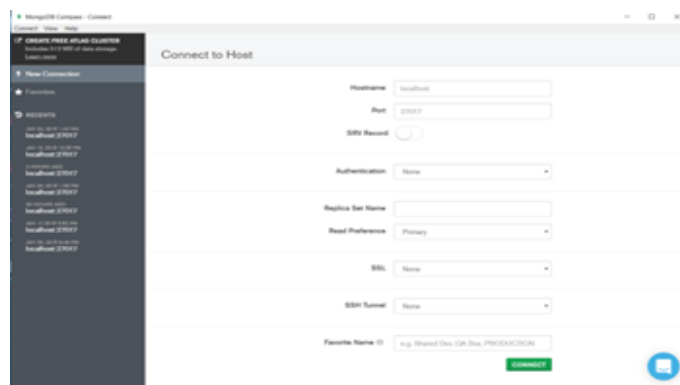


Рисунок 5: Главное окно приложения

Этапы работы приложения: При нажатии на кнопку «Выбор файла» открывается

стандартное диалоговое окно для выбора шифруемого/дешифруемого файла.
При нажатии на кнопку «Зашифровать» выбранный файл шифруется и сохраняется в той же директории с расширением *.crypt (рисунок 6).

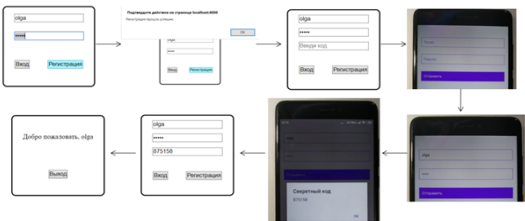


Рисунок 6: Шифрование файла

При нажатии на кнопку «Дешифровать» выбранный файл дешифруется и открывается диалоговое окно для сохранения этого файла. При нажатии на кнопку «Подключиться» появляется диалоговое окно для выбора БД. При нажатии на кнопку «Статус БД» выводится вся информация о БД, включая дату создания, размер, кол-во символов, статус зашифрована - дешифрована и т.д (рисунок 7).

No s/ n	Input data	Mathematical function	Hash - value	Pass- word gener- ated
1.	login1 pass123 2019125 153815 secret	$(\text{Math.pow}(\text{Math.cos}(x), \text{Math.sin}(y)) * \text{Math.pow}(\text{Math.sin}(x), \text{Math.cos}(y))) * p(1,4)(\text{Math.sqrt}(2))$	320419646D777D66455D97B056C8B50C8D77 B4B8F91BBDDA6A31F82C58427	4320 27
2.	login1 pass123 2019125 153815 secret	$((y * \text{Math.sin}(x)) * \text{Math.cos}(y)) + 2) * 4 * (\text{Math.pow}(\text{Math.sin}(x), \text{Math.cos}(y))) * c(1)$	18C645887AB726CA912041FCAE359A0B0C 2503A4D4C81F42942ED0510C3	5784 76
3.	user123 password 456 2019125 15328 ver	$(\text{Math.sqrt}(x)) * \text{Math.sin}(y) + \text{Math.cos}(z) * \text{Math.PI}(y)$	5617AB08E70F620333D8B0675065CA712D459 D5B892BF9D43DC4C8DB4CFF1EC	8394 47
4.	pinckio quest 2019125 15346 conf	$((c * \text{Math.pow}(\text{Math.sin}(x), \text{Math.cos}(y)) * 3) + 3 * \text{Math.pow}(\text{Math.cos}(x), \text{Math.sin}(y))) * 2) * c(2)$	31CADE53484F2213E22665058E381408B1D8 31ABCCFF36A2370814411952	5865 76
5.	new point1 2019125 153420 confident only	$(\text{Math.pow}(\text{Math.cos}(x), \text{Math.sin}(y)) * \text{Math.sin}(x), \text{Math.cos}(y)) * p(1,4)(\text{Math.sqrt}(2))$	6EEF6A6F907ACCFF8278BF986A54F93544214 A40C8D708C6DDFC294C1D7F7B	4172 66

Рисунок 7: Статус базы данных

При нажатии на кнопку «Зашифровать» в выбранной БД информация зашифровывается. При повторном подключении к этой БД информация в ней не будет отображена без дешифровки,и появится окно содержащее ошибку (рисунок 8).
При нажатии на кнопку «Дешифровать» выбранная БД дешифруется и закрывается в программе. Для отображения информации требуется повторное подключение к БД. Программный продукт предназначен для зашифровывания информации и дальнейшей передачи ее по сети в закрытом виде и расшифровывании при получении ее адресатом. Особенности создания программы, повлиявшие на выбор языка и среды программирования. Данное приложение ориентировано в первую очередь на коммерческое использование организациями, заинтересованными в обеспечении

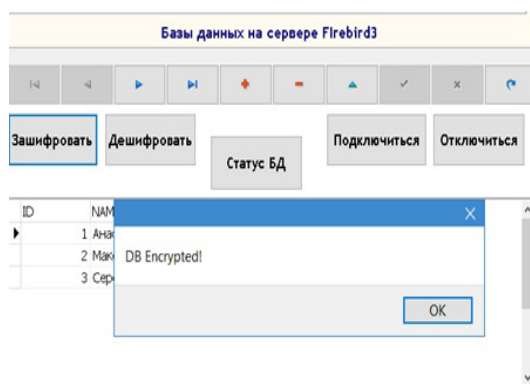


Рисунок 8: Шифрование базы данных

защиты информации. Это в свою очередь, предъявляет определенные требования к интерфейсу программы. Программа должна быть проста и удобна для использования. Исходя из всего вышесказанного, мы получаем вполне конкретные требования, как к языку программирования, так и к среде программирования. Всем этим требованиям удовлетворяет среда программирования Embarcadero RAD Studio используемые в ней языки программирования Delphi и C++. Программный комплекс состоит из приложения и библиотек, необходимых для его работоспособности. Программа scrambler.exe является основным и единственным приложением с объемом 19,2М байт.

- Main.dcu 23 кб Файл с бинарным представлением основного модуля;
- CryptUnit.dcu 3кб Файл с бинарным представлением модуля Шифрования.

5 Заключение

В настоящий момент информационные ресурсы становятся одними из наиболее мощных инструментов экономического развития. Обладание информацией необходимых видов и качеств в нужный момент времени и в нужном месте становится залогом успеха в различных видах хозяйственно-экономической деятельности. Монопольное обладание определенными типами информацией оказывается часто одним из решающих преимуществ в конкурентной борьбе и может предопределить, таким образом, высокую цену информационных приложений. Широкое внедрение персонального компьютера выводит уровень информатизации хозяйственной жизни на качественно новые ступени. В наше время достаточно трудно обнаружить организации или предприятия (даже самые малые), которые не обладали бы современными средствами обработки и передачи данных. На различных носителях данных физические и юридические лица накапливают огромные объемы информации, которая представляет большую ценность для их владельцев. Процесс создания индустрии обработки и хранения информации, хотя и создавая объективные факторы для значительного увеличения эффективности процессов деятельности человека, породил множество сложных и крупномасштабных проблем. Одна из таких проблем – это обеспечение надежного сохранения и установления статуса применения информации, которая циркулирует и обрабатывается в распределенной информационной системе. Разработанный программный модуль

позволяет обеспечить целостность и конфиденциальность хранимой информации. Данный модуль - открытый по отношению к структурам, используемым при шифровании и осуществлении операций перестановок. Данное приложение находится на стадии тестирования.

Список литературы

- [1] Послание Президента Республики Казахстан Н. Назарбаева народу Казахстана // URL: <http://www.akorda.kz-ru-addresses-addresses-of-president-poslanie-prezidenta-respubliki-kazakhstan-n-nazarbaeva-narodu-kazahstana-10-anvarya-2018-g> (Дата обращения 10.09.2019).
- [2] Национальный доклад по науке// URL:<http://nauka-nanrk.kz-ru-assets-20.pdf> (Дата обращения 10.09.2019).
- [3] Количество инцидентов, связанных с атаками и угрозами информационной безопасности, сократилось в сравнении с прошлым годом на 23 процента.// URL: <http://www.zakon.kz-4985176-kolichestvo-incidentov-svyazannyh-s.html> (Дата обращения 21.09.2019).
- [4] *Соколин Д.Т., Тимохович А.С* Методы комплексного обеспечения безопасности SQL – сервера от атак типа SQL – инъекций// Academy, "Автоматика. Вычислительная техника". - 2017, Т. № 3. - С.10-60.
- [5] IBM Security Guardium// URL:<http://www.ibm.com-security-data-security-guardium> (Дата обращения 25.09.2019).
- [6] Компания Imperva//URL:<https://www.pacifica.kz-catalog-zashchita-bd-imperva-database-security> (Дата обращения 05.10.2019).
- [7] Imperva SecureSphere Data Security// URL:<https://www.imperva.com-resources-datasheets-DS-SecureSphere-Data-Security.pdf> (Дата обращения 10.10.2019).
- [8] McAfee DataCenter Security Suite for Databases // URL:<https://www.mcafee.com-enterprise-en-us-assets-data-sheets-ds-data-center-security-suite-databases.pdf> (Дата обращения 10.10.2019).
- [9] McAfee Vulnerability Manager for Databases// URL: <http://b2b-download.mcafee.com-products-evaluation-database-security-vulnerability-manager-for-databases-vmd-4.5.0-mcafee-vulnerability-manager-for-databases-product-guide-4-5.pdf> (Дата обращения 13.10.2019).
- [10] Trustwave AppDetectivePRO// URL:<https://www.trustwave.com-en-us-resources-library-documents-trustwave-appdetectivepro> (Дата обращения 15.10.2019).
- [11] Db Protect // URL:<https://www3.trustwave.com-software-database-security-db-protect-user-guide-649.pdf> (Дата обращения 15.10.2019).
- [12] FUDO SECURITY// URL:<https://www.fudosecurity.com> (Дата обращения 26.10.2019).
- [13] Base64 – принцип работы и собственная реализация// URL:<http://flash2048.com-post-base64> (Дата обращения 26.10.2019).
- [14] The Catch 22 of Base64: Attacker Dilemma from a Defender Point of View // URL:<https://www.imperva.com/blog/the-catch-22-of-base64-attacker-dilemma-from-a-defender-point-of-view/> (Дата обращения 26.10.2019).

References

- [1] "Poslanie Prezidenta Respubliki Kazakhstan N. Nazarbaeva narodu Kazahstana 10 yanvarya 2018 g."last accessed September 10, 2019., <http://www.akorda.kz-ru-addresses-addresses-of-president-poslanie-prezidenta-respubliki-kazakhstan-n-nazarbaeva-narodu-kazahstana-10-anvarya-2018-g>
- [2] "Nacionalnyj doklad po nauke."last accessed September 10, 2019, <http://nauka-nanrk.kz-ru-assets-20.pdf>
- [3] "Kolichestvo incidentov, svyazannyh s atakami i ugrozami informacionnoj bezopasnosti, sokratilos' v sravnenii s proshlym godom na 23 procenta."last accessed September 21, 2019, <https://www.zakon.kz-4985176-kolichestvo-incidentov-svyazannyh-s.html>
- [4] Sokolin D.T., Timohovich A.S., "Metody kompleksnogo obespecheniya bezopasnosti SQL – servera ot atak pita SQL – inekcij."Academy, "Avtomatika. Vychislitel'naya tekhnika"vol. 3, no 3 (2017): 10-60.

- [5] "IBM Security Guardium."last accessed September 25, 2019, <https://www.ibm.com-security/data-security-guardium>
- [6] "Kompaniya Imperva."last accessed October 10, 2019, <https://www.imperva.com/resources/datasheets/DS-SecureSphere-Data-Security.pdf>
- [7] "Imperva SecureSphere Data Security."last accessed October 10, 2019, <http://www.akorda.kz-ru-addresses-addresses-of-president-poslanie-prezidenta-respubliki-kazahstan-n-nazarbaeva-narodu-kazahstana-10-anvarya-2018-g>
- [8] "McAfee DataCenter Security Suite for Databases."last accessed October 10, 2019, <https://www.mcafee.com/-enterprise-en-us/assets/data-sheets/ds-data-center-security-suite-databases.pdf>
- [9] "McAfee Vulnerability Manager for Databases."last accessed October 13, 2019, <http://b2b-download.mcafee.com/products-evaluation-database-security-vulnerability-manager-for-databases-vmd-4.5.0-mcafee-vulnerability-manager-for-databases-product-guide-4-5.pdf>
- [10] "Trustwave AppDetectivePRO."last accessed October 15, 2019, <https://www.trustwave.com/en-us/resources/library-documents-trustwave-appdetectivepro>
- [11] "Db Protect."last accessed October 15, 2019, <https://www3.trustwave.com/software/Database-Security-Db-Protect/User-Guide-649.pdf>
- [12] "FUDO SECURITY."last accessed October 26, 2019, <https://www.fudosecurity.com>
- [13] "Base64 – princip raboty i sobstvennaya realizaciya."last accessed October 26, 2019, <http://flash2048.com/post-base64>
- [14] "The Catch 22 of Base64: Attacker Dilemma from a Defender Point of View."last accessed October 15, 2019, <https://www.imperva.com/blog/the-catch-22-of-base64-attacker-dilemma-from-a-defender-point-of-view>

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал «Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика» (в английской версии «Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science Series») принимаются набранные только в текстовом формате L^AT_EX2_ε на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat.dairbayeva@gmail.com (ответственный секретарь редколлегии, Даирбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы (название вуза, центра без сокращений), рабочий или моб. телефон, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета L^AT_EX2_ε или формат eps [см. п.7]. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 7 страниц.
Структура статьи.

Первая страница:

- 1) Первая строка - номер МРНТИ (IRSTI) (можно взять здесь: <http://grnti.ru/>), выравнивание - по левому краю, шрифт - полужирный.
- 2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 3) Автор(ы) статьи - Инициалы и фамилия, место работы (аффилиация), город, страна, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.
- 5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.

Последующая страница (новая):

Стандартные разделы статьи: **Введение, Обзор литературы, Материал и методы, Результаты и обсуждение, Заключение, Благодарности (если имеются) , Список литературы** (названия разделов не менять)

- 6) **Введение.** Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания

опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором аспекте.

7) **Обзор литературы.** В разделе обзор литературы должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

8) **Материал и методы.** Раздел должен состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала - один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

9) **Результаты и обсуждение.** В этом разделе приводятся анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) **Заключение.** Обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) **Благодарности** (если имеются). Например: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством науки и образования Республики Казахстан (грант «Наименование темы гранта», 2018-2020 годы).

12) **Список литературы/References.** (оба списка, если статья на русском или казахском. Если статья на английском, то только один список по стилю Чикаго). Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50% на английском языке. В случае наличия в списке литературы работ, представленных на кириллице, необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый - в оригинале, второй - романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) -> название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке (год в круглых скобках) -> страницы. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossiiskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4 (2011): 8-30. Список литературы представляется по мере цитирования, и ТОЛЬКО

В данном разделе необходимо учесть:

- Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

- Редакция вправе отказать от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ -CONTENS

1-бөлім	Раздел 1	Section 1
Математика	Математика	Mathematics
<i>Аймал Раса Гулам Хазрат, Аузерхан Г.С, Бейсенбай А.А.</i>		
Аналитическая природа функции Грина в окрестности простого полюса		3
<i>Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.</i>		
Построение характеристического определителя одного типа задач на собственные значения при интегральном возмущении двух краевых условий		12
<i>Ишкин Х.К., Набиуллина А.А.</i>		
Асимптотика решений уравнения Штурма-Лиувилля с мероморфным потенциалом		24
<i>Калыбай А.А., Каратаева Д.С.</i>		
Сильная неосцилляторность и осцилляторность полулинейного разностного уравнения второго порядка		32
<i>Кангужин Б.Е., Даирбаева Г., Мадибайұлы Ж.</i>		
Единственность восстановления граничных условий дифференциального оператора по набору спектров		44
<i>Космакова М.Т., Касымова Л.Ж.</i>		
К решению уравнения теплопроводности с дробной нагрузкой		50
<i>Нурпейис Ж., Таласбаева Ж.Т., Мажитова А.Д.</i>		
К геометрии интегрируемых распределений в E_n		63
 2-бөлім	 Раздел 2	 Section 2
 Механика	 Механика	 Mechanics
<i>Рамазанов М.И., Сейтмуратов А.Ж., Таймуратова Л.У., Медеубаев Н.К., Мукеева Г.И.</i>		
Приближённые уравнения колебаний цилиндрических оболочек переменной толщины		71
 3-бөлім	 Раздел 3	 Section 3
 Информатика	 Информатика	 Computer Science
<i>Uteiyeva N.K., Ismail E.E., Akhmetov D.F.,</i>		
Comparative analysis of models of quality of software tools		85
<i>Усатова О.А., Нысанбаева С.Е., Вуйциж В.</i>		
Исследование и разработка модели защиты базы данных информационной системы		95
К сведению авторов		107