

ISSN 1563 – 0277  
eISSN 2617 – 4871  
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

# ХАБАРШЫ

Математика, механика, информатика сериясы

---

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

# ВЕСТНИК

Серия математика, механика, информатика

---

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

# Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№ 1 (101)

Алматы  
«Қазақ университеті»  
2019

Зарегистрирован в Министерстве информации и коммуникаций Республики Казахстан, свидетельство № 16508-Ж от 04.05.2017 г. (Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.). Язык издания: казахский, русский, английский. Выходит 4 раза в год. Тематическая направленность: теоретическая и прикладная математика, механика, информатика.

### Редакционная коллегия

научный редактор – *Б.Е. Кангуржин, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби,*  
заместитель научного редактора – *Д.И. Борисов, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Россия,*  
ответственный секретарь – *Г.М. Даирбаева, к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.*

*Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., Университет международного бизнеса, Казахстан*

*Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Бектемесов М.А. – д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан*

*Жакебаев Д.Б. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия*

*Кыдырбекулы А.Б. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института аэродинамики, Германия*

*Мальшикин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия*

*Ракишева З.Б. – к.ф.-м.н., доцент, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания*

*Сагитов С.М. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Гетеборга, Швеция*

*Сукачев Ф.А. – профессор, академик АН Австралии, Университет Нового Южного Уэльса*

*Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия*

*Темляков В.Н. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Южной Каролины, США*

*Токмагамбетов Н.Е. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Шиничи Накасука – PhD доктор, профессор, Университет Токио, Япония*

### Научное издание

Вестник. Серия математика, механика, информатика, № 1(101) 2019.

Редактор – Г.М. Даирбаева. Компьютерная верстка – Г.М. Даирбаева

**ИБ N 12732**

Подписано в печать 29.03.2019 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 11 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ N 1960. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

IRSTI 27.31.17

**On a linear system of differential equations**

Aldibekov T.M., Al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, E-mail: tamash59@mail.ru,  
Aldazharova M.M., Scientific Research Institute of  
the al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, E-mail: a\_maira77@mail.ru

The linear systems of partial differential equations of the first order with the identical main parts is considered. Applying the well-known relation between a normal system of ordinary differential equations and a linear system of partial differential equations of the first order with the same main parts, the existence of integral basis of a linear inhomogeneous system of partial differential equations of the first order adjoining to some solution of the same linear inhomogeneous system of differential equations with partial derivatives of the first order is proved. A sign at which the nonlinear system of ordinary differential equations has a neighborhood such that any solution with initial values from it tends to zero is found. Using the equivalence of a linear system of partial differential equations of the first order with identical main parts to a linear differential equation with partial derivatives of the first order, the existence of integral basis of the adjoining to zero linear homogeneous system of partial differential equations of first order with nonlinear coefficients is shown.

**Key words:** equation, first order partial derivatives.

**Дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйесі туралы**

Алдибеков Т.М., Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, Электрондық пошта: tamash59@mail.ru  
Алдажарова М.М., Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университетінің Ғылыми зерттеу институты,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, Электрондық пошта: a\_maira77@mail.ru

Басты бөліктері бірдей бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйелері қарастырылады. Жай дифференциалдық теңдеулердің қалыпты жүйесі мен басты бөліктері бірдей бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйелері арасындағы айқын байланысты пайдалана отырып, сызықты біртекті емес бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің және осы бірінші ретті дербес туындылы сызықты біртекті емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің қайсібір шешіміне жалғасатын интегралды базис бар екені көрсетілген. Жай дифференциалдық теңдеулердің сызықты емес жүйесінің сондай маңайы болуының сипаты табылған, сол маңайдағы бастапқы мәндері алынған кез келген шешім нөлге ұмтылады. Бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің қалыпты жүйесі және басты бөліктері бірдей бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйелерінің эквиваленттігін пайдаланып, нөлге жалғасатын, коэффициенттері сызықты емес бірінші ретті дербес туындылы сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің итегралды базисының бар екені дәлелденген

**Түйін сөздер:** теңдеу, бірінші ретті дербес туындылар.

**Об одной линейной системе дифференциальных уравнений**

Алдибеков Т.М., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: tamash59@mail.ru  
Алдажарова М.М., Научно-исследовательский институт  
Казахского национального университета имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан,  
email: a\_maira77@mail.ru

Рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с одинаковыми главными частями. Применяя известную связь между нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений и линейной системой дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с одинаковыми главными частями доказано, что существует интегральный базис линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка примыкающей к некоторому решению этой же линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Найден признак, при котором, нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет такую окрестность, что любое решение с начальными значениями из этой окрестности стремится к нулю. Используя эквивалентность линейной системой дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с одинаковыми главными частями к линейному дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка доказано, что существует интегральный базис примыкающей к нулю линейной однородной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с нелинейными коэффициентами.

**Ключевые слова:** уравнение, частные производные первого порядка.

## 1 Introduction

The article deals with linear systems of partial differential equations of the first order with the identical main parts. Applying the well-known relation between a normal system of ordinary differential equations and a linear system of partial differential equations of the first order with the same main parts, the existence of integral basis of a linear inhomogeneous system of partial differential equations of the first order adjacent to some solution of the same linear inhomogeneous system of differential equations with partial derivatives of the first order is proved. A sign at which the nonlinear system of ordinary differential equations has a neighborhood such that any solution with initial values from it tends to zero is found. Using the equivalence of a linear system of partial differential equations of the first order with identical main parts to a linear differential equation with partial derivatives of the first order, the existence of integral basis of the adjacent to zero linear homogeneous system of partial differential equations of first order with nonlinear coefficients is shown. In (see [3]), the equivalence of a linear system of partial differential equations with identical main parts to a certain system of ordinary differential equations is shown. In the article, the approach differs from said above and the well-known simple relations between solutions of a linear homogeneous and linear inhomogeneous system of partial differential equations of the first order is used.

## 2 Literature review

The general theory is presented in the books [1-10]. The domain of existence of solutions was investigated by Kamke and data is contained in the reference books [11-12]. The domain of existence of solutions was investigated in the work [13-15]. Non-analytic equations are considered in the papers [16-18]. In work of Kruzhkov generalized solutions was considered [19]. Kovalevskaya's theorem was published in [20]. The problems in Lyapnov's second method shown in [21, 22]. An example of nonexistence of a solution constructed in [23-27]. The first-order partial differential equations considered in [28]. Questions related to the nonlinear system of ordinary differential equations are in [29, 30].

### 3 Materials and research methods

Let us consider a linear inhomogeneous system of partial differential equations of the first order

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \dots + \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k \frac{\partial u_1}{\partial y_n} = b_1(x)u_1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + \dots + \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k \frac{\partial u_2}{\partial y_n} = b_2(x)u_2 \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k \frac{\partial u_n}{\partial y_1} + \dots + \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k \frac{\partial u_n}{\partial y_n} = b_n(x)u_n; \end{array} \right. \quad (1)$$

where  $u_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, u_n(x, y_1, \dots, y_n)$  are unknown functions,  $p_{ik}(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, n$ ; and  $b_s(x)$ ,  $s = 1, \dots, n$ ; have continuous first-order partial derivatives on the set  $x_0 \leq x < +\infty$ ,  $-\infty < y_i < +\infty$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

**Theorem 1.** *If for some  $\mu > 0$  and for some positive continuous function  $\varphi(x)$ ,  $\int_{x_0}^x \varphi(s)ds \uparrow +\infty$ , on  $x \geq x_0$  next conditions are true:*

1) *inequalities are fulfilled:  $p_{k,k}(x) - p_{k+1,k+1}(x) \geq \mu\varphi(x)$ ,  $\mu > 0$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ ; при  $x \geq x_0$ ;*

2) *the following limits exist:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|p_{ik}(x)|}{\varphi(x)} = 0$ ,  $i \neq k$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;*

3)  *$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(x)} \int_{x_0}^x p_{kk}(s)ds = \beta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ; и  $\beta_1 < 0$ ;  $q(x) = \int_{x_0}^x \varphi(s)ds$ . then a linear inhomogeneous system of first-order partial differential equations (1) has an integral basis, which is adjacent to the solution of a linear inhomogeneous system. Proof. System (1) corresponds to a linear homogeneous system of partial differential equations of the first order*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \dots + \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k \frac{\partial u_1}{\partial y_n} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + \dots + \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k \frac{\partial u_2}{\partial y_n} = 0 \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k \frac{\partial u_n}{\partial y_1} + \dots + \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k \frac{\partial u_n}{\partial y_n} = 0; \end{array} \right. \quad (2)$$

Obviously, the linear homogeneous system (2) is equivalent to a linear partial differential equation of the first order

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k \frac{\partial u}{\partial y_1} + \dots + \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \quad (3)$$

The characteristic system of equation (3) is the following linear system

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^n p_{1k}(t)y_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

due to the condition, the linear system (4) has  $n$  linearly independent solutions

$$y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}, \quad k = 1, \dots, n;$$

which satisfy equalities

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{y_{ik}}{y_{kk}} \right| = 0, \quad i \neq k; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{\varphi(x)} \frac{y'_{kk}}{y_{kk}} - \frac{p_{kk}(x)}{\varphi(x)} \right| = 0;$$

This implies that for any  $\varepsilon > 0$  there exists a  $T \in I$  such that for any  $x > T$ ,  $k = 1, \dots, n$ ; there are inequalities

$$|y_{kk}(x_0)| e^{\int_{x_0}^x p_{kk}(t) dt + \varepsilon q(x)} \leq \|\bar{y}_k(x)\| \leq n |y_{kk}(x_0)| e^{\int_{x_0}^x p_{kk}(t) dt + \varepsilon q(x)}$$

$$\bar{y}_k = \text{colon}[y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}], \quad k = 1, \dots, n$$

it implies

$$\frac{1}{q(x)} \int_{x_0}^x p_{kk}(t) dt - \varepsilon \leq \frac{1}{q(x)} \ln \|\bar{y}_k(x)\| \leq \frac{1}{q(x)} \int_{x_0}^x p_{kk}(t) dt + \varepsilon;$$

Passing to the limit as  $x \rightarrow +\infty$ , by virtue of condition 3) we have

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(x)} \ln \|\bar{y}_k(x)\| = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

and besides

$$\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_n.$$

Therefore,  $\bar{y}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ; forms the normal basis of the linear system (4) and  $\beta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ; they are generalized exponents of the linear system (4) with respect to  $q(x)$ ; moreover, they are exact generalized exponents of the linear system (4). Due to the condition  $\beta_1 < 0$ , we find that the generalized exponents of the linear system (4) are negative. Consequently, any solution of the linear system (4) tends to zero as  $x \rightarrow +\infty$ . Take the general solution of the linear system (4) of the Cauchy form

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \\ \dots\dots\dots \\ y_n = \varphi_n(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \end{cases} \quad (5)$$

where the initial values  $y_1^0, \dots, y_n^0$  are arbitrary real numbers. There is equality

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (6)$$

solving (5) with respect to  $y_1^0, \dots, y_n^0$ , we obtain an integral basis

$$\begin{cases} \psi_1(x, x_0, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \psi_n(x, x_0, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

of linear equation (3). Consequently

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x, x_0, y_1, \dots, y_n) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \psi_n(x, x_0, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

the integral basis of the linear homogeneous system (2), which by virtue of (6) is adjacent to zero in the parameter  $x_0$ , as  $x_0 \rightarrow +\infty$ . It is easily verified that

$$\begin{pmatrix} u_1^0 e^{\int_{x_0}^x b_1(\tau) d\tau} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ u_n^0 e^{\int_{x_0}^x b_n(\tau) d\tau} \end{pmatrix} \quad (7)$$

is a special solution of the linear inhomogeneous system (1). Then

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x, x_0, y_1, \dots, y_n) + u_1^0 e^{\int_{x_0}^x b_1(\tau) d\tau} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \psi_n(x, x_0, y_1, \dots, y_n) + u_n^0 e^{\int_{x_0}^x b_n(\tau) d\tau} \end{pmatrix}$$

forms the integral basis of the linear inhomogeneous system (1), which is adjacent to the solution (7) of the linear inhomogeneous system.

Theorem 1 is proved.

A linear homogeneous system of first-order partial differential equations is considered.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left( \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k + g_1(x, y_1, \dots, y_n) \right) \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \dots + \\ \quad + \left( \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k + g_n(x, y_1, \dots, y_n) \right) \frac{\partial u_1}{\partial y_n} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \left( \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k + g_1(x, y_1, \dots, y_n) \right) \frac{\partial u_2}{\partial y_1} + \dots + \\ \quad + \left( \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k + g_n(x, y_1, \dots, y_n) \right) \frac{\partial u_2}{\partial y_n} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \left( \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k + g_1(x, y_1, \dots, y_n) \right) \frac{\partial u_n}{\partial y_1} + \dots + \\ \quad + \left( \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k + g_n(x, y_1, \dots, y_n) \right) \frac{\partial u_n}{\partial y_n} = 0; \end{array} \right. \quad (8)$$

where  $u_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, u_n(x, y_1, \dots, y_n)$  are unknown functions.  $p_{ik}(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, n$ ; are continuous in  $I \equiv [x_0, +\infty)$ , functions  $g_i(x, y_1, \dots, y_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; are continuous on  $x$  in the interval  $I$ , and have continuous partial derivatives  $y_s$ ,  $s = 1, \dots, n$ ; in the

domain  $\|y\| = \left( \sum_{s=1}^n y_s^2 \right)^{\frac{1}{2}} < h$ ,  $y = \text{colon} [y_1, \dots, y_n]$ ,  $g_i(x, 0, \dots, 0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

**Theorem 2.** *If for some  $\mu > 0$  and for some positive continuous function  $\varphi(x)$ ,  $\int_{x_0}^x \varphi(s) ds \uparrow +\infty$ , on  $x \geq x_0$  next conditions are true:*

1) *inequalities are fulfilled:  $p_{k,k}(x) - p_{k+1,k+1}(x) \geq \mu\varphi(x)$ ,  $\mu > 0$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ ; при  $x \geq x_0$ ;*

2) *the following limits exist:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p_{ik}(x)}{\varphi(x)} = 0$ ,  $i \neq k$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;*

3)  *$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(x)} \int_{x_0}^x p_{kk}(s) ds = \beta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ; and  $\beta_1 < 0$ ;  $q(x) = \int_{x_0}^x \varphi(s) ds$ .*

4)  *$0 < \mu < |\beta_1|$ ,  $m > 1$  и  $0 < \varepsilon < (m-1)\mu \int_{x_0}^x e^{[\varepsilon + \mu(1-m)][q(s) - q(x_0)]} ds < \infty$  are fulfilled;*

5) *for vector function  $g(x, y) = \text{colon}[g_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(x, y_1, \dots, y_n)]$  the inequality is true*

$$\|g(x, y)\| \leq K\|y\|^m, \quad K > 0, \quad m > 1;$$

where

$$\|g(x, y)\| = \left( \sum_{i=1}^n g_i^2(x, y_1, \dots, y_n) \right)^{\frac{1}{2}};$$

then a linear homogeneous system (8) has an integral basis, which is adjacent to zero.

Proof. Linear homogeneous system (8) is equivalent to a linear first-order partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left( \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k + g_1(x, y_1, \dots, y_n) \right) \frac{\partial u}{\partial y_1} + \dots + \left( \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k + g_n(x, y_1, \dots, y_n) \right) \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \quad (9)$$

The characteristic system of equation (9) is the following nonlinear system of differential equations.

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(x)y_k + g_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

The corresponding linear homogeneous system of differential equations is

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(x)y_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

In the proof of Theorem 1 it was established that linear system (11) has exact generalized exponents  $\beta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ; with respect to  $q(x)$ . There are equality

$$\sum_{k=1}^n \beta_k = \sum_{k=1}^n \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(x)} \int_{x_0}^x p_{kk}(s) ds = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(x)} \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^n p_{kk}(s) ds$$



Consequently, linear system (11) is a generalized regular linear system with respect to  $q(x)$ . Let

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \quad (12)$$

is a vector matrix view of the linear system (11) and

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + g(x, y) \quad (13)$$

of nonlinear system (11). Further next lemma will be used: **Lemma 1.** *If the conditions of Theorem 2 are satisfied, then there exists a neighborhood of the point  $y$  and any solution of the nonlinear system of differential equations (13) with initial values from this neighborhood tends to zero as  $x \rightarrow +\infty$ .*

Proof. Lets take  $\alpha > 0$  from 4th condition, i.e.  $0 < \alpha < \beta_1$ , where  $\beta_1$  is senior generalized exponent with respect to  $q(x)$  of the system (12) and in the system (13) irreplace

$$y = ue^{-\alpha[q(x)-q(x_0)]} \quad (14)$$

where  $u(x)$  is new unknown function. Furthermore

$$\frac{du}{dx} = B(x)u + \nu(x, u) \quad (15)$$

where  $B(x) = P(x) + \alpha \frac{dq}{dx} E$ ,  $\nu(x, u) = e^{\alpha[q(x)-q(x_0)]} g(x, ue^{-\alpha[q(x)-q(x_0)]})$ . Vector function  $\nu(x, u)$  is continuous on  $x \in I$  and has continupus partials on  $u$  in the domain

$$\|u\| < he^{\alpha[q(x)-q(x_0)]}$$

Replacing in (14), due to choosing  $\alpha$ , preserves the negativity of the senior generalized exponent and generalized correctness, therefore the linear system of differential equations

$$\frac{du}{dx} = B(x)u \quad (16)$$

is generalized regular and has negative generalized exponents with respect to  $q(x)$ . The nonlinear system of differential equations (15) with the initial condition  $u(x_0) = y(x_0)$  is equivalent to an integral equation

$$u(x) = H(x)u(x_0) + \int_{x_0}^x K(x, s)\nu(s, u)ds \quad (17)$$

where  $K(x, s) = H(x)H^{-1}(s)$  is a Cauchy matrix,  $H(x)$  is a normalized fundamental matrix of the linear system (16).

Due to the negativeness of the generalized exponents of the linear system (16), there is an estimate

$$\|H(x)\| < C_1, \quad x \in I, \quad C_1 > 1 \quad (18)$$

and for  $\varepsilon \in (0, (m-1)\alpha)$  (from condition 4), due to the negativity of the generalized exponents and regarding the generalized correctness of the linear system (16), the next estimate is true:

$$\|K(x, s)\| < C_2 e^{\alpha[q(s)-q(x_0)]}, \quad x \geq s \geq x_0, \quad C_2 > 1. \quad (19)$$

For  $\nu(x, u)$  in the nonlinear system (15) the estimate holds:

$$\|\nu(x, u)\| \leq K e^{\alpha(1-m)[q(s)-q(x_0)]} \|u(x)\|^m \quad (20)$$

Estimating now by the norm in the interval  $x_0 \leq x < x_0 + l$  of the existence of solutions of the integral equation (17), by virtue of (18), (19), (20), we will have

$$\|u(x)\| \leq C_1 \|u(x_0)\| \int_{x_0}^x C_2 K e^{\alpha(1-m)[q(s)-q(x_0)]} \|u(x)\|^m ds. \quad (21)$$

From inequality (21), using the Bihari Lemma ([29], p. 112), we find

$$\|u(x)\| \leq \frac{C_1 \|u(x_0)\|}{\left[1 - (m-1)C_1^{m-1} \|u(x_0)\|^{m-1} C_2 K \int_{x_0}^x C_2 K e^{\alpha(1-m)[q(s)-q(x_0)]} ds\right]^{m-1}} \quad (22)$$

only if

$$(m-1)C_1^{m-1} \|u(x_0)\|^{m-1} C_2 K \int_{x_0}^x C_2 K e^{\alpha(1-m)[q(s)-q(x_0)]} ds < 1 \quad (23)$$

Since, due to condition 4), the inequality holds:

$$\int_{x_0}^x e^{\alpha(1-m)[q(s)-q(x_0)]} ds < \infty;$$

then inequality (23) can always be considered fulfilled by choosing a neighborhood of the initial values  $u(x_0) = y(x_0)$ . From formula (22) it follows that if  $\|u(x_0)$  is sufficiently small, then for any  $x \in [x_0, x_0 + l)$  the point  $u(x)$  is the interior point of the domain

$$Z = \left\{ x_0 \leq x < \infty, \|u\| \leq \frac{h}{2} < h \right\}$$

and, therefore, the solution  $u(x)$  is infinitely continued to the right, i.e. we can set  $l = \infty$ . Thus, in the infinite interval  $x_0 \leq x < \infty$ , the inequality

$$\|u\| \leq D \|u(x_0)\| < \frac{h}{2} \quad (24)$$

where  $D$  is some constant depending on the initial moment  $x_0$ . Returning to the variable  $y$ , by virtue of formula (14), when  $x_0 \leq x < \infty$  and  $\|y(x_0)\| < \delta < h$ , we will have

$$\|y(x)\| \leq D \|y(x_0)\| e^{\alpha[q(x)-q(x_0)]} \quad (25)$$

where the constant  $\delta$  is small enough. It follows that any solution of the nonlinear system of differential equations (13) with initial values from  $\|y(x_0)\| < \delta$  neighborhoods tends to zero as  $x \rightarrow +\infty$ .

Lemma 1 is proved. Now, by Lemma 1, we take the general solution of the characteristic system (10) of the Cauchy form.

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \\ \dots\dots\dots \\ y_n = y_n(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \end{cases} \quad (26)$$

where  $y_i(x_0) = y_i^0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $\sqrt{(y_1^0)^2 + \dots + (y_n^0)^2} < \delta$ . Solving (26) with respect to  $y_1^0, \dots, y_n^0$ , we obtain an integral basis

$$\begin{cases} u_1(x, x_0, y_1, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ u_n(x, x_0, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

of the equation (9). Consequently

$$\begin{pmatrix} u_1(x, x_0, y_1, \dots, y_n) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ u_n(x, x_0, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

integral basis of the linear homogeneous system (8), which is adjacent to zero in the parameter  $x_0$ , as  $x_0 \rightarrow +\infty$ . Theorem 2 is proved.

## 4 Results and discussion

The paper considers linear systems of first-order partial differential equations. Existing of integral basis of a linear system of partial differential equations of the first order adjoining to some solution was proved. In the proof established a sign, which became interesting, because a nonlinear system of ordinary differential equations has a solution tending to zero. The existence of an integral basis of an adjacent to zero linear homogeneous system of first-order partial differential equations with nonlinear coefficients is proved.

## 5 Conclusion

Exists of the integral basis of a linear system of partial differential equations of the first order adjoining to some solution was proved. A sign at which a nonlinear system of ordinary differential equations has a solution tending to zero was established. It is proved that there exists an integral basis of an adjacent to zero linear homogeneous system of first-order partial differential equations with nonlinear coefficients.

## 6 Acknowledgment

The work was carried out with the support of grant financing of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan for 2018-2020 y., on the theme "The investigation of the asymptotic stability of the solution and the development of asymptotic characteristics of a system of first-order partial differential equations".

## References

- [1] Courant R., *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*. [Partial equations]. (M: Mir, 1964): 845
- [2] Mizohata S.S., *Teoriya uravnenii s chastnymi proizvodnymi*. [Partial equations theory]. (M.: Mir, 1977): 504
- [3] Smirnov V., *Kurs vysshei matematiki*. [Higher math course]. V.4, 2nd part, (M.: Nauka, 1981): 551
- [4] Bers L., John D. and Shechter M., *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*. [Partial equations]. (M.: Mir, 1966): 352
- [5] Triкоми F., *Lektsii po uravneniyam v chastnykh proizvodnykh*. [Lectures in partial equations]. (IL., 1957): 443
- [6] Hartman P., *Obyknovennye differentsialnye uravneniya*. [Ordinary differential equations]. (M.:Mir, 1970): 719
- [7] Petrovsky I.G., *Lektsii ob uravneniyah s chastnymi proizvodnymi*. [Lectures in partial equations]. 3rd ed. (M., 1961): 400
- [8] Petrovsky I.G., *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsialnykh uravnenii*. [Lectures in ordinary differential equations]. 6th ed., (M., 1970): 473
- [9] Elsgolts L., *Differentsialnye uravneniya*. [Differential equations]. (M., 2013): 312
- [10] Yanenko N.N. and Rojdestvensky B.L., *Sistemy kvazilineinykh uravnenii i ih prilozhenie k gazovoi dinamike*. [Systems of quazilinear differential equations and their application to gas dynamics]. VI.7-9, (M., 1978): 676
- [11] Kamke E., *Spravochnik po differentsialnym uravneniyam v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka*. [Reference book in first-order partial differential equations]. (M.: Nauka, 1966): 260
- [12] Massera H.L., *Lineinye differentsialnye i funktsionalnye prostranstva*. [Linear differential and functional spaces] ( M.:Mir, 1970): 456
- [13] Wazewski T., "Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre" [On the appreciation of the domain of existence of the integrals of the equation with partial derivatives of the first order], *Ann. Soc. Polon. Math.* VI.9, No.14, (1935): 149-177
- [14] Wazewski T., "Ueber die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung" [On the conditions of existence of the integrals of partial differential equations of the first order], *Math. Zeit.*, VI.7-9 No.43. (1938): 522-532
- [15] Gelfand I., *Nekotorye zadachi teorii kvazilineinykh uravnenii* [Some problems of quazilinear equations theory], No. 14(2). (UMN, 1959): 87-158.
- [16] Gross W., "Bemerkung zum Existenzbeweise bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung" [Remark on proof of existence in the first order partial differential equations], *S.-B.K. Akad. Wiss. Wien, Kl. Math. Nat.*, VI.7-9, (1914): 2233-2251
- [17] Digel E., "Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung" [On the Conditions of Existence of the Integrals of Partial Differential Equations of the First Order], *Math Z*, (1938): 445-451
- [18] Caratheodory C., "Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung" [Variational calculus and partial differential equations of first order], VI 6, *Leipzig und Berlin:B. G. Teubner*, (1935): 7-9
- [19] Kruzhkov S.N., "Kvazilineinye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi" [First order quazilinear equations with many independent variables], 81(2). *Mat. sbornik*, (1970): 228-255.
- [20] Kovalevskaya S., "Zusatze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung uber die Gestalt der Saturnsringe" [Additions and Remarks on Laplace's Investigation of the Shape of Saturn's Rings], *Astronomische Nachrichten*, CXI. (1885): 18-21

- 
- [21] Zubov V.I., *Voprosy teorii vtorogo metoda Lyapunova postroeniya obsh'ego v oblasti asimptoticheskoi ustoychivosti*. [General asymptotically stable domain building problems of the second method in Lyapunov theory] Vol. XIX, 2nd edition (PMM., 1955): 25-31
- [22] Frobenius G., "Ueber das Pfaffsche Problem", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, (1877): 230-315
- [23] Perron O., "Ueber diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten" [On the integrals of linear differential equations which are determined at an uncertainty point], *Math. Ann.*, VI.13, No 70. (1911): 1-32
- [24] Plis A., "Characteristics of nonlinear partial differential equation", *Bull. Acad. Polon. Sci.*, No 2. (1954): 419-422
- [25] Hartman P., "On Jacobi bracket", *Amer. J. Math.*, (1957): 187-189
- [26] Hormander L., "On the uniqueness of the Cauchy problem I", *Math. Scand.*, No. 6. (1958): 213-225.
- [27] Hormander L., "On the uniqueness of the Cauchy problem II", *Math. Scand.*, No. 7. (1959): 177-190.
- [28] Aldibekov T.M., Aldazharova M.M., "On a first-order partial differential equation", *Veszprem Conference on Differential and Difference Equations and Applications. Program and Abstracts. Faculty of Information Technology University of Pannonia Veszprem, Hungary. July 2 - July 5, (2018): 34*
- [29] Demidovich B.P., *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoychivosti* [Lectures on math. stability theory]. (M: 1967): 472
- [30] Aldibekov T.M., Aldazharova M.M., "On the Stability by the First Approximation of Lyapunov Characteristic Exponents in Critical Cases", *Differential Equations*, Vol. 50, No. 10. (2014): 1-5

МРНТИ 27.29.19

### Функция Грина задачи Дирихле дифференциального оператора на графе - звезде при $m$

Аймал Раса Гулам Хазрат, Университет образования Шахида Устад Раббани, г. Кабул, Афганистан, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: aimal.rasa14@gmail.com  
Аузерхан Г.С., Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: auzerkhanova@gmail.com  
Коныркулжаева М. Н., Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: maralkulzha@gmail.com

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Задачи для дифференциальных операторов на графах в настоящее время активно изучаются математиками и имеют приложения в квантовой механике, органической химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания. Граф представляет собой структуру, состоящую из «абстрактных» отрезков и вершин, примыкание которых друг к другу описывается некоторым отношением. Для определения оператора на заданном графе необходимо выделить множество граничных вершин. Вершины не являющиеся граничными называются внутренними вершинами. Дифференциальный оператор на заданном графе определяется не только заданными дифференциальными выражениями на дугах, но и условиями типа Кирхгофа во внутренних вершинах графа. В данной статье решена задача Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Также в этой работе представлено функция Грина дифференциального оператора на графе-звезде. Вопросы из спектральной теории, как построение функции Грина и разложение по собственным функциям для моделей из соединенных стержней мало изучены. Спектральный анализ дифференциальных операторов на графах является основным математическим аппаратом при решении современных проблем квантовой механики.

**Ключевые слова:** ориентированный граф, вершины графа, условия Кирхгофа, колебания упругих сетей, задача Дирихле, разложение по собственным функциям.

### Жұлдыз пішінді граф бойындағы дифференциалдық оператордың Грин функциясы $m$ үшін

Аймал Раса Гулам Хазрат, Шахид Устад Раббани атындағы Білім беру университеті, Кабул қ, Афганистан, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: aimal.rasa14@gmail.com  
Аузерхан Г.С, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: auzerkhanova@gmail.com  
Коныркулжаева Марал. Н., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: maralkulzha@gmail.com

Бұл жұмыста стержендік құрылымды тербелмелі жүйелердің моделі болып табылатын екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі зерттеледі. Графтағы дифференциалдық операторларға қойылған есептерді қазіргі уақытта математиктер белсене зерттеуде және кванттық механика, органикалық механика, нанотехнология, толқындар теориясы мен ғылымның басқа да салаларында қолданыс табады. Граф-төбелер деп аталатын шектеулі нүктелердің жиынтығы; төбелердің кейбіреулері графтың қырлары деп аталатын сызықтарымен байланысқан болады. Граф бойында төбелерді анықтау үшін шекаралық төбелер жиынын белгілеу қажет. Шекаралық төбелерден өзге ішкі төбелер бар. Берілген граф бойындағы дифференциалдық оператор дифференциалдық өрнекпен және ішкі төбелерде анықталған Кирхгоф шарттарымен анықталады. Бұл мақалада жұлдыз тәрізді бағанда дифференциалдық оператор үшін Дирихле есебі шешілді. Біз ішкі шыңдарда желімдеудің стандартты шарттарын және шекаралық шыңдарда Дирихленің шеттік шарттарын пайдаландық. Сондай-ақ, бұл жұмыста дифференциалдық оператордың Грин функциясы ұсынылған. Спектрлік теориядан алынған сұрақтар, Грин функциясын құру және құрама стрейнжендер модельдер үшін өз функциялары бойынша жіктеу сияқты аз зерттелген. Графтағы дифференциалдық операторлардың спектралдық талдауы кванттық механиканың қазіргі мәселелерін шешудегі негізгі математикалық аппарат болып табылады. **Түйін сөздер:** бағытталған граф, графтың төбелері, Кирхгоф шарты, серпімді желілердің тербелістері, Дирихле есебі, меншікті функциялар бойынша жіктеу.

**Green's function for differential operator on a star shaped graph for  $m$**

Ghulam Hazrat Aimal Rasa, Shaheed Ustad Rabbani University of Education  
Kabul, Afganistan al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

E-mail: aimal.rasa14@gmail.com

Auzerkhan G.S., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

E-mail: auzerkhanova@gmail.com

Konyrkulzhayeva M.N., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

E-mail: maralkulzha@gmail.com

In this paper, we investigate a system of second-order differential equations, which is a model of oscillatory systems with a rod structure. Problems for differential operators on graphs are currently being actively studied by mathematicians and have applications in quantum mechanics, organic chemistry, nanotechnology, the theory of waveguides and other fields of natural science. A graph is a structure consisting of "abstract" segments and vertices whose adjoining to each other is described by a certain relation. To define an operator on a given graph, it is necessary to select a set of boundary vertices. Vertices that are not boundary are called internal vertices. The differential operator on a given graph is determined not only by given differential expressions on arcs, but also by conditions of the Kirchhoff type at the internal vertices of the graph. This article solved the Dirichlet problem for a differential operator on a star graph. We used the standard gluing conditions at inner vertices and Dirichlet boundary conditions at the boundary vertices. Also in this paper, the subtraction of Green's function of a differential operator on a star shaped graph is presented. Questions from spectral theory, such as the construction of the Green function and the expansion in eigenfunctions for models from connected rods, have been little studied. Spectral analysis of differential operators on graphs is the main mathematical apparatus in solving modern problems of quantum mechanics.

**Key words:** oriented graph, vertices of graph, Kirchhoff condition, vibrations of elastic networks, Dirichlet problem, extension by eigenfunctions.

## 1 Введение

В работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией.

Основное внимание в этой статье уделяется спектру дифференциальных операторов второго порядка на графах. Различные функциональные пространства на графах



определены, и мы определяем, с точки зрения как дифференциальных систем, так и вышеупомянутых функциональных пространств, краевые задачи на графах. Показано, что краевая задача на графе спектрально эквивалентна системе с разделенным граничным условием. Основная цель этой статьи - решить задачу Дирихле и построить его функцию Грина для звездообразного графа.

Граф-звезда - это связанный граф, в котором не более одной вершины имеет степень больше единицы. Вершина, имеющая степень больше единицы, называется внутренней вершиной граф-звезды. Вершины, не являющиеся внутренними, называются граничными вершинами. Пусть задан ориентированный граф-звезда  $G = \{\nu, \varepsilon\}$  где  $\nu, \varepsilon$  - два множества. Элементы множества  $\nu$  - называются вершинами графа, через  $\varepsilon$  обозначено множество его дуг. Количество дуг обозначим через  $m$ . Пусть  $\Gamma = \{0\}$  - внутренняя вершина,  $\Gamma = \{1, \dots, m\}$  - граничные вершины. При  $j = \overline{1, m}$  исходящую из вершины  $j$  дугу обозначим  $e_j$ . В дальнейшем считаем, что длина каждой дуге  $|e_j| = a_j$ . На каждой дуге  $e_j$  введем переменную  $x_j \in [0, a_j]$ . Для удобства обозначим значением  $x_j = a_j$  соответствующую граничную вершину дуги  $e_j$ , а значением  $x_j = 0$  внутреннюю вершину. В предлагаемой работе исследуются свойства функций Грина краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на графе-звезде.

## 2 Обзор литературы

В последние 25-30 лет теория дифференциальных уравнений и краевых задач на геометрических графах (пространственных сетях) интенсивно развивается, тому свидетельствуют многочисленные научные работы. Начало исследований было положено в работах (Б.С. Павлов [1], Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин ([2], [3]) и др. ) и зарубежных (J. von Below ([4], [5]), G. Lumer [6], S. Nicaise [7]) и других [10-20] математиков и касалось задач, описывающих различные модели: диффузии, колебаний упругих сеток, распространения нервного импульса и др. Работы зарубежных математиков, в основном, посвящены обоснованию разрешимости краевых задач на графах, исследованию структуры спектра этих задач, асимптотики спектра, получению оценок резольвенты. В настоящее время наиболее активные исследования проводятся творческой группой Ю.В.Покорного (А.В. Боровских, К.П. Лазарев, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, С.А. Шабров), Б.Е.Кангужина (Л.К.Жалсарбаева), Н.П. Бондаренко, основные результаты которых отражены в [8,9,10] (см. также библиографию в [8,9,10]). В частности, в работе [9] исследована функция Грина для задачи Дирихле на графе-звезде и приведены теоремы о разложениях.

## 3 Материал и методы

Более подробно остановимся на результатах, касающиеся решения задачи Дирихле для дифференциальных операторов второго порядка на многообразиях типа сети. В данной работе для полного описания и решения задачи Дирихле для дифференциального оператора второго порядка на графе-звезде использован синтетический подход.



#### 4 Определение дифференциального оператора на графе-звезде

В дальнейшем полезно ввести пространство

$$L_2(G) = \prod_{e \in \varepsilon} L_2(e)$$

с элементами

$$\vec{Y}(\vec{x}) = [y_e(x_e), e \in \varepsilon]^T$$

(где  $\vec{x} = x_e, e \in \varepsilon$  и  $\prod_{e \in \varepsilon}$  -декартово произведение подпространств) и с конечной нормой

$$\|\vec{Y}\|_{L_2(G)} = \sqrt{\sum_{e \in \varepsilon} \int_e |y_e(x_e)|^2 dx_e}.$$

Точно также стандартным образом вводится пространство

$$W_2^2(G) = \prod_{e \in \varepsilon} W_2^2(e).$$

Введем множество функций  $D(\Lambda) \subset W_2^2(G)$ , элементы которых в каждой внутренней вершине удовлетворяют условиям Кирхгофа[1].

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = y_j(0), j = 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^m y_j'(0) = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

В электрических сетях они выражают закон Кирхгофа, при колебаниях упругих сетей - баланс напряжений. Рассмотрим дифференциальный оператор  $\Lambda$ , задаваемый линейными дифференциальными выражениями

$$-y_j''(x_j) = \lambda y_j(x_j) + f_j(x_j), e_j \in \varepsilon, 0 < x_j < a_j, j = 1, \dots, m. \quad (2)$$

с областью определения  $D(\Lambda)$ .  $\lambda$  - спектральный параметр,  $\{f_j(x_j), 0 < x_j < a_j\}$  - плотность распределения внешней силы. В данной работе показано решение задачи (1), (2) с условиями Дирихле в граничных вершинах

$$y_1(a_1) = \dots = y_m(a_m) = 0. \quad (3)$$

##### 4.1 Построение функции Грина задачи Дирихле

В настоящем пункте изучается вопрос о существовании функции Грина для задачи Дирихле

$$-y''(x) = \lambda y(x) + F(x), 0 < x < a, \quad (4)$$

$$y(a) = 0, y(0) = 0. \quad (5)$$

Под функцией Грина мы понимаем матричную функцию двух переменных  $G(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$  при каждой  $F(\cdot)$  непрерывной на графе  $G$  и заданную формулой

$$y(\vec{x}, \lambda) = \int_G G(\vec{x}, \vec{t}, \lambda) F(t) dt.$$

Лемма 1 Решение задачи (4), (5) может быть представлено в виде

$$y(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s_a(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} F(t) dt + \int_x^a \frac{s_a(t, \lambda) s_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} F(t) dt, \quad (6)$$

где  $D(t, \lambda) = -s'_a(t, \lambda) s_0(t, \lambda) + s_a(t, \lambda) s'_0(t, \lambda)$  и функций  $s_0(x, \lambda)$  и  $s_a(x, \lambda)$  являются линейно независимыми решениями однородной задачи Коши

$$\begin{aligned} -s''_0(x) &= \lambda s_0(x), 0 < x < a, s_0(0, \lambda), s'_0(0, \lambda) = 1, \\ -s''_a(x) &= \lambda s_a(x), 0 < x < a, s_a(0, \lambda), s'_a(0, \lambda) = 1. \end{aligned}$$

Доказательство. Покажем, что правая часть выражения (6) является решением задачи (4), (5). Сначала вычислим первую производную

$$y'(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s'_a(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} F(t) dt + \int_x^a \frac{s_a(t, \lambda) s'_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} F(t) dt,$$

Теперь вычислим вторую производную

$$y''(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s''_a(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} F(t) dt + \int_x^a \frac{s_a(t, \lambda) s''_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} F(t) dt - F(x).$$

Так как

$$s''_0(x, \lambda) = -\lambda s_0(x, \lambda), s''_a(x, \lambda) = -\lambda s_a(x, \lambda) \text{ тогда с учетом (6). Получим}$$

$$y''(x, \lambda) = -\lambda \left( \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s_a(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} F(t) dt + \int_x^a \frac{s_a(t, \lambda) s_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} F(t) dt - F(x) \right) = -\lambda y(x, \lambda) - F(x).$$

отсюда следует соотношение (4). Теперь проверим выполнение граничных условий (5). Значение  $x = 0$  подставляя в (6), получим

$$y(0, \lambda) = \int_x^a \frac{s_a(t, \lambda) s_0(0, \lambda)}{D(t, \lambda)} F(t) dt = 0,$$

так как  $s_0(0, \lambda) = 0$ . Значение  $x = a$  подставляя в (6), получим

$$y(a, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s_a(a, \lambda)}{D(t, \lambda)} F(t) dt = 0,$$

так как  $s_a(a, \lambda) = 0$ . Лемма 1 доказана.

Из Леммы 1 следует следующая теорема.

### 5 Функция Грина задачи Дирихле (1),(2),(3)

Мы решаем задачи дифференциального оператора на графе-звезде при  $m$

$$\left\{ \begin{array}{l} -y_1''(x_1) = \lambda y_1(x_1) + f_1(x_1); x_1 \in e_1 \\ -y_2''(x_2) = \lambda y_2(x_2) + f_2(x_2); x_2 \in e_2 \\ \dots\dots\dots \\ -y_m''(x_m) = \lambda y_m(x_m) + f_m(x_m); x_m \in e_m \end{array} \right.$$

В первом уравнение  $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots, y_m(x_m)$  неизвестно, известны функций  $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_m(x_m), \lambda$ . Также условия Дирихле:  $y_1(a_1) = y_2(a_2) = \dots = y_m(a_m) = 0$  и условия Кирхгофа:

$$y_1(0) = y_2(0) = \dots = y_m(0); \sum_{k=1}^m y_k'(0) = 0$$

**Теорема 1.** Если  $f_1(x_1) \neq 0, \dots, f_m(x_m) \neq 0, \lambda$ , то решение задачи (1),(2),(3) может быть записано в виде

$$y_j(x_j) = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1, k \neq j}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} f_k(t_k) dt_k + \\ + \int_0^{x_j} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_j} \left( \sum_{k=1, k \neq j}^m \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \right. \\ \left. + \cos \sqrt{\lambda} t_j \right) f_j(t_j) dt_j + \\ + \int_{x_j}^{a_j} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_j - t_j)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_j} \left( \sum_{k=1, k \neq j}^m \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \right. \\ \left. + \cos \sqrt{\lambda} x_j \right) f_j(t_j) dt_j \end{array} \right\},$$

Это теорема общее решение линейного дифференциального уравнения и задачи при  $m$  имеет вид

**Доказательство** Нам надо показать теорему 1, сначала вычислим первую производную

$$y'_j(x_j) = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1, k \neq j}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k) - \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k \sin \sqrt{\lambda} a_j} f_k(t_k) dt_k - \\ & - \int_0^{x_j} \frac{\cos \sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} \left( \sum_{k=1, k \neq j}^m \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_j \sin \sqrt{\lambda} t_j + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t_j \right) f_j(t_j) dt_j + \\ & + \int_{x_j}^{a_j} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_j - t_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} \left( \sum_{k=1, k \neq j}^m \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k - \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_j \right) f_j(t_j) dt_j \end{aligned} \right\},$$

Теперь вычислим вторую производную

$$y''_j(x_j) = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1, k \neq j}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \frac{(-\lambda) \sin \sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} f_k(t_k) dt_k - \\ & - \lambda \int_0^{x_j} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_j} \left( \sum_{k=1, k \neq j}^m \sin \sqrt{\lambda} t_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \right. \\ & \quad \left. + \cos \sqrt{\lambda} t_j \right) f_j(t_j) dt_j - \\ & - \lambda \int_{x_j}^{a_j} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_j - t_j)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_j} \left( \sum_{k=1, k \neq j}^m \sin \sqrt{\lambda} x_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \right. \\ & \quad \left. + \cos \sqrt{\lambda} x_j \right) f_j(t_j) dt_j - \\ & \quad - f_j(x_j) \end{aligned} \right\},$$

Мы можем общее решение задачи (1),(2),(3) записать в следующем виде

$$y_j(x_j) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1, k \neq j}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda} a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} a_j} f_k(t_k) dt_k + \\ & + \int_0^{x_j} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_j - x_j)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_j} (\Psi_j(t_j, \lambda)) f_j(t_j) dt_j + \int_{x_j}^{a_j} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_j - t_j)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a_j} (\Psi_j(x_j, \lambda)) f_j(t_j) dt_j \end{aligned} \right\},$$

где здесь  $\Delta(\lambda)$  обозначается через  $\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^m \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k, \Psi_j(t_j, \lambda) =$

$$\sum_{k=1, k \neq j}^m \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \cos \sqrt{\lambda} t_j,$$

$$\Psi_j(x_j, \lambda) = \sum_{k=1, k \neq j}^m \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x_j \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} a_k + \cos \sqrt{\lambda} x_j,$$

Вводим решение задачи (1),(2),(3) для функций в следующем виде  $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots, y_m(x_m)$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x_1) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1, k \neq 1}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} f_k(t_k) dt_k + \\ + \int_0^{x_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} (\Psi_1(t_1, \lambda)) f_1(t_1) dt_1 + \\ + \int_{x_1}^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} (\Psi_1(x_1, \lambda)) f_1(t_1) dt_1 \end{array} \right\} \\ \\ y_2(x_2) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1, k \neq 2}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} f_k(t_k) dt_k + \\ + \int_0^{x_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} (\Psi_2(t_2, \lambda)) f_2(t_2) dt_2 + \\ + \int_{x_2}^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} (\Psi_2(x_2, \lambda)) f_2(t_2) dt_2 \end{array} \right\} \\ \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m(x_m) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1, k \neq m}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} f_k(t_k) dt_k + \\ + \int_0^{x_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} (\Psi_m(t_m, \lambda)) f_m(t_m) dt_m + \\ + \int_{x_m}^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} (\Psi_m(x_m, \lambda)) f_m(t_m) dt_m \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (7)$$

Покажем, что функций заданные системой (7) удовлетворяют уравнениям (2), граничным условиям (3) и условиям

$$y_1(0) = y_j(0), j = 2, \dots, m. \quad (8)$$

Затем проверяем выполнения граничных условий (1). Тогда получим

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1, k \neq 1}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} f_k(t_k) dt_k + \int_0^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} (\Psi_1(0, \lambda)) f_1(t_1) dt_1 \end{array} \right\} \\ \\ y_2(0) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1, k \neq 2}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} f_k(t_k) dt_k + \int_0^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} (\Psi_2(0, \lambda)) f_2(t_2) dt_2 \end{array} \right\} \\ \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m(0) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1, k \neq m}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} f_k(t_k) dt_k + \int_0^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} (\Psi_m(0, \lambda)) f_m(t_m) dt_m \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (9)$$

Отсюда мы проверим вторую часть уравнения (1).

$$y'_1(0) + y'_2(0) + \dots + y'_m(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a_1}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} f_2(t_2) dt_2 - \int_0^{a_3} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_3-t_3)}{\sin \sqrt{\lambda}a_3} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a_1}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} f_3(t_3) dt_3 - \dots - \\
& \quad \int_0^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a_1}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} f_m(t_m) dt_m + \\
& \int_0^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} (\sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}a_2 + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}a_3 + \dots + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}a_m) f_1(t_1) dt_1 - \\
& \int_0^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a_2}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} f_1(t_1) dt_1 - \int_0^{a_3} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_3-t_3)}{\sin \sqrt{\lambda}a_3} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a_2}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} f_3(t_3) dt_3 - \dots - \\
& \quad \int_0^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a_2}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} f_m(t_m) dt_m + \\
& \int_0^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} (\sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}a_1 + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}a_3 + \dots + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}a_m) f_2(t_2) dt_2 - \\
& \dots \int_0^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a_{m-1}}{\sin \sqrt{\lambda}a_{m-1}} f_1(t_1) dt_1 - \int_0^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a_{m-1}}{\sin \sqrt{\lambda}a_{m-1}} f_2(t_2) dt_2 - \dots - \\
& \int_0^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \frac{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}a_{m-1}}{\sin \sqrt{\lambda}a_{m-1}} f_m(t_m) dt_m + \int_0^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} (\sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}a_1 + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}a_2 + \\
& \quad \dots + \sqrt{\lambda} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda}a_m) f_m(t_m) dt_m = 0
\end{aligned}$$

Теперь проверим выполнение условия (3).

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(a_1) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1, k \neq 1}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-a_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} f_k(t_k) dt_k + \\ + \int_0^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} (\Psi_1(t_1, \lambda)) f_1(t_1) dt_1 + \\ + \int_{a_1}^{a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} (\Psi_1(a_1, \lambda)) f_1(t_1) dt_1 = 0 \end{array} \right\} \\ \\ y_2(a_2) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1, k \neq 2}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-a_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} f_k(t_k) dt_k + \\ + \int_0^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} (\Psi_2(t_2, \lambda)) f_2(t_2) dt_2 + \\ + \int_{a_2}^{a_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} (\Psi_2(a_2, \lambda)) f_2(t_2) dt_2 = 0 \end{array} \right\} \\ \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \\ y_m(a_m) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1, k \neq m}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k-t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-a_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} f_k(t_k) dt_k + \\ + \int_0^{a_m} f_m(t_m) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-a_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} (\Psi_m(t_m, \lambda)) dt_m + \\ + \int_{a_m}^{a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} (\Psi_m(a_m, \lambda)) dt_m = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

В итоге получили, что (7) является решением задачи (1), (2), (3). Теорема доказана.

**Теорема 2** Для функций Грина задачи (1), (2), (3) справедливо представление

$$G(\vec{x}, t, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} \\ \vdots \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} & \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} & \dots & \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \end{bmatrix}$$

$$-diag \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \right]$$

$$+diag \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} \Psi_1(t_1, \lambda) \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} \Psi_2(t_2, \lambda) \quad \dots \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} \Psi_m(t_m, \lambda) \right] +$$

$$+diag \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} \Psi_1(x_1, \lambda) \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} \Psi_2(x_2, \lambda) \quad \dots \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} \Psi_m(x_m, \lambda) \right].$$

**Доказательство** Решение задачи (1), (2), (3) в матрично-векторном виде  $\vec{y}_m(\vec{x})$  для  $f_1(x_1) \neq 0, \dots, f_m(x_m) \neq 0$

$$\vec{y}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} y_1(x_1) \\ y_2(x_2) \\ \vdots \\ y_m(x_m) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} \cdot \frac{\sin \lambda(a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} f_k(t_k) dt_k + \\ \int_0^{x_1} f_1(t_1) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} (\Psi_1(t_1, \lambda)) dt_1 + \\ \int_{x_1}^{a_j} f_1(t_1) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} (\Psi_1(x_1, \lambda)) dt_1 \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} \cdot \frac{\sin \lambda(a_2 - x_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} f_k(t_k) dt_k + \\ \int_0^{x_2} f_2(t_2) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} (\Psi_2(t_2, \lambda)) dt_2 + \\ \int_{x_2}^{a_j} f_2(t_2) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} (\Psi_2(x_2, \lambda)) dt_2 \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^m \int_0^{a_k} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_k - t_k)}{\sin \sqrt{\lambda}a_k} \cdot \frac{\sin \lambda(a_m - x_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} f_k(t_k) dt_k + \\ \int_0^{x_m} f_m(t_m) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} (\Psi_m(t_m, \lambda)) dt_1 + \\ \int_{x_m}^{a_j} f_m(t_m) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} (\Psi_m(x_m, \lambda)) dt_m \end{array} \right\}$$

Тогда для произвольных  $f_1(x_1) \neq 0, \dots, f_m(x_m) \neq 0$  решение задачи (1), (2), (3) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} & [\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3] = [\vec{A}_1] + [\vec{A}_2] + [\vec{A}_3] = \\ & = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} \\ \vdots \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} & \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2 - t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} & \dots & \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \end{bmatrix} - \\ -diag \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - x_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1 - t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \dots \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - x_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m - t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \right] \end{array} \right\} \times \begin{bmatrix} f_1(t_1) dt_1 \\ f_2(t_2) dt_2 \\ \vdots \\ f_m(t_m) dt_m \end{bmatrix} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &+diag \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} \Psi_1(x_1, \lambda) \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} \Psi_2(x_2, \lambda) \quad \dots \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} \Psi_m(x_m, \lambda) \right] \times \begin{bmatrix} f_1(t_1)dt_1 \\ f_2(t_2)dt_2 \\ \vdots \\ f_m(t_m)dt_m \end{bmatrix} + \\
 &+diag \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} \Psi_1(x_1, \lambda) \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} \Psi_2(x_2, \lambda) \quad \dots \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} \Psi_m(x_m, \lambda) \right] \times \begin{bmatrix} f_1(t_1)dt_1 \\ f_2(t_2)dt_2 \\ \vdots \\ f_m(t_m)dt_m \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Следствие 1** Функция Грина задачи Дирихле (1), (2), (3) имеет представление если  $0 \leq t_1 \leq x_1, \dots, 0 \leq t_m \leq x_m$ .

$$\begin{aligned}
 G(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m; \lambda) &= diag \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-x_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} \Psi_1(t_1, \lambda) \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-x_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} \Psi_2(t_2, \lambda) \quad \dots \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-x_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} \Psi_m(t_m, \lambda) \right] + \\
 &+ \left\{ -diag \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} \quad \dots \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \right] \right\} \times \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} \\ \vdots \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

**Следствие 2** Функция Грина задачи Дирихле (1), (2), (3) имеет представление если  $x_1 < t_1 < a_1, \dots, x_m < t_m < a_m$

$$\begin{aligned}
 G(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m; \lambda) &= diag \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_1} \Psi_1(x_1, \lambda) \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_2} \Psi_2(x_2, \lambda) \quad \dots \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}a_m} \Psi_m(x_m, \lambda) \right] + \\
 &+ \left\{ -diag \left[ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} \quad \dots \quad \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \right] \right\} \times \begin{bmatrix} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_1-t_1)}{\sin \sqrt{\lambda}a_1} \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_2-t_2)}{\sin \sqrt{\lambda}a_2} \\ \vdots \\ \frac{\sin \sqrt{\lambda}(a_m-t_m)}{\sin \sqrt{\lambda}a_m} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Где  $0 \leq t_1 \leq x_1, \dots, 0 \leq t_m \leq x_m$ ,  $G(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m; \lambda) = A_1 + A_2$   
 $x_1 < t_1 < a_1, \dots, x_m < t_m < a_m$ ,  $G(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m; \lambda) = A_1 + A_3$

## 6 Результаты и обсуждение

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. В данной статье показано решение задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Значительную трудность представляет решение дифференциального уравнения на геометрических графах при значениях независимых переменных близких к вершинам графа. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Доказывается самосопряженность дифференциального оператора, порожденного краевой задачей для уравнения Штурма-Лиувилля на графе-звезде. А также проводится спектральный анализ дифференциального оператора на графе. Установлено существование разложения всякой функций из области определения рассматриваемого дифференциального оператора на графе в ряд Фурье по собственным функциям данной краевой задачи.

## 7 Заключение

На плоском графе, состоящем из нескольких дуг с одним общим концом строится функция Грина краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. Задача является моделью колебания простой системы из нескольких стержней с примыкающим концом. В работе выведена формула функции задачи Дирихле для уравнения второго порядка на ориентированном графе. Доказывается существование разложения произвольной функции, заданного на графе, по собственным функциям. Вопросы из спектральной теории, как построение функции Грина и разложение.

## 8 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (проект на тему «Конечномерные возмущения фредгольмовых операторов и их спектральный анализ», 2019-2021 гг.).

### Список литературы

- [1] Павлов Б.С., М.Д. Фадеев Модель свободных электронов и задача рассеяния // Теор. и мат. физика. 1983. - Т. 55, № 2. - С.257-269.
- [2] Покорный Ю.В. О спектре некоторых задач на графах // Успехи мат. наук. 1987. - Т. 42, №4. - С.128-129.
- [3] Пенкин О.М. О краевой задаче на графе // Дифференциальные уравнения. 1988. - Т.24, №4. - С.701-703.
- [4] Von Below J. Classical solvability of linear parabolic equations on networks // Differential Equation. 1988. - V. 72, № 2. - P.316-337.
- [5] Von Below J. Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks // Math. Metli. Appl. Sc. 1988. - V. 10, № 2. - P.383-395.
- [6] Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on network // Lect. Notes Math. 1980. - V. 787. - P.219-234.
- [7] Nicaise S. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission // Lect. Notes Math. №1771. - Berlin, 1985. - P.532-541.

- [8] Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах - М. : Физматлит, 2004. - 272 с.
- [9] Кангузин Б.Е. Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. 2018. - № 1(97) - P.67-90.
- [10] Bondarenko N.P. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on star-shaped graph with mixed boundary conditions // J. Inverse Ill - Posed Probl. 2018. - № 26(1)- P.1-12.
- [11] Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. - СПб.: СПбГУН и П.Т., 2010. - С.181.
- [12] Завгородний М.Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе// Дифференциальные уравнения. 2014. - Т. 50, №4. - С.446-456.
- [13] Kurasov P., Stenberg F. On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A. Math. Gen. 2002. - V.20. - P.647-672.
- [14] Покорный Ю.В., Приядиев В.Л., Аль-Обейд А. Об осцилляционных свойствах спектра краевой задачи на графе // Матем. заметки. 1996. - Т.60, №3. - С.468-469.
- [15] Покорный Ю.В., Приядиев В.Л. Некоторые проблемы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственных сетях // Успехи мат. науки. 2004. - Т.59. №6. - С.115-150.
- [16] M. Znojil Quantum star-graph analogues of PT-symmetric square wells // Can. J. Phys. V.90, iss 12. 2012. - P.1287-1293
- [17] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы - М.: Наука. - 1969. - 526 с.
- [18] F.Harary, Graph theory, Addison-Wesley Publishing Company. 1969. - 274 p.
- [19] P. Kurasov, M. Garjiani, Quantum graphs: PT-symmetry and reflection symmetry of the spectrum. // Journal of Mathematical Physics. - V.58. - 2017.
- [20] M. Astudillo, P. Kurasov, M. Usman, RT -symmetric laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness. // Adv. Math. Phys. - 2015.

## References

- [1] Pavlov B.S., Phadeev M.D. Model svobodnyh elektronov i zadacha rasseiyaniya [Model of free electrons and scattering problem], Teor.i.matfizika. 1983. - V. 55, P. 257-269.
- [2] Pokornyi U.V. O spectre nekotoryh zadach na graphah [About the spectrum of some problems on the graph], Uspehi mat.nauk. 1987. - V. 42, P. 128-129.
- [3] Penkin O.M. O krayevoi zadache na graphe [About boundary value problems on a graph], Differentsialnye uravneniya 1988. - V. 24, - P. 701-703.
- [4] Von Below J. Classical solvability of linear parabolic equations on networks, Differential Equation. 1988. - V.72, P. 316-337.
- [5] Von Below J. Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks, Math. Metli. Appl. Sc. 1988. - V.10, P.383-395.
- [6] Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on network, Lect. Notes Math. 1980.- V.787 - P. 219-234.
- [7] Nicaise S. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission, Lect.Notes Math. 1985. - no 1771- P. 532-541.
- [8] Pokornyi U.B. Differentsialnye uravneniya na geometricheskikh graphah [Differentsial equations on geometric graphs]. М.: Phizmatlit. 2004. - P. 272-274.
- [9] Kanguzhin B.E. Funkciya Grina zadachi Dirihle dlya differentsialnogo operatora na grafe-zvezde[Green's function of Dirichlet problem for differential operators on a star-shaped graphs], Vestnik KazNU 2018. - P. 67-90.
- [10] Bondarenko N.P. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on star-shaped graph with mixed boundary conditions, J. Inverse Ill - Posed Probl. 2018.- P.1-12.

- 
- [11] Afanasev N.A., Bulot L.P. *Electrotehnika i elektronika*[Electrotechnik and elektronik], SPbGUN and P.T. 2010. P.181-183.
- [12] Zavgorodnii M.G. *Sopryazhennye i samosopryajennye krayvye zadachi na geometricheskom graphe* [Conjugate and self-adjoint boundary value problems on a geometric graph], *Differencial equations*. 2014. - V. 50, no 4- P. 446-456.
- [13] Kurasov P., Stenberg F. On the inverse scattering problem on branching graphs, *J. Phys. A. Math. Gen*, 2002. - V. 20. - P. 647-672.
- [14] Pokornyi U.V., Priadiev V.L., Al-Obeid A. Ob oscilyacionnyh svoistvah spectra kraevoi zadachi na graphe, *Matem.zametki*, 1996 - V.60. - P. 468-469.
- [15] Pokornyi U.V., Priadiev V.L. Nekotorye problemy kachestvennoi teorii Shturma-Liuvillya na prostranstvennyh setyah [Some problems of the qualitative theory of Sturm-Liouville on spatial networks], *Uspehi mat. nauk*.2004. - V. 59, - P. 115-150.
- [16] Znojil M. Quantum star-graph analogues of PT-symmetric square wells // *Can. J. Phys.* 2012 - V.90, iss 12. - P.1287-1293
- [17] Naimark M.A. *Lineinye differentsialnye operatory* [Linear differential operators] - M.: Nauka. 1969. - P.526.
- [18] F.Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley Publishing Company. 1969. - 274 p.
- [19] P. Kurasov, M. Garjani, Quantum graphs: PT-symmetry and reflection symmetry of the spectrum.// *Journal of Mathematical Physics*. 2017. - V.58.
- [20] M. Astudillo, P. Kurasov, M. Usman, RT -symmetric laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness. // *Adv. Math. Phys.* 2015.

МРНТИ 27.29.17, 27.29.23

## Абсолютная устойчивость многомерных регулируемых систем. Проблема Айзермана

Айсағалиев С.А., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz  
Аязбаева А.М., Научно-исследовательский институт математики и механики КазНУ  
имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан,  
E-mail: asem.ayazbayeva@kaznu.kz

Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику многомерных регулируемых систем с единственным положением равновесия с нелинейностями из заданного множества. Такая неопределенность нелинейной функции порождает неединственность решения, что приводит к исследованию свойств решений уравнений с дифференциальными включениями. Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия регулируемых систем со многими непрерывными нелинейностями при неполной информации о них. Путем неособого преобразования исходная система приводится к специальному виду, который позволяет использовать сведения о свойствах нелинейностей. Исследованы свойства решений, получены оценки на решения исходной системы и преобразованной системы, доказана их ограниченность. Получены тождества относительно компонентов нелинейной функции и установлена их связь с фазовыми переменными. Получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы и они использованы для получения условий абсолютной устойчивости.

Выделен класс многомерных нелинейных регулируемых систем, для которого проблема Айзермана имеет решение. Для данного класса регулируемых систем получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости.

**Ключевые слова:** Неособое преобразование, несобственные интегралы, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана, свойства решений.

### Көпөлшемді реттелетін жүйелердің абсолюттік орнықтылығы. Айзерман есебі

Айсағалиев С.Ә., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,  
Қазақстан Республикасы, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz  
Аязбаева А.М., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және механика  
ғылыми-зерттеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы,  
E-mail: asem.ayazbayeva@kaznu.kz

Берілген жиыннан сызықты емес біртекті тепе-теңдікке ие көп өлшемді реттелетін жүйелер динамикасын сипаттайтын жай дифференциалдық теңдеулер классы қарастырылады. Сызықты емес функцияның мұндай белгісіздігі шешімнің жалғыз болмауын тудырады, ал бұл дифференциалды қосылыстары бар теңдеулер шешімдерінің қасиеттерін зерттеуге әкеледі. Көптеген үздіксіз сызықтық емес функциялары бар және олар туралы ақпараттың толық болмау жағдайында реттелетін жүйелердің тепе-теңдік күйінің абсолюттік орнықтылығын зерттеудің жаңа әдісі ұсынылады. Бірегей емес түрлендіру арқылы бастапқы жүйе сызықтық емес қасиеттері туралы ақпаратты пайдалануға мүмкіндік беретін арнайы түрге көшіріледі. Шешімдердің қасиеттері зерттелген, бастапқы және түрленген жүйелердің шешімдеріне бағалаулар алынған, және олардың шектеулілігі зерттелген. Сызықты емес функцияның компоненттеріне қатысты тепе-теңдіктер алынды және олардың фазалық айналыстарымен байланыстары орнатылды. Жүйе шешімінің бойында меншіксіз интегралдардың бағасы алынды және олар абсолютті орнықтылық шарттарын алу үшін пайдаланылды.

Айзерман есебінің шешімі болатындай көп өлшемді сызықты емес реттелетін жүйелер классы анықталды. Реттелетін жүйелердің берілген классы үшін абсолютті орнықтылықтың қажетті және жеткілікті шарттары алынды.

**Түйін сөздер:** Ерекше емес түрлендірулер, меншіксіз интегралдар, абсолютті орнықтылық, Айзерман есебі, шешімдердің қасиеттері.

**Absolute stability of multidimensional regulated systems. Aizerman problem**

Aisagaliev S.A., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan,

E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Ayazbayeva A.M., Research Institute of Mathematics and Mechanics of

al-Farabi Kazakh National University, E-mail: asem.ayazbayeva@kaznu.kz

We consider one class of ordinary differential equations describing dynamics of multidimensional controlled systems with a single equilibrium state with nonlinearities from a given set. Such uncertainty of the nonlinear function generates a non-uniqueness of the solution, which leads to the study of the properties of solutions of equations with differential inclusions. A new method for studying the absolute stability of the equilibrium state of controlled systems with many continuous nonlinearities with incomplete information about them is proposed. By non-singular transformation, the original system is reduced to a special form, which allows using information about the properties of nonlinearities. We study properties of the solutions, obtain estimates for the solutions of the original system and the transformed system, and prove their boundedness. The identities with respect to the components of the nonlinear function are obtained and their connection with the phase variables is established. Estimates of improper integrals along the solution of the system are obtained and they are used to obtain conditions for absolute stability.

The class of multidimensional nonlinear controlled systems for which the problem of Aizerman has a solution is highlighted. For this class of regulated systems, necessary and sufficient conditions for absolute stability are obtained.

**Key words:** Non-singular transformation, improper integrals, absolute stability, Aizerman problem, properties of solutions.

**1 Введение**

Рассматривается уравнение движения регулируемых систем следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, \infty), \quad (1)$$

где  $A, B, S$  – постоянные матрицы порядков  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $m \times n$  соответственно, матрица  $A$  – гурвицева, т.е.  $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $\lambda_j(A)$  – собственные значения матрицы  $A$ ,  $|x_0| < \infty$ ,  $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m))$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ .

Функция

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{ \varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) \mid 0 \leq \varphi_i(\sigma_i) \sigma_i \leq \mu_{0i} \sigma_i^2, \forall \sigma_i, \sigma_i \in R^1, \varphi(0) = 0, |\varphi(\sigma)| \leq \varphi_*, \forall \sigma, \sigma \in R^m, 0 < \varphi_* < \infty \}, \quad (2)$$

где  $\mu_0 = \operatorname{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m}) > 0$  – диагональная матрица порядка  $m \times m$ ,  $|\cdot|$  – евклидова норма,  $\varphi_* = \operatorname{const} > 0$ ,  $(*)$  – знак транспонирования. Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами и для таких систем вектор функция  $\varphi(\sigma)$  удовлетворяет условию (2).

Регулируемые системы с уравнением вида  $\dot{x} = A_0x + B\bar{\varphi}(\sigma)$ ,  $\sigma = Sx$ , с неограниченной нелинейностью  $\bar{\varphi}(\sigma) = h\sigma + \varphi(\sigma) \in \Phi_0$ ,  $h = \operatorname{diag}(h_1, \dots, h_m)$  сводится к системе (1), (2), когда матрица  $A = A_0 + BhS$  – гурвицева.

Как известно из научно-технической литературы по автоматическому управлению все узлы регулируемых систем (датчики, усилители, исполнительные приводы) имеют ограниченные ресурсы по мощностям, по обобщенным силам и моментам вызванные их предельными значениями и эффектами насыщения. Следовательно, включение вида (2), где величина  $\varphi_* > 0$  – сколь угодно большое число,  $\varphi_* < \infty$  охватывает все виды нелинейностей в регулируемых системах.

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений  $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$ ,  $\sigma_* = Sx_*$ . Если матрица  $A$  – гурвицева, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$  обращается в нуль только при  $\sigma = 0$ , то система (1), (2) имеет единственное положение равновесия  $x_* = 0$ .

Заметим, что положению равновесия соответствует тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$  системы (1), (2). В статье исследуется асимптотическая устойчивость в целом невозмущенного движения  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$  при любом  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ .

Полагаем, что при достаточно малой окрестности точки  $\sigma = \sigma_* = 0$ , функцию  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$  можно аппроксимировать линейной функцией  $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$ ,  $\mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$ ,  $0 < \mu_i \leq \mu_{0i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Следовательно, при  $|\sigma| < \delta$ ,  $\delta > 0$  – достаточно малое число, уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\dot{x} = Ax + B\mu Sx = A_1(\mu)x, \quad x(0) = x_0, \quad |x_0| < \delta_1, \quad t \in I,$$

где  $A_1(\mu) = A + B\mu S$ ,  $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$ ,  $\overline{\mu_{0i}}$ ,  $i = \overline{1, m}$  – предельное значение  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  определяемое из гурвицевости матрицы  $A_1(\mu)$ .

Если матрица  $A_1(\mu)$ ,  $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$ ,  $i = \overline{1, m}$  – гурвицева, то существует число  $\varepsilon_1 > 0$  такое, что  $|x(t)| < \varepsilon_1$  при  $|x_0| < \delta_1$ , более того,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Таким образом, когда матрица  $A_1(\mu)$ , где  $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$ ,  $i = \overline{1, m}$  – гурвицева, то тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$  асимптотически устойчиво по Ляпунову при  $t \rightarrow \infty$ .

**Определение 1** *Тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$  системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если: 1) матрицы  $A$ ,  $A_1(\mu)$  – гурвицевы, где  $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$ ,  $\mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$ ,  $\mu_0 = \text{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m})$ ; 2) для всех  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$  – решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; 0, x_0, \varphi) = 0$ ,  $|x_0| < \infty$ .*

Иными словами, тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$  системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если оно асимптотически устойчиво в целом для любого  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ .

**Определение 2** *Условиями абсолютной устойчивости системы (1), (2) называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы  $(A, B, S, \mu_0)$ , при выполнении которых положение равновесия  $x_* = 0$  абсолютно устойчиво.*

**Задача 1** *Найти условие абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).*

Функция  $\sigma(t) = Sx(t)$ ,  $t \in I$  является управлением сформированным по принципу обратной связи, а матрица  $S$  порядка  $m \times n$  называется матрицей обратной связи. Проблема Айзермана состоит в том, что как выбрать матрицу обратной связи  $S$ , чтобы из асимптотической устойчивости тривиального решения  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$  линейной системы  $\dot{x} = Ax + B\mu Sx = A_1(\mu)x$  для любого  $\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq \overline{\mu_0} - \varepsilon$ ,  $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$  следует абсолютная устойчивость тривиального решения  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in I$  системы (1), (2), где  $\overline{\mu_0}$  – предельное значение гурвицевости матрицы  $A_1(\mu)$ ,  $\varepsilon_i > 0$  – сколь угодно малые числа.

**Определение 3** *Будем считать, что в секторе  $[0, \mu_0]$  проблема Айзермана имеет решение, если: 1) существует матрица обратной связи  $S$  такая, что  $\mu_0 = \overline{\mu_0} - \varepsilon$ , где  $\overline{\mu_0}$*



– предельное значение гурвицевости матрицы  $A_1(\mu)$ ,  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно малое число; 2) для любого  $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$ ,  $0 \leq \mu \leq \mu_0 = \bar{\mu}_0 - \varepsilon$  – решение системы (1) асимптотически устойчиво; 3) для любого  $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_0$  тривиальное решение системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

**Задача 2** Найти сектор  $[0, \mu_0]$ , где проблема Айзермана имеет решение.

## 2 Обзор литературы

Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критическом случаях посвящено много работ. Среди них следует отметить монографии [1–4]. Существует два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем: метод А.И. Лурье [2] и метод В.М. Попова [3]. Связь между этими методами установлена в работах В.А. Якубовича и его учеников [4]. Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функции Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей". В конечном счете метод А.И. Лурье приводит к проверке разрешимости матричных неравенств. Естественно, довольно сложно применить такой подход для решения прикладных задач из-за неопределенности выбора произвольных постоянных в условиях абсолютной устойчивости.

Сложность проверки частотных условий, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических условий абсолютной устойчивости путем сведения частотных условий к проверке положительности полиномов на положительной полуоси [5, 6].

В 1949 году М.А. Айзерман сформулировал следующую проблему [7]: пусть решения всех линейных систем вида  $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$ ,  $0 \leq \mu \leq \mu_0$ ,  $\sigma = Sx$  асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы  $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$ ,  $\sigma = Sx$  с любой нелинейностью  $\varphi(\sigma) \in \Phi = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1) / 0 \leq \varphi(\sigma)\sigma \leq \mu_0\sigma^2, \forall \sigma, \sigma \in R^1\}$  обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Айзермана была решена для систем второго порядка И.Г. Малкиным, Н.П. Еругиным, Н.Н. Красовским.

В 1957 году Р.Е. Калманом сформулирована следующая проблема [8]: Пусть решения всех линейных систем вида  $\dot{x} = Ax + B\mu x$ ,  $0 \leq \mu \leq \mu_0$ ,  $\sigma = Sx$  асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы  $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$ ,  $\sigma = Sx$  с любой нелинейностью  $\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1) / 0 \leq \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leq \mu_0, \forall \sigma, \sigma \in R^1\}$  обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Калмана имеет положительное решение при  $n = 2$ .

Остаются открытыми решения проблемы Айзермана и проблемы Калмана для случая  $n > 2$ . В работе [9] предложен новый подход к решению указанных проблем в виде вычислительных алгоритмов на основе модифицированного метода гармонической линеаризации.

Для многомерных регулируемых систем, где  $\varphi(\sigma) \in \Phi = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) \mid 0 \leq \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \leq \mu_{0i}\sigma_i^2, \forall \sigma, \sigma \in R^m\}$  проблема Айзермана формулируется так: пусть решения всех линейных систем вида  $\dot{x} = Ax + B\mu Sx$ ,



$\mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$ ,  $\sigma = Sx$ ,  $0 \leq \mu \leq \mu_0$ ,  $\mu_0 = \text{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m})$ , где  $A$ ,  $B$ ,  $S$  – постоянные матрицы порядков  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $m \times n$  соответственно, асимптотически устойчивы. Будут ли решения нелинейных систем  $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$ ,  $\sigma = Sx$  с любой нелинейностью  $\varphi(\sigma) \in \Phi$  обладать свойством асимптотической устойчивости в целом.

Отметим, что как следует из работы [9] проблема Айзермана не всегда имеет решение. Следовательно, для решения проблемы Айзермана необходимо выделить класс многомерных регулируемых систем, путем наложения дополнительных требований к свойствам нелинейностей. Функция  $\sigma(t) = Sx(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$  является управлением сформированное по принципу обратной связи, а матрица  $S$  порядка  $m \times n$  называется матрицей обратной связи.

В статье делается попытка решения проблемы Айзермана для многомерных регулируемых систем с ограниченными нелинейностями для случая  $n > 2$  путем выбора матрицы обратной связи  $S$ .

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости многомерных регулируемых систем на основе априорной оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Эффективность условия абсолютной устойчивости достигается использованием дополнительной информации о нелинейностях в виде их ограниченности, а конструктивность определяется формулировкой условия устойчивости в виде положительной определенности матрицы от конструктивных параметров системы  $(A, B, S, \mu_0)$ .

Данная работа является продолжением научных исследований из [10–13]. Эффективность и конструктивность предлагаемого метода для одномерных систем, когда  $m = 1$  показаны в [14].

### 3 Материал и методы

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости многомерных регулируемых систем с ограниченными нелинейностями на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. В статье приведены результаты фундаментальных исследований по следующим разделам: неособое преобразование, свойства решений системы (1), (2), оценка несобственных интегралов вдоль решения системы (1), (2), абсолютная устойчивость положения равновесия системы (1), (2), решение проблемы Айзермана. Эти результаты позволяют сформулировать условия абсолютной устойчивости положения равновесия многомерных систем и решения проблемы Айзермана в виде необходимого и достаточного условия абсолютной устойчивости.

#### 3.1 Неособое преобразование

Для простоты проверки предлагаемого условия абсолютной устойчивости целесообразно преобразовать исходное уравнение движения (1). Пусть матрица  $B = \|B_1, \dots, B_m\|$ , где  $B_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  – векторы столбцы  $n \times 1$ .

**Лемма 1** Пусть вектор-строка  $\theta_i^* \in R^n$ ,  $i = \overline{1, m}$  такие, что:

$$\theta_i^* B_i = 1, \theta_i^* B_j = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad i \neq j, \quad (3)$$

где  $B_i \neq B_j$ ,  $i \neq j$ ,  $(*)$  – знак транспонирования. Тогда вдоль решения уравнения (1) верно тождество

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* Ax(t) + \varphi_i(\sigma_i(t)), \quad t \in [0, \infty), \quad i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Если, кроме того, ранг  $B^* = m$  и определитель Грама

$$\Gamma(\theta_1, \dots, \theta_m) = \begin{vmatrix} \langle \theta_1, \theta_1 \rangle & \langle \theta_1, \theta_2 \rangle & \dots & \langle \theta_1, \theta_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \theta_m, \theta_1 \rangle & \langle \theta_m, \theta_2 \rangle & \dots & \langle \theta_m, \theta_m \rangle \end{vmatrix} \neq 0, \quad (5)$$

то векторы  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  существуют и они линейно независимы, где  $\langle \theta_i, \theta_j \rangle$  – скалярное произведение векторов  $\theta_i$ ,  $\theta_j$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\theta_i^* = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{in})$ ,  $i = \overline{1, m}$ , то умножая слева тождество  $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(\sigma(t))$ ,  $t \in I$  на  $\theta_i^*$  имеем

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* Ax(t) + \theta_i B \varphi(\sigma(t)), \quad t \in I, \quad i = \overline{1, m},$$

где  $\theta_i^* B = (\theta_{i1}^* B_1, \dots, \theta_{in}^* B_m)$ . Отсюда, с учетом (3), получим (4). Заметим, что соотношение (3) запишется в виде линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \theta_{i1} B_{11} + \theta_{i2} B_{12} + \dots + \theta_{in} B_{1n} &= 0, \\ \dots & \dots \\ \theta_{i1} B_{i1} + \theta_{i2} B_{i2} + \dots + \theta_{in} B_{in} &= 1, \\ \dots & \dots \\ \theta_{i1} B_{m1} + \theta_{i2} B_{m2} + \dots + \theta_{in} B_{mn} &= 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Если ранг  $B^* = m$ , то данная система уравнений имеет решение,  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Из условия (5) следует, что векторы  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  линейно независимы. Лемма доказана.

**Лемма 2** Пусть вектор  $\theta_0 \in R^n$  такой, что  $\theta_0^* B_i = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , где  $B_i \neq B_j$ ,  $i \neq j$ . Тогда вдоль решения уравнения (1) верно тождество

$$\theta_0^* \dot{x}(t) = \theta_0^* Ax(t), \quad t \in I. \quad (6)$$

Если, кроме того, ранг  $B^* = m$  и определитель Грама

$$\Gamma(\theta_{01}, \dots, \theta_{0n-m}) = \begin{vmatrix} \langle \theta_{01}, \theta_{02} \rangle & \dots & \langle \theta_{01}, \theta_{0n-m} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \theta_{0n-m}, \theta_{01} \rangle & \dots & \langle \theta_{0n-m}, \theta_{0n-m} \rangle \end{vmatrix} \neq 0, \quad (7)$$

то векторы  $\theta_{01}, \dots, \theta_{0n-m}$  существуют и они линейно независимы, где  $\theta_{0i}$ ,  $i = \overline{1, n-m}$  получены из  $\theta_0$  путем выбора  $(n-m)$  – произвольных компонентов вектора  $\theta_0$ .

**Доказательство.** Пусть вектор  $\theta_0 = (\theta_{10}, \dots, \theta_{n0}) \in R^n$ . Тогда соотношение  $\theta_0^* B_i = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$  запишется так

$$\theta_{10} B_{11} + \dots + \theta_{n0} B_{1n} = 0, \dots, \theta_{10} B_{m1} + \dots + \theta_{n0} B_{mn} = 0.$$

Если ранг  $B^* = m$ , то данная система имеет решение  $\theta_0 = \theta_0(\theta_{m+1,0}, \dots, \theta_{n,0})$ , где  $\theta_{m+1,0}, \dots, \theta_{n,0}$  – любые числа. Определим векторы  $\theta_{01} \in R^n, \dots, \theta_{0n-m} \in R^n$  путем выбора произвольных чисел  $\theta_{m+1,0}, \dots, \theta_{n,0}$ . В частности,  $\theta_{01} = \theta_0(1, 0, \dots, 0)$ ,  $\theta_{02} = \theta_0(0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\theta_{0n-m} = \theta_0(0, \dots, 0, 1)$ .

Умножая слева тождество (1) на  $\theta_0^*$  получим (6). По условию леммы выполнено неравенство (7). Следовательно, векторы  $\theta_{0i} \in R^n, i = \overline{1, n-m}$  линейно независимы. Так как  $\theta_{0i}^* B_i = 0, i = \overline{1, n-m}$ , то тождество (6) равносильно тому, что

$$\theta_{0i}^* \dot{x}(t) = \theta_{0i}^* A x(t), \quad t \in I, \quad i = \overline{1, n-m}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 3** Пусть выполнены условия лемм 1, 2, и пусть, кроме того, ранг матрицы

$$R = \|\theta_1, \dots, \theta_m \quad \theta_{01}, \dots, \theta_{0n-m}\| \tag{8}$$

порядка  $n \times n$  равен  $n$ . Тогда уравнение (1) равносильно следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n + \varphi_1(\sigma_1), \dots, \dot{y}_m = c_{m1}y_1 + \dots + c_{mn}y_n + \varphi_m(\sigma_m), \\ \dot{y}_{m+1} &= c_{m+1,1}y_1 + \dots + c_{m+1,n}y_n, \dots, \dot{y}_n = c_{n1}y_1 + \dots + c_{nn}y_n, \\ \sigma_1 &= d_{11}y_1 + \dots + d_{1n}y_n, \dots, \sigma_m = d_{m1}y_1 + \dots + d_{mn}y_n, \end{aligned} \tag{9}$$

где  $y_i = \theta_i^* x, i = \overline{1, m}, y_{m+i} = \theta_{0i}^* x, i = \overline{1, n-m}$ .

**Доказательство.** Так как ранг  $R = n$ , то из (8) следует, что векторы  $\theta_i \in R^n, i = \overline{1, m}, \theta_{0i} \in R^n, i = \overline{1, n-m}$  образуют базис в  $R^n$ . Тогда векторы

$$\begin{aligned} \theta_1^* A x &= c_{11}\theta_1^* x + \dots + c_{1m}\theta_m^* x + c_{1m+1}\theta_{01}^* x + \dots + c_{1n}\theta_{0n-m}^* x, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \theta_m^* A x &= c_{m1}\theta_1^* x + \dots + c_{m,m}\theta_m^* x + c_{m,m+1}\theta_{01}^* x + \dots + c_{mn}\theta_{0n-m}^* x, \\ \theta_{01}^* A x &= c_{m+1,1}\theta_1^* x + \dots + c_{m+1,m}\theta_m^* x + c_{m+1,m+1}\theta_{01}^* x + \dots + c_{m+1,n}\theta_{0n-m}^* x, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \theta_{0n-m}^* A x &= c_{n1}\theta_1^* x + \dots + c_{nm}\theta_m^* x + c_{n,m+1}\theta_{01}^* x + \dots + c_{n,n}\theta_{0n-m}^* x, \end{aligned}$$

где  $c_{ij}, i, j = \overline{1, n}$  коэффициенты разложения  $A^* \theta_i, i = \overline{1, m}, A^* \theta_{0i}, i = \overline{1, n-m}$  по базисам  $\theta_i \in R^n, i = \overline{1, m}, \theta_{0i} \in R^n, i = \overline{1, n-m}$ . Отсюда, с учетом (4), (6) получим систему уравнений (9) относительно переменных  $y_1, \dots, y_n$ .

Аналогично, путем разложения векторов  $S_i^* \in R^n$  по базисам  $\theta_i, i = \overline{1, m}, \theta_{0i}, i = \overline{1, n-m}$  получим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= S_1 x = d_{11}\theta_1^* x + \dots + d_{1m}\theta_m^* x + d_{1m+1}\theta_{01}^* x + \dots + d_{1n}\theta_{0n-m}^* x, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \sigma_m &= S_m x = d_{m1}\theta_1^* x + \dots + d_{m,m}\theta_m^* x + d_{m,m+1}\theta_{01}^* x + \dots + d_{m,n}\theta_{0n-m}^* x, \end{aligned}$$

где  $S^* = (S_1^*, \dots, S_m^*)$ . Лемма доказана.

Система уравнений (9) в векторной форме имеет вид

$$\dot{y} = \bar{A} y + \bar{B} \varphi(\sigma), \quad \sigma = \bar{S} y, \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_0, \tag{10}$$

где  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{S}$  – постоянные матрицы порядков  $n \times n, n \times m, m \times n$  соответственно,  $\bar{A} = \|c_{ij}\|$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $\bar{S} = \|d_{ij}\|$ ,  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ,  $\bar{B} = \begin{pmatrix} I_m \\ O_{n-m, m} \end{pmatrix}$ ,  $I_m$  – единичная матрица порядка  $m \times m$ ,  $O_{n-m, m}$  – матрица порядка  $(n - m) \times m$  с нулевыми элементами. Если матрица  $K = R^*$ , то  $y = Kx = R^*x$ ,  $x = K^{-1}y = (R^*)^{-1}y$ , матрицы  $\bar{A}, \bar{S}, \bar{B}$  равны  $\bar{A} = KAK^{-1} = (R^*)^{-1}AR^{-1}$ ,  $\bar{S} = SK^{-1} = S(R^*)^{-1}$ ,  $\bar{B} = KB = R^*B$ . Таким образом, дифференциальное уравнение (1) с нелинейностями (2) с неособым преобразованием  $x = K^{-1}y = (R^*)^{-1}y$  приводится к виду (10).

### 3.2 Свойства решений

Рассмотрена ограниченность решений системы (1), (2), а также уравнений (10). Получены тождества вдоль решения уравнения (10) и исследовано ее асимптотическое свойство.

**Теорема 1** Пусть матрица  $A$  – гурвицева, т.е.  $Re\lambda_j(A) < 0$ ,  $j = \overline{1, n}$  и выполнены условия лемм 1 – 3. Тогда верны оценки:

$$|x(t)| \leq c_0, |\dot{x}(t)| \leq c_1, t \in I, \quad (11)$$

$$|y(t)| \leq c_2, |\dot{y}(t)| \leq c_3, t \in I, \quad (12)$$

$$|\sigma(t)| \leq c_4, |\dot{\sigma}(t)| \leq c_5, t \in I, \quad (13)$$

где  $c_i = const > 0$ ,  $c_i < \infty$ ,  $i = \overline{0, 5}$ . Кроме того, функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\sigma(t)$ ,  $t \in I$  равномерно непрерывны.

**Доказательство.** Так как матрица  $\bar{A} = KAK^{-1}$ , то из гурвицевости матрицы  $A$  следует гурвицевость матрицы  $\bar{A}$ , т.е.  $Re\lambda_j(A) = Re\lambda_j(\bar{A}) < 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\varphi(\sigma(\tau))d\tau, t \in I.$$

Заметим, что из гурвицевости матрицы  $A$  следует оценка  $\|e^{At}\| \leq ce^{(a+\varepsilon)t}$ ,  $c = c(\varepsilon) > 0$ ,  $\forall t, t \in I$ , где  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно малое число, величина  $a = \max_{1 \leq j \leq n} Re\lambda_j(A) < 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \|e^{At}\| |x_0| + \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\| \|B\| |\varphi(\sigma(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t} \|B\|\varphi_* \int_0^t e^{-(a+\varepsilon)\tau} d\tau = \\ &= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t} \|B\|\varphi_* \left[ -\frac{1}{a+\varepsilon} e^{-(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon} \right] = \\ &= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon} c\|B\|\varphi_* (-1 + e^{(a+\varepsilon)t}) \leq \\ &\leq c|x_0| - \frac{1}{a+\varepsilon} c\|B\|\varphi_* = c_0, \end{aligned}$$

где  $e^{(a+\varepsilon)t} \leq 1$ ,  $t \in I$ ,  $a + \varepsilon < 0$ ,  $-\frac{1}{a+\varepsilon} > 0$ ,  $|\varphi(\sigma(t))| \leq \varphi_*$ ,  $\forall t, t \in I$ . Отсюда следует ограниченность решения системы (1), (2). Из уравнения (1) следует, что

$$|\dot{x}(t)| \leq \|A\| |x(t)| + \|B\| |\varphi(\sigma(t))| \leq \|A\|c_0 + \|B\|\varphi_* = c_1, \quad \forall t, t \in I,$$

Тогда

$$|\sigma(t)| \leq \|S\| |x(t)| \leq \|S\|c_0 = c_4, \quad |\dot{\sigma}(t)| \leq \|S\| |\dot{x}(t)| \leq \|S\|c_1 = c_5, \quad \forall t, t \in I.$$

Так как функция  $y(t) = Kx(t)$ ,  $t \in I$ , то  $|y(t)| \leq \|K\||x(t)| \leq \|K\|c_0 = c_2$ ,  $|\dot{y}| \leq \|K\||\dot{x}(t)| \leq \|K\|c_1 = c_3$ ,  $\forall t, t \in I$ .

Итак, доказаны оценки (11) – (13). Из ограниченности функций  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $\dot{\sigma}(t)$ ,  $t \in I$  следуют равномерные непрерывности функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\sigma(t)$ ,  $t \in I$ . Теорема доказана.

Следует отметить, что: 1. Из оценки  $|x(t)|$ ,  $t \in I$  имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = |x(\infty)| \leq c|x_0| - \frac{1}{a}c\|B\|\varphi_* = \bar{c}_0$ ,  $\bar{c}_0 \leq c_0$  в силу непрерывности  $x(t)$ ,  $t \in I$ , где  $a < 0$ . Следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = |y(\infty)| \leq \|K\|\bar{c}_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\sigma(t)| = |\sigma(\infty)| \leq \|s\|\bar{c}_0$ .

2. Если  $x_0 \in S_\rho = \{x_0 \in R^n | |x_0| \leq \rho, \rho > 0\}$ , то  $|\sigma| \leq \|S\|(c\rho - \frac{c}{a}\|B\|\varphi_*) = \bar{c}_4$ .

**Лемма 4** Пусть выполнены условия лемм 1-3. Тогда вдоль решения системы (10) верны тождества

$$\varphi(\sigma(t)) = H_0\dot{y}(t) - \bar{A}_{11}y(t), \quad t \in I, \tag{14}$$

$$H_1\dot{y}(t) = \bar{A}_{12}y(t), \quad t \in I, \tag{15}$$

$$\sigma(t) = \bar{S}_1H_0y(t) + \bar{S}_2H_1y(t), \quad t \in I, \tag{16}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \bar{S}_1H_0\dot{y}(t) + \bar{S}_2H_1\bar{A}_{12}y(t), \quad t \in I, \tag{17}$$

где

$$H_0 = (I_m, O_{m,n-m}), \quad H_1 = (O_{n-m,m}, I_{n-m}), \quad \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} = I_n, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \\ \bar{A}_{12} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}_{11} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = \begin{pmatrix} c_{m+1,1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = (\bar{S}_1, \bar{S}_2),$$

$$\bar{S}_1 = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix}, \quad \bar{S}_2 = \begin{pmatrix} d_{1m+1} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m,m+1} & \dots & d_{m,n} \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Поскольку выполнены условия лемм 1–3, то верно (9). Заметим, что

$$H_0\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_m \end{pmatrix}, \quad H_1\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_{m+1} \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из (9) следует, что

$$\varphi_1(\sigma_1) = \dot{y}_1 - c_{11}y_1 - \dots - c_{1n}y_n, \dots, \varphi_m(\sigma_m) = \dot{y}_m - c_{m1}y_1 - \dots - c_{mn}y_n,$$

$$\sigma = (\bar{S}_1, \bar{S}_2)y = (\bar{S}_1, \bar{S}_2) \begin{pmatrix} H_0y \\ H_1y \end{pmatrix} = \bar{S}_1 H_0y + \bar{S}_2 H_1y, \quad H_1 \dot{y} = \bar{A}_{12}y.$$

Следовательно, верны тождества (14) – (17). Лемма доказана.

**Лемма 5** Пусть выполнены условия лемм 1–4. Тогда для любых матриц  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N_1$ ,  $N_2$  порядков  $n \times n$ ,  $n \times n$ ,  $n \times (n - m)$ ,  $n \times (n - m)$  соответственно, вдоль решения уравнения (10) верны тождества

$$y^*(t)M\dot{y}(t) + y^*(t)\Lambda\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}[y^*(t)\Lambda y(t)], \quad t \in I \quad \text{при} \quad M = \Lambda^*, \quad (18)$$

$$[\dot{y}^*(t)N_2 + y^*(t)N_1][H_1\dot{y}(t) - \bar{A}_{12}(t)y(t)] \equiv 0, \quad t \in I. \quad (19)$$

**Доказательство.** Тождество (18) непосредственно следует из равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[y^*(t)\Lambda y(t)] &= \dot{y}^*(t)\Lambda y(t) + y^*(t)\Lambda\dot{y}(t) = y^*(t)\Lambda^*\dot{y}(t) + y^*(t)\Lambda\dot{y}(t) = \\ &= y^*(t)M\dot{y}(t) + y^*(t)\Lambda\dot{y}(t), \quad t \in I \quad \text{при} \quad \Lambda^* = M. \end{aligned}$$

Как следует из (15) для любых матриц  $N_1$ ,  $N_2$  порядков  $n \times (n - m)$ ,  $n \times (n - m)$  верно тождество (19). Лемма доказана.

### 3.3 Несобственные интегралы

На основе неособого преобразования и используя свойства решений системы (1) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (10).

**Теорема 2** Пусть выполнены условия лемм 1–3, матрица  $\bar{A}$  – гурвицева, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ . Тогда для любой диагональной матрицы  $\tau_1 = \text{diag}(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m})$  порядка  $m \times m$  вдоль решения системы (10) несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \varphi^*(\sigma(t))\tau_1\dot{\sigma}(t)dt = \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)\Lambda_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda_2y(t) + y^*(t)\Lambda_3y(t)]dt = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i < \infty, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\Lambda_1 = H_0^*\tau_1\bar{S}_1H_0, \quad \Lambda_2 = H_0^*\tau_1\bar{S}_2\bar{A}_{12} - H_0^*\bar{S}_1^*\tau_1\bar{A}_{11}, \quad \Lambda_3 = -\bar{A}_{11}^*\tau_1\bar{S}_2\bar{A}_{12}. \quad (21)$$

Заметим, что матрица  $\bar{A} = KAK^{-1}$ , где  $K$  – неособая матрица, то  $\lambda_j(A) = \lambda_j(\bar{A})$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Следовательно, матрица  $\bar{A}$  – гурвицева тогда, когда матрица  $A$  – гурвицева, где  $\lambda_j(A) = \lambda_j(\bar{A})$ ,  $j = \overline{1, n}$  собственные значения матрицы  $A$ ,  $\text{Re}\lambda_j(A) < 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

**Доказательство.** Как следует из теоремы 1,  $|y(\infty)| < c_2 < \infty$ ,  $|y(0)| \leq c_2 < \infty$ . Несобственный интеграл (см. (20)).

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \varphi^*(\sigma(t))\tau_1\dot{\sigma}(t)dt = \int_0^\infty [H_0\dot{y}(t) - \bar{A}_{11}y(t)]^*\tau_1[\bar{S}_1H_0\dot{y}(t) + \bar{S}_2\bar{A}_{12}y(t)]dt = \\ &= \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)\Lambda_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda_2y(t) + y^*(t)\Lambda_3y(t)]dt = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i < \infty, \end{aligned}$$

в силу тождеств (11) – (13),  $|\sigma(0)| \leq c_4 < \infty$ ,  $|\sigma(\infty)| \leq c_4 < \infty$ , где матрицы  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  порядков  $n \times n$  определяются формулами (21) соответственно. Теорема доказана.

**Теорема 3** Пусть выполнены условия лемм 1–3, матрица  $\bar{A}$  – гурвицева, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ . Тогда для любой диагональной матрицы  $\tau_2 = \text{diag}(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}) \geq 0$  порядка  $m \times m$ , вдоль решения уравнения (10) несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty [\varphi^*(\sigma(t))\tau_2\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t)) - \varphi^*(\sigma(t))\tau_2\sigma(t)]dt = \\ &= \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)\Sigma_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Sigma_2y(t) + y^*(t)\Sigma_3y(t)]dt \leq 0, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= H_0^*\tau_2\mu_0^{-1}H_0, \quad \Sigma_2 = -2H_0^*\tau_2\mu_0^{-1}\bar{A}_{11} - H_0^*\tau_2\bar{S}_1H_0 - H_0^*\tau_2\bar{S}_2H_1, \\ \Sigma_3 &= \bar{A}_{11}^*\tau_2\mu_0^{-1}\bar{A}_{11} + \bar{A}_{11}^*\tau_2\bar{S}_1H_0 + \bar{A}_{11}^*\tau_2\bar{S}_2H_1. \end{aligned} \tag{23}$$

**Доказательство.** Из включения  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$  следует

$$\frac{\varphi_i(\sigma_i)}{\sigma_i} \leq \mu_{0i}, \quad \frac{\sigma_i}{\varphi_i(\sigma_i)} \geq \mu_{0i}^{-1}, \quad \forall \sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m}.$$

Следовательно,  $\sigma_i\varphi_i(\sigma_i) \geq \mu_{0i}^{-1}\varphi_i^2(\sigma_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тогда для любой величины  $\tau_{2i} \geq 0$  верно неравенство  $\varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}\sigma_i - \mu_{0i}^{-1}\tau_{2i}\varphi_i^2(\sigma_i) \geq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^m [\mu_{0i}^{-1}\tau_{2i}\varphi_i^2(\sigma_i) - \varphi_i(\sigma_i)\tau_{2i}\sigma_i] \leq 0.$$

Пусть  $\tau_2 = \text{diag}(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}) \geq 0$ ,  $\mu_0^{-1} = \text{diag}(\mu_{01}^{-1}, \dots, \mu_{0m}^{-1})$ . Тогда данное неравенство запишется в виде

$$\varphi^*(\sigma)\tau_2\mu_0^{-1}\varphi(\sigma) - \varphi^*\tau_2\sigma \leq 0, \quad \forall \sigma, \quad \sigma \in R^m.$$

Отсюда следует, что несобственный интеграл (см. (22))

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\varphi^*(\sigma(t))\tau_2\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t)) - \varphi^*(\sigma(t))\tau_2\sigma(t)]dt \leq 0.$$

Тогда с учетом тождеств (14), (16), имеем

$$I_2 = \int_0^{\infty} \{[H_0\dot{y}(t) - \bar{A}_{11}y(t)]^*\tau_2\mu_0^{-1}[H_0\dot{y}(t) - \bar{A}_{11}y(t)] - [H_0\dot{y}(t) - \bar{A}_{11}y(t)]^* \times \\ \times \tau_2[\bar{S}_1H_0y(t) + \bar{S}_2H_1y(t)]\}dt = \int_0^{\infty} [\dot{y}^*(t)\Sigma_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Sigma_2y(t) + y^*(t)\Sigma_3y(t)]dt \leq 0,$$

где матрицы  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  порядков  $n \times n$  определяются по формуле (23). Теорема доказана.

**Лемма 6** Пусть выполнены условия лемм 1–3, матрица  $\bar{A}$  – гурвицева, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ . Тогда для любых матриц  $N_1, N_2$  порядков  $n \times (n - m), n \times (n - m)$  соответственно, несобственный интеграл

$$I_3 = \int_0^{\infty} [\dot{y}^*(t)P_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)P_2y(t) + y^*(t)P_3y(t)]dt = 0. \quad (24)$$

где  $P_1 = N_2H_1, P_2 = -N_2\bar{A}_{12} + H_1^*N_1, P_3 = -N_1\bar{A}_{12}$ .

Доказательство леммы непосредственно следует из тождества (19).

### 3.4 Абсолютная устойчивость

На основе результатов изложенных выше об оценке несобственных интегралов, в также лемм 1–3 могут быть сформулированы условия абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Введем следующие обозначения

$$R_0 = \Lambda_1 + \Sigma_1 + P_1 = H_0^*\tau_1\bar{S}_1H_0 + H_0^*\tau_2\mu_0^{-1}H_0 + N_1H_1, \\ \Gamma_0 = \Lambda_2 + \Sigma_2 + P_2 = H_0^*\tau_1\bar{S}_2\bar{A}_{12} - H_0^*\bar{S}_1^*\tau_1\bar{A}_{11} - \\ - 2H_0^*\tau_2\mu_0^{-1}\bar{A}_{11} - H_0^*\tau_2\bar{S}_1H_0 - H_0^*\tau_2\bar{S}_2H_1 + H_1^*N_1^* - N_2\bar{A}_{12}, \\ W_0 = \Lambda_3 + \Sigma_3 + P_3 = -\bar{A}_{11}^*\tau_1\bar{S}_2\bar{A}_{12} + \bar{A}_{11}^*\tau_2\mu_0^{-1}\bar{A}_{11} + \\ + \bar{A}_{11}^*\tau_2\bar{S}_1H_0 + \bar{A}_{11}\tau_2\bar{S}_2H_1. \quad (25)$$

В частности, когда матрица  $N_1 = -\bar{A}_{11}^*\tau_1\bar{S}_2 + \bar{A}_{11}^*\tau_2T$ , то матрица  $W_0 = \bar{A}_{11}^*\tau_2\mu_0^{-1}\bar{A}_{11} + \bar{A}_{12}^*K_1A_{12} \geq 0$ , где  $K_1 = K_1^* > 0, \bar{A}_{11}^*\tau_2\bar{S}_1H_0 + \bar{A}_{11}^*\tau_2\bar{S}_2H_1 = \bar{A}_{11}^*\tau_2\bar{S} = \bar{A}_{11}^*\tau_2T\bar{A}_{12}, \bar{S} = T\bar{A}_{12}$ . Здесь  $K_1, T$  матрицы порядков  $n \times n, m \times n$  соответственно.



Тогда несобственный интеграл

$$I_4 = I_1 + I_2 + I_3 = \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)R_0\dot{y}(t) + \dot{y}(t)\Gamma_0y(t) + y^*(t)W_0y(t)]dt \leq \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i < \infty. \tag{26}$$

**Теорема 4** Пусть выполнены условия лемм 1–5, матрица  $\bar{A}$  – гурвицева, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ , и пусть, кроме того, матрицы  $R_0, \Gamma_0$  порядков  $n \times n, n \times n$  такие, что: 1)  $R_0 = R_0^* \geq 0$ , 2)  $\Gamma_0 = \Gamma_0^*$ . Тогда несобственный интеграл

$$I_{40} = \int_0^\infty y^*(t)W_0y(t)dt \leq \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i - \int_0^\infty \frac{d}{dt} [\frac{1}{2}y^*(t)\Gamma_0y(t)]dt < \infty, \tag{27}$$

где матрицы  $R_0, \Gamma_0, W_0$  определяются по формуле (25),  $\tau_1, \tau_2 \geq 0$  любые диагональные матрицы порядков  $m \times m, N_1, N_2$  – любые матрицы порядков  $n \times (n - m), n \times (n - m)$  соответственно.

**Доказательство.** Поскольку выполнены условия лемм 1–5, то несобственный интеграл  $I_4 < \infty$  (см. (26)), в силу оценок (20), (22), (24), где матрицы  $R_0, \Gamma_0, W_0$  определяются по формуле (25). Матрицы  $\Lambda_i, i = 1, 2, 3, \Sigma_i, i = 1, 2, 3, W_0 = \Lambda_3 + \Sigma_3 + P_3$  вычисляются по формулам (21), (23). Так как матрица  $\Gamma_0 = \Gamma_0^*$ , то  $\dot{y}^*(t)\Gamma_0y(t) = \frac{d}{dt} [\frac{1}{2}y^*(t)\Gamma_0y(t)], t \in I$ , следовательно, несобственный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} [\frac{1}{2}y^*(t)\Gamma_0y(t)]dt = \frac{1}{2}y^*(t)\Gamma_0y(t) \Big|_0^\infty = \frac{1}{2}y^*(\infty)\Gamma_0y(\infty) - \frac{1}{2}y^*(0)\Gamma_0y(0) < \infty,$$

в силу оценки  $|y(\infty)| \leq c_2 < \infty, |y(0)| \leq c_2 < \infty$ .

Тогда

$$\int_0^\infty [\dot{y}^*(t)R_0\dot{y}(t) + y^*(t)W_0y(t)]dt \leq \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i - \frac{1}{2}y^*(\infty)\Gamma_0y(\infty) + \frac{1}{2}y^*(0)\Gamma_0y(0) < \infty.$$

По условию теоремы матрица  $R_0 = R_0^* \geq 0$ . Тогда квадратичная форма  $\dot{y}^*(t)R_0\dot{y}(t) = y^*(t)[\frac{1}{2}R_0 + \frac{1}{2}R_0^*]\dot{y}(t) \geq 0, \forall t, t \in I$ . Следовательно, верно неравенство (см. (27))

$$I_{40} = \int_0^\infty y^*(t)W_0y(t)dt \leq \int_0^\infty [\dot{y}^*(t)R_0\dot{y}(t) + y^*(t)W_0y(t)]dt < \infty.$$

Теорема доказана.

**Теорема 5** Пусть выполнены условия лемм 1–5, матрица  $\bar{A}$  – гурвицева, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$  и выполнены условия 1), 2) теоремы 4, и пусть, кроме того, матрица  $W_0 = W_0^* > 0$ . Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

**Доказательство.** Так как выполнены все условия теоремы 4, то верно неравенство (27). Следовательно, несобственный интеграл

$$I_{40} = \int_0^{\infty} y^*(t)T_0y(t)dt < \infty, \quad T_0 = \frac{1}{2}W_0 + \frac{1}{2}W_0^* > 0,$$

где скалярная функция  $V(y) = y^*T_0y > 0, \forall y, y \in R^n, y \neq 0, V(0) = 0$ . Поскольку выполнены все условия теоремы 1, то  $|y(t)| \leq c_2, |\dot{y}(t)| \leq c_3, \forall t, t \in I$ . Покажем, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ .

Предположим противное, т.е.  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \neq 0$ . Тогда существует последовательность  $\{t_k\}, t_k > 0, t_k \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$  такая, что  $|y(t_k)| \geq \varepsilon > 0, k = 1, 2, \dots$ . Выберем  $t_{k+1} - t_k \geq \varepsilon_1 > 0, k = 1, 2, \dots$ . Поскольку  $y(t), t \in I$  непрерывна дифференцируема,  $|y(t)| \leq c_2, |\dot{y}(t)| \leq c_3, t \in I$ , то  $|y(t) - y(t_k)| \leq c_3|t - t_k|, \forall t, t \in [t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}], k = 1, 2, \dots$ . Так как  $t_k - \frac{\varepsilon_1}{2} > t_{k-1}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2} > t_{k+1}, V(y) > 0, y \in R^n$ , то

$$\int_0^{\infty} V(y(t))dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} V(y(t))dt,$$

где  $|y(t)| = |y(t_k) + y(t) - y(t_k)| \geq |y(t_k)| - |y(t) - y(t_k)| \geq \varepsilon - c_3\frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_0 > 0, \forall t, t \in [t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}]$ . Всегда можно выбрать величину  $\varepsilon_1 > 0$  так, чтобы величина  $\varepsilon_0 > 0$ . Итак,  $|y(t)| \geq \varepsilon_0, |y(t)| \leq c_2, t \in [t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}]$ . Так как функция  $V(y)$  непрерывна на компактном множестве  $\varepsilon_0 \leq |y| \leq c_2$ , то существует число  $m > 0$  такое, что  $\min_{\varepsilon_0 \leq |y| \leq c_2} V(y) = m$ . Тогда значение интеграла

$$\int_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} V(y(t))dt \geq \varepsilon_1 m, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} V(y(t))dt = \int_0^{\infty} y^*(t)W_0y(t)dt \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} V(y(t))dt \geq \lim_{k \rightarrow \infty} k\varepsilon_1 m = \infty.$$

Это противоречит условию  $I_{40} < \infty$ , следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . Так как  $x(t) = K^{-1}y(t)$ ,  $t \in I$ ,  $K$  – неособая матрица, то  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ ,  $\forall \varphi, \varphi \in \Phi_0$ . Теорема доказана.

Из теорем 4, 5 следует, что в случаях когда матрица  $A$  – гурвицева, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$  и выполнены условия: 1)  $R_0 = R_0^* \geq 0$ ; 2)  $\Gamma_0 = \Gamma_0^*$ ; 3)  $W_0 = W_0^* > 0$  положение равновесия многомерной регулируемой системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

**Замечание 1** Как следует из доказательства теоремы 5, положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво и в случае, когда матрица  $W_0 = W_0^* \geq 0$ , если поверхность  $V(y) = y^*T_0y = 0$  не содержит целые траектории. В этом случае, интегральные кривые "прошивают" поверхность  $V(y) = 0$ . Заметим, что поверхность  $y^*T_0y = 0$  не содержит целые траектории, если  $y(t)T\dot{y}(t) \neq 0, t \in [0, \infty)$ .

Следует отметить, что в результате неособого преобразования получено тождество (15). Данное тождество использовано при определении несобственного интеграла  $I_3$ . Несобственный интеграл  $I_3$  зависит от произвольных матриц  $N_1, N_2$  порядков  $n \times (n-m)$ ,  $n \times (n-m)$  соответственно. Матрицы  $R_0, \Gamma_0, W_0$  зависят от матрицы  $N_1, N_2$ . Как следует из условия теорем 4, 5 матрицы  $\tau_1, \tau_2 \geq 0, N_1, N_2$  обеспечивают выполнение условий  $R_0 = R_0^* \geq 0, \Gamma_0 = \Gamma_0^*, W_0 = W_0^* > 0$ . Следовательно, матрицы  $N_1, N_2$  позволяют существенно расширить область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы. В методе А.И. Лурье и в методе В.М. Попова отсутствует несобственный интеграл  $I_3$ , следовательно, отсутствуют матрицы  $N_1, N_2$ . Наличие матриц  $N_1, N_2$  позволило решить проблему Айзермана.

### 3.5 Проблема Айзермана

Возникает вопрос: можно ли выделить класс многомерных регулируемых систем, путем выбора матрицы обратной связи  $S$ , для которого проблема Айзермана имеет решение. Для данного класса многомерных регулируемых систем, полученные результаты являются необходимыми и достаточными условиями абсолютной устойчивости. Заметим, что матрицы  $S$  и  $\bar{S}$  связаны соотношениями  $S = \bar{S}K, \bar{S} = SK^{-1}$ , матрицы  $A + B\mu_0S$  и  $\bar{A} + \bar{B}\mu_0\bar{S}$  подобные. В самом деле, если  $\varphi(\sigma) = \mu_0\sigma$ , где  $\sigma = Sx$  для системы (1), (2),  $\sigma = \bar{S}y$  для системы (10), то  $\dot{y} = \bar{A}y + \bar{B}\varphi(\sigma) = (\bar{A} + \bar{B}\mu_0\bar{S})y$ ,  $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma) = (A + B\mu_0S)x$ . Так как  $\bar{A} = KAK^{-1}, \bar{B} = KB, \bar{S} = SK^{-1}$ , то  $\bar{A} + \bar{B}\mu_0\bar{S} = K(A + B\mu_0S)K^{-1}$ . Отсюда следует, что матрица  $\bar{\mu} = \text{diag}(\bar{\mu}_{01}, \dots, \bar{\mu}_{0m})$  найденная из условия гурвицевости матрицы  $A + B\bar{\mu}_0S$  совпадает со значением  $\bar{\mu}_0$  определенным из условия гурвицевости матрицы  $\bar{A} + \bar{B}\bar{\mu}_0\bar{S}$ .

Как следует из теоремы 2 и леммы 5 несобственный интеграл

$$\begin{aligned}
 I_5 = I_1 + I_3 &= \int_0^{\infty} [y^*(t)R_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Gamma_1y(t) + y^*(t)W_1y(t)]dt = \\
 &= \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i < \infty,
 \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \Lambda_1 + P_1 = H_0^*\tau_1\bar{S}_1H_0 + N_1H_1, \\
 \Gamma_2 &= \Lambda_2 + P_2 = H_0^*\bar{S}_2H_1\bar{A}_{12} - H_0^*\bar{S}_1^*\tau_1\bar{A}_{11} - N_2\bar{A}_{12} + H_1^*N_1^*, \\
 W_1 &= \Lambda_3 + P_3 = -\bar{A}_{11}^*\tau_1\bar{S}_2\bar{A}_{12} - N_1\bar{A}_{12}.
 \end{aligned}$$

В частности, когда  $N_1 = -\bar{A}_{11}^*\tau_1\bar{S}_2 - \bar{A}_{12}^*K_2$ , то  $W_1 = \bar{A}_{12}^*K_2\bar{A}_{12} \geq 0$ , где  $K_2 = K_2^* > 0$  – матрица порядка  $n \times n$ .

**Теорема 6** Пусть выполнены условия лемм 1–3, матрицы  $A, A + B\mu S$ ,  $0 \leq \mu \leq \mu_0 < \bar{\mu}_0$  – гурвицевы, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ , и пусть, кроме того:

1) диагональная матрица  $\tau_1 = \text{diag}(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m})$ , матрицы  $N_1, N_2, \bar{S} = (\bar{S}_1, \bar{S}_2)$  порядков  $n \times (n - m), n \times (n - m), m \times n$  соответственно, такие, что

$$R_1 = R_1^* \geq 0, \quad \Gamma_1 = \Gamma_1^*; \tag{29}$$

2) матрица  $T_1 = \frac{1}{2}(W_1 + W_1^*) \geq 0$ , поверхность  $V_1(y) = y^*T_1y = 0$  не содержит целые траектории.

Тогда в секторе  $[0, \mu_0]$ ,  $\mu_0 = \bar{\mu}_0 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ ,  $\varepsilon_i > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$  – сколь угодно малые числа, проблема Айзермана имеет решение, где  $\bar{\mu}_0 = \text{diag}(\bar{\mu}_{01}, \dots, \bar{\mu}_{0m})$  предельное значение матрицы  $\mu_0 = \text{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m})$ , найденное из условия гурвицевости матрицы  $A + B\mu_0S$ .

**Доказательство.** Из (28) при выполнении условия (29), имеем

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int_0^{\infty} [y^*(t)R_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)W_1y(t)]dt \leq \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i)\tau_{1i}d\sigma_i - \\
 &\quad - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} y^*(t)\Gamma_1y(t) \right] dt < \infty,
 \end{aligned}$$

в силу того, что  $|y(\infty)| \leq c_2 < \infty$ ,  $|y(0)| \leq c_2 < \infty$ . Так как матрица  $T_1 = \frac{1}{2}(W_1 + W_1^*) \geq 0$  то

$$I_{50} = \int_0^{\infty} V_1(y(t))dt = \int_0^{\infty} y^*(t)T_1y(t)dt \leq I_5 < \infty,$$

где  $V_1(y(t)) = y^*(t)T_1y(t)$ ,  $t \in I$ . Поскольку поверхность  $V_1(y) = y^*T_1y = 0$  не содержит целые траектории, то повторяя доказательства теоремы 5, получим  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . Как следует из [14] достаточным условием отсутствия целых траекторий на множестве  $V_1(y) = y^*T_1y = 0$  является выполнение неравенства

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)^* \dot{y}(t) = 2y^*(t)T_1[\bar{A}y(t) + \bar{B}\varphi(\sigma(t))] \neq 0, \quad t \in I = [0, \infty).$$

Можно показать, что для системы (10) данное неравенство выполняется. Теорема доказана.

Как следует из леммы 4, уравнение (10) может быть представлено в виде

$$H_0\dot{y} = \bar{A}_1H_0y + \bar{A}_2H_1y + \varphi(\sigma), \quad H_1\dot{y} = \bar{A}_3H_0y + \bar{A}_4H_1y, \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_0, \quad (30)$$

где  $\bar{A}_{11} = (\bar{A}_1, \bar{A}_2)$ ,  $\bar{A}_{12} = (\bar{A}_3, \bar{A}_4)$ ,  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4$  – матрицы порядков  $m \times m$ ,  $m \times (n - m)$ ,  $(n - m) \times m$ ,  $(n - m) \times (n - m)$  соответственно. Уравнение (30) следует из равенства

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} H_0\dot{y} \\ H_1\dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 & \bar{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0y \\ H_1y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_m \\ O_{n-m,m} \end{pmatrix} \varphi(\sigma), \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_0.$$

**Теорема 7** Пусть выполнены условия теоремы 6, где матрица  $T_1 = H_0^*T_{11}H_0 \geq 0$ ,  $T_{11} = T_{11}^*$ , поверхность  $V_1(y) = y^*H_0^*T_{11}H_0y = 0$  не содержит целые траектории, матрица  $\bar{A}_4$  – гурвицева.

Тогда в секторе  $[0, \mu_0]$ ,  $\mu_0 = \bar{\mu}_0 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  – диагональная матрица порядка  $m \times m$  со сколь угодно малыми элементами, проблема Айзермана имеет решение.

**Доказательство.** Как следует из условия теоремы, выполнено неравенство ( $I_{50} < \infty$ ), где  $V_1(y) = y^*H_0^*T_{11}H_0y$ ,  $T_{11} = T_{11}^*$  – матрица порядка  $(n - m) \times (n - m)$ ,  $V_1(y) > 0$ ,  $\forall y$ ,  $y \in R^n$ ,  $V_1(0) = 0$ , за исключением поверхности  $V_1(y) = 0$ , которая не содержит целые траектории. Тогда  $\lim_{t \rightarrow \infty} H_0y(t) = 0$ .

Рассмотрим второе уравнение из (30). Если матрица  $\bar{A}_4$  порядка  $(n - m) \times n - m$  – гурвицева, то при  $\lim_{t \rightarrow \infty} H_0y(t) = 0$ , предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} H_1y(t) = 0$ . Так как  $y(t) = (H_0y(t), H_1y(t))$ ,  $t \in I$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ ,  $\forall \varphi$ ,  $\varphi \in \Phi_0$ . Теорема доказана.

Следует отметить, что матрицы  $\tau_1$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $\bar{S}$  обеспечивают выполнение условий  $R_1 = R_1^* \geq 0$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_1^*$ ,  $T = \frac{1}{2}(W_1 + W_1^*) \geq 0$ . Как следует из теоремы 6, проблема Айзермана имеет решение. Следовательно, теорема 6 дает необходимое и достаточное условия абсолютной устойчивости, а матрицы  $N_1$ ,  $N_2$  расширяют области абсолютной устойчивости в пространстве параметров.

Для многомерных регулируемых систем с ограниченными нелинейностями несобственный интеграл  $I_1 + I_2 < \infty$  без каких-либо дополнительных требований на значения конструктивных параметров системы.

#### 4 Результаты и обсуждение

Создан новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия многомерных регулируемых систем с ограниченными нелинейностями на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

Предлагаемый метод позволяет существенно расширить область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы, нежели известные результаты и в ряде случаев можно получить необходимое и достаточное условия абсолютной устойчивости.

Выделен класс многомерных нелинейных регулируемых систем, для которого проблема Айзермана имеет решение. Для данного класса регулируемых систем получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости.

### Список литературы

- [1] Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. - Издательство АН СССР, 1963. - 240 с.
- [2] Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. - М.: Гостехиздат, 1951. - 216 с.
- [3] Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. - М.: Наука, 1970. - 453 с.
- [4] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. - М.: Наука, 1978. - 400 с.
- [5] Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. - 1969.- № 5. С.- 38-48.
- [6] Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости системы управления с несколькими нелинейными элементами // АН СССР. Автоматика и телемеханика. - 1970. - № 12. С. - 83-94.
- [7] Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом" динамических систем // УМН. - 1949. - Т. 4, № 4. - С. - 186-188.
- [8] Kalman R.E. Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME. - 1957. - Vol. 79,3. PP. 553-556.
- [9] Плисс В.А. О проблеме Айзермана для случая системы трех дифференциальных уравнений. - 1958. - Докл. АН СССР, 3:121.
- [10] Айсагалиев С.А. К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения. - Минск-Москва. - 1994. - Т. 30, № 5. - С. - 748-757.
- [11] Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А. К теории глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем // Дифференциальные уравнения. Москва-Минск, МГУ. 8:30 (1999). С. 3-11.
- [12] Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N. Certain problems of Synchronization theory // Journal Inverse Ill Posed Problems. -2013. - № 21. - PP. 159-175.
- [13] Айсагалиев С.А. Проблема Айзермана в теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Математический сборник. - ИМРАН. - 2018. - Т. 209, № 6. - С. - 3-24.
- [14] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. - М.: Физматгиз, 1959. - 211 с.

### References

- [1] Aizerman M.A., Gantmaher F.R. *Absolyutnaya ustojchivost' reguliruemyh sistem* [Absolute stability of regulated systems], (Izdatelstvo AN SSSR, 1963) : 240.
- [2] Lure A.I. *Nekotoryie nelineynnye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya* [Some nonlinear problems in the theory of automatic control], (M.: Gostehizdat, 1951) : 216.
- [3] Popov V.M. *Giperustojchivost avtomaticheskikh sistem* [Hyperstability of automatic systems], (M.: Nauka, 1970) : 453.
- [4] Gelig A.H., Leonov G.A., Yakubovich V.A. *Ustoychivost nelineynyih sistem s needinstvennyim sostoyaniem ravnovesiya* [Stability of nonlinear systems with a non-unique equilibrium state], (M.: Nauka, 1978) : 400.

- 
- [5] *Aysagaliev S.A. Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti vyinuzhdennykh dvizheniy v nelineynykh sistemah* [On the determination of the region of absolute stability of forced motions in nonlinear systems], (*Izv. AN SSSR. Tehnicheskaya kibernetika*, 1969) : 38-48.
- [6] *Aysagaliev S.A. Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti sistemy upravleniya s neskol'kimi nelineynymi elementami* [Determining the region of absolute stability of a control system with several nonlinear elements], (*AN SSSR. Avtomatika i telemekhanika*, 1970) : 83-94.
- [7] *Aizerman M.A. Ob odnoy probleme, kasayusheysya ustoychivosti v "bolshom" dinamiceskikh sistem* [On one problem concerning stability in the "large" dynamic systems], (*UMN*, T. 4. V 4, 1949) : 186-188.
- [8] *Kalman R.E. Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems* (*Transactions of ASME*, Vol. 79.3., 1957) : 553-556.
- [9] *Pliss V.A. O probleme Aizermana dlya sluchaya sistemy trekh differentsialnykh uravneniy* [On the problem of Aizerman for the case of a system of three differential equations], (*Dokl. AN SSSR*, 3:121, 1958).
- [10] *Aysagaliev S.A. K teorii absolyutnoy ustoychivosti reguliruemyykh sistem* [To the theory of absolute stability of regulated systems], (*Differentsialnyye uravneniya*, Minsk-Moskva, T. 30. V 5, 1994) : 748-757.
- [11] *Aysagaliev S.A., Aipanov Sh.A. K teorii globalnoy asimptoticheskoy ustoychivosti fazovykh sistem* [To the theory of global asymptotic stability of phase systems], (*Differentsialnyye uravneniya*, Vol. 8, No 30, 1999) : 3-11.
- [12] *Aysagaliev S.A., Kalimoldayev M.N. Certain problems of Synchronization theory* (*Journal Inverse Ill Posed Problems*, 2013) : 159-175.
- [13] *Aysagaliev S.A. Problema Aizermana v teorii absolyutnoy ustoychivosti reguliruemyykh sistem* [The problem of Aizerman in the theory of absolute stability of regulated systems], (*Matematicheskii sbornik, IMRAN*, T. 209, V 6, 2018) : 3-24.
- [14] *Krasovskiy N.N. Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* [Some problems of the theory of stability of motion], (*M.: Fizmatgiz*, 1959) : 211.



МРНТИ 27.29.19

## Функция Грина дифференциального оператора на графе – звезде с общими граничными условиями

Жаруллаев Д.Б., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: dastan25102@mail.ru

Кангужин Б.Е., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: kanbalta@mail.ru

Коныркулжаева М.Н., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: maralkulzha@gmail.ru

Дифференциальные уравнения на графах – один из новых разделов теории дифференциальных уравнений и являются основополагающим понятием при анализе модели самых разных задач естествознания. Возникает оно и при анализе процессов в сложных системах, допускающих представление в виде набора одномерных континуумов, взаимодействующих только через концы. Дифференциальный оператор на графах в настоящее время активно изучаются математиками и встречаются в самых различных приложениях, к примеру химическая кинетика, химическая технология, квантовая механика, нанотехнология, биология, органическая химия, марковские процессы и т.д. В настоящей работе построена функция Грина дифференциального оператора на графе – звезде с общими граничными условиями. Под звездообразным графом в данной работе понимается дерево с одним внутренним узлом и  $m$  листьями. Используются стандартные условия Кирхгофа во внутренних вершинах и смешанные условия в граничных вершинах. Ребра графа – это одномерное гладкое регулярное многообразие (кривая). Вершина графа – точка. Применимость результатов данного исследования высока как в теоретическом плане – развитие исследований в теории дифференциальных уравнений с памятью на графах, так и в плане приложений к биологическим процессам, в частности нейробиологии, нанотехнологиях, в химической и нефтяной промышленности.

**Ключевые слова:** звездообразный граф, условия Кирхгофа, вершины графа, дифференциальный оператор на графах, функция Грина.

### Жұлдыз пішінді граф бойындағы жалпылама шекаралық шарттармен берілген дифференциалдық оператордың Грин функциясы

Жаруллаев Д.Б., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: dastan25102@mail.ru

Кангужин Б.Е., әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: kanbalta@mail.ru

Коныркулжаева М.Н., әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: maralkulzha@gmail.ru

Граф бойындағы дифференциалдық теңдеулер дифференциалдық теңдеулер теориясының жаңа тармақтарының бірі және жаратылыстану ғылымындағы көптеген мәселелерінің модельдерінің талдау кезінде олардың негізгі түсінігі болып табылады. Ол сондай-ақ, тек ұштар арқылы өзара әрекеттесетін біртұтас континуум жиынтығы ретінде ғана күрделі жүйелерде процестерді талдау кезінде пайда болады. Графтардағы дифференциалдық операторларды қазіргі уақытта математика ғалымдары белсенді зерттеуде және көптеген



түрліқолданбаларда, мысалы, химиялық кинетика, химиялық технология, кванттық механика, нанотехнология, биология, органикалық химия, Марков процестері және т.б. салаларда кездеседі. Осы мақалада біз дифференциалдық оператордың Грин функциясын жалпы шекаралас шарттарымен жұлдыз пішінді графта құрастырамыз. Жұлдыз пішінді граф дегеніміз бір ішкі төбесі бар және  $m$  жапырақтары бар ағаш болып табылады. Стандартты Кирхгоф шарттары ішкі төбелерде және шекаралық төбелерде аралас шарттары қолданылады. Графтың төбесі ол нүкте. Зерттеу нәтижелерінің қолданылуы теориялық тұрғыдан жиі кездеседі атап айтқанда, биологиялық процестерде, невробиологияға, нанотехнологияға, химиялық және мұнай өнеркәсібіне қолданылады.

**Түйін сөздер:** жұлдыз пішінді граф, Кирхгоф шарттары, графтың төбелері, графтың бойындағы дифференциалдық оператор, Грин функциясы.

### Green's function of differential operator on a star shaped graph with common boundary conditions

Kanguzhin B.E., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, +77081001131, E-mail: kanguzhin53@gmail.com

Konyrkulzhayeva M.N., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, +77010143306, E-mail: maralkulzha@gmail.com

Zharullayev D.B., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, +77076918702, E-mail: dastan25102@mail.ru

Differential equations on graphs are one of the new sections of the theory of differential equations and their fundamental concepts when analyzing models of a wide variety of problems in natural science. It also arises when analyzing processes in complex systems, allowing as a set of one-dimensional continuum that interact only through the ends. The differential operator on graphs is currently actively studying by mathematics and is found in many different applications, for example, chemical kinetics, chemical technology, quantum mechanics, nanotechnology, biology, organic chemistry, Markov processes, etc. In this paper, we construct the Green function of a differential operator on a star shaped graph with common boundary conditions. In this paper, a star shaped graph is a tree with one internal vertex and  $m$  leaves. Standard Kirchhoff conditions are used at the interior vertices and mixed conditions at the boundary vertices. The edges of the graph is a one-dimensional smooth regular manifold (curve). The top of the graph is a point. The applicability of the results of this study is high both in theoretical terms - the development of research in the theory of differential equations with memory on graphs, and in terms of applications to biological processes, in particular neurobiology, nanotechnology, in the chemical and petroleum industries.

**Key words:** star shaped graph, Kirchhoff's conditions, graph vertices, differential operator on graphs, Green's function.

## 1 Введение

Граф – звезда – это связанный граф, в котором не более одной вершины имеет степень больше единицы. Вершина, имеющая степень больше единицы, называется внутренней вершиной граф-звезды. Вершины, не являющиеся внутренними, называются граничными вершинами. Пусть задан ориентированный граф-звезда  $\mathfrak{S} = (v, \varepsilon)$ , где  $v, \varepsilon$  – множества. Элементы множества  $v$  – называются вершинами графа, через  $\varepsilon$  обозначено множество его дуг. При  $j = \overline{1, m}$  исходящую дугу  $e_j$  из вершины  $j$ . В дальнейшем считаем, что длина каждой дуги  $|e_j| = \pi$ . На каждой дуге  $e_j$  введем переменную  $x_j \in [0, \pi]$ . Для удобства обозначим значением  $x_j = 0$  соответствующую граничную вершину дуги  $e_j$ , а значением  $x_j = \pi$  внутреннюю вершину.

В предлагаемой работе исследуются свойства функций Грина краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на графе – звезде.

## 2 Обзор литературы

В последние 25-30 лет теория дифференциальных уравнений и краевых задач на геометрических графах (пространственных сетях) интенсивно развивается, тому свидетельствуют многочисленные научные работы. Начало исследований было положено в работах (Б.С. Павлов [1], Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин ([2], [3]) и др. ) и зарубежных (J. von Below ([4], [5]), G. Lumer [6], S. Nicaise [7]) математиков и касалось задач, описывающих различные модели: диффузии, колебаний упругих сеток, распространения нервного импульса и др. Работы зарубежных математиков, в основном, посвящены обоснованию разрешимости краевых задач на графах, исследованию структуры спектра этих задач, асимптотики спектра, получению оценок резольвенты. В настоящее время наиболее активные исследования проводятся творческой группой Ю.В.Покорного (А.В. Боровских, К.П. Лазарев, О.М. Пенкин, В.И. Прядиев, С.А. Шабров), Б.Е.Кангужина (Л.К.Жапсарбаева), Н.П. Бондаренко, основные результаты которых отражены в [8,9,10,11,12,13,14,15] (см. также библиографию в [8,9,10,11,12,13,14,15]). В частности, в работе [9] исследована функция Грина для задачи Дирихле на графе – звезде и приведены теоремы о разложениях.

## 3 Материал и методы

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Выведена функция Грина для линейного дифференциального оператора второго порядка на графе-звезде с общими граничными условиями. Используются методы теорий дифференциальных уравнений на геометрических графах.

### 3.1 Определение дифференциального оператора на графе – звезде

В этом разделе приведены известные определения и обозначения согласно работе [9]. Для дальнейших целей удобно ввести пространство

$$L_2(\mathfrak{S}) \doteq \prod_{e \in \varepsilon} L_2(e)$$

с элементами

$$\vec{Y}(\vec{X}) \doteq [y_e(x_e), e \in \varepsilon]^T$$

(где  $\vec{X} = (x_e, e \in \varepsilon)$  и  $\prod_{e \in \varepsilon}$  декартово произведение подпространств) и конечной нормой

$$\|\vec{Y}\|_{L_2(\mathfrak{S})} = \sqrt{\sum_{e \in \varepsilon} \int_e |y_e(x_e)|^2 dx_e}.$$

Точно также стандартным образом вводится пространство

$$W_2^2(\mathfrak{S}) \doteq \prod_{e \in \varepsilon} W_2^2(e).$$

множество  $D \subset W_2^2(\mathfrak{S})$ , элементы которого  $\vec{Y}(\vec{X}) \doteq [y_e(x_e)]^T, e \in \varepsilon$ , удовлетворяют во внутренней вершине графа – звезды условиям Кирхгофа [11]:

$$y_1(\pi) = y_2(\pi) = \dots = y_m(\pi), \tag{1}$$

$$y'_1(\pi) + \dots + y'_m(\pi) = 0. \tag{2}$$

На множестве  $D$  рассмотрим систему неоднородных дифференциальных уравнений

$$-y''_j(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j) + f_j(x_j), \quad x_j \in (0, \pi), \quad j = \overline{1, m}. \tag{3}$$

с условиями в граничных вершинах графа  $\mathfrak{S}$

$$\sum_{j=1}^m (\alpha_{js}y_j(0) + \beta_{js}y'_j(0)) = 0, \quad s = \overline{1, m}, \tag{4}$$

где  $\alpha_{js}$  и  $\beta_{js}$  - комплексные числа.

При этом  $\{q_j(x_j), 0 < x_j < \pi\}$  – набор вещественных непрерывных функций обычно называют потенциалами,  $\lambda$  - спектральный параметр.

Новым моментом данной работы является изучение общих граничных условия (4). В известных нам работах исследовались частные граничные условия [9,10]. Также надо обратить внимание на то, что условия Кирхгофа (1), (2) играют роль операции, определяющих максимальный оператор. В монографии [8] ставилась именно такая постановка задачи. Однако в работах [12] эти условия отнесены к граничным. Вследствие чего заключения и выводы работы [12] довольно громоздки. В данной статье внутренние условия определяют максимальный оператор, а граничные условия определяют его корректные сужение.

### 3.2 Функция Грина задачи (1)-(4)

В данном пункте вычислим решения  $y_j(x_j), 0 < x_j < \pi, j = \overline{1, m}$  задачи (1)-(4) для любых правых частей  $f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)$  уравнения (3).

Сначала рассмотрим частный случай, когда  $f_1(x_1) \neq 0$  и  $f_j(x_j) = 0, j = \overline{2, m}$ . По набору функций  $f_1(x_1), f_j(x_j) \equiv 0, j = \overline{2, m}$  находим решения  $y_1(x_1), \dots, y_m(x_m)$ .

Пусть  $e_j$  –  $j$ -ая дуга графа  $\mathfrak{S}$ . На дуге  $e_j$  вводим функций  $S_{0j}(x_j, \lambda), S_{\pi j}(x_j, \lambda), C_{0j}(x_j, \lambda), C_{\pi j}(x_j, \lambda)$ , которые являются решениями однородных уравнений с условиями Коши

$$\begin{aligned} -y''_j(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) &= \lambda y_j(x_j), \quad 0 < x_j < \pi \\ S_{0j}(0) = 0, S'_{0j}(0) = 1, C_{0j}(0) = 1, C'_{0j}(0) &= 0 \\ S_{\pi j}(\pi) = 0, S'_{\pi j}(\pi) = 1, C_{\pi j}(\pi) = 1, C'_{\pi j}(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Решение задачи (1)-(4) ищем в виде

$$\begin{cases} y_2(x_2, \lambda) = A_1 C_{\pi 2}(x_2, \lambda) + B_2 S_{\pi 2}(x_2, \lambda), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ y_m(x_m, \lambda) = A_1 C_{\pi m}(x_m, \lambda) + B_m S_{\pi m}(x_m, \lambda), \\ y_1(x_1, \lambda) = A_1 C_{\pi 1}(x_1, \lambda) + B_1 S_{\pi 1}(x_1, \lambda) + \int_0^{x_1} \frac{S_{01}(t, \lambda) S_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \int_{x_1}^{\pi} \frac{S_{01}(x_1, \lambda) S_{\pi 1}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt, \end{cases}$$

(5)

где  $A_1, B_1, B_2, \dots, B_m$  – некоторые константы.

$$D_1(t, \lambda) = \begin{vmatrix} S_{\pi 1}(t, \lambda) & S_{01}(t, \lambda) \\ S'_{\pi 1}(t, \lambda) & S'_{01}(t, \lambda) \end{vmatrix}$$

Покажем, что функций заданные системой (5) удовлетворяют уравнениям (3) и условиям (1),(2).

Продифференцировав по  $t$  обе части заданного равенства, получим:

$$D'_j(t_j, \lambda) = -S_{0j}(t, \lambda)S''_{\pi j}(t, \lambda) + S''_{0j}(t, \lambda)S_{\pi j}(t, \lambda)$$

Из того, что

$$S''_{\pi j}(t_j, \lambda) = (q_j(t_j) - \lambda)S_{\pi j}(t_j, \lambda)$$

$$S''_{0j}(t_j, \lambda) = (q_j(t_j) - \lambda)S_{0j}(t_j, \lambda)$$

вытекает

$$D'_j(t, \lambda) = 0 \Rightarrow D_j(t_j, \lambda) \equiv const \equiv S_{\pi j}(0, \lambda) \equiv -S_{0j}(\pi, \lambda).$$

Непосредственным вычислениями убедимся в том, что система функции (5) удовлетворяет соотношению (1) условиям Кирхгофа

$$y_j(\pi, \lambda) = A_1 C_{\pi j}(\pi, \lambda) + B_j S_{\pi j}(\pi, \lambda) = A_1, \quad j = \overline{2, m}$$

так как  $C_{\pi j}(\pi, \lambda) = 1$  и  $S_{\pi j}(\pi, \lambda) = 0$ .

$$y_1(\pi, \lambda) = A_1 C_{\pi 1}(\pi, \lambda) + B_1 S_{\pi 1}(\pi, \lambda) + \int_0^\pi \frac{S_{01}(t, \lambda) S_{\pi 1}(\pi, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt = A_1,$$

так как  $C_{\pi 1}(\pi, \lambda) = 1$ ,  $S_{\pi 1}(\pi, \lambda) = 0$ . Проверим, что система функции (5) удовлетворяет дифференциальным уравнениям (3).

Вычислим

$$y''_j(x_j, \lambda) = A_1 C''_{\pi j}(x_j, \lambda) + B_j S''_{\pi j}(x_j, \lambda) \quad j = \overline{2, m}.$$

Так как  $C_{\pi j}(x_j, \lambda)$  и  $S_{\pi j}(x_j, \lambda)$  являются решениями однородных уравнений,

$$C''_{\pi j}(x_j, \lambda) = (q_j(x_j) - \lambda)C_{\pi j}(x_j, \lambda),$$

$$S''_{\pi j}(x_j, \lambda) = (q_j(x_j) - \lambda)S_{\pi j}(x_j, \lambda).$$

то

$$\begin{aligned} y''_j(x_j, \lambda) &= A_1 (q_j(x_j) - \lambda) C_{\pi j}(x_j, \lambda) + B_j (q_j(x_j) - \lambda) S_{\pi j}(x_j, \lambda) = \\ &= (q_j(x_j) - \lambda) y_j(x_j, \lambda) \end{aligned}$$

при  $x_j \in (0, \pi)$ ,  $j = \overline{2, m}$ .

Теперь вычислим  $y''_1(x_1, \lambda)$

$$y''_1(x_1, \lambda) = A_1 C''_{\pi 1}(x_1, \lambda) + B_1 S''_{\pi 1}(x_1, \lambda) + \int_0^{x_1} \frac{S_{01}(t, \lambda) S''_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t) dt +$$

$$+ \int_{x_1}^{\pi} \frac{S''_{01}(x_1, \lambda) S_{\pi 1}(t, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t) dt - f_1(x_1).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} C''_{\pi 1}(x_1, \lambda) &= (q_1(x_1) - \lambda) C_{\pi 1}(x_1, \lambda), \\ S''_{01}(x_1, \lambda) &= (q_1(x_1) - \lambda) S_{01}(x_1, \lambda), \\ S''_{\pi 1}(x_1, \lambda) &= (q_1(x_1) - \lambda) S_{\pi 1}(x_1, \lambda), \end{aligned}$$

то

$$y''_1(x_1, \lambda) = (q_1(x_1) - \lambda) \left[ A_1 C_{\pi 1}(x_1, \lambda) + B_1 S_{\pi 1}(x_1, \lambda) + \int_0^{\pi} G_{D1}(x_1, t, \lambda) f_1(t) dt \right] - f_1(x_1).$$

Учитывая, что  $y_1(x_1, \lambda) = A_1 C_{\pi 1}(x_1, \lambda) + B_1 S_{\pi 1}(x_1, \lambda) + \int_0^{\pi} G_{D1}(x_1, t, \lambda) f_1(t) dt$ , получаем

$$y''_1(x_1, \lambda) = (q_1(x_1) - \lambda) y_1(x_1, \lambda) - f_1(x_1),$$

которое показывает, что система функции (5) удовлетворяет дифференциальным уравнениям (1).

Для краткости введем обозначения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ U_1 & V_{11} & V_{21} & \dots & V_{k1} & \dots & V_{m1} \\ U_2 & V_{12} & V_{22} & \dots & V_{k2} & \dots & V_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m & V_{1m} & V_{2m} & \dots & V_{km} & \dots & V_{mm} \end{vmatrix},$$

$$M_1(t_1, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \frac{S_{01}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)} \\ V_{11} & V_{21} & \dots & V_{k1} & \dots & V_{m1} & \beta_{11} \\ V_{12} & V_{22} & \dots & V_{k2} & \dots & V_{m2} & \beta_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{1m} & V_{2m} & \dots & V_{km} & \dots & V_{mm} & \beta_{1m} \end{vmatrix},$$

$$M_2(t_1, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \frac{S_{01}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)} \\ U_1 & V_{11} & V_{21} & \dots & V_{(k-1)1} & V_{(k+1)1} & \dots & V_{m1} & \beta_{11} \\ U_2 & V_{12} & V_{22} & \dots & V_{(k-1)2} & V_{(k+1)2} & \dots & V_{m2} & \beta_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m & V_{1m} & V_{2m} & \dots & V_{(k-1)m} & V_{(k+1)m} & \dots & V_{mm} & \beta_{1m} \end{vmatrix}$$

Сформулируем следующую теорему:

**Теорема 1** Если  $f_1(x) \neq 0$  и  $f_2(x_2) = f_3(x_3) = \dots = f_m(x_m) = 0$ , то решение задачи (1)-(4) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} y_k(x_k, \lambda) &= (-1)^{(m+3)} \frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^{\pi} C(x_k, \lambda) M_1(t_1, \lambda) \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t_1) dt_1 + \\ &+ (-1)^{m+k+3} \frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^{\pi} S(x_k, \lambda) M_2(t_1, \lambda) \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t_1) dt_1 + \end{aligned}$$

$$+\delta_{1k} \int_0^\pi G_{D_1}(x_1, t_1, \lambda) f_1(t_1) dt_1, k = \overline{1, m}$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

$$G_{D_j}(x_j, t_j, \lambda) = \begin{cases} \frac{S_{0j}(t_j, \lambda) S_{\pi j}(x_j, \lambda)}{S_{\pi j}(0, \lambda)}, & 0 < t_j < x_j \\ \frac{S_{0j}(x_j, \lambda) S_{\pi j}(t_j, \lambda)}{S_{\pi j}(0, \lambda)}, & x_j < t_j < \pi \end{cases} \quad j = \overline{1, m}$$

**Доказательство:**

Решение задачи (1)-(4) ищем в виде:

$$\begin{cases} y_2(x_2, \lambda) = A_1 C_{\pi 2}(x_2, \lambda) + B_2 S_{\pi 2}(x_2, \lambda), \\ \dots \\ y_m(x_m, \lambda) = A_1 C_{\pi m}(x_m, \lambda) + B_m S_{\pi m}(x_m, \lambda), \\ y_1(x_1, \lambda) = A_1 C_{\pi 1}(x_1, \lambda) + B_1 S_{\pi 1}(x_1, \lambda) + \int_0^\pi G_{D_1}(x_1, t_1, \lambda) f_1(t_1) dt_1 \end{cases}$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$U_s = \sum_{i=1}^m (\alpha_{js} C_{\pi j}(0, \lambda) + \beta_{js} C'_{\pi j}(0, \lambda)), \quad V_{js} = \alpha_{js} S_{\pi j}(0, \lambda) + \beta_{js} S'_{\pi j}(0, \lambda)$$

$$\begin{cases} B_1 + \dots + B_k + \dots + B_m + \int_0^\pi \frac{S_{01}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t_1) dt_1 = 0 \\ A_1 U_1 + B_1 V_{11} + \dots + B_k V_{k1} + \dots + B_m V_{m1} + \beta_{11} \int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t_1) dt_1 = 0 \\ A_1 U_2 + B_1 V_{12} + \dots + B_k V_{k2} + \dots + B_m V_{m2} + \beta_{12} \int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t_1) dt_1 = 0 \\ \dots \\ A_1 U_m + B_1 V_{1m} + \dots + B_k V_{km} + \dots + B_m V_{mm} + \beta_{1m} \int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t_1) dt_1 = 0 \\ A_1 C_{\pi k}(x_k, \lambda) + B_k S_{\pi k}(x_k, \lambda) + \delta_{1k} \int_0^\pi G_{D_1}(x_1, t_1, \lambda) f_1(t_1) dt_1 - y_k(x_k, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Запишем заданную систему в матричном виде:

$$Q \cdot \vec{h} = \vec{\theta}$$

где  $\vec{h} = [A_1, B_1, \dots, B_m, 1]^T$ ,  $\vec{\theta}$  – нулевой вектор;

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \int_0^\pi \frac{S_{01}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t_1) dt_1 \\ U_1 & V_{11} & V_{21} & \dots & V_{k1} & \dots & V_{m1} & \beta_{11} \int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t_1) dt_1 \\ U_2 & V_{12} & V_{22} & \dots & V_{k2} & \dots & V_{m2} & \beta_{12} \int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t_1) dt_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m & V_{1m} & V_{2m} & \dots & V_{km} & \dots & V_{mm} & \beta_{1m} \int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t_1) dt_1 \\ C_{\pi k}(x_k, \lambda) & 0 & 0 & \dots & S_{\pi k}(x_k, \lambda) & \dots & 0 & \delta_{1k} \int_0^\pi G_{D_1}(x_1, t_1, \lambda) f_1(t_1) dt_1 - y_k(x_k, \lambda) \end{pmatrix}$$

Так как однородная квадратная система (6) имеет ненулевое решение, то определитель матрицы  $Q$  равен нулю:

$$\det Q = 0$$

Если разложить последний определитель по последней строке, то получим

$$\begin{aligned} & (-1)^{m+3} C_{\pi k}(x_k, \lambda) \int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} M_1(t_1, \lambda) f_1(t) dt + \\ & + (-1)^{m+k+3} S_{\pi k}(x_k, \lambda) \int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} M_2(t_1, \lambda) f_1(t) dt + \\ & + \left( \delta_{1k} \int_0^\pi G_{D_1}(x_1, t_1, \lambda) f_1(t_1) dt - y_k(x_k, \lambda) \right) \Delta(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} y_k(x_k, \lambda) &= \frac{(-1)^{m+3}}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi C_{\pi k}(x_k, \lambda) \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} M_1(t_1, \lambda) f_1(t_1) dt_1 + \\ & + \frac{(-1)^{m+k+3}}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi S_{\pi k}(x_k, \lambda) \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} M_1(t_1, \lambda) f_1(t_1) dt_1 + \\ & + (-1)^{m+k+3} S(x_k, \lambda) \int_0^\pi \frac{S_{\pi 1}(t_1, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} M_2(t_1, \lambda) f_1(t) dt + \delta_{1k} \int_0^\pi G_{D_1}(x_1, t_1, \lambda) f_1(t_1) dt_1 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 2** Для произвольных  $f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)$  функция Грина задачи (1)-(4) имеет представление

$$\begin{aligned} G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, t, \lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \cdot \begin{bmatrix} A_1 C_{\pi 1}(x_1, \lambda) + B_1 S_{\pi 1}(x_1, \lambda) \\ A_1 C_{\pi 2}(x_2, \lambda) + B_2 S_{\pi 2}(x_2, \lambda) \\ A_1 C_{\pi 3}(x_3, \lambda) + B_3 S_{\pi 3}(x_3, \lambda) \\ \dots \\ A_1 C_{\pi m}(x_m, \lambda) + B_m S_{\pi m}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} \left[ \frac{S_{\pi 1}(t, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)}, \frac{S_{\pi 2}(t, \lambda)}{S_{\pi 2}(0, \lambda)}, \dots, \frac{S_{\pi m}(t, \lambda)}{S_{\pi m}(0, \lambda)} \right] + \\ & + \text{diag} \{G_{D_1}(x_1, t, \lambda), G_{D_2}(x_2, t, \lambda), \dots, G_{D_m}(x_m, t, \lambda)\} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= (-1)^{m+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \frac{S_{01}(t, \lambda)}{S_{\pi 1}(t, \lambda)} \\ V_{11} & V_{21} & \dots & V_{k1} & \dots & V_{m1} & \beta_{11} \\ V_{12} & V_{22} & \dots & V_{k2} & \dots & V_{m2} & \beta_{12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_{1m} & V_{2m} & \dots & V_{km} & \dots & V_{mm} & \beta_{1m} \end{vmatrix} \\ B_k &= (-1)^{m+k+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \frac{S_{0k}(t, \lambda)}{S_{\pi k}(t, \lambda)} \\ U_1 & V_{11} & \dots & V_{(k-1)1} & V_{(k+1)1} & \dots & V_{m1} & \beta_{k1} \\ U_2 & V_{12} & \dots & V_{(k-1)2} & V_{(k+1)2} & \dots & V_{m2} & \beta_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m & V_{1m} & \dots & V_{(k-1)m} & V_{(k+1)m} & \dots & V_{mm} & \beta_{km} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

**Доказательство:** Для краткости введем следующее обозначение

$$\vec{Y}_j(\vec{X}) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \cdot \int_0^\pi \begin{bmatrix} A_1 C_{\pi 1}(x_1, \lambda) + B_1 S_{\pi 1}(x_1, \lambda) \\ A_1 C_{\pi 2}(x_2, \lambda) + B_2 S_{\pi 2}(x_2, \lambda) \\ \dots \\ A_1 C_{\pi j}(x_j, \lambda) + B_3 S_{\pi j}(x_j, \lambda) \\ \dots \\ A_1 C_{\pi m}(x_m, \lambda) + B_m S_{\pi m}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} \frac{S_{\pi j}(t_j, \lambda)}{S_{\pi j}(0, \lambda)} f_j(t_j) dt_j +$$

$$+ \int_0^\pi \begin{bmatrix} G_{D_j}(x_j, t_j, \lambda) \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} f_j(t_j) dt_j$$

Тогда для произвольных  $f_j(x_j)$ ,  $j = \overline{1, m}$  решение задачи (1)-(4) может быть представлена в виде

$$\vec{Y}(\vec{X}) = \vec{Y}_1(\vec{X}) + \vec{Y}_2(\vec{X}) + \dots + \vec{Y}_m(\vec{X}) =$$

$$= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \cdot \int_0^\pi \begin{bmatrix} A_1 C_{\pi 1}(x_1, \lambda) + B_1 S_{\pi 1}(x_1, \lambda) \\ A_1 C_{\pi 2}(x_2, \lambda) + B_2 S_{\pi 2}(x_2, \lambda) \\ A_1 C_{\pi 3}(x_3, \lambda) + B_3 S_{\pi 3}(x_3, \lambda) \\ \dots \\ A_1 C_{\pi m}(x_m, \lambda) + B_m S_{\pi m}(x_m, \lambda) \end{bmatrix}$$

$$\left[ \frac{S_{\pi 1}(t, \lambda)}{S_{\pi 1}(0, \lambda)} f_1(t) + \frac{S_{\pi 2}(t, \lambda)}{S_{\pi 2}(0, \lambda)} f_2(t) + \dots + \frac{S_{\pi m}(t, \lambda)}{S_{\pi m}(0, \lambda)} f_m(t) \right] dt +$$

$$+ \int_0^\pi \text{diag} \{G_{D_1}(x_1, t, \lambda), G_{D_2}(x_2, t, \lambda), \dots, G_{D_m}(x_m, t, \lambda)\} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_m(t) \end{bmatrix} dt$$

*Теорема доказана*

#### 4 Результаты и обсуждение

В настоящей работе выведена функция Грина для дифференциального оператора на звездообразном графе с общими граничными условиями. Значительную трудность представляет построение функции Грина на геометрических графах при значениях независимых переменных близких к вершинам графа. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и смешанные краевые условия в граничных вершинах. Предлагается конструктивная схема построения функции Грина краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля.



## 5 Заключение

В настоящей работе построена функция Грина дифференциального оператора на звездообразном графе. Доказывается существование разложения произвольной функции, заданного на графе, по собственным функциям. Под звездным графом понимается граф состоящий из ребер, входящих в одну внутреннюю вершину. Задача является моделью колебания простой системы из нескольких стержней с примыкающим концом.

## 6 Благодарности

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (грант "Конечномерные возмущения фредгольмовых операторов и их спектральный анализ 2018-2020 годы.)

## Список литературы

- [1] Павлов Б.С., М.Д. Фадеев Модель свободных электронов и задача рассеяния // Теор. и мат. физика. - 1983. - Т. 55, № 2. - С.257-269.
- [2] Покорный Ю.В. О спектре некоторых задач на графах // Успехи мат. наук. -1987. - Т. 42, №4. - С.128-129.
- [3] Пенкин О.М. О краевой задаче на графе // Дифференциальные уравнения. - 1988. - Т.24, №4. - С.701-703.
- [4] Von Below J. Classical solvability of linear parabolic equations on networks // Differential Equation. - 1988. - V. 72, № 2. - P.316-337.
- [5] Von Below J. Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks // Math. Metli. Appl. Sc. - 1988. - V. 10, № 2. - P.383-395.
- [6] Lumer G. Connecting of local operators and evolution equations on network // Lect. Notes Math. - 1980. - V. 787. - P.219-234.
- [7] Nicaise S. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission // Lect.Notes Math. №1771. - Berlin, 1985. - P.532-541.
- [8] Покорный Ю.В. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах - М. : Физматлит, 2004. - 272 с.
- [9] Кангужин Б.Е. Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде // Вестник КазНУ им. аль-Фараби. - 2018. - № 1(97) - P.67-90.
- [10] Bondarenko N.P. Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on star-shaped graph with mixed boundary conditions // J. Inverse Ill - Posed Probl. - 2018. - № 26(1)- P.1-12.
- [11] Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. - СПб.: СПбГУН и П.Т., - 2010. - С.181.
- [12] Завгородный М.Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе// Дифференциальные уравнения. - 2014. Т. 50, №4. - С.446-456.
- [13] Kurasov P., Stenberg F. On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A. Math. Gen. - 2002. - V.20. - P.647-672.
- [14] Покорный Ю.В., Приядиев В.Л., Аль-Обейд А. Об осцилляционных свойствах спектра краевой задачи на графе // Матем. заметки. - 1996. - Т.60, №3. - С.468-469.
- [15] Покорный Ю.В., Приядиев В.Л. Некоторые проблемы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственных сетях // Успехи мат. науки. - 2004. - Т.59. №6. - С.115-150.

## References

- [1] Pavlov B.S. and Phadeev M.D., "Model svobodnyh elektronov i zadacha rasseiyaniya [Model of free electrons and scattering problem]", *Teor.i.matfizika*. vol. 55, no 2(1983): 257-269.
- [2] Pokornyi U.V., "O spectre nekotoryh zadach na graphah [About the spectrum of some problems on the graph]", *Uspehi mat.nauk*. vol. 42, no 4(1987): 128-129.
- [3] Penkin O.M., "O krayevoi zadache na graphe [About boundary value problems on a graph]", *Differentsialnye uravneniya* vol. 24, no 3 (1988): 701-703.
- [4] Von Below J., "Classical solvability of linear parabolic equations on networks", *Differential Equation*. vol.72, no 2(1988): 316-337.
- [5] Von Below J., "Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks", *Math. Metli. Appl. Sc.* vol.10, no 2(1988): 383-395.
- [6] Lumer G., "Connecting of local operators and evolution equations on network", *Lect. Notes Math.* vol.787, 13(1980): 219-234.
- [7] Nicaise S., "Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impuls transmission", *Lect.Notes Math.* no 1771 (1985): 532-541.
- [8] Pokornyi U.B., "Differentsialnye uravneniya na geometricheskikh graphah [Differencial equations on geometric graphs]", *M.: Phizmatlit* (2004),272-274.
- [9] Kanguzhin B.E., "Funkciya Grina zadachi Dirihle dlya differentsialnogo operatora na grafe-zvezde[Green's function of Dirichlet problem for differential operators on a star-shaped graphs]", *Vestnik KazNU* 1(2018): 67-90.
- [10] Bondarenko N.P., "Partial inverse problems for the Sturm-Liouville operator on star-shaped graph with mixed boundary conditions", *J. Inverse Ill - Posed Probl.* 26(2018): 1-12.
- [11] Afanasev N.A., Bulot L.P., "Electrotehnika i elektronika[Electrotechnik and elektronik]", SPbGUN and P.T.(2010): 181-183.
- [12] Zavgorodnii M.G., "Sopryazhennye i samosopryazhennye krayvye zadachi na geometricheskom graphe [Conjugate and self-adjoint boundary value problems on a geometric graph]", *Differential equations* vol. 50, no 4 (2014): 446-456.
- [13] Kurasov P., Stenberg F., "On the inverse scattering problem on branching graphs", *J. Phys. A. Math. Gen* vol. 20. 45(2002): 647-672.
- [14] Pokornyi U.V., Priadiev V.L., Al-Obeid A. "Ob oscilyacionnyh svoistvah spectra kraevoi zadachi na graphe", *Matem.zametki* vol.60, 3(1996): 468-469.
- [15] Pokornyi U.V., Priadiev V.L., "Nekotorye problemy kachestvennoi teorii Shturma-Liuvillya na prostranstvennykh setyah [Some problems of the qualitative theory of Sturm-Liouville on spatial networks]", *Uspehi mat. nauk*. vol. 59, no 6 (2004): 115-150.

2-бөлім

Раздел 2

Section 2

Механика

Механика

Mechanics

IRSTI 89.57.35

**Studying the change of average waves of the Caspian Sea  
using the altimetry data**

Rakisheva Z.B., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail:  
Zaure.Rakisheva@kaznu.kz

Kudryavtseva N., Wave Engineering Laboratory, Department of Cybernetics, School of  
Science, Tallinn University of Technology, Tallinn, Estonia, E-mail: nadia@ioc.ee

Kussembayeva K.K., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail:  
kussembayevakuanysheva@gmail.com

Sakhayeva A.K., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, E-mail:  
sahaeva.aigerim@gmail.com

For the coastal countries, the Caspian Sea is an essential economic object, including the implementation of transport routes, fishing, the availability of potential mineral resources of the seabed and deeper layers. Also, the ecological state of this region is of great importance. Therefore, the study of the wave climate of the sea is vital for all riparian countries. Satellite altimetry has become an increasingly important technology for monitoring of continental surface waters. In this article, we explore a possibility to obtain reliable information on the wave climate in the Caspian Sea using satellite altimetry. We used measurements of significant wave heights from a Jason-1 mission over ten-year period. The data were cleaned and checked for the possible errors. The analysis of average significant wave heights in the Caspian Sea showed overall a consistent picture. The highest wave heights are observed in the Middle part of the basin. The waves have lesser intensity in the Southern basin and the Northern part. The analysis of seasonal variability showed that the most energetic waves appear in the winter season.

**Key words:** satellite altimetry, the Caspian Sea, the inland reservoir, wave climate.

**Каспий теңізінің орташа толқындарын альтиметриялық мәліметтер бойынша зерттеу**

Ракишева З.Б., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан  
Республикасы, E-mail: Zaure.Rakisheva@kaznu.kz

Кудрявцева Н., Таллинн Техникалық университеті, Кибернетика факультеті, Ғылымдар мектебі,  
толқынды инженерия зертханасы, Таллин қ., Эстония, E-mail: nadia@ioc.ee

Күсембаева Қ.К., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан  
Республикасы, E-mail: kussembayevakuanysheva@gmail.com

Сахаева А.К., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы,  
E-mail: sahaeva.aigerim@gmail.com

Каспий теңізі жағалауындағы мемлекеттер үшін көліктік бағыттарды, балық аулау, теңіз түбіндегі және одан да тереңірек қабаттардағы маңызды минералды ресурстарды қоса алғандағы, маңызды экономикалық объект болып табылады. Сонымен қоса, аталған аумақтың экологиялық жағдайы да өте маңызды. Сондықтан теңіздің толқын климатын зерттеу барлық жағалаудағы елдер үшін өте маңызды. Серіктік альтиметрия континенттік су бетін бақылау үшін қолданылатын маңызды технологиялардың біріне айналуда. Бұл

мақалада серіктік альтиметрия көмегімен Каспий теңізіндегі толқын климаты туралы сенімді ақпарат алу мүмкіндіктері қарастырылады. Jason-1 серігінің он жыл көлеміндегі маңызды толқын биіктігінің өлшемдері пайдаланылды. Мәліметтер мүмкін болатын қателіктерден тазартылды. Жалпы алғанда Каспий теңізінің орташа маңызды толқын биіктіктері жүйелі мәліметтер көрсетті. Жоғарғы ретті толқындар бассейнің орталық бөлігінде байқалды. Салыстырмалы түрде төменгі ретті толқындар оңтүстік және солтүстік бөліктерде байқалды. Маусымдық өзгерулерді талдау арқылы, қарқындылығы бойынша ең қуатты толқындар қыс мезгілінде болатынын байқаймыз.

**Түйін сөздер:** серіктік альтиметрия, Каспий теңізі, ішкі суқоймасы, толқын климаты.

**Изучение изменения средних волн в Каспийском море по альтиметрическим данным**  
Ракишева З.Б., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика  
Казахстан, E-mail: Zaure.Rakisheva@kaznu.kz

Кудрявцева Н., Лаборатория волновой инженерии, факультет кибернетики, Школа наук,  
Таллиннский Технический университет, г. Таллинн, Эстония, E-mail: nadia@ioc.ee  
Кусембаева К.К., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика  
Казахстан, E-mail: kussembayevakuananysh@gmail.com

Сахаева А.К., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика  
Казахстан, E-mail: sahaeva.aigerim@gmail.com

Для прибрежных стран Каспийское море является важным экономическим объектом, включая реализацию транспортных маршрутов, рыболовство, наличие потенциальных минеральных ресурсов морского дна и более глубоких слоев. Кроме того, большое значение имеет экологическое состояние этого региона. Поэтому изучение волнового климата моря жизненно важно для всех прибрежных стран. Спутниковая альтиметрия становится все более важной технологией для мониторинга континентальных поверхностных вод. В этой статье рассматривается возможность получения достоверной информации о волновом климате в Каспийском море с помощью спутниковой альтиметрии. Были использованы измерения значительных высот волн со спутника Jason-1 за десятилетний период. Данные были очищены и проверены на возможные ошибки. Анализ средних значительных высот волн в Каспийском море показал в целом непротиворечивую картину. Наибольшие высоты волн наблюдаются в средней части бассейна. Меньшую интенсивность волны имеют в южном бассейне и северной части. Анализ сезонной изменчивости показал, что наибольшие по мощности волны наблюдаются в зимний сезон.

**Ключевые слова:** спутниковая альтиметрия, Каспийское море, внутренний водоем, волновой климат.

## 1 Introduction

The Caspian Sea has a surface area of 371,000 km<sup>2</sup> and is the largest lake in the world, located in the middle latitudes (from 37° N to 47° N). It has a shared border in the west – with Azerbaijan, in the northwest with Russia, in the southeast – with Turkmenistan, in the south – with Iran, and in the north-east – with Kazakhstan. The length of the sea is approximately 600 km along the West-East line and up to 1000 km along the North-South line [1]. The Caspian Sea has a complex bathymetry. The depths reach approximately 800 m in the central part, and ~ 1000 m in the southern basin, whereas the northern part of the basin, is very shallow (depth < 25 m) [2].

The Caspian Sea experienced substantial changes in the water level over the past 50 years which resulted in a variable with time bathymetry. Taking into account the influence of the bottom topography on the wave climate, one can expect that the change in the water level will to some extent affect the wave climate of the Caspian Sea. [1].

Wind waves are the primary factor that forms the shores of inland seas. This is typical of coastal areas where fluctuations in the water level caused by tides are insignificant or absent.

The properties of waves in such water bodies usually have extensive spatio-temporal variability, and the wave climate can vary significantly in different areas of the sea [3]. Although wave properties usually reflect the main wind characteristics, the absence of proper quality wind and wave measurements for the Caspian Sea makes it very difficult to understand and predict the wave action on the coast or to determine wave conditions along the main navigation lines [4].



Figure 1: Caspian Sea, located in the middle latitudes from  $37^\circ$  N to  $47^\circ$  N

## 2 Literature review

Due to the insufficient number of wave observations around the world, various methods for estimating wave characteristics have been developed. Currently, three sources of wave data are available for the research purposes: direct in-situ measurements, numerical modeling, and satellite altimetry [5]. Direct measurements of waves in the Caspian Sea are performed since the mid-1970s [4], [6], [7], [8]. However, they are not publicly available and provide only qualitative variability of main characteristics of wave fields. Moreover, direct measurements are performed only in a few locations, and it is not possible to investigate spatial characteristics of the wave fields over the entire area of interest. The in-situ datasets in the Caspian Sea have long gaps, and, some frequently used characteristics (e.g., annual mean wave height or average period) can become meaningless for the data with gaps [7], [9]. All these factors lead to insufficient knowledge when only direct in-situ measurements used for the analysis of wave climate in the Caspian Sea.

In recent decades, due to the development of high-speed computers, numerical modeling methods for predicting wave dynamics and their characteristics have been developed. Well-

known models for wave modeling, such as WAM (WAve Model) was applied to deep water conditions [10], [11], and the SWAN spectral wave model (Simulating WAves Nearshore) was used for shallow regions [12], [13], [14]. Simulation of climatic thermohaline circulation in the Caspian Sea was carried out using the method of hydrodynamic diagnosis and adaptation [15]. Numerical methods of mathematical modeling make it possible to show with sufficient accuracy multistep (large, meso- and shallow) water circulation in the Caspian Sea [16]. The numerical models showed higher accuracy in reconstructing the wave fields than the average characteristics available from the direct measurements.

In addition, there are studies on wave properties in the Caspian Sea using artificial neural network (ANN) methods [17], [18], [19] statistical analysis and chaos theory for recruitment wave sensors [20], [21], [22] genetic programming [23]. Fuzzy inference systems (FIS) were also used to predict waves [24].

Despite the fact that wave dynamics of the Caspian Sea has been studied in some works, nevertheless, detailed reconstruction of the wave climate is still a severe problem for this basin. The limitation of numerical simulation methods is that the results strongly depend on the quality of the data entered into the model.

Satellite altimetry provides a good solution to the problem of reconstructing the wave climate on large spatial scales [8]. Satellite remote sensing measurements cover large areas of Earth and provide fairly homogeneous and continuous (along with a certain line) data on the state of the sea with good spatial coverage. Multiple previous studies discussed cross-checking satellite altimetry data with in-situ buoy data. The high quality of the altimetry data has been demonstrated both globally [25], [26], [27] and for small basins [28], [29], [30], [31], [32], [33].

A group of scientists from Estonia developed a technology for analyzing the wave climate for closed water bodies based on satellite altimetry data. The use of this technology has yielded interesting results for the Baltic Sea basin. The altimetry data were carefully validated and showed a good match with the results of in-situ observations. Long-term variations in the properties of waves in a given sea and probable relation to geostrophic airflow over this water body were studied [5], [8].

The use of altimetry data made it possible to reconstruct the extremely interesting spatial patterns of the wave climate and to reveal the unexpected features of climate change [34]. The results obtained are directly applicable for the safety of navigation, the design of offshore and coastal engineering structures, the understanding and prevention of coastal erosion, and for coastal zone management.

The Caspian Sea, similarly to the Baltic Sea, is an inland sea, relatively small, and seasonally covered with ice. Therefore, the same technology can be applied to study the Caspian Sea wave climate. Satellite altimetry data cover approximately 25 years, with a gradual increase over the last years in accuracy and resolution. Based on these data, the wave climate of the Caspian Sea can be reconstructed. The primary goal of the paper is to analyze the changes in the wave climate of the Caspian Sea, applying the technology developed for the Baltic Sea, which is essential for understanding the impact of the climate change on the wave climate and changes in the environmental conditions in the Caspian Sea region.



### 3 Data and Methods

The satellite altimetry data used in this article are derived from the RADS database (Radar Altimeter Database System, <http://rads.tudelft.nl/rads/rads.shtml>) [35], [36]. This database provides altimeter data reduced in the same manner for multiple missions. It contains different characteristics of the sea which makes it possible to analyze changes in the wave climate [5], [8]. The RADS database system contains the altimetry data from eleven satellites (Cryosat-2, Envisat, Ers-1, Ers-2, Geosat, GFO-1, Jason-1, Jason-2, Poseidon, Saral, Topex) since 1985 to 2016. The data in the RADS database has worldwide coverage and it is necessary to choose an appropriate subset for the assessment and analysis of the wave climate of the Caspian Sea. Therefore, we specify the Caspian Sea region using shapefiles following the coastline of the sea (obtained from the National Center for Environmental Information, National Oceanic and Administration, <https://ngdc.noaa.gov/mgg/shorelines/gshhs.html>). The data were selected in the latitude range from 46 to 55 degrees and longitudes from 36 to 48 degrees above the Caspian Sea. Different satellites have different density of observations. For example, the altimeters Cryosat-2, Jason-1, Saral, and Geosat cover the entire surface of the Caspian Sea quite densely during each month. On the contrary, the altimetry data of Jason-2, Poseidon, and Topex have an extent with large gaps (Fig. 2).

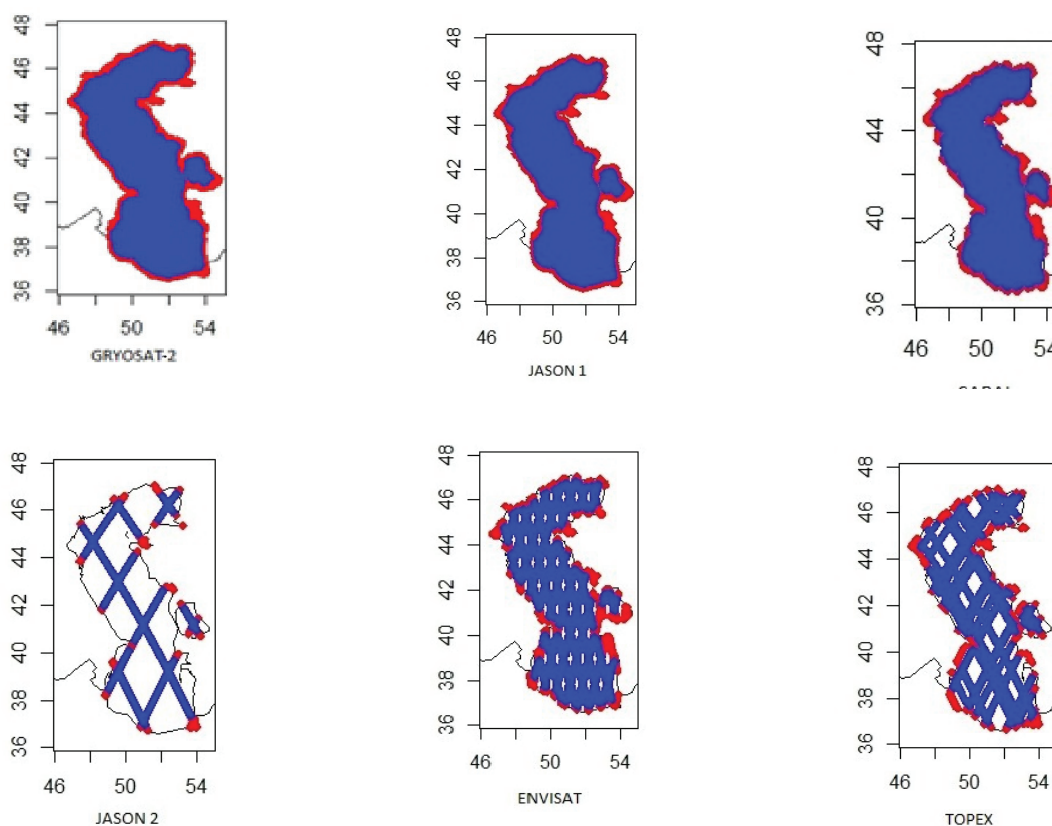


Figure 2: Average significant wave height (m) in the Caspian Sea in 2002-2012 derived from satellite altimetry for each season separately

For the purposes of this paper, the data from the Jason-1 mission were selected. The data have a time extend from 2002 till 2012 and were measured at Ku and C frequency bands. There is a five-month gap between 2012-03-03 and 2012-05-08. The Jason-1 altimeter has very dense coverage over the Caspian Sea. Also, the accuracy of measuring the satellite altitude above the sea surface is 1.7 cm, very high in comparison with other altimetry measurement programs [37], [38].

Since complex coastline, ice coverage, and other phenomena can significantly affect the quality of satellite altimetry; it is necessary to check the data carefully. As mentioned above, the Caspian Sea, like the Baltic Sea, is a closed sea, and the method of satellite altimetry used for the Baltic Sea can be applied to the Caspian Sea. The erroneous measurements were removed following the method developed in [8] for the Baltic Sea. Using the coastline shapefiles of the Caspian Sea, we considered the measurements closer than 0.2 degrees to the coast as unreliable. Also, the data with the backscatter coefficient  $> 13.5$  cdb and errors in the significant wave height normalized standard deviation  $> 0.5$  m were removed. The cutoff level of the backscatter coefficient corresponds to low wind speeds, less than 2.5 m/s. Zero SWH values were deleted as probable erroneous data.

We have also examined a dependence of range difference at two Ku and C frequencies as a possible diagnostics of erroneous data and confirmed that it showed large discrepancy for the data closer than 0.2 degrees from the shore and backscatter coefficients  $> 13.5$ . The resulted dataset was additionally checked for possible errors and other shortcomings. The data obtained after processing is assumed to be sufficiently reliable for subsequent analysis.

## 4 Results

Taking into account the features of the underwater bathymetry, the Caspian Sea is divided into three regions according to physical and geographical characteristics: Northern, Middle and Southern. The Northern part of the sea is shallow, the average depth is 5-6 m (maximum 25 m), in the Middle part of the sea the average depth is 180 m reaching the maximum depth of 790 m in the Derbent Basin area and the Lenkoran Depression area. The South part of the sea has the largest depth of 1025 m.

To study the spatial variability of wave heights from satellite altimetry, a map of mean wave heights throughout the sea was constructed for the period 2002-2012 (Fig. 3). The average SWH of the Caspian Sea in 2002-2012 is in the range of 0.38-1.4 m. We examined the average wave heights in the Caspian Sea from the Jason-1 satellite for the whole period and all seasons separately. Analyzing the results obtained for the entire period, we can say that the most intense waves (1.2-1.3 m) are located in the Derbent basin (Middle part). The waves have lesser intensity in the Southern (deep) basin (0.9-1.1 m). Moreover, the average wave height in the Northern part is low  $\sim 0.6$  m, possibly because of shallow water effects (Fig. 3). Similarly to the wave climate of the Baltic Sea, the Caspian Sea is showing quite high waves, especially in its Middle and Southern parts. In the Northern part of the sea, the wave development is limited by the shallow water. The average wave heights here, as a rule, do not exceed 0.4-0.7 m, only in a few locations in the south-western region of the Northern part of the sea the average SWH reach 1 m. In addition, it was found that the highest energy waves occur in winter, followed by spring and summer. The winter months are identified as the most energetic months in the study area (Fig. 3). The average wave intensity of the



Caspian Sea is low compared to the intensity of open oceanic areas. This is mainly due to the fact that the Caspian Sea is a closed water basin.

Fig. 4 and Fig. 6 show time variability of the annual mean, 75<sup>th</sup>, 90<sup>th</sup>, 99<sup>th</sup> percentiles of significant wave heights with overplotted linear regression, and data quantity for each year. Overall, the wave climate in 2002-2012 can be described as stable in the Caspian Sea region.

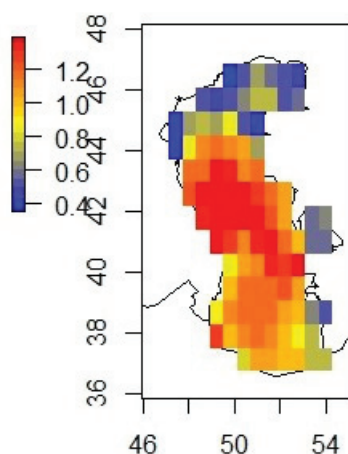
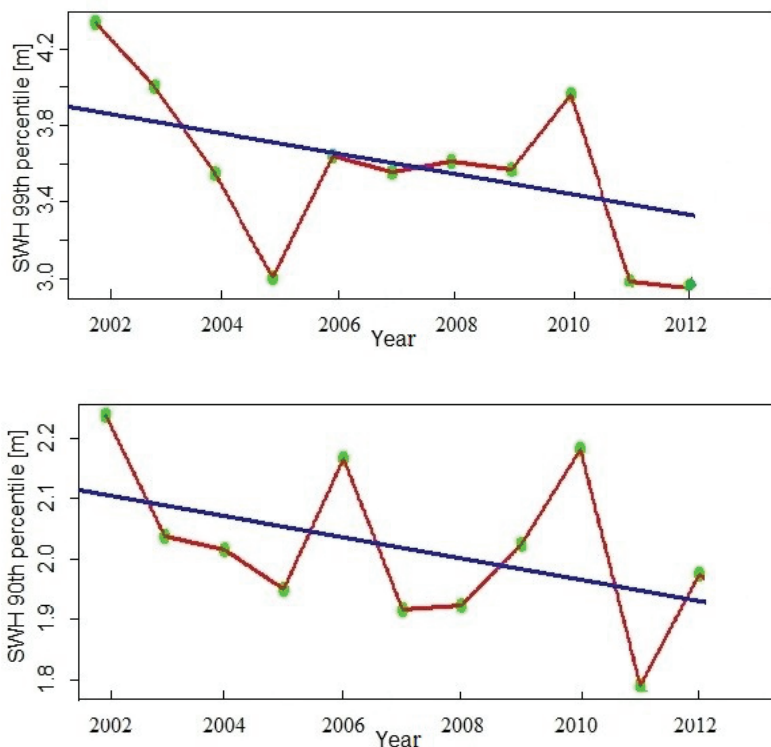


Figure 3: Average significant wave height (*m*) in the Caspian Sea in 2002-2012 derived from satellite altimetry



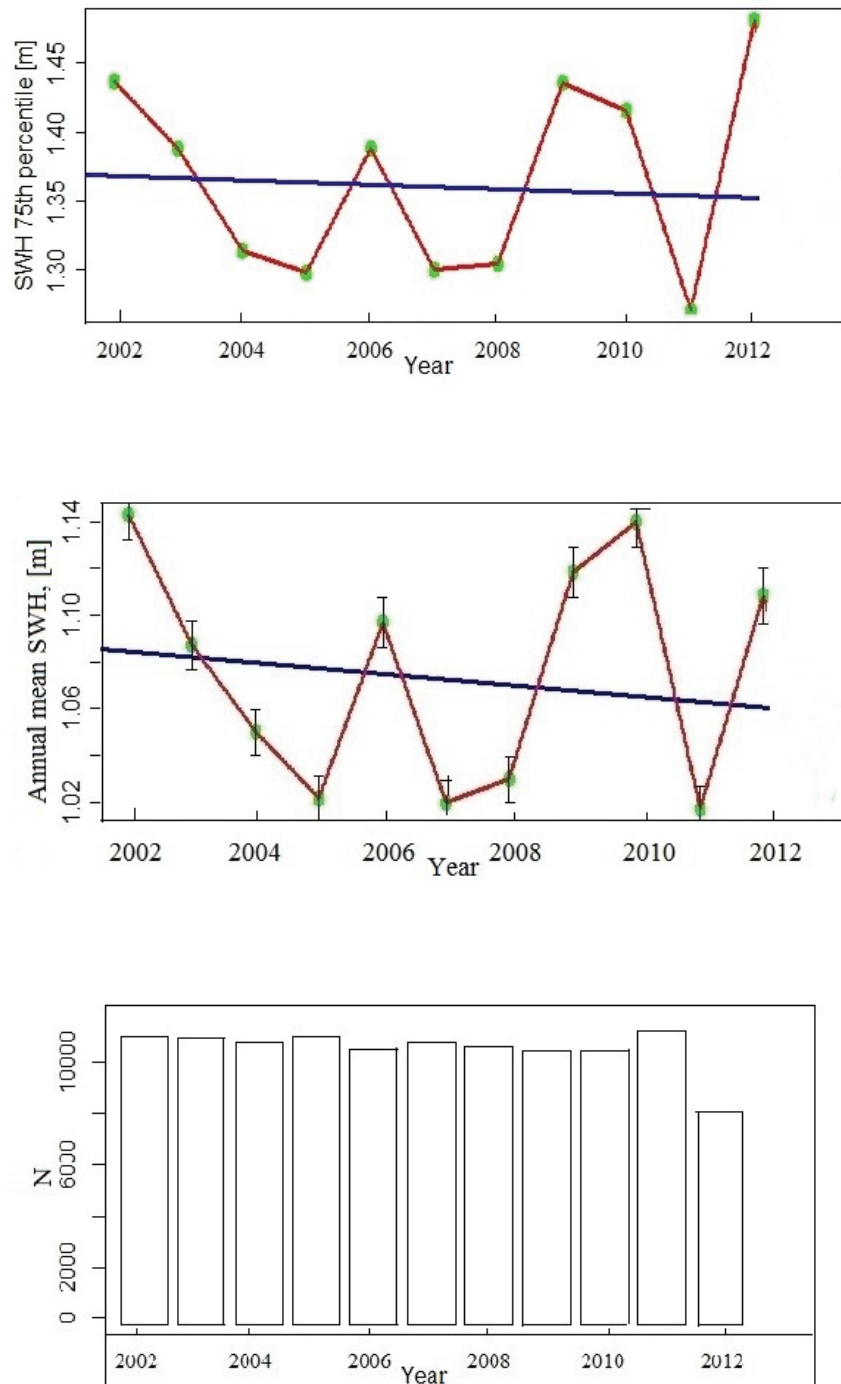


Figure 4: The wave climate for the entire Caspian Sea derived from satellite altimetry Jason-1 data. The panels show (from top to bottom) the 99<sup>th</sup> percentile, the 90<sup>th</sup> percentile, the 75<sup>th</sup> percentile, annual mean SWH, and a number of data points for each year. Blue lines are linear regression lines fitted to the data

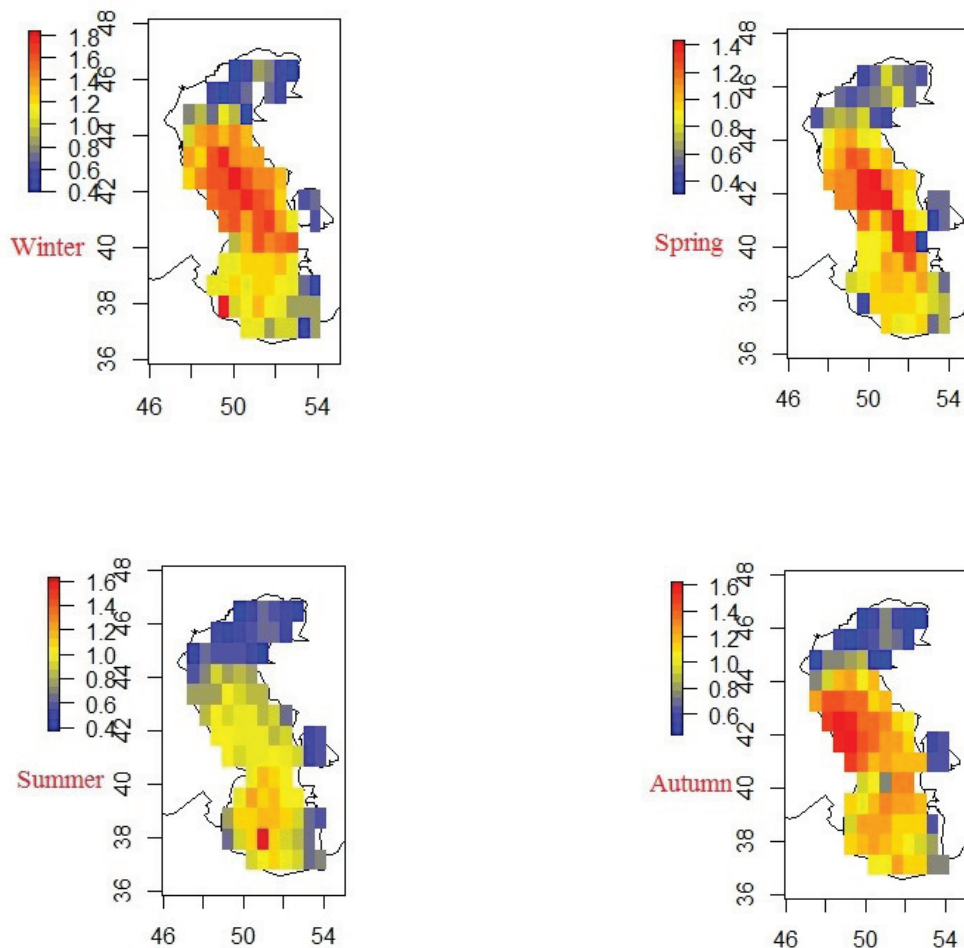
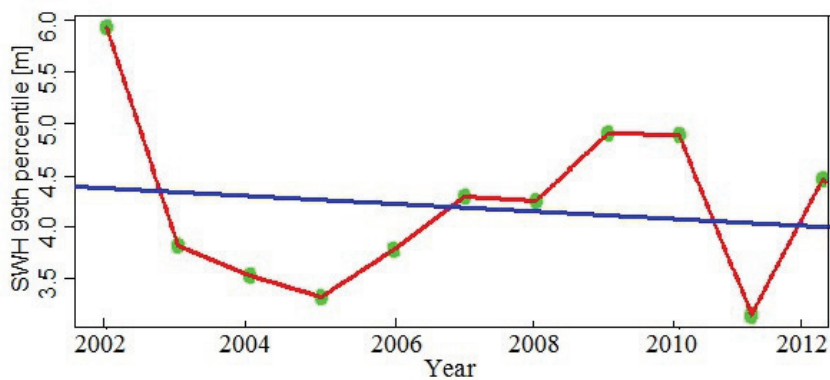
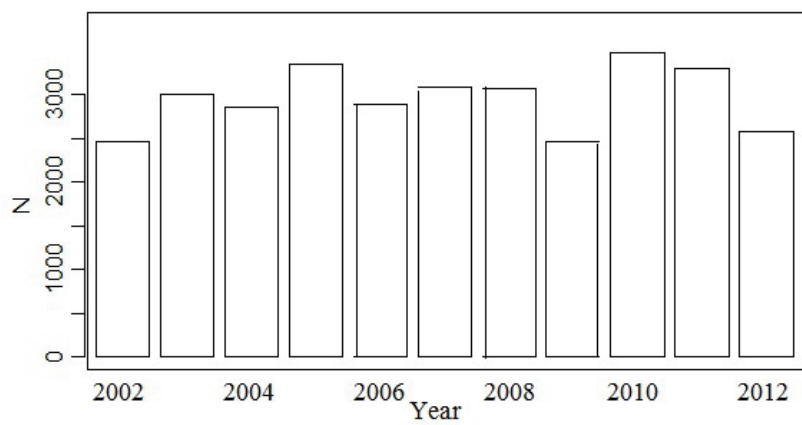
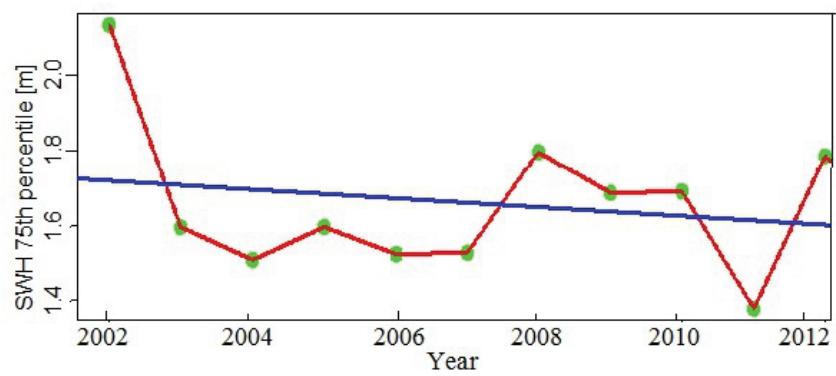
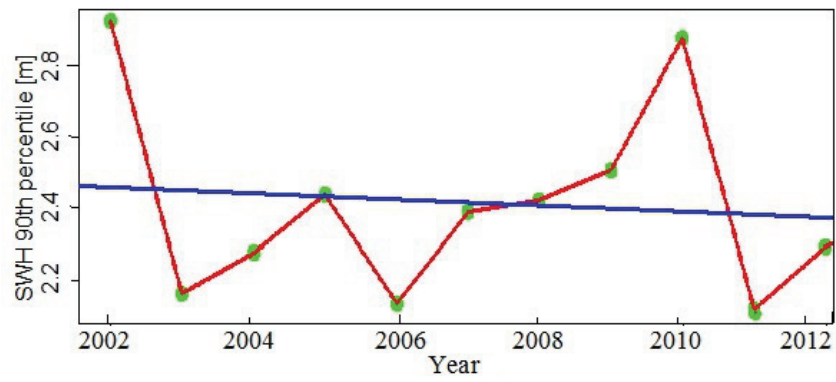
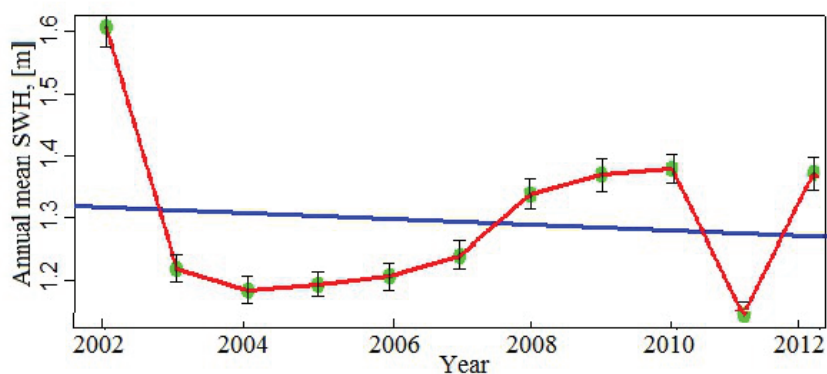


Figure 5: Average significant wave height (m) in the Caspian Sea in 2002-2012 derived from satellite altimetry for each season separately

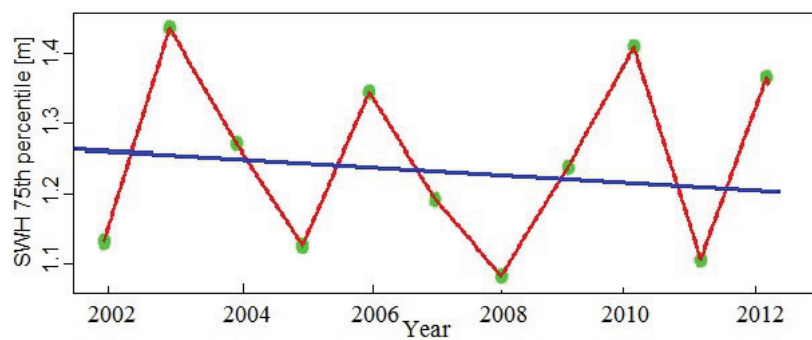
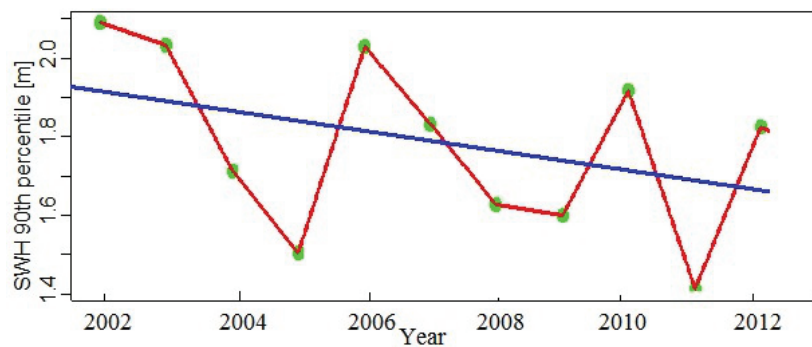
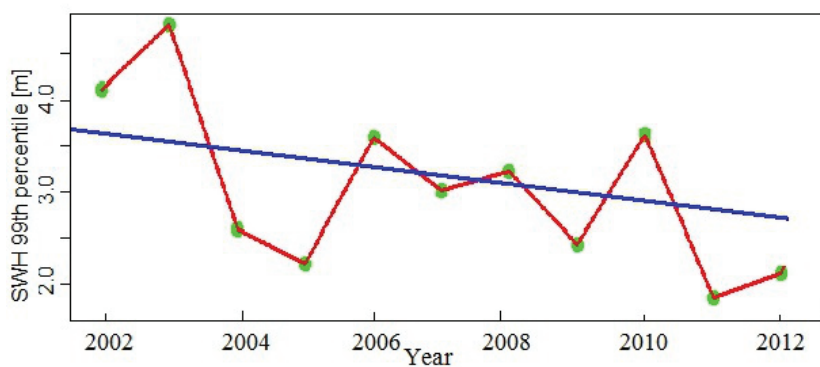
### Winter

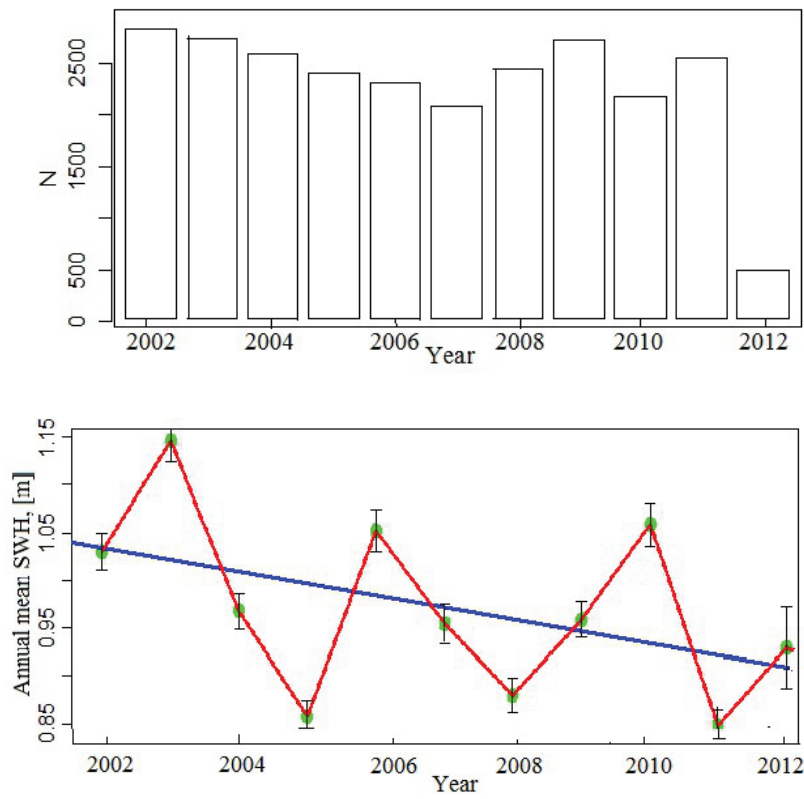




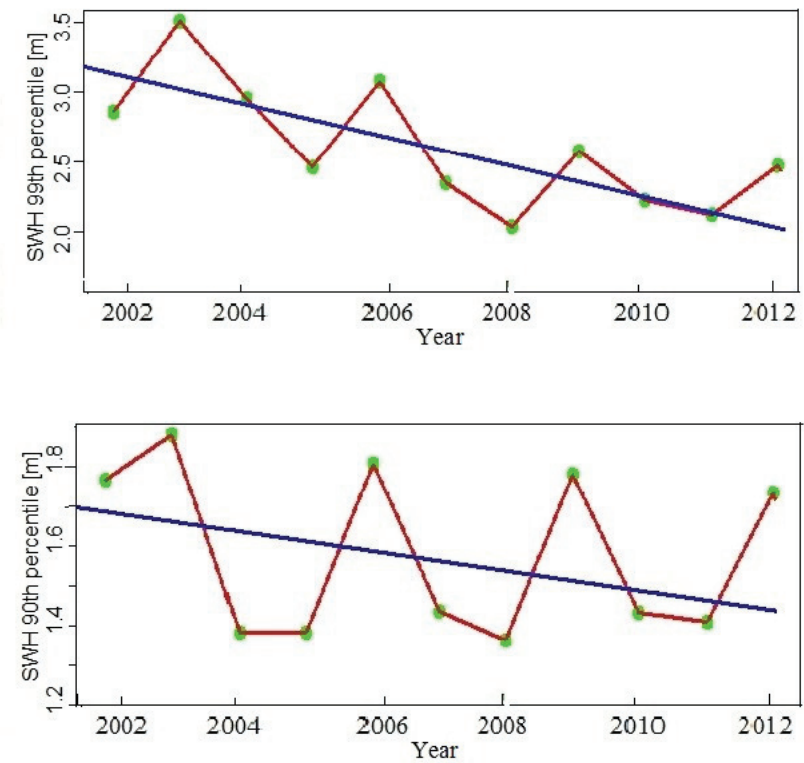


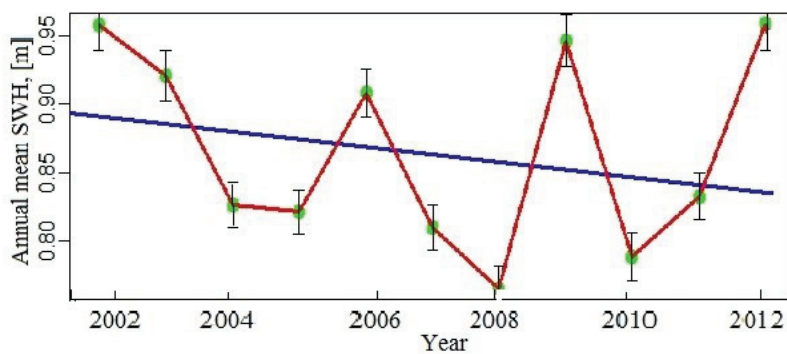
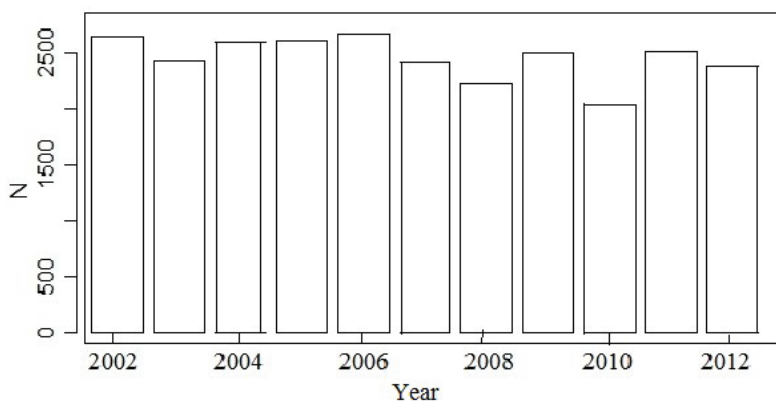
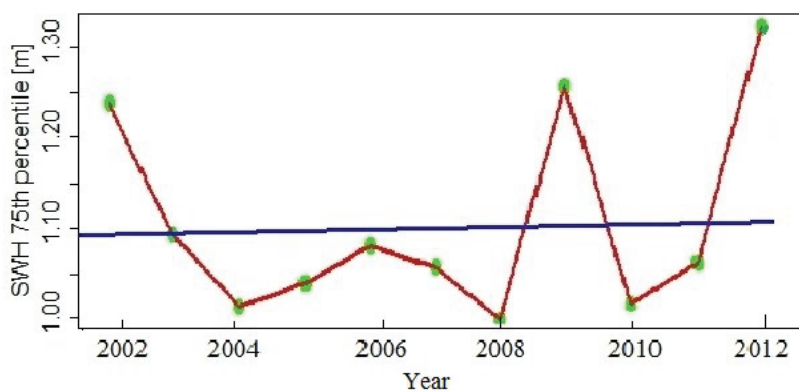
Spring



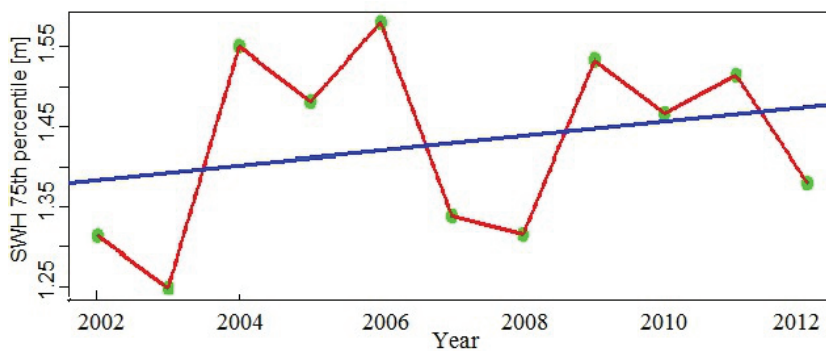


Summer





Autumn





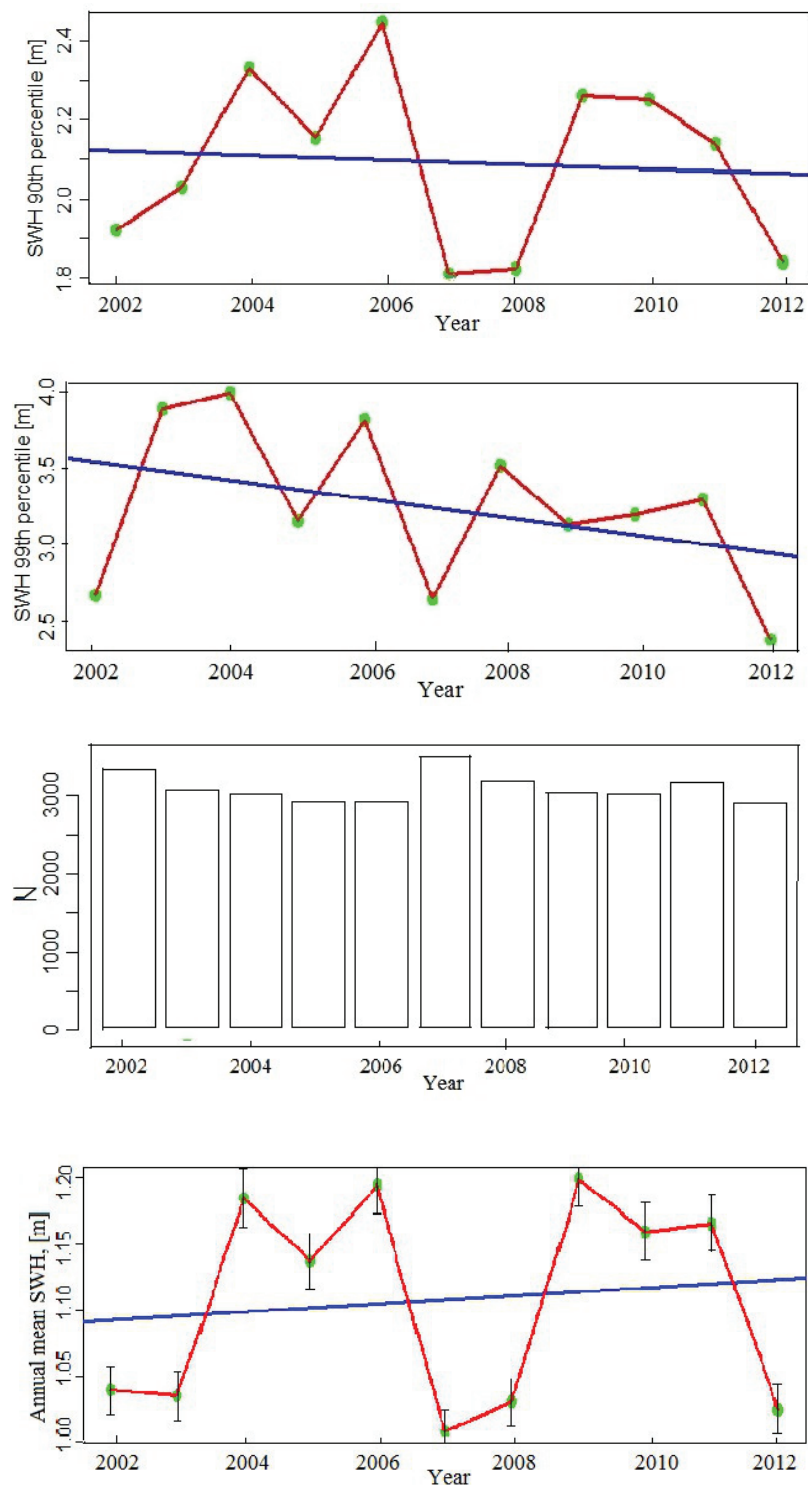


Figure 6: The wave climate for the entire Caspian Sea separated into winter, spring, summer and autumn seasons derived from satellite altimetry Jason-1 data. The panels show (from top to bottom) the 99th percentile, the 90th percentile, the 75th percentile, annual mean SWH, and a number of data points for each year. Blue lines are linear regression lines fitted to the data



## 5 Conclusion

This study examines the seasonal variability of average significant wave heights of the Caspian Sea. The study is based on data obtained from the Jason-1 mission. The procedures developed for the Baltic Sea conditions were revised for the Caspian Sea. The analysis showed that there is a significant difference between wave heights observed in each region of the Caspian Sea: relatively high waves in the Middle and Southern Caspian, whereas in the Northern part of the sea the results did not show high waves. However, sometimes high waves reach the southwestern part of the northern region. The analysis of seasonal variability showed that the most energetic waves appear in the winter season.

The obtained results are qualitatively consistent with the results previously studied by other methods. For example, with the results of the runs of the three-dimensional hydrodynamic model COHERENS, numerical model HYCOM (HYbrid Coordinate Ocean Model), and MIKE 3 HS FLOW MODEL (for modeling surface flows and related processes) [38], [39], [40], [41]. The average mean wave heights in the south and south-east basins are from 0.3 m to 0.7 meters [42], consistent with the results of this study. Also, the analysis of the seasonal variability of sea climate turnover showed a peak in February [43]. The results based on the analysis of wind speed and sea level from the satellite altimetry data in the Caspian Sea region were described in detail in [44], [45], [46] and showed that the highest average wind speeds are observed in the Middle and Southern parts of the Caspian Sea, in the same areas where the highest significant wave heights are detected in this study. The good correspondence between results of this analysis with the previous studies indicates that the satellite altimetry data provide a real picture of the average wave heights and variability of the wave climate in the Caspian Sea.

## 6 Acknowledgments

This work has been supported financially by the research project *No AP05132939* "Control system design of the satellite formation motion for remote sensing of the Earth", for 2018-2020 of the al-Farabi Kazakh National University, which is gratefully acknowledged by the authors. The research was partially supported by the institutional financing by the Estonian Ministry of Education and Research (Estonian Research Council grant IUT33-3) and ERA-NET + RUS project EXOSYSTEM.

## References

- [1] Bruneau N., Toumi R., "A fully-coupled atmosphere-ocean-wave model of the Caspian Sea", *Ocean Modelling*, 107, (2016) : 97-111.
- [2] Kara A.B., Wallcraft A.J., Metzger E.J., Gunduz M., "Impacts of freshwater on the seasonal variations of surface salinity and circulation in the Caspian Sea", *Continental Shelf Research*, 30, (2010) : 1211-1225.
- [3] Soomere T., Räämet A., "Spatial patterns of the wave climate in the Baltic Proper and the Gulf of Finland", *Oceanologia*, 53(1-TI), (2011) : 335-371.
- [4] Petterson H., Kahma K.K., Tuomi L., "Wave directions in a narrow bay", *Journal of Physical Oceanography* 40(1), 155-169 (2010).
- [5] Kudryavtseva N., Soomere T., "Satellite altimetry reveals spatial patterns of variations in the Baltic Sea wave climate", *Earth System Dynamics*, 8(3), (2017) : 697-706.

- [6] Broman B., Hammarklint T., Rannat K., Soomere T., Valdmann A., "Trends and extremes of wave fields in the north-eastern part of the Baltic Proper", *Oceanologia*, 48(S), (2006) : 165-184.
- [7] Tuomi L., Kahma K.K., Pettersson H., "Wave hindcast statistics in the seasonally ice-covered Baltic Sea", *Boreal Environ. Res.*, 16(6), (2011) : 451-472.
- [8] Kudryavtseva N.A., Soomere T., "Validation of the multi-mission altimeter wave height data for the Baltic Sea region", *Estonian Journal of Earth Sciences*, 65(3), (2016) : 161-175.
- [9] Ruest B., Neumeier U., Dumont D., Bismuth E., Senneville S., Caveen J., "Recent wave climate and expected future changes in the seasonally ice-infested waters of the Gulf of St. Lawrence, Canada", *Clim. Dyn.*, 46(1-2), (2016) : 449-466.
- [10] Komen G.J., Cavaleri L., Donelan M., Hasselmann K., P.A.E.M. Janssen., "Dynamics and Modelling of Ocean Waves", *Cambridge University Press*, (1994) : 532.
- [11] WAMDI Group., "The WAM Model – A Third Generation Ocean Prediction Model", *Journal of Physical Oceanography*, 18, (1988) : 1775-1810.
- [12] Booij N., Ris R.C., Holthuijsen L.H., "A third-generation wave model for coastal regions: Model description and validation", *Journal of Geophysical Research Oceans*, 104(C4), (1999) : 7649-7666.
- [13] Booij N., Holthuijsen L.H., Ris R.C., "The SWAN wave model for shallow water", *Proceedings of 24th International Conference on Coastal Engineering, Orlando*, 1, (1996) : 668-676.
- [14] Moeini M.H., Etemad-Shahidi A., "Application of two numerical models for wave hindcasting in Lake Erie", *Applied Ocean Research*, 29(3), (2007) : 137-145.
- [15] Popov S.K., "Modelirovanie klimaticheskoi termohalinnoi cirkuliyacii v Kaspiiskom more [Simulation of climatic thermo-haline circulation of the Caspian Sea]", *Meteorologiya i gidrologiya [Meteorology and hydrology]* no 5 (2004): 76-84.
- [16] Lebedev S.A., "Dynamica Kaspiiskogo morya po dannym sputnikovoi altimetrii [Dynamics of the Caspian Sea based on satellite altimetry data]", *Sovremennye Problemy Distantionnogo Zondirovaniya Zemli iz Kosmosa [Modern problems of remote sensing of the Earth from space]* vol. 12, no 4 (2015): 72-85.
- [17] Jain P., Deo M.C., "Neural networks in ocean engineering", *International Journal of Ships and Offshore Structures*, 1(1), (2006) : 25-35.
- [18] Deo M.C., Jha A., Chaphekar A.S., Ravikant K., "Neural networks for wave forecasting", *Ocean Engineering*, 28 (7), (2001) : 889-898.
- [19] Zamani A., Solomatine D., Azimian A., Heemink A., "Learning from data for wind-wave forecasting", *Ocean Engineering*, 35(10), (2008) : 953-962.
- [20] Zamani A., Azimian A., Heemink A., Solomatine D., "Wave height prediction at the Caspian Sea using a data-driven model and ensemble-based data assimilation methods", *J. Hydroinf.*, 11(2), (2009) : 154-164.
- [21] Zamani A.R., Badri M.A., "Wave energy estimation by using a statistical analysis and wave buoy data near the southern Caspian Sea", *China Ocean Eng.*, 29(2), (2015) : 275-286.
- [22] Zounemat-Kermani M., Kisi O., "Time series analysis on marine wind-wave characteristics using chaos theory", *Ocean Engineering*, 100, (2015) : 46-53.
- [23] Gaur S., Deo M.C., "Real-time wave forecasting using genetic programming", *Ocean Engineering*, 35(11-12), (2008) : 1166-1172.
- [24] Özger M., Şen Z., "Prediction of wave parameters by using fuzzy logic approach", *Ocean Engineering*, 34(3-4), (2007) : 460-469.
- [25] Queffelec P., "Long-term validation of wave height measurements from altimeters", *Marine Geodesy*, 27(3-4), (2004) : 495-510.
- [26] Queffelec P., Bentamy A., Croizé-Fillon D., "Analysis of seasonal wave height anomalies from satellite data over the global oceans", *In Proceedings of the ESA Living Planet Symposium*, Bergen, Norway, SP-686, ESA (2010).
- [27] Queffelec P., Croizé-Fillon D., "Global Altimeter SWH Data Set", *Technical Report*, IFREMER, Brest (2012).
- [28] Francis O.P., Pantelev G.G., Atkinson D.E., "Ocean wave conditions in the Chukchi Sea from satellite and in situ observations", *Geophysical Research Letters*, 38(24), L24610 (2011).

- [29] Shaeb K.H.B., Anand A., Joshi A.K., Bhandari S.M., "Comparison of near coastal significant wave height measurements from SARAL/AltiKa with wave rider buoys in the Indian region", *Marine Geodesy*, 38(1), (2015) : 422-436.
- [30] Kumar U.M., Swain D., Sasamal S.K., Reddy N.N., Ramanjappa T., "Validation of SARAL/AltiKa significant wave height and wind speed observations over the North Indian Ocean", *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 135, (2015) : 174-180.
- [31] Cavaleri L., Sclavo M., "The calibration of wind and wave model data in the Mediterranean Sea", *Coastal Engineering*, 53(7), (2006) : 613-627.
- [32] Galanis G., Hayes D., Zodiatis G., Chu P.C., Kuo Y.-H., Kallos G., "Wave height characteristics in the Mediterranean Sea by means of numerical modeling, satellite data, statistical and geometrical techniques", *Marine Geophysical Research*, 33(1), (2012) : 1-15.
- [33] Hithin N.K., Kumar V.S., Shanas P.R., "Trends of wave height and period in the Central Arabian Sea from 1996 to 2012: a study based on satellite altimeter data", *Ocean Engineering*, 108, (2015) : 416-425.
- [34] Soomere T., Keevallik S., "Anisotropy of moderate and strong winds in the Baltic proper", *Proc. Estonian Acad. Sci. Eng.*, 7(1), (2001) : 35-49.
- [35] Scharroo R., "RADS version 3.1 User Manual and Format Specifications", Available at <http://rads.tudelft.nl/rads/radsmanual.pdf> [viewed 17 July 2016], 2012.
- [36] Scharroo R., Leuliette E.W., Lillibridge J.L., Byrne D., Naeije M.C. & Mitchum G.T., "RADS: consistent multi-mission products. In Proceedings of the Symposium on 20 Years of Progress in Radar Altimetry", Venice, 20-28 September, 2012. *European Space Agency Special Publication*, SP-710, (2013) : 1-4.
- [37] Chelton D.B., Ries J.C., Haines B.J., Fu L.-L., Callahan P.S., "Satellite altimetry. In Satellite Altimetry and the Earth Sciences: A Handbook for Techniques and Applications", L.-L. Fu and A. Cazenave, Eds., *Academic Press*, San Diego, Calif., (2001) : 1-131.
- [38] Lebedev S.A., Kostyanoi A.G., Lavrova O.Yu., "Dynamics of the Caspian Sea from satellite altimetry data", *Modern problems of Earth remote sensing from space*, 12 (4), (2015) : 72-85.
- [39] Shiea M., Chegini V., Bidokhti A.A., "Impact of wind and thermal forcing on the seasonal variation of three-dimensional circulation in the Caspian Sea", *Indian Journal of Geo-Marine Sciences*, 45(5), (2016) : 671-686.
- [40] Kamranzad B., Etemad-Shahidi A., Chegini V., "Sustainability of wave energy resources in southern Caspian Sea", *Energy*, 97, (2016) : 549-559.
- [41] Sharbaty S., "3-D Simulation of Wind-Induced Currents Using MIKE 3 HS Model in the Caspian Sea", *Canadian Journal on Computing in Mathematics, Natural Sciences, Engineering and Medicine*, 3(3), (2012) : 45-54.
- [42] Klige R.K., Myagkov M.S., "Changes in the water regime of the Caspian sea", *GeoJournal*, 27(3), (1992) : 299-307.
- [43] Alamian R., Shafaghat R., Hosseini S.S., Zainali A., "Wave energy potential along the southern coast of the Caspian Sea", *International Journal of Marine Energy*, 19, (2017) : 221-234.
- [44] Lebedev S.A., Kostianoy A.G., "Satellite altimetry of the Caspian Sea", *Sovremennye Problemy Distantionnogo Zondirovaniya Zemli iz Kosmosa [Modern problems of remote sensing of the Earth from space]* vol. 2, no 3 (2006): 113-120.
- [45] Lebedev S.A., Kostianoy A.G., "Integrated Use of Satellite Altimetry in the Investigation of the Meteorological, Hydrological, and Hydrodynamic Regime of the Caspian Sea", *J. Terrestrial Atmospheric and Oceanic Sciences* 19(1-2), (2008) : 71-82, doi: 10.3319/TAO.2008.19.1-2.71.
- [46] Lebedev S.A., "Investigation seasonal and interannual variability of the Caspian Sea Dynamics based on Satellite Altimetry data", *Proceedings of Living Planet Symposium*, Czech Republic, Prague (2016).

2-бөлім

Раздел 2

Section 2

Информатика

Информатика

Computer  
Science

IRSTI 27.29.27

### Stabilization of one non-linear system with coefficients depending on the condition of the control object

Murzabekov Z.N.

Al - Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

E-mail: murzabekov-zein@mail.ru,

Mirzakhmedova G.A.

Al - Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

gulbanu.myrzahmedova@gmail.com

For the mathematical model of a three-sector economic cluster, an optimal control problem is posed on an infinite time interval. An optimal stabilization problem is considered for a single class of nonlinear systems with coefficients depending on the state of the control object with constraints on control. A non-linear stabilizing control has been found taking into account constraints to the control, which depends on the state of the system and the current point in time. The results obtained for a nonlinear system are used in the construction of control parameters for a three-sector economic cluster over an infinite time interval. For the considering example, the optimal distribution of labor and investment resources has been determined, which satisfy the balance ratios. The given example illustrates the use of the proposing control method of a nonlinear system.

**Key words:** effective management accounting, three- sector economic cluster, Lagrange multipliers method, nonlinear systems, quadratic functional.

### Коэффициенттері басқару объектісінің қалып - күйінен тәуелді болатын бір сызықты емес жүйені тұрақтандыру

Murzabekov Z.N., Әл - Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,

Алматы қ, Қазақстан республикасы. E-mail: murzabekov-zein@mail.ru

Mirzakhmedova G.A. Әл - Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,

Алматы қ, Қазақстан республикасы, gulbanu.myrzahmedova@gmail.com

Үш секторлы экономикалық кластердің математикалық моделі үшін уақыттың шексіз интервалында тиімді басқару есебі қойылады. Коэффициенттері басқару объектісінің қалып - күйінен тәуелді сызықты емес жүйенің бір класы үшін тиімді тұрақтандыру есебі қарастырылады. Жүйенің қалып - күйінен және ағымдағы уақыттан тәуелді болатын басқаруға қойылған шектеуді ескеріп сызықты емес тұрақтандырушы басқару табылды. Сызықты емес жүйелер үшін алынған нәтижелер шексіз уақыт интервалында үш секторлы экономикалық кластерлерге арналған басқарушы параметрлерді құрастыру барысында қолданылады. Қарастырылып отырған мысал үшін баланстық қатынасты қанағаттандыратын еңбек және инвестициялық ресурстардың тиімді үлестірімі анықталған. Келтірілген мысал сызықты емес жүйелерді басқару әдістерінің тиімді қолданылуын сипаттайды.

**Түйін сөздер:** тиімді басқару есебі, үш секторлы экономикалық кластер, Лагранж көбейткіштер әдісі, сызықты емес жүйелер, квадраттық функционал.

### Стабилизация одной нелинейной системы с коэффициентами, зависящими от состояния объекта управления

Мурзабеков З.Н., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, murzabekov-zein@mail.ru

Мирзахмедова Г.А. Казахский национального университета им. аль - Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, gulbanu.murzahmedova@gmail.com

Для математической модели трехсекторного экономического кластера ставится задача оптимального управления на бесконечном интервале времени. Рассматривается задача оптимальной стабилизации для одного класса нелинейных систем с коэффициентами, зависящими от состояния объекта управления с ограничениями на управления. Найдено нелинейное стабилизирующее управление с учетом ограничений на управление, которое зависит от состояния системы и текущего момента времени. Полученные результаты для нелинейной системы, используются при конструировании управляющих параметров для трехсекторного экономического кластера на бесконечном интервале времени. Для рассматриваемого примера определены оптимальное распределение трудовых и инвестиционных ресурсов, которые удовлетворяют балансовым соотношениям. Приведенный пример иллюстрирует использование предлагаемого метода управления нелинейной системы. **Ключевые слова:** задача оптимального управления, трехсекторный экономический кластер, метод множителей Лагранжа, нелинейная система, квадратичный функционал

## 1 Introduction

In control theory, much attention is given to the problem of studying stability in nonlinear systems and the problem of stabilizing nonlinear control systems. The theoretical basis for solving linear-quadratic problems in some cases can be applied in the synthesis of control actions for nonlinear systems. One of the promising and rapidly developing methods for designing nonlinear regulators is a method based on the application of the matrix Riccati equation. Recently, new control algorithms for nonlinear systems have appeared, based on the use of the Riccati equations with coefficients depending on the state of the system. The ambiguity of the representation of a nonlinear system as a system of linear structure and the absence of sufficiently universal algorithms for solving the Riccati equation, whose parameters also depend on the state, generate a set of possible suboptimal solutions. Therefore, it is relevant to study nonlinear systems whose coefficients depend on the states of the system.

## 2 Literature review

To determine the place of our researches, briefly consider the known methods of synthesis of nonlinear controlled mechanical systems. The existing methods for the synthesis of systems can be divided into the following two groups: the Pontryagin maximum principle [1], the Bellman - Krotov method (optimal control theory) [2,4]. The theory and methods of solving this group of methods for the synthesis of systems are well known from the monographs of L. S. Pontryagin and others [1], R. Bellman [2], V. F. Krotov, and V. I. Gurman [3]-[5]. Undoubtedly, these methods are valuable and solve the problems of synthesis, when all their prerequisites take place. Essentially, the maximum principle reduces the solution of the original problem to a boundary problem for a system of ordinary differential equations with two times more order than the order of the system itself[6]-[9]. Solving the latter is generally quite a difficult task. Moreover, software control is determined, which is not always acceptable for solving the problem of practice. The R. Bellman method of dynamic programming in the

case of the smoothness of the so-called Bellman function reduces the original problem to solving a partial differential equation of the first order [8]-[11]. In the general case, solving a partial differential equation is a difficult task.

In technical and economic systems, there are many different types of nonlinearities; therefore, different approaches to constructing control laws that are rational with respect to a given quality criterion [12] - [15].

In practice, there are a large number of optimal control problems for economic systems that are nonlinear systems with coefficients depending on the state of the control object [16, 17].

It should be noted that the controllability criteria for nonlinear systems were obtained in the work of J. Kleimka [19]. The stability studies of nonlinear systems were performed by A.P. Afanasyev and others [12] and S.M. Lobanov and others [13]. M.G. Dmitriev and others [14] investigate optimal stabilization for one class of nonlinear systems with coefficients depending on the state of the control object over an infinite time interval. V.N. Afanasyev and P.V. Orlov [15] consider a class of nonlinear systems for which there exists a coordinate representation (diffeomorphism) that transforms the original system into a system with a linear part and nonlinear feedback. In works [20,21], optimal control problems with using of Lagrange multipliers for technical systems and a linearized system of the economic cluster were considered.

### 3 Research method

This paper deals an economic system, which, by means of transformations, come down to an optimal stabilization problem for one class of nonlinear systems with coefficients depending on the state of the control object. Conversion is in progress of initial nonlinear differential equation, which describes the initial control system, into a system with a linear structure, but with parameters depending on the state of the control object. The use of a nonlinear quadratic quality functional allows at the synthesis of control to carry out the construction of the matrix Riccati equation with parameters not dependent of the state of the control object. This approach is the basis for the synthesis of optimal nonlinear control systems. It is proposed to use a combined method based on the construction of a nonlinear feedback, which allows present the sought-for control in the form of a stabilizing control, dependent on the state of the nonlinear system and the current point in time. In addition, this method gives a chance to take into account the existing restrictions on the values of controls. The obtained results for nonlinear systems are used in the construction of control parameters for a three-sector economic cluster over an infinite time interval.

#### 3.1 Three-sector economic model of the cluster

Consider the optimal control problem for the economic model of a cluster consisting of three  $i = 0$  (material sector),  $i = 1$  (fund-generating sector),  $i = 2$  (consumer sector). The considered mathematical model consists of [16]:

a) three specific release functions of the Cobba-Douglas type:

$$x_i = \theta_i A_i k_i^{\alpha_i}, \quad A_i > 0, \quad 0 < \alpha_i < 1, \quad (i = 0, 1, 2); \quad (1)$$



b) three differential equations describing the dynamics of the capital-labor ratio:

$$\dot{k}_i = -\lambda_i k_i + (s_i/\theta_i)x_i, \quad k_i(0) = k_i^0, \quad \lambda_i > 0, \quad (i = 0, 1, 2); \quad (2)$$

c) three balance ratios:

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \quad s_0 > 0, \quad s_1 > 0, \quad s_2 > 0; \quad (3)$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \quad \theta_0 > 0, \quad \theta_1 > 0, \quad \theta_2 > 0; \quad (4)$$

$$(1 - \beta_0)x_0 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0; \quad (5)$$

Here, the state of the economic system (capital-labor ratio) is described by a vector  $(k_0, k_1, k_2)$ , and  $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$  - the vector of control  $(s_0, s_1, s_2)$  - the share of sectors in the distribution of investment resources,  $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$  - the share of sectors in the distribution of labor resources;  $x_i$  - specific output (the number of manufactured products in the  $i$  - sector is counting for one worker);  $\beta_i$  - direct material costs at production output in the  $i$  - sector; ( $i = 0, 1, 2$ ). The initial state of the system is  $k_0^0, k_1^0, k_2^0$  where is  $k_i^0 = k_i(0)$  the capital-sector ratio  $i$ , ( $i = 0, 1, 2$ ) at  $t = 0$ . The task of transferring a nonlinear system from a given initial state  $(k_0^0, k_1^0, k_2^0)$  to desired state  $k_0^s, k_1^s, k_2^s$  over an infinite time interval is considered  $[0, \infty)$ . The system's equilibrium state  $k_0^s, k_1^s, k_2^s$  is chosen as the desired final state:

$$k_1^s = \left(\frac{s_1 A_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \quad k_0^s = \frac{s_0 \theta_1 A_1 (k_1^s)^{\alpha_1}}{\lambda_0 \theta_0}, \quad k_2^s = \frac{s_2 \theta_1 A_1 (k_1^s)^{\alpha_1}}{\lambda_2 \theta_2};$$

The values of the capital-labor ratio  $k_i^s$  ( $i = 0, 1, 2$ ) in equilibrium state depend on the controls  $(s_0, s_1, s_2, \theta_0, \theta_1, \theta_2)$  for which the values  $(s_0^s, s_1^s, s_2^s, \theta_0^s, \theta_1^s, \theta_2^s)$  are determined in the work [18].

### 3.2 Statement of the problem of optimal stabilization for a class of nonlinear systems with coefficients depending on the state of the control object.

The task of transferring a nonlinear system from a given initial state to a desired state in an infinite time interval is considered  $[t_0, \infty)$ .

The mathematical model of the control object (2), we write in the form of a system of differential equations in vector form:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + BD(y)u(t) + B(D(y) - D(k^s))v^s, \quad y(t_0) = y_0, \quad [t_0, \infty); \quad (6)$$

using next designations:

$$\begin{aligned} y_1 &= k_1 - k_1^s, & y_2 &= k_2 - k_2^s, & y_3 &= k_0 - k_0^s, \\ u_1 &= s_1 - v_1^s, & u_2 &= \frac{s_2 \theta_1}{\theta_2 - v_2^s}, & u_3 &= \frac{s_0 \theta_1}{\theta_0 - v_3^s}, & v_1^s &= s_1^s, & \frac{s_2^s \theta_1^s}{\theta_2^s} &= v_2^s, & \frac{s_0^s \theta_1^s}{\theta_0^s} &= v_3^s, \\ f_1(y_1) &= (y_1 + k_1^s)^{\alpha_1}, & f_2(y_2) &= (y_2 + k_2^s)^{\alpha_2}, & f_3(y_3) &= (y_3 + k_0^s)^{\alpha_0}, \\ A &= \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$D(y) = \begin{pmatrix} (y_1 + k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & (y_1 + k_1^s)^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & (y_1 + k_1^s)^{\alpha_1} \end{pmatrix}, \quad D(k^s) = \begin{pmatrix} (k_1^s)^{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & (k_1^s)^{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & (k_1^s)^{\alpha_1} \end{pmatrix},$$

$$Ak^s + BD(k^s)v^s = 0$$

Here  $y = (y_1, y_2, y_3)^*$  means vector the state of the object,  $u = (u_1, u_2, u_3)^*$  means the control vector.

Using the differential equation (6) and the balance sheet relations (3) - (5) describe the control object in the following form:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + BD(y)v(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, \infty); \quad (7)$$

$$v(t) \in V(t) = \{v | \gamma_1(t) \leq v(t) - (E - D^{-1}(y)D(k^s))v^s \leq \gamma_2(t), t \in [t_0, \infty); \gamma_1, \gamma_2 \in C[t_0, \infty]\}$$

$$u(t) = v(t) - (E - D^{-1}(y)D(k^s))v^s;$$

$$g(u, y, s, \theta) = 0.$$

We will assume that system (7) is controllable. Matrices satisfy the condition of controllability, i.e. condition is performed  $\text{rang}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$ . Let a functional be installed that depends on the control and state of the object:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} [y^*(t)Q(y)y(t) + v^*(t)Rv(t)] dt \quad (8)$$

where  $Q(y) = KBD(y)R^{-1}D^*(y)B^*K - KBD(k^s)R^{-1}D^*(k^s)B^*K + Q_1$  - a positive semidefinite matrix, and  $R, D(y)$ - a positive definite matrix.

Task is set. It is required to find a stabilizing control  $u(y, t)$  that translates system (7) from a given initial state  $y(t_0) = y_0$  to the desired equilibrium state  $y(\infty) = 0$  over a time interval  $[t_0, \infty)$ , minimizing functional (8).

For the optimal control problem (7)-(8), a search is made for such a control  $v(y, t)$ , so that the equilibrium position in a closed system is asymptotically stable according to Lyapunov. For this purpose, a method based on using of a special type of Lagrange multipliers was used [20].

### 3.3 Solution of task of optimal stabilization.

To solve this assigned task let's add to the expression for the functional (8) a system of differential equations (7) with a multiplier  $\lambda = Ky$ , and also the following expression

$$\lambda_1^*(t)[\gamma_1 - u(t)] + \lambda_2^*(t)[u(t) - \gamma_2],$$

where  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ . As a result, we get the following functionality:

$$L(y, v) = \int_{t_0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} y^* Q(y) y + \frac{1}{2} v^* R v + (Ky)^* (Ay + BD(y)v - \dot{y}) + \lambda_1^*(t)[\gamma_1 - v(t) + (E - D^{-1}(y)D(k^s))v^s] + \lambda_2^*(t)[v(t) - (E - D^{-1}(y)D(k^s))v^s - \gamma_2] \right\} dt \quad (9)$$



where  $K$ - is the symmetric positive definite constant matrix.

We introduce the following functions:

$$V(y, t) = \frac{1}{2}y^*Ky \quad (10)$$

$$\begin{aligned} M(y, v, t) = & \frac{1}{2}y^*(t)Q(y)y(t) + \frac{1}{2}v^*(t)Rv(t) + (Ky)^*(Ay(t) + \\ & + BD(y)v(t)) + \lambda_1^*(t)[\gamma_1 - v(t) + (E - D^{-1}(y)D(k^s))v^s] + \\ & + \lambda_2^*(t)[v(t) - (E - D^{-1}(y)D(k^s))v^s - \gamma_2] \end{aligned} \quad (11)$$

From the form of function (10) and (11), rightly the following representation of the functional (9)

$$L(y, v) = V(y_0, t_0) + \int_{t_0}^{\infty} M(y, u, t) dt \quad (12)$$

from the stationarity conditions for the functional (12), we obtain the control from the relation

$$Rv(t) = -D^*(y)B^*Ky + (\lambda_1 - \lambda_2) \quad (13)$$

where the constant matrix  $K$  satisfies the algebraic matrix equation:

$$KA + A^*K - KBD(k^s)R^{-1}D^*(k^s)B^*K + Q_1 = 0 \quad (14)$$

Using the following designations:

$$\begin{aligned} A_1(y, t) &= A - BD(y)R^{-1}D^*(y)B^*K, & \varphi(y, t) &= R^{-1}[\lambda_1 - \lambda_2], \\ \lambda_1(y, t) &= R \max\{0; \gamma_1 - \omega(y, t)\} \geq 0, & \lambda_2(y, t) &= R \max\{0; \omega(y, t) - \gamma_2\} \geq 0, \\ & & \omega(y, t) &= -(E - D^{-1}(y)D_s)v_s - R^{-1}D^*(y)B^*Ky \end{aligned} \quad (15)$$

the differential that determines the law of motion of the system, we will present in the following form

$$\dot{y} = A_1(y, t)y(t) + BD(y)\varphi(y, t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (16)$$

Note that the choice of multipliers  $\lambda_1(t) \geq 0$ ,  $\lambda_2(t) \geq 0$  of the form (15) provides that the conditions for complementary slackness are met

$$\lambda_1^*(t)[\gamma_1 - u(t)] = 0, \quad \lambda_2^*(t)[u(t) - \gamma_2] = 0$$

The results established for the optimal control problem (7) – (8) are formulated as the following statement.

**Theorem.** Let  $Q(y)$ - be a positive semidefinite matrix, and  $R, D(y)$ - a positive definite matrices in the interval  $[t_0, \infty)$ . Suppose that system (7) is quite manageable at the moment of time  $t_0$ . Then, for the optimality of the pair  $(y(t), v(t))$  in problem (7) – (8), it suffices to performance the following conditions:

1) the trajectory satisfies the differential equation

$$\dot{y} = A_1(y, t)y(t) + BD(y)\varphi(y, t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (17)$$

2) management  $v(t)$  is defined as follows:

$$v(y, t) = \omega(y, t) + \varphi(y, t). \quad (18)$$

The matrix  $K$  satisfies the matrix equation (14), the vector function  $\varphi(y(t), t)$  is determined by the formula (15) in such a way as to ensure that the constraints on the control (7) are satisfied.

## 4 Results and reasoning.

### 4.1 Algorithm for solving the problem of optimal stabilization of three-sector economic model of cluster.

We describe convenient for implementation on computer an algorithm for solving an optimal control problem (6) – (8).

1. Solve the system of algebraic equations (14) to determine the matrix  $K$ .

2. Integrate the system of differential equations (17) in the interval  $[t_0, \infty)$  under the initial conditions  $y(t_0) = y_0$ . In the process of integrating the system (17), it is necessary to print a graph of the optimal trajectory and optimal control  $v(t)$ .

3. Let the system state  $y(t)$  and optimal control  $v(t)$  be found, then

$$u(t) = v(t) - (E - D^{-1}(y)D(k^s))v^s, \quad f_i(y_i) = (y_i + k_i^s)^{\alpha_i},$$

$$\omega = \frac{\beta_1 A_1 f_1(y_1) + \beta_2 A_2 f_2(y_2)(1 - u_1 - v_1^s)/(u_2 + v_2^s)}{(1 - \beta_0)A_0 f_3(y_3)(1 - u_1 - v_1^s)/(u_3 + v_3^s) + \beta_2 A_2 f_2(y_2)(1 - u_1 - v_1^s)/(u_2 + v_2^s)} \quad (19)$$

ensure the fulfillment of condition (5);

$$s_1 = u_1 + v_1^s, \quad s_2 = (1 - \omega)(1 - u_1 - v_1^s), \quad s_0 = \omega(1 - u_1 - v_1^s)$$

ensure the fulfillment of condition (3);

$$\theta_1 = \frac{1}{1 + s_0/(u_3 + v_3^s) + s_2/(u_2 + v_2^s)}, \quad \theta_2 = \frac{(1 - \omega)(1 - s_1)\theta_1}{(u_2 + v_2^s)}, \quad \theta_0 = \frac{\omega(1 - s_1)\theta_1}{(u_3 + v_3^s)}$$

ensure the fulfillment of condition (4);

Example. Were carried out numerical calculations on a computer with the following values of the parameters (table 1):

Table 1: Parameter values for a three - sector economic cluster

I	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\lambda_i$	$A_i$	$s_i^*$	$\theta_i^*$	$k_i^*$
0	0.46	0.39	0.05	6.19	0.2763	0.3944	966.4430
1	0.68	0.29	0.05	1.35	0.4476	0.2562	2410.1455
2	0.49	0.52	0.05	2.71	0.2761	0.3494	1090.1238

The optimal control problem is solved for the values of the initial state of the system  $y(t_0)$  which are given in the following form:

$$y(t_0) = (-800, \quad -400, \quad 400)^* \quad (20)$$

and matrix  $R$ ,  $Q_1$ ,  $K$ , have a form:

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 16 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 \\ 0 & 8 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0.2033 \cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0.1094 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0.1090 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}$$

The results of the calculations of the state of the system are presented in Figure 1(a). From Figure 1(b), it can be seen that the optimal controls do not exceed the region defining by the constraints.

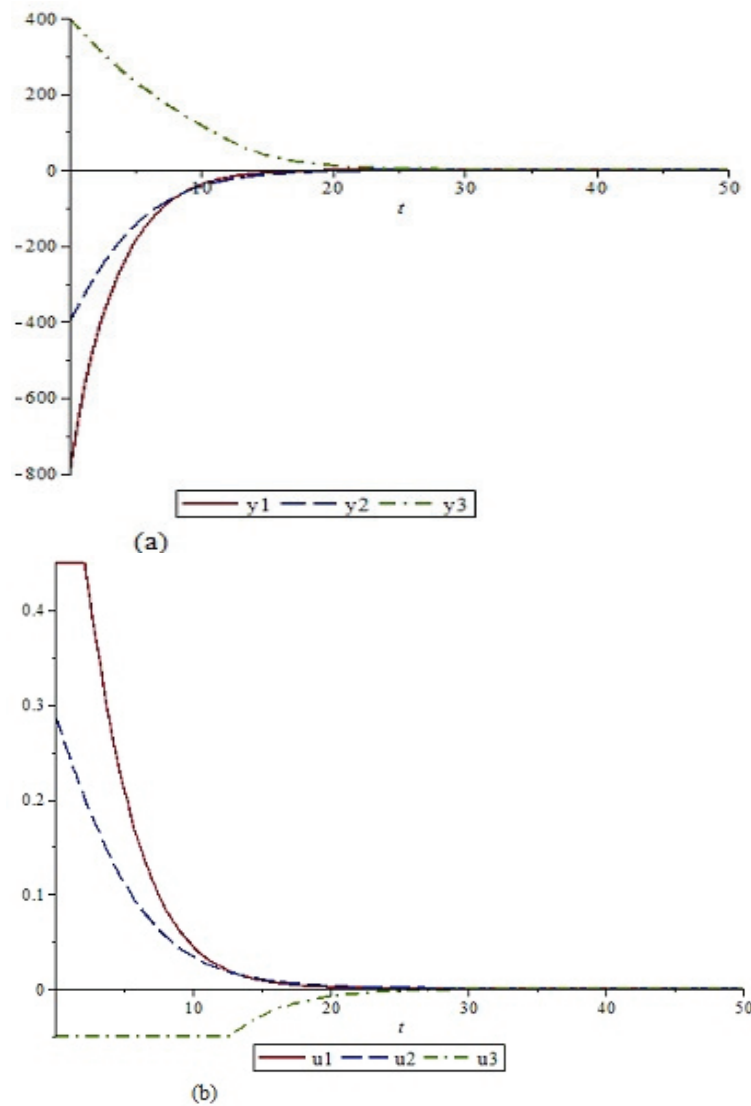


Figure 1: Graphs of trajectories  $y(t)$  (a) and optimal control  $u(t)$  (b).

For the considering example, these restrictions are of the form:

$$-0.45 \leq u_1 \leq 0.45, \quad -0.05 \leq u_2 \leq 0.5, \quad -0.05 \leq u_3 \leq 0.5 \quad (21)$$

Here, the components of control  $u_1(t)$  and  $u_3(t)$  lie on the boundary of the region  $U$  in the time interval  $[0, t_1]$  and  $[0, t_2]$ , accordingly, then at  $t \in [t_1, \infty)$   $t \in [t_2, \infty)$  as they enter inside the region  $U$ . Switching controls occurs at the moment of time  $t_1 = 2.193$  for the component  $u_1(t)$  and for  $u_3(t)$  at  $t_2 = 12.762$ . The optimal values of the system states at the finite moment of time at  $T = 50$ :  $y_1(T) = -0.6739 \cdot 10^{-4}$ ;  $y_2(T) = -0.2068 \cdot 10^{-2}$ ;  $y_3(T) = 0.6282 \cdot 10^{-2}$ , and the optimal values of the controls at the finite moment of time at  $T = 50$ :  $u_1(T) = 0.3197 \cdot 10^{-5}$ ;  $u_2(T) = 0.6089 \cdot 10^{-4}$ ;  $u_3(T) = -0.1842 \cdot 10^{-2}$ .

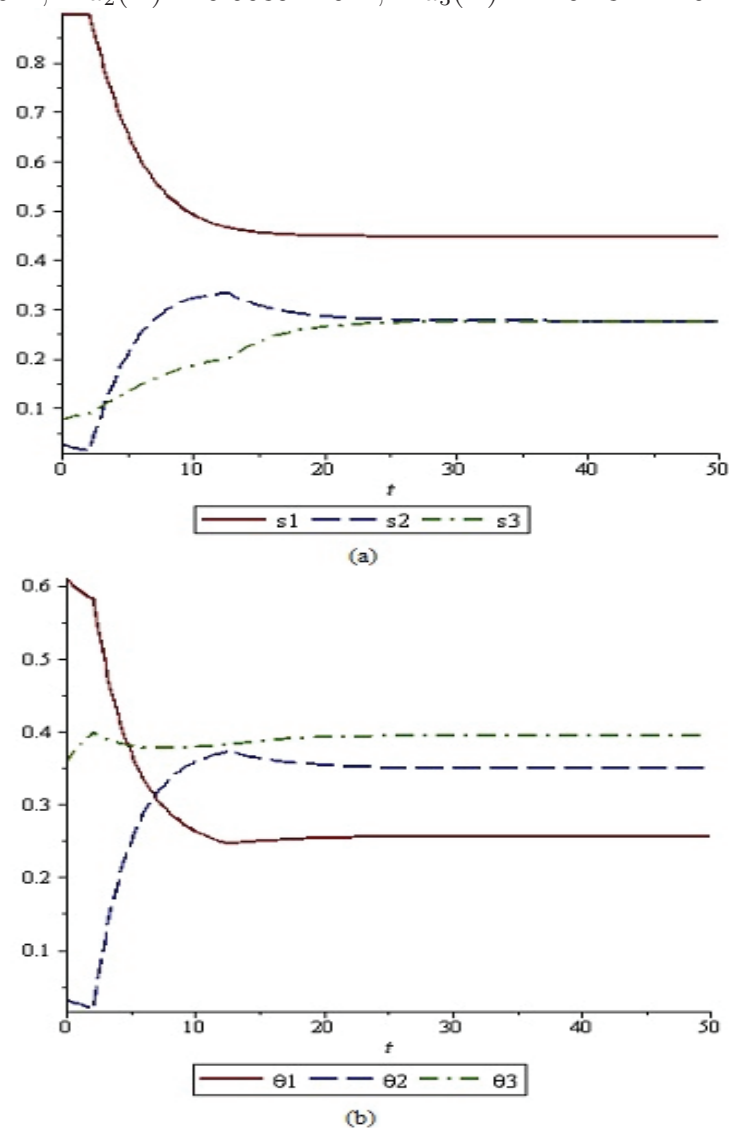


Figure 2: Graphs of the distribution of investment (a) and labor resources (b) for balance relations (3)-(5).

Using formulas (19)-(21), the optimal distribution of labor  $(\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t))$  and investment resources  $(s_1(t), s_2(t), s_3(t))$  was determined. Figure 2 shows the changes resources that satisfy the balance relations (3)–(5). The values of investment  $(s_1(t), s_2(t), s_3(t))$  and workforce  $(\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t))$  at the end point of time at  $T = 50$  tend to a stationary state, with an approximation estimate:  $|s_1(T) - s_1^s| = 0.3197 \cdot 10^{-5}$ ;  $|s_2(T) - s_2^s| = 0.9437 \cdot 10^{-4}$ ;  $|s_3(T) - s_3^s| = 0.9757 \cdot 10^{-4}$ ;  $|\theta_1(T) - \theta_1^s| = 0.3058 \cdot 10^{-4}$ ;  $|\theta_2(T) - \theta_2^s| = 0.2646 \cdot 10^{-5}$ ;  $|\theta_3(T) - \theta_3^s| = 0.3323 \cdot 10^{-4}$ .

## 5 Conclusion

An algorithm for solving the problem of optimal stabilization was developed and a nonlinear control was found, that based on the feedback principle using the matrix Riccati equation. A feature of the proposed approach is sufficient flexibility that determined by method of transforming the original nonlinear system to a linear form with respect to control and with coefficients depending on the state of the system. The use of a nonlinear quadratic quality functional allows at the synthesis of control to carry out the construction of the matrix Riccati equation with parameters independent of state of the control object.

The results obtained for nonlinear systems are used in the construction parameters of control for the mathematical model of a three-sector economic cluster. The equilibrium position in a closed system is asymptotically stable according to Lyapunov. Controlling parameters (19)-(21) are chosen in such a way that constraints on controls and balance relations (3)-(5) are satisfied. For the considered example, the optimal distribution of labor and investment resources has been determined, which satisfy the balance ratios. Figures 1 and 2 show the optimal trajectories and controls that satisfy the specified constraints.

## References

- [1] Pontryagin L.S, Boltyansky V.G., Gamkrelidze R.V. and others, *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov [The mathematical theory of optimal processes]*, (M.: Nauka, 1976)
- [2] Bellman R., Kalaba R., *Dinamicheskoye programmirovaniye i sovremennaya teoriya upravleniya [Dynamic programming and modern control theory]*, (M.: Nauka, 1968)
- [3] Krotov V.F., Gurman V.I., *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya [Methods and objectives of optimal control]*, (M.: Nauka, 1973)
- [4] V.F. Krotov [i dr.]; pod red. V.F. Krotova.[V.F. Krotov [et al.]; by ed. V.F. Krotov], *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya [Fundamentals of the theory of optimal control]*, (M.: Vysshaya shkola, 1990)
- [5] Krotov V.F., *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya [Methods and tasks of optimal control]*, (M.: Nauka, 1973)
- [6] Kurzhan'skiy A.B., "Differentsial'nyye uravneniya v zadachakh sinteza upravleniy. I. Obyknovennyye sistemy [Differential equations in control synthesis problems. I. Ordinary systems]", *Differents. uravneniya*, vol:41, no 1, (2005): 12-22.
- [7] Kalman R.E., "Contributions to the Theory of Optimal Control", *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, vol:5 no 1 (1960): 102-119.
- [8] K.A. Pupkova, N.D. Yegupova *Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya [Methods of classical and modern theory of automatic control]*, "The optimal control problem with fixed-end trajectories for a three-sector economic model of a cluster.", (M.:MGТУ Bauman, 2004).
- [9] Afanasyev V.N., Kolmanovskiy V.B., Nosov V.R., *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya [Mathematical theory of designing control systems]*, (M.: Vyssh.shk, 2003)

- [10] Brayson A., Kho YU-shi., *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya [Applied theory of optimal control]*, (M.: Mir, 1972)
- [11] Roytenberg YA.N., *Avtomaticeskoye upravleniye [Automatic control]*, - *Uchebnoye posobiye. - izd.2-ye, pererab.idopoln. Glavnaya redaktsiya fiziko- matematicheskoy literatury [Tutorial. ed.2-e, pererab.dopoln. Main edition of the physical and mathematical literature]*, (M.: Nauka, 2015)
- [12] Afanas'yev A.P., Dzyuba S.M., Yemel'yanova I.I., "Optimal'noye upravleniye s obratnoy svyaz'yu odnim klassom nelineynykh sistem po kvadratichnomu kriteriyu [Optimal feedback control of one class of nonlinear systems by quadratic criterion]", *Vestnik TGU*. vol.5, no 20(2015). : 1024-1033.
- [13] Lobanov S.M., Zatytkin V. V., Malonga O. SH., "Postroyeniye optimal'nogo upravleniya odnim klassom nelineynykh sistem po kvadratichnomu kriteriyu [Construction of optimal control of one class of nonlinear systems by quadratic criterion] ", *Vestnik VGUIT* no 3 (2012): 54-48.
- [14] Dmitriyev M. G., Makarov D. A., "Gladkiy nelineynyy regulyator v slabo nelineynoy sisteme upravleniya s koeffitsiyentami, zavislyashchimi ot sostoyaniya [Smooth non-linear controller in a weakly non-linear control system with state-dependent coefficients]", *Trudy ISA RAN*, vol.4, no 64(2014): 53-58.
- [15] Afanas'yev V. N., Orlov P. V., "Suboptimal'noye upravleniye nelineynym ob'yektom, linearizuyemy obratnoy svyaz'yu [Suboptimal control of a nonlinear object linearized by feedback]", *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya (Theory and Control Systems)*, no 3 (2011): 13-22.
- [16] Kolemeyev V.A., *Economic-mathematical modeling (in Russian)*, (Moscow:UNITY, 2005).
- [17] Aseev S.M., Besov K.O., Kryazhinskii A.V., "Infinite-horizon optimal control problems in economics", *Russian Math. Surveys* no 67(2) : 195-253 (2012).
- [18] Murzabekov Z., Milosz M. and Tussupova K., "Modeling and optimization of the production cluster", *Proceedings of 36th International Conference on Information Systems and Architecture and Technology- ISAT-2015, Advances in Intelligent Systems and Computing. - Karpacz*, vol:2, (2014): 99-108.
- [19] Klamka J., "Constrained controllability of dynamics systems", *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, no 9(2): 231-244 (1999).
- [20] Aipanov, Sh., Murzabekov, Z., "Analytical solution of a linear quadratic optimal control problem with control value constraints", *Computer and Systems Sciences International*, vol:1, no 53 (2014): 84-91.
- [21] Murzabekov Z., Milosz M. and Tussupova K., "The optimal control problem with fixed-end trajectories for a three-sector economic model of a cluster.", *Intelligent Information and Database Systems, ACIIDS*, (2018). : 382-391.
- [22] Murzabekov Z.N., *Optimizatsiya upravlyayemykh sistem [Optimization of the control system]* , (Almaty:ATU, 2009)
- [23] Murzabekov Z.N., "Dostatochnoye usloviya optimal'nosti dinamicheskikh sistem upravleniya s zakreplennymi kontsami [Sufficient conditions for optimality of dynamic control systems with fixed ends] ", *Matematicheskii zhurnal [Mathematical Journal]*, vol.4, no 3(12)-(2012): 52-59.
- [24] Mracek C.P., Cloutier J.R., "Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method", *International Journal of robust and nonlinear control*, vol.8, no 4-5 (1998): 401-433.
- [25] Cimen T., "State dependent Riccati Equation (SDRE) control: A Survey", *Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea, (July 6-11. 2008): P.3761-3775.*

IRSTI 81.93.29

**Software implementation of two-factor authentication to ensure security when accessing an information system**

Ussatova O.A., Al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, E-mail: olgaussatova@gmail.com

Nyissanbayeva S.E., Institute of Information and Computational Technologies,  
Almaty, Kazakhstan, E-mail: sultasha1@mail.ru

Wojcik W., Lublin University of Technology,  
Lublin, Poland, E-mail: waldemar.wojcik@pollub.pl

The article describes methods for applying two-factor authentication (2FA). An example of two-factor authentication using mobile devices as identifiers and the generation of a temporary password based on the hash function of encryption standards is considered. For an automated control system, a two-factor authentication model and a sequential algorithm for generating a temporary password using mathematical functions have been developed. Mathematical function is selected from the array of functions. To protect the opening of a one-time password, a secret string is read, consisting of a sequence of characters that will be generated randomly. Implemented software implementation on the Node.js software platform using the JavaScript programming language, as well as frameworks and connected system libraries. A document-based database management system with open source MongoDB, using for storing and processing information. The analysis of the software implementation of the proposed algorithm.

**Key words:** two-factor authentication, data security, one-time password (OTP) generation, security methods, mobile application, smartphone.

**Ақпараттық жүйеге қол жеткізу кезінде қауіпсіздікті қамтамасыз ету үшін екі факторлы аутентификацияны бағдарламалық қамтамасыз ету**

Усатова О.А., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, olgaussatova@gmail.com

Нысанбаева С.Е., Ақпараттық және есептеу іштехнологиялар институты,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, sultasha1@mail.ru

Войцик В., Люблин техникалық университеті,  
Люблин қ., Польша, waldemar.wojcik@pollub.pl

Мақалада автоматтандырылған басқару жүйесіндегі екінші факторға негізделген түпнұсқаландыруды қолдану әдістері сипатталған. Ұялы құрылғыларды идентификаторлар ретінде пайдалану негізінде екі факторлы түпнұсқаландырудың мысалы, сондай-ақ, шифрлау стандарттарының хэш функциясына негізделген уақытша құпия сөзді генерациялау мысалы қарастырылады. Автоматтандырылған басқару жүйесі үшін екі факторлы аутентификациялау моделі жасалды. Математикалық функцияларды пайдалана отырып, уақытша құпия сөзді генерациялау үшін дәйекті алгоритм сипатталады. Математикалық функция функциялардың массивінен таңдалады. Бір мәртелік парольдің ашылуын қорғау үшін құпия жолды оқып, кездейсоқ пайда болатын таңбалар тізбегінен тұратын оқылады. Node.js бағдарламалық платформасының бағдарламалық жасақтамасы JavaScript бағдарламалау тілінің көмегімен, сондай-ақ шеңберлер мен қосылған жүйелік кітапханалар арқылы жүзеге асырылды. Ақпаратты сақтау және өңдеу үшін Open source MongoDB бар құжатқа негізделген дерекқорды басқару жүйесі қолданылады. Ұсынылған алгоритмді бағдарламалық қамтамасыз етуді талдау.

**Түйін сөздер:** екі факторлы түпнұсқалық растама, деректерді қорғау, бір жолғы парольді генерациялау, қауіпсіздік әдістері, мобильді қосымша, смартфон.



## Программная реализация двухфакторной аутентификации для обеспечения безопасности при доступе к информационной системе

Усатова О.А., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: olgaussatova@gmail.com  
Нысанбаева С.Е., Институт информационных и вычислительных технологий  
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: sultasha1@mail.ru  
Войцик В., Люблинский технологический университет,  
г. Люблин, Польша, E-mail: waldemar.wojcik@pollub.pl

В статье описаны методы применения аутентификации на основе второго фактора. Рассмотрен пример двухфакторной аутентификации с использованием мобильных устройств в качестве идентификаторов и генерации временного пароля на основе хеш-функции стандартов шифрования. Для автоматизированной системы управления разработаны модель двухфакторной аутентификации и последовательный алгоритм генерации временного пароля с использованием математических функций. Математическая функция выбирается из массива функций. Для защиты вскрытия одноразового пароля считается секретная строка, состоящая из последовательности символов, которая будет генерироваться случайным образом. Осуществлена программная реализация на программной платформе Node.js с использованием языка программирования JavaScript, а так же фреймворков и подключенных системных библиотек. Использована документоориентированная система управления базами данных с открытым исходным кодом MongoDB, для хранения и обработки информации. Проведен анализ программной реализации предложенного алгоритма.

**Ключевые слова:** двухфакторная аутентификация, безопасность данных, генерация одноразового пароля, методы безопасности, мобильное приложение, смартфон.

### 1 Introduction

Crimes increasing in the digital environment and cases of Internet hackers is one of the trends in today's world. For many users, online security, the safety of usernames, usernames and passwords is crucial. This article discusses a two-factor authentication model based on a mobile application and an authentication program. Two-factor authentication, also known as 2FA, has become relevant in the current digital age. When choosing two different channels for authentication, it becomes possible to protect user logins from remote attacks, the purpose of which is to use other people's personal or identification data [1]. Two-factor authentication is an additional layer of security, which is called "multifactor authentication." 2FA requires not only input an user name and password, but also the use of such information that only the author knows or which will immediately be available only for the author [2]. Such information may include what you know (for example, a unique username and password), belongs to you (for example, a smartphone with an application to confirm the authentication request) or part of you (for example, biometric data - fingerprint or scan retina). So, the first factor may be a password, and the second factor is what is sent via the app or notification to your smartphone for confirmation. In the modern world, more than 5 billion mobile devices are used, and using the phone as an authentication tool helps to quickly solve the problem of enhanced protection, reduction of additional costs and delivery delays. The problem of information leakage is related to the modern world and the using of information protection serves as an additional barrier for intruders. Two-factor authentication methods are considered as mechanisms for enhancing the strength of authenticators [3-5]. Two-factor protection is a fairly reliable barrier, seriously complicating access to other people's data



and to some extent leveling the disadvantages of classic password protection. This article describes the results obtained when developing a two-factor authentication model based on an application using a smartphone:

- analysis of security procedures and information leakage;
- developed a two-factor authentication model based on a smartphone;
- an algorithm for an authenticator application using a smartphone for two-factor authentication has been developed and implemented in software.

## 2 Literature review

According to a study of Verizon's Data Security Incidents Report (DBIR) in 2018, 95 percent of violations involve the use of stolen personal data [6]. Standard security procedures, especially online, require simple input of a username and password, and criminals can easily take possession of personal user data — personal and financial information — in order to use it further to commit fraud, mainly in the financial sector.

According to SearchInform, in 2018, 66 percent of Russian companies and 70 percent of foreign companies faced information leaks (Figure 1) [7].

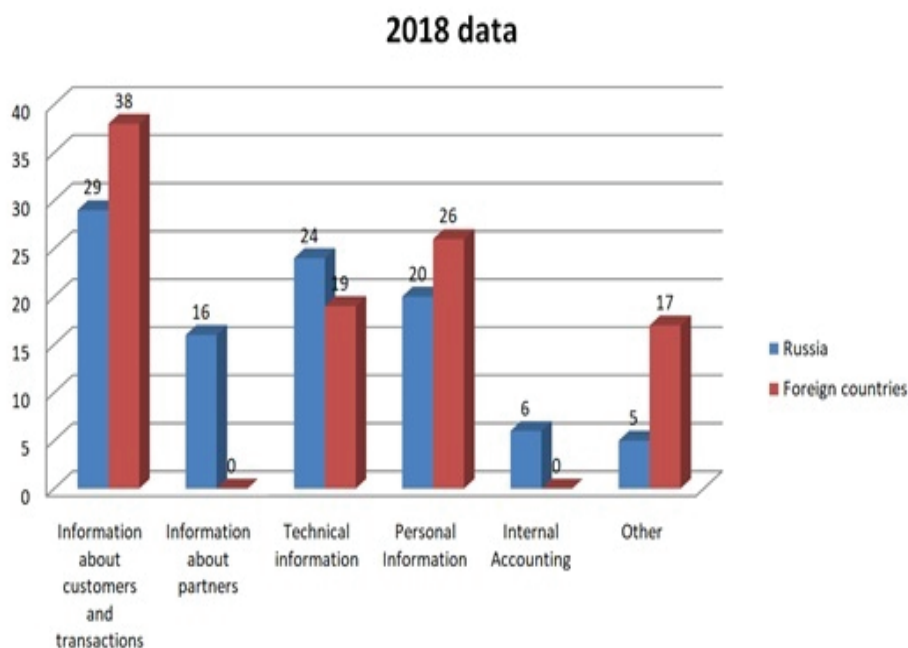


Figure 1: Data on information leaks for 2018

As can be seen from the above data, this problem is relevant for the whole world. A large percentage of leakage accounted for customer and transaction information, technical information, as well as personal data. Unfortunately, some companies hide the incident and do not make any notifications about information leaks in their companies. Thus, the problem arises of protecting confidential information from malicious attacks. One of the means of protecting information is password protection using the second factor. Two-factor authentication from

Infobip solves this problem with the help of SMS messages sent to a mobile phone and Voice technologies [8]. Using SMS as the second authorization factor is not the safest solution. There can be only one phone number, and therefore we will have one confirming device: -if you are in the area of uncertain reception, SMS - the message from the service may not come; -the number can be stolen along with the phone or try to make a duplicate of it for authorization instead of you;

-there may be problems with authorization when traveling abroad, for example, SMS - a message comes for a long time, roaming does not work or you decide to use local instead of a native card.

All these inconveniences can be forgotten when using special services and applications that may be the second factor of authorization. The proposed authentication method is an application authenticator, which runs on a mobile device associated with the server. The mobile device in the proposed method will be connected to the server by the unique MAC address of the phone. The MAC Address (Media Access Control) is the device ID for the Wi-Fi network. MAC - address will identify the user in this system. This type of authentication is the most secure, convenient and cost effective to use. When authorization is required in the service, not only a login and password is entered, but also a 6-digit one-time confirmation password generated on the server. The validity period determines the period of activity of a one-time password after its generation. Password can be confirmed in the specified time frame. Upon expiration of the one-time password and its verification will become impossible. When the old password is canceled, you must request a new one-time password. Verification attempts represent the total number of password verification requests at a predefined time interval. If re-confirmation of the password is requested before the expiration of the time interval, verification will become impossible. It is necessary that the predefined time interval for confirmation expires, and the attempt to confirm the password can be made again. The length of the acknowledgment interval represents a predefined time interval in which several confirmation attempts cannot be made. The password is generated automatically when the program is started and is valid for 20 seconds from the moment of creation.

### 3 Material and methods

The proposed authentication method is implemented using a client-server network architecture. This is a client-server application developed on the Node.js software platform using the JavaScript programming language, as well as frameworks and connected system libraries. Node.js is a server platform for working with JavaScript through the V8 engine. JavaScript performs the action on the client, and the node performs on the server. For the JavaScript language, the jQuery framework, is a library with ready-made visual effects, AJAX requests and other useful things. The framework defines the rules for constructing the architecture of the application by defining at the initial stage of development the default behavior - "framework", which will need to be expanded and modified according to the specified requirements. To implement the application, you need a smartphone that will display the generated one-time password to identify the user in the system. The application is designed for the Android operating system. According to statistics, the Android OS uses 85.9 percent of users [9], which determined its choice for the implementation of the proposed method. The scheme of the method is attached to Figure 2.

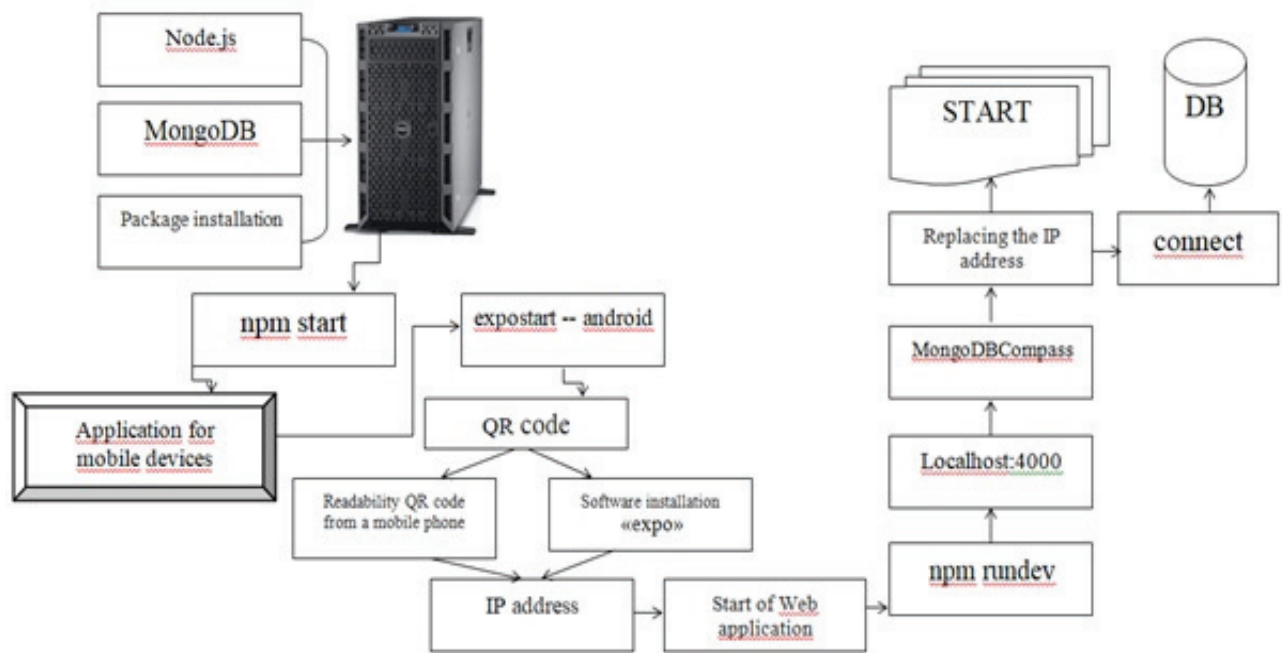


Figure 2: Scheme of implementation of the proposed two-factor authentication system

The developed model is based on two types of two-factor authentication: an authenticator application and input verification with using a smartphone. Node.js are used to implement the system. This software platform is responsible for writing the server part in the programming language JavaScript. Together with it comes the package manager npm, which is used to install various libraries and frameworks. Additionally, you need to install MongoDB - a document-based open-source database management system that does not require a description of the table schema. When complex queries occur, they are usually solved on the application side, which makes it easier to work with data and links to them. The use of this database management system (DBMS) is due to the fact that rather simple scalability is built into this system using sharding technology, which makes the partitioning (partitioning) of the database into separate parts so that each of them can be transferred to a separate server [10].

The advantage of using MongoDB DBMS is:

- increase the speed of development;
- there is no need to synchronize the schema in the database and application;
- understandable path to scalability;
- simplicity of prescribed solutions.

To work with Mongo, a “data” folder is created on the “C” drive, and the “db” folder is created in it. To install the packages required to run certain parts of the project (“Server”, “devschacht”, “dip”), open the console in the folder with the package.json file and run the “npm install” command in it. After installing all the packages, the project is launching for execution in parts. In the beginning, the “Server” starts. To do this, go to the folder, open the

console and execute the “npm start” command. After starting, the message “server started” appears. Next, the mobile application is launched via the “devschacht” folder, in which the console opens and the “expostart - android” command is launched. After launch, a QR code will appear in the console. Also, a tab with system information and a QR code will open in the browser. The field with the IP address above the QR code must be remembered. For successful work, replace the IP addresses in the code with the one written in the tab in the following files:

Dip—> src—> server.js (line 79)

Server—> index.js (line 225)

Devschacht—> App.js (line 17)

In order for the mobile application to work, it is necessary to read the QR code, which can be performed using the installed scanner on the mobile device by default or installing additional software "EXPO". To start the smartphone and personal computer, the local network is configured so that they are in the same network. Then the web site starts, the console opens, and the npm run dev command is executed. For the operation of the web application, the port 4000 is “localhost: 4000”. To view the contents of the database, you need to install MongoDB Compass and make connections by clicking the “connect” button. After saving all changes to the settings, the main parts of the system are restarted, which means the completion of the formation of the 2FA system for use.

## 4 Results and discussions

Consider an example of the proposed information protection system using a combination of two factors: permanent and temporary passwords [11]. The user chooses a permanent password (the first factor) himself and uses it when registering an account (account). Before authorization must be registered in the application. After that, the application starts to enter user data (login and password), which must correspond to the registered data. Then you need to enter the application on your smartphone and enter the initial data to generate a temporary password. A one-time or temporary password (the second factor) is generated on the server according to the proposed algorithm [8] and is valid for a specific length of time for one authentication session. The advantage of a one-time password is that the password is not reused. Thus, an attacker who intercepted data from a successful authentication session cannot use the copied password to gain access to the protected system. The generation of a temporary password is possible online. To obtain a temporary password, additional software is used (Figure 1). The software sends a request to the authorization server to generate a temporary password. This temporary password is generated on the server and displayed to the user in additional software on the smartphone. This temporary password has a short duration of 20 seconds. The temporary password is generated based on the result of the selected trigonometric function, which has a number of variable parameters. The trigonometric function is combined into a table, the dimension of 256x256 is a multiple of degree two. The choice of this function and its initial parameters is based on the result of the hash function of the SHA256 standards [12,13]. This is a cryptographic hash function developed by the US National Security Agency [14]. The purpose of the hash function is the transformation (or hashing) of an arbitrary set of elements in the data into a fixed-length value. This value will

characterize the set of source data without the possibility of extraction. The input string for the hash function is a combination of user credentials, the current Greenwich Mean Time, and an additional secret string. The result of the hash function is divided into individual numbers, which will be the indices for selecting the function and its initial data. The secret string is a required field that will be randomly selected from the array. The secret line at each input is named, which makes it much more difficult to open the initial input line, which allows you to further strengthen the protection. The initial data for the input string will be the following values:

- Login: olga
- Password: pass17word
- Current moment: 2019 02 21, 11:54:25
- Secret line: salt

The input line will look like:

olgapass17word20190221115425salt

The result of the SHA256 hash function is as follows:

2AA878BD4D10F5861B9A2096DCC2222E5C0EB6766A1079581EDA00C0C27B99B

The first symbols of the result are used to select a mathematical function. Then the index of the function in the table with the size of 256x256 will be the following (42, 168), as the decimal representation of the hexadecimal numbers 2A, A8. By this index, the function will be selected and its parameters will be determined. Two hexadecimal numbers from the end of the hash function are used as initial parameters, and a hexadecimal number from position 10 is used as the "x" value. Based on the results of the calculation, the numbers after the comma are taken from the 5th position and the length in 6 digits. Then the temporary password will be the number that must be entered into the application (Figure 3).

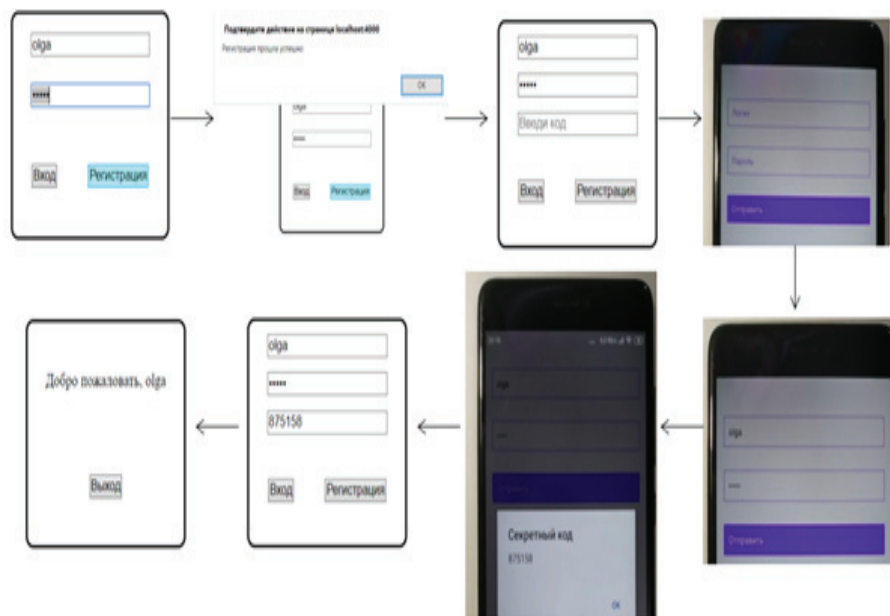


Figure 3: Software implementation

Consider the effect of generating a temporary password on the software implementation of information security tools based on two-factor authentication. For assessment of the sgenirovanyny temporary password, different input data that show efficiency of realization of an algorithm were taken. Table1 shows the results of the study of the generation of a temporary password according to the algorithm described above.

Table 1: Generating a temporary password using this algorithm

Input data	Mathematical function	Hash - value	Password generated
login1 pas123 2019325132850 secret	$((\text{Math.pow}(\text{Math.cos}(\text{Math.pow}(x,2)),3) + \text{Math.tan}(c) * \text{Math.pow}(\text{Math.sin}(\text{Math.PI} * p1),4)) / \text{Math.sqrt}(p2))$	320943960B 777D0654539D 97B00565B950CBD77B 4B5F93BBDDA EA31F82C59427	432027
login1 pas123 2019325133815 secret	$((y * \text{Math.pow}(\text{Math.sin}(p1),2) + 4 * \text{Math.pow}(\text{Math.tan}(x),4)) * c)$	16C645887AB 5726CA912041FC 3AE3339A03B 0223603A4D4C81F 42942ED0510C3	578476
user123 pass- word456 201932513328 wer	$(\text{Math.sqrt}(a) * \text{Math.sin}(b + \text{Math.PI}/y))$	5617AB08E76F 629353D8BD6579365 CA712D459D5B982 BF9D43DC4CBDB4 CFF1EC	839447
pinokio qwert 201932513346 asdf	$((c * \text{Math.pow}(\text{Math.sin}(x),3) + 3 * \text{Math.pow}(\text{Math.cos}(x),2)) / p2)$	33CADE53484F221 3E2266390588E381 468B61D831ABCCF F36A23770814411952	586576
new poiuyt 2019325133620 confidentially	$((\text{Math.pow}(\text{Math.cos}(\text{Math.pow}(x,2)),3) + \text{Math.tan}(c) * \text{Math.pow}(\text{Math.sin}(\text{Math.PI} * p1),4)) / \text{Math.sqrt}(p2))$	6EEF6A6F907ACC FF8278BFE986A54 F9354A214A40C8D 7906C6DDFC294C1D7EFB	417266

The analysis of the work showed that the software implementation corresponds to the described model and algorithm. The developed client-server application works correctly, the generated one-time password is not repeated and changes even when entering duplicate data. The proposed two-factor authentication method can, is an additional means of protecting information stored in the system.



## 5 Conclusion

The use of two-factor authentication allows you to enhance the protection of information. The proposed algorithm will eliminate the existing disadvantage of using two-factor authentication based on SMS - messages, since the proposed method uses two types of two-factor authentication: the authenticator application and input verification using a smartphone based on the client-server application. The software implementation of the proposed method shows that the considered algorithm works correctly and corresponds to described above.

## References

- [1] Wang D., Wang P., Ma C., Chen Z., "Robust smart card based password authentication scheme against smart card loss problem. Cryptology ePrint Archive", *IEEE transactions on dependable and secure computing* 15(2018): 708-722.
- [2] Wang D., He D., Wang P., Chu C.H., "Anonymous two-factor authentication in distributed systems: Certain goals are beyond attainment.", *IEEE Trans. Depend. Secur. Comput.* 4(2015): 428-442.
- [3] Amin R., Islam S., Khan M. K., Karati A., Giri D., Kumari S., "A two-factor rsa-based robust authentication system for multiserver environments.", *Security and Communication Networks*. vol. 2017, Article ID 5989151, (2017): 15.
- [4] Han L. et al., "An efficient and secure two-factor authentication scheme using elliptic curve cryptosystems.", *Peer-to-Peer Networking and Application*. vol. 11(12), (2016): 11.
- [5] Xie Q., Wong D. S., Wang G., Tan X., Chen K., Fang L., "Provably secure dynamic id-based anonymous two-factor authenticated key exchange protocol with extended security model.", *IEEE Transactions on Information Forensics and Security*. vol. 12, (2017): 1382-1392.
- [6] "Data Breach Investigations Report 2018."last accessed January 10, 2019, <https://www.verizonenterprise.com/resources-reports-rp-DBIR-2018-Report-execsummary-en-xg.pdf>.
- [7] "Providing information security."last accessed January 25, 2019, <https://searchinform.ru>.
- [8] "Two-factor authentication."last accessed January 10, 2019, <https://www.infobip.com-ru-glossariy-dvukhfaktornaya-a-autentifikatsiya>.
- [9] "iOS and Android already occupy 99.9 of the market for mobile operating systems."last accessed January 27, 2019, <https://www.ixbt.com-news-2018-02-24-ios-android-99-9.html>.
- [10] "MySQL and MongoDB - when and what is better to use."last accessed February 02, 2019, <https://habr.com-ru-post-322532>.
- [11] Nyssanbayeva S. , Ussatova O., "Dvuhfaktornaja autentifikacija v avtomatizirovannoj sisteme upravlenija, ["Two-factor authentication in the automated control system"], | the III International scientific conference "Information Science and Applied Mathematics"], *DAN USSR* vol. 2, no 2 (2018): 239-242.
- [12] "National Institute of Standards and Technology (NIST)."last accessed January 10, 2019, <https://www.nist.gov>.
- [13] "FIPS 140-2 standard and self-encryption technology."last accessed January 10, 2019, <https://www.seagate.com-files-www-content-solutions-content-security-and-encryption-id-docs-faq-fips-sed-lr-mb-605-2-1302-ru.pdf>.
- [14] "National Security Agency ."last accessed January 10, 2019, <https://www.cryptomuseum.com-intel-nsa-index.htm>.

МРНТИ 30.15.19; 30.15.23

**Сглаживание траектории центра масс робота методом генетического отбора**

Акжалова А.Ж., Казахстанско-Британский технический университет,  
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: assel.akzhalova@gmail.com,  
Мухарский Д.В., Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова,  
г. Кокшетау, Республика Казахстан, E-mail: amiddd@rambler.ru,  
Саду А., Кокшетауский государственный университет им. Ш. Уалиханова,  
г. Кокшетау, Республика Казахстан, E-mail: anara\_17.02kz96@mail.ru

В работе рассматривается метод расчёта кинематики шарнирной конструкции и применение генетического алгоритма для обеспечения требуемой траектории движения заданных точек конструкции. Сначала описаны типы звеньев произвольных шарнирных конструкций, их математическое описание и построение на их основе систем нелинейных уравнений, описывающих кинематику шарнирных конструкций. Полученные нелинейные системы решаются многократным применением метода Ньютона для систем нелинейных уравнений. Построенный алгоритм применяется для расчёта кинематики шарнирной конструкции, представляющей собой модель конечности «кинетических скульптур» Тео Янсена. Целью расчёта является подбор оптимальных параметров конечности, которые позволят применить её для модели робота с четырьмя опорными конечностями. Строится функция приспособленности траектории опорной точки и методом генетического отбора подбирается лучшая траектория, которая обеспечивает прямолинейное движение корпуса робота относительно земли. Теоретические расчёты подкрепляются численным моделированием и визуализацией. В конце статьи приводится график, иллюстрирующий успешное применение разработанной модели. На основе теоретических построений создан реальный прототип шагающего робота с четырьмя конечностями методом 3D печати комплектующих и последующей сборки.

**Ключевые слова:** кинематика шарнирной конструкции, «кинетическая скульптура» Тео Янсена, метод Ньютона, генетический алгоритм, шагающий робот.

**Генетикалық іріктеу әдісі арқылы робот массасы орталығының траекториясын тегістеу**

Акжалова А.Ж., Қазақстандық-Британдық техникалық университет,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: assel.akzhalova@gmail.com,  
Мухарский Д.В., Ш. Уалиханов ат. Көкшетау мемлекеттік университеті,  
Көкшетау қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: amiddd@rambler.ru,  
Саду А., Ш. Уалиханов ат. Көкшетау мемлекеттік университеті,  
Көкшетау қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: anara\_17.02kz96@mail.ru

Баяндамада, топсалық конструкцияның кинематикалық есептеу әдісі және конструкцияның берілген нүктелері қажетті траекториямен қозғалуы үшін, генетикалық алгоритмді қолдану қарастырылады. Біріншіден, ерікті топсалық конструкциялардың типтері, олардың математикалық сипаттамасы және олардың негізінде топсалық конструкцияның кинематикасын сипаттайтын сызықты емес теңдеулер жүйесінде құрастыру сипатталған. Сызықты емес теңдеулер жүйесі үшін қолданылатын Ньютон әдісін бірнеше рет қолдану арқылы алынған сызықты емес жүйелерді шешуге болады. Құрылған алгоритм топсалық конструкция кинематикасын есептеу үшін қолданылады. Бұл Тео Янсеннің «кинетическая скульптура» аяқ-қолдар моделінің үлгісі болып табылады. Есептеудің негізгі мақсаты - төрт



аяғы бар робот үлгісіне қолдануға мүмкіндік беретін аяқтың оңтайлы параметрлерін таңдау. Тірек нүктесі траекториясының ыңғайлану функциясы құрылады және ең жақсы траектория роботтың денесінің жерге қатысты сызықты қозғалысын қамтамасыз ететін генетикалық іріктеу әдісі арқылы таңдалады. Теориялық есептер сандық үлгілеу және визуализация арқылы бекітіледі. Мақаланың соңында құрастырылған модельді табысты қолдануды көрсететін график көрсетіледі. Теория негізінде және компоненттерді 3D принтерде басып шығарумен және кейіннен оны құрастыру арқылы төрт аяғы бар қадам басып жүретін роботтың нақты прототипі құрылды.

**Түйін сөздер:** топсалық конструкцияның кинематикасы, «кинетическая скульптура» Тео Янсена, Ньютон әдісі, генетикалық алгоритм, қадам басып жүретін робот.

### Smoothing the robot center mass trajectory by genetic selection

Akzhalova A., Kazakh-British Technical University,  
Almaty, Republic of Kazakhstan, E-mail: assel.akzhalova@gmail.com,  
Mukharsky D., Sh. Ualikhanov Kokshetau State University,  
Kokshetau, Republic of Kazakhstan, E-mail: amiddd@rambler.ru,  
Sadu A., Sh. Ualikhanov Kokshetau State University,  
Kokshetau, Republic of Kazakhstan, E-mail: anara\_17.02kz96@mail.ru

The paper examines a calculating method for an articulated construction kinematics and application of a genetic algorithm to provide the required trajectory of the specified structure points. First, we describe all types of articulated constructions segments, their mathematical description and construction on their basis of non-linear equations systems that describing the articulated construction kinematics. The obtained non-linear systems are solved by repeated application of Newton's method for non-linear equations. The built algorithm is used to calculate the kinematics of the articulated construction which is a limb model of kinetic sculptures by Theo Jansen. The calculation purpose is optimum parameters selection of a limb which will allow applying it for a robot model with four supporting extremities. We built a reference point trajectory fitness function and constructed the best trajectory which provides rectilinear movement of a robot body relative to the ground by the method of genetic selection. Theoretical calculations are supported by numerical modelling and visualization. There is a graph illustrating the successful application of the developed model at the article end. A real prototype of a stepping robot with four extremities by means of 3D printing of components and subsequent assemblage is created on the basis of theoretical considerations.

**Key words:** kinematics of articulated construction, strandbeest by Theo Jansen, Newton's method, genetic algorithm, walking robot.

## 1 Введение

Задачи изучения шагающего движения это задачи создания устройств, которые могут перемещаться по сильно пересечённой местности, в отсутствие любых дорог. Шагающие машины актуальны, прежде всего, как средство движения по местности со сложным рельефом и по каменистой местности [1]. Колесо при любом использовании не способно решить задачу движения по бездорожью. Ему требуется гладкая, непрерывная поверхность. Шагающая машина имеет небольшое пятно касания с поверхностью и, в перспективе, способна выбирать место контакта. Такое устройство незаменимо при исследовании новых территорий, передвижения по морскому дну, по развалинам зданий, исследовании поверхности других планет.

Конструкторами создано множество вариаций шагающих машин [2]. Многие из этих устройств демонстрируют впечатляющие навыки движения, очень напоминающие движение живых существ. С другой стороны анализ их движения показывает отсутствие адаптивности движения к условиям, в которых машина движется. Требуются обширные

исследования в области мехатроники и управления для создания конечностей, способных не просто преобразовывать круговое движение моторов в поступательное, а изменять параметры шага для выбора наиболее удобной точки опоры.

Если рассматривать шагающие механизмы как системы многих тел, соединённых шарнирами, то для автоматического составления компьютерной модели и её исследования можно использовать специализированные пакеты UM [3], CAD-системы [4],[5]. Для специальных случаев возможно ускорение расчётов с использованием специфических методов. В таких условиях вместо специализированных пакетов лучше напрямую составлять необходимые системы уравнений и решать их известными методами. Такой подход даёт больше гибкости в исследовании нестандартного поведения конструкций и нестандартных режимов их использования.

В работе рассмотрен метод расчёта шаговых циклов [6] шарнирных конструкций методом Ньютона и рассмотрен пример применения метода к расчёту шарнирной конструкции Тео Янсена. Параметры шарнирной конструкции подбираются методом генетического программирования для получения траектории движения с заранее заданными характеристиками. В отличие от классических конструкций Тео Янсена, исследованных во многих источниках, мы расширили пространство поиска путём расщепления точки, задающей движение на две, сдвинутые по фазе относительно друг друга. Это позволило существенно расширить число возможных траекторий опорной точки, среди которых производится поиск оптимальной траектории. На основе полученной модели строится образец шагающего робота с четырьмя конечностями.

Данная статья является продолжением исследования авторов по применению групп мобильных роботов для работы в труднодоступной местности. В работе [7] рассматривается постановка задачи исследования группой связанных роботов мест стихийных и техногенных бедствий. Применение в качестве членов группы шагающих роботов с адаптированным к условиям движения шагом позволит существенно расширить эффективность и скорость обследования местности.

## 2 Обзор литературы

Разработкой шагающих механизмов конструкторы занимаются с давних времён. Есть упоминания разработок из Китая, датированных 230 ВС. Хороший обзор всех существенных разработок в этой области от первых робких попыток до последних моделей дан в книге [8]. Шагающее движение находит своё применение при движении по пересечённой и труднодоступной местности, по слабым грунтам [9], в аварийно-спасательных работах [10], в исследовании и освоении морского дна [11], [12], [13], [14], в военном деле [15], в сельском хозяйстве [16] и т.д.

Основной проблемой при разработке шагающих механизмов является уменьшение энергетических затрат на движение [17]. При передвижении по пересечённой местности корпус робота испытывает постоянные и нерегулярные колебания в вертикальной плоскости. При этом затрачивается работа на преодоление силы тяжести. Уменьшение этой работы положительно скажется на экономичности хода и увеличении времени автономной работы робота [18].

В большинстве рассмотренных публикаций анализ движения роботов основывается на составлении, анализе и решении систем динамических и кинематических уравнений.

Найденные решения зачастую оказываются неоптимальными и неустойчивыми при изменении параметров шагающих роботов. Поиск оптимальных решений наталкивается на существенные вычислительные трудности. В таких условиях актуальным становится использование других методов оптимизации, приближенных к естественным способам адаптации живых организмов [19]. Это сравнительно молодое направление получило название эволюционная робототехника (Developmental Robotics) [20]. Эволюционная робототехника является междисциплинарной областью исследований и находится на стыке связанной с такими науками как искусственный интеллект, робототехника и эволюционная биология [21], [22].

Исследования показывают, что метод последовательного эволюционного усложнения конструкции робота может дать вполне ощутимый эффект и приводить к неожиданным находкам [23].

### 3 Материал и методы

Системы связанных между собой шарнирами жёстких стержней представляют собой физические конструкции со многими степенями свободы. Расчёт кинематики таких конструкций сводится к системе нелинейных уравнений. При малых скоростях движения и большой жёсткости связующих стержней можно пренебречь колебательными степенями свободы и изменениями формы стержней. В предположении очень малой силы трения мы получим идеальную шарнирную конструкцию, для которой можно рассчитать траектории движения всех шарниров путём решения системы однотипных нелинейных уравнений.

#### 3.1 Адаптация метода Ньютона для расчёта произвольной шарнирной конструкции

Будем рассматривать шарнирные конструкции, состоящие из звеньев трёх видов. К первому типу относятся нерастяжимые и абсолютно твёрдые стержни с двумя подвижными шарнирами на концах Рис. 1а. Второй тип представляют собой рычаги с двумя подвижными шарнирами и одним неподвижным шарниром Рис. 1б. Третий тип звеньев так же имеет вид рычагов с тремя подвижными шарнирами Рис. 1с. Для рычагов типов б и с допускается расположение шарниров не на одной прямой.

Для типа а имеем уравнение, связывающее координаты двух шарниров на концах стержня:

$$L^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Для рычагов типа б имеем три уравнения (с учётом 2-х вариаций рычагов - пять уравнений):

$$\begin{aligned} L_1^2 &= (x_1 - X_3)^2 + (y_1 - Y_3)^2 + (z_1 - Z_3)^2, & L_1^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \\ L_2^2 &= (X_3 - x_2)^2 + (Y_3 - y_2)^2 + (Z_3 - z_2)^2, & L_2^2 &= (x_2 - X_3)^2 + (y_2 - Y_3)^2 + (z_2 - Z_3)^2, \\ L &= g(L_1, L_2, \alpha). \end{aligned}$$

где  $X_3, Y_3, Z_3$  и длины стержней считаются заданными константами,  $g(\cdot)$  – функциональная связь между длинами плеч рычагов и угла между ними.

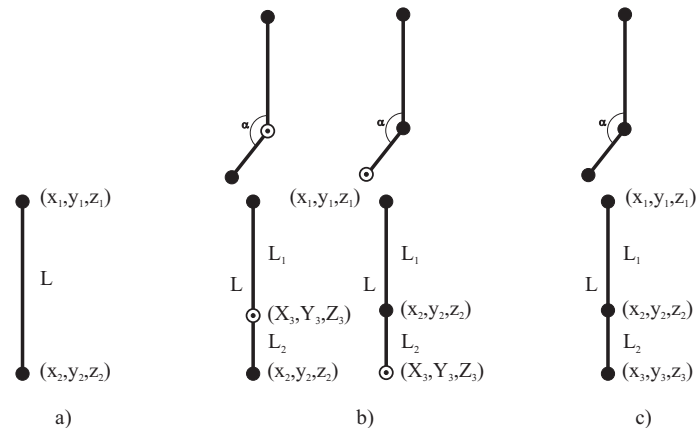


Рисунок 1: Типы соединительных звеньев. Используются следующие обозначения: ● - подвижный шарнир, ⊙ - неподвижный шарнир. Координаты неподвижных шарниров записываются прописными буквами

Для рычагов типа с получаем аналогичную систему уравнений:

$$\begin{aligned} L_1^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2, \\ L_2^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2, \\ L &= g(L_1, L_2, \alpha). \end{aligned}$$

Будем рассматривать шарнирные конструкции, которые имеют один шарнир с заданной траекторией движения. Такой шарнир будем называть *исток шарнирной конструкции*. Исток задаёт закон движения для всей шарнирной конструкции. Наиболее важными для практического применения в робототехнике считаются движение по окружности и колебательное движение вдоль произвольной прямой. В общем случае допустимы любые траектории, заданные аналитически или таблично.

Цель расчёта - нахождение траектории движения заданной точки или нескольких точек шарнирной конструкции. Такие точки будем называть *стоками шарнирной конструкции*. В большинстве практических приложений достаточно одного стока. Однако не вызывает затруднений нахождение траекторий любого количества стоков.

Система звеньев описывается системой нелинейных уравнений, которую в самом общем случае записывают в виде:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Для решения систем нелинейных уравнений вида (1) наибольшее распространение получили метод Зейделя и метод Ньютона в различных модификациях. Метод Ньютона имеет преимущество перед методом Зейделя в скорости схождения. Кроме того метод Ньютона имеет простую модификацию и хорошо масштабируется для расчёта многозвенных шарнирных конструкций.

В общем методе Ньютона левые части уравнений (1) представляются рядами Тейлора. Разложение ограничивается членами нулевой и первой степеней приращений переменных. В результате получается СЛАУ, которую можно разрешить относительно приращений переменных. Так как разложение исходной системы (1) ограничено, то приращения могут быть использованы только для нахождения следующего приближения значений переменных с любой необходимой точностью. Для шарнирных конструкций обобщённая система (1) имеет специальное представление, которое позволяет упростить расчёты.

Каждое звено описывается своим нелинейным уравнением или системой уравнений. Эти уравнение зависит от шести координат в трёхмерном случае и от четырёх координат в двухмерном случае. Таким образом, всю систему (1) можно представить в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{11}(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = 0 \\ f_{12}(X_1, Y_1, Z_1, x_1, y_1, z_1) = 0 \\ f_{13}(X_2, Y_2, Z_2, x_1, y_1, z_1) = 0 \\ \dots \\ f_{n1}(x_{n-3}, y_{n-3}, z_{n-3}, x_n, y_n, z_n) = 0 \\ f_{n2}(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2}, x_n, y_n, z_n) = 0 \\ f_{n3}(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}, x_n, y_n, z_n) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Метод расчёта состоит в том, что за одну итерацию методом Ньютона решаются подсистемы общей системы (2) для координат последовательности подвижных шарниров. Расчёт необходимо начинать с уравнений, связывающих координаты истока с координатами следующего подвижного шарнира. Расчёт заканчивается, когда мы получаем новые координаты всех стоков.

Преимущество описанной схемы расчёта кроется в простоте её реализации. При программной реализации можно использовать стандартные библиотеки линейной алгебры, или реализовать весь расчёт самостоятельно. К недостаткам схемы можно отнести накопление ошибок при многократном применении метода Ньютона. Однако, описанный в следующем разделе пример, показал применимость схемы на практике, приемлемую точность и скорость расчёта.

Другим ограничением описываемой схемы является её применимость только для конструкций с детерминированным поведением каждого узла в цепочке от истока до стока. Математически это означает необходимость введения дополнительных ограничивающих уравнений или условий. С другой стороны, при разработке конечностей для робота детерминизм является необходимым условием жёсткости конструкции. Для таких случаев описанная схема расчёта может оказаться предпочтительнее универсальных методов.

В следующем разделе приведён пример расчёта шарнирной конструкции, представляющей собой модель конечности «кинетических скульптур» (strandbeest) Тео Янсена.

### 3.2 Пример расчёта шарнирной конструкции

Применим общую схему из предыдущего раздела к системе нелинейных уравнений для шарнирной конструкции, представленной на Рис. 2. Эта шарнирная конструкция представляет собой модель конечности шагающего механизма Тео Янсена [24], [25].

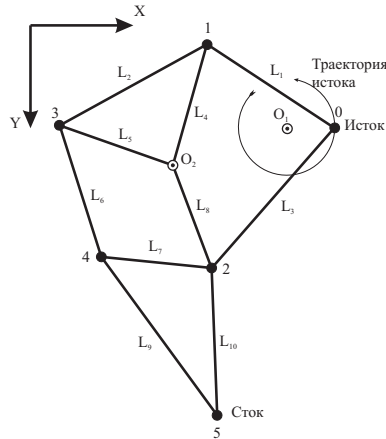


Рисунок 2: Конструкция конечности шагающего механизма Тео Янсена

Конструкция состоит целиком из стержней типа а. Таких звеньев в конструкции 10 штук. Движение по оси  $z$  ограничено и не рассматривается. Таким образом, работу конструкции будем рассматривать в двухмерном пространстве. Исток конструкции движется по окружности с постоянной угловой скоростью. Зная координаты  $(X_1, Y_1)$  центра окружности  $O_1$ , радиус окружности  $R$  и угловую скорость  $\omega$  мы можем рассчитать положение точки 0 в любой момент времени. Далее зная координаты  $(X_2, Y_2)$  неподвижной точки  $O_2$ , рассчитываются положения шарниров в порядке их нумерации на Рис. 2.

Полная система уравнений для конструкции на Рис. 2 имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \\ L_2^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \\ L_3^2 = (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 \\ L_4^2 = (x_1 - X_2)^2 + (y_1 - Y_2)^2 \\ L_5^2 = (x_3 - X_2)^2 + (y_3 - Y_2)^2 \\ L_6^2 = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 \\ L_7^2 = (x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 \\ L_8^2 = (x_2 - X_2)^2 + (y_2 - Y_2)^2 \\ L_9^2 = (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 \\ L_{10}^2 = (x_5 - x_2)^2 + (y_5 - y_2)^2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} L_1^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 \\ L_4^2 = (x_1 - X_2)^2 + (y_1 - Y_2)^2 \end{array} \right. \\ 2 \left\{ \begin{array}{l} L_3^2 = (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 \\ L_8^2 = (x_2 - X_2)^2 + (y_2 - Y_2)^2 \end{array} \right. \\ 3 \left\{ \begin{array}{l} L_2^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \\ L_5^2 = (x_3 - X_2)^2 + (y_3 - Y_2)^2 \end{array} \right. \\ 4 \left\{ \begin{array}{l} L_6^2 = (x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 \\ L_7^2 = (x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2 \end{array} \right. \\ 5 \left\{ \begin{array}{l} L_9^2 = (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 \\ L_{10}^2 = (x_5 - x_2)^2 + (y_5 - y_2)^2 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3)$$

В правой части уравнения сгруппированы по два. Каждой группы достаточно, чтобы рассчитать положение одного шарнира в иерархии. Последняя группа даёт координаты

стока шарнирной конструкции. Каждая группа уравнений решается отдельно и даёт базу для решения следующей группы. Уравнения для координат  $x_0, y_0$  выражаются через угловую скорость шарнира 0 и радиус  $R$  окружности, по которой он движется по формулам  $x_0(t) = R \sin \omega t, y_0(t) = R \cos \omega t$ .

В последующих расчётах будем считать их известными величинами и не прописывать специально в системе нелинейных уравнений. Для дальнейшей работы удобно переписать уравнения в виде:

$$\begin{cases} 1 \left\{ \begin{aligned} f_{11} &= (x_0^2 - 2x_0^2x_1^2 + x_1^2 + y_0^2 - 2y_0^2y_1^2 + y_1^2 - L_1^2 \\ f_{12} &= (x_0^2 - 2x_0^2x_1^2 + x_1^2 + y_0^2 - 2y_0^2y_1^2 + y_1^2 - L_1^2 \end{aligned} \right. \\ \dots \\ 5 \left\{ \begin{aligned} f_{51} &= (x_5^2 - 2x_5^2x_1^2 + x_4^2 + y_5^2 - 2y_5^2y_4^2 + y_4^2 - L_9^2 \\ f_{52} &= (x_5^2 - 2x_5^2x_1^2 + x_4^2 + y_5^2 - 2y_5^2y_4^2 + y_4^2 - L_{10}^2 \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (4)$$

Обозначим  $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, y_1^{(k)}, \dots, x_5^{(k)}, y_5^{(k)})^T$  приближение корня на итерации  $k$ .

Точное значение корня обозначим вектором  $\mathbf{x}^{(\infty)} = (x_1^{(\infty)}, y_1^{(\infty)}, \dots, x_5^{(\infty)}, y_5^{(\infty)})^T$ . В соответствии с методом Ньютона раскладываем левые части уравнений в ряды Тейлора.

$$\begin{cases} l \left\{ \begin{aligned} f_{l1}(x_l^{(k)}, y_l^{(k)}) + \frac{\partial f_{l1}}{\partial x_l} \Delta x_l + \frac{\partial f_{l1}}{\partial y_l} \Delta y_l &= 0 \\ f_{l2}(x_l^{(k)}, y_l^{(k)}) + \frac{\partial f_{l2}}{\partial x_l} \Delta x_l + \frac{\partial f_{l2}}{\partial y_l} \Delta y_l &= 0 \\ \dots \end{aligned} \right. \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 1 \left\{ \begin{aligned} (-2x_0 + 2x_1^{(k)}) \Delta x_1 + (-2y_0 + 2y_1^{(k)}) \Delta y_1 &= -f_{11}(x_1^{(k)}, y_1^{(k)}) \\ (-2x_2 + 2x_1^{(k)}) \Delta x_1 + (-2y_2 + 2y_1^{(k)}) \Delta y_1 &= -f_{12}(x_1^{(k)}, y_1^{(k)}) \end{aligned} \right. \\ \dots \\ 5 \left\{ \begin{aligned} (-2x_4 + 2x_5^{(k)}) \Delta x_5 + (-2y_4 + 2y_5^{(k)}) \Delta y_5 &= -f_{51}(x_5^{(k)}, y_5^{(k)}) \\ (-2x_2 + 2x_5^{(k)}) \Delta x_5 + (-2y_2 + 2y_5^{(k)}) \Delta y_5 &= -f_{52}(x_5^{(k)}, y_5^{(k)}) \end{aligned} \right. \end{cases}, \quad (5)$$

где  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}^{(\infty)} - \mathbf{x}^{(k)}$ .

В левых частях уравнений (5) мы оставляем только слагаемые, которые содержат нулевую и первую степени приращений  $\Delta x_l, \Delta y_l$ . Задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно  $\Delta x_l, \Delta y_l$ .

Решение линейной системы уравнений (5) используется для итерационного нахождения нового приближения к значению корня:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \Delta x_l; \quad y_i^{(k+1)} = y_i^{(k)} + \Delta y_l. \quad (6)$$

В теории метода Ньютона используется другая запись полученных уравнений. Вводится понятие Якобиана:

$$J_l = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{l1}}{\partial x_l} & \frac{\partial f_{l1}}{\partial y_l} \\ \frac{\partial f_{l2}}{\partial x_l} & \frac{\partial f_{l2}}{\partial y_l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 2x_l & -2y + 2y_l \\ -2X + 2x_l & -2Y + 2y_l \end{pmatrix}, \quad (7)$$



где  $x, y, X, Y$  – координаты уже рассчитанных подвижных шарниров или координаты неподвижных шарниров.

Систему (5) можно переписать в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{J}_l(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{f}_l(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Таким образом, мы получаем расчётные формулы для  $k + 1$ -го приближения шарнирной конструкции:

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= x_i^{(k)} - \frac{1}{|J_l|} \left( f_{l2}(x_i^{(k)}, y_l^{(k)}) \frac{\partial f_{l1}}{\partial y_l} - f_{l1}(x_i^{(k)}, y_l^{(k)}) \frac{\partial f_{l2}}{\partial y_l} \right), \\ y_l^{(k+1)} &= y_l^{(k)} - \frac{1}{|J_l|} \left( f_{l1}(x_i^{(k)}, y_l^{(k)}) \frac{\partial f_{l2}}{\partial x_l} - f_{l2}(x_i^{(k)}, y_l^{(k)}) \frac{\partial f_{l1}}{\partial x_l} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Расчётные формулы (8) позволяют последовательно рассчитывать координаты всех подвижных шарниров конструкции начиная от истоков и заканчивая стоком в произвольный момент времени. Затем рассчитываются положения истоков в следующий момент времени и весь процесс расчёта по формулам (8) повторяется. Мы использовали описанный метод, чтобы анимировать на экране компьютера движение шарнирной конструкции и строить в режиме реального времени траекторию движения стока.

Описанный метод позволяет в режиме реального времени менять длины звеньев и координаты неподвижных шарниров, отслеживая поведение стока и вырождение конструкций. В качестве первого приближения мы взяли параметры из открытых источников в интернете. Построенная модель стала базовой для уточнения параметров траектории, сначала в интерактивном режиме. Для более тонкой настройки параметров мы применили метод генетического отбора.

В следующем разделе строится генетический алгоритм нахождения лучшей траектории, удовлетворяющей оптимизирующей функции приспособленности.

### 3.3 Применение генетического отбора для сглаживания траектории центра масс

При использовании шарнирной конструкции, показанной на Рис. 2, в качестве опорно-двигательного механизма шагающего робота поставим задачу подбора такой траектории стока, чтобы центр масс робота двигался как можно более плавно. Математически это требование означает минимизацию вертикальных смещений центра масс за один полный цикл движения стока одной из конечностей. При этом число конечностей робота должно быть минимальным для обеспечения устойчивого движения. Тео Янсен в своих «кинетических скульптурах» использует большое количество ног. В каждый момент времени не менее десяти-двадцати конечностей имеют опору на землю. За счёт этого движение всей конструкции получается плавным. При создании небольшого робота с описанными конечностями, приводимого в движение мотором, количество конечностей может быть 2, 4, 6. Использовать большее количество энергетически нецелесообразно.

Для робота с двумя конечностями, который передвигается с достаточно малой скоростью, контакт с землёй большую часть времени будет иметь только одна из ног. При этом возникает ряд проблем с поддержанием равновесия робота, согласованным с шагом перемещением центра масс и другие проблемы вертикальной конструкции с малой площадью контакта с землёй [20].

В нашей работе мы ориентировались на конструкцию робота с четырьмя конечностями. При движении робота с четырьмя конечностями по ровной поверхности, в контакте с землёй всё время должны находиться 2 диагонально противоположные конечности. За время, пока робот имеет контакт с землёй по одной паре конечностей, другая пара должна пройти верхнюю часть траектории и коснуться земли в момент или чуть раньше, чем первая пара поднимет конечности от земли. Кроме того за время контакта пары конечностей с землёй колебания центра масс должны быть минимальными. Таким образом, основная проблема плавного движения конструкции с четырьмя конечностями в согласовании момента отрыва первой пары конечностей от земли с моментом постановки второй пары конечностей на землю. Так как задняя пара конечностей полностью повторяет движения передней пары, мы будем рассматривать движение центра масс только одной пары.

Для исследования большего количества различных траекторий мы разделили шарнир 0 на два шарнира с различными расстояниями от точки  $O_1$  и различающихся фазой  $\alpha$ . Тем самым мы заменили шарнирную конструкцию с одним истоком на шарнирную конструкцию с двумя функционально связанными истоками, существенно увеличив количество возможных траекторий стока.

На Рис. 3 показана зависимость вертикального положения неподвижного шарнира от положения конечностей робота для двух диаметрально противоположных положений истоков.

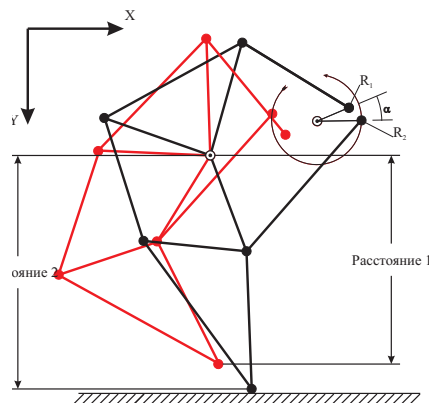


Рисунок 3: Две противоположные позиции стока

Из рисунка видно, что опору на землю имеет та конечность, сток которой отдалён от неподвижного шарнира на большее расстояние. Таким образом, если во время движения робота максимальное из двух расстояний от неподвижного шарнира до стока имеет постоянное значение, то траектория движения центра масс, который жёстко связан с неподвижным шарниром, будет представлять собой прямую линию, горизонтальную земле. Отсюда получим, что функцией приспособленности (fitness function) для подбора

оптимальных параметров конечностей будет функция:

$$\begin{aligned} \forall t, \tau : \Delta D &= \max_{t \leq T} (D(t), D(T-t)) - \max_{\tau \leq T} (D(\tau), D(T-\tau)) \rightarrow 0, \\ D(t) &= Y_2(t) - y_5(t), D(\tau) = Y_2(\tau) - y_5(\tau), \\ D(T-t) &= Y_2(T-t) - y_5(T-t), D(t-\tau) = Y_2(T-\tau) - y_5(T-\tau), \\ t &\neq \tau, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $T$  - период движения истоков.

В практических расчётах удобнее использовать сумму квадратов отклонений точек траектории опорной конечности от среднего значения за цикл. Если обозначить количество рассчитанных за цикл точек траектории как  $N$ , то мы получим следующую функцию приспособленности, применённую нами для оценки «качества» траектории стока.

$$\begin{aligned} \Delta D &= \sum_{t=0}^N \left( D_{av} - \max_{t \leq T} (D(t), D(T-t)) \right)^2 \rightarrow 0, \\ D_{av} &= \frac{\sum_{t=0}^N \max (D(t), D(T-t))}{N}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для подбора параметров конечности, обеспечивающих выполнение целевой функции (10) нами был использован генетический алгоритм [26],[27]. Использование генетических алгоритмов оправданно к задачам, не имеющим чёткой аналитической формулировки. Однако для таких задач можно сформулировать желаемый критерий приближения к решению и использовать его для оценки множества получаемых решений. Известные методы аналитического решения малоприспособны для данного типа задач. Кроме того имеется множество соотношений параметров конечности, которые приводят к вырожденным конструкциям, т.е. конструкциям, которые невозможны в силу физических ограничений. Отслеживать аналитически случаи вырождения сложно, однако целевая функция (10) стремится к бесконечности для вырожденных конструкций и это может являться сигналом к отбраковке соответствующих конечностей [28].

В качестве генотипа мы использовали следующие параметры: десять длин соединительных сегментов, координаты двух неподвижных шарниров, радиусы движения истоков и фаза. Соответственно хромосома одной особи представляется 17-ю числами:

$$G = \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7, L_8, L_9, L_{10}, X_1, Y_1, X_2, Y_2, R_1, R_2, \alpha\}. \quad (11)$$

Мы использовали для поиска траектории небольшую популяцию из 9 особей. Вначале каждая особь иницировалась случайным генотипом, сгенерированным из чисел, соответствующих физически корректной шарнирной конструкции с далеко неоптимальной траекторией путём искажения их на малую величину.

Полностью алгоритм может быть описан следующими шагами.

1) Иницируются 9 особей путём искажения хромосомы физически корректной шарнирной конструкции;

2) Исток каждой шарнирной конструкции совершает полный цикл  $T$  движения, и запоминается каждое 4-е значение  $\max (D(t), D(T-t))$ ;

- 3) Вычисляется среднее положение стока  $D_{av}$  опорной конечности по формуле (10);
- 4) Вычисляется  $\Delta D$  - сумма квадратов отклонений стока от среднего значения за весь цикл движения по формуле (10);
- 5) Чем меньше  $\Delta D$  для особи, тем ближе траектория данной особи к оптимальной. Если в поколении  $p$  существует особь, у которой  $\Delta D < \varepsilon$  будем говорить, что данная особь имеет  $\varepsilon$ -оптимальную траекторию и считать её победителем. Алгоритм заканчивает свою работу. Опыты показывают, что величина  $\varepsilon$  не может иметь значение равное 0. Это связано с погрешностью вычислений. Мы использовали значение 15 для величины  $\varepsilon$ .
- 6) Если условие пункта 5) не выполнено, то популяция подвергается селекции. Особи, фенотип которых оказался вырожденным и особь, имеющая максимальное значение  $\Delta D$  не переходят в следующее поколение. Их хромосомы заменяются хромосомами, полученными скрещиванием хромосом от двух родительских особей из родительского пула, выбранных методом селекции. Родительский пул составляют все оставшиеся после отбраковки особи. Мы использовали наиболее широко распространённый метод селекции, называемый методом рулетки. Чем меньше значение  $\Delta D$  для особи, тем с большей вероятностью данная особь переходит в следующее поколение.
- 7) Оператор скрещивания действует по классической схеме. Родительские хромосомы, выбранные методом рулетки из родительского пула, делятся на две части в произвольной точке (одинаковой для обеих хромосом, что обеспечивает сохранение длины хромосомы неизменной). Потомок наследует одну часть хромосомы от первого родителя и другую часть хромосомы от второго родителя. Другая вариация теряется.
- 8) Часть популяции подвергается действию оператора мутации. Действие оператора мутации заключалось в искажении на малую величину одного случайного аллеля. Оператор мутации позволяет «вливать новую кровь» в популяцию, т.е. исследовать другие точки пространства решений.

В следующем разделе приводятся результаты численного моделирования эволюции шарнирной конструкции, анализируются результаты моделирования и делаются выводы по практическому применению полученных результатов.

#### 4 Результаты и обсуждение

Для проведения численного моделирования и расчёта оптимальной траектории стока мы написали программный симулятор. Программа позволяет визуализировать результаты расчёта кинематики шарнирной конструкции, интерактивно в режиме реального времени менять параметры шарнирной конструкции, строить графики скорости и координаты стока, запускать эволюцию 9 особей на поиск траектории, оптимизирующей функцию приспособленности (10). Все результаты численного моделирования, приведённые в данном разделе, получены с помощью этой программы.

На Рис. 4 показана вся популяция в первом поколении и вся популяция в после остановки генетического отбора.

На рисунке красные точки отмечают траекторию стока шарнирной конструкции. Синяя линия показывает траекторию движения центра масс конструкции. Каждая точка синей линии отмечает величину отклонения стока опорной конечности от среднего

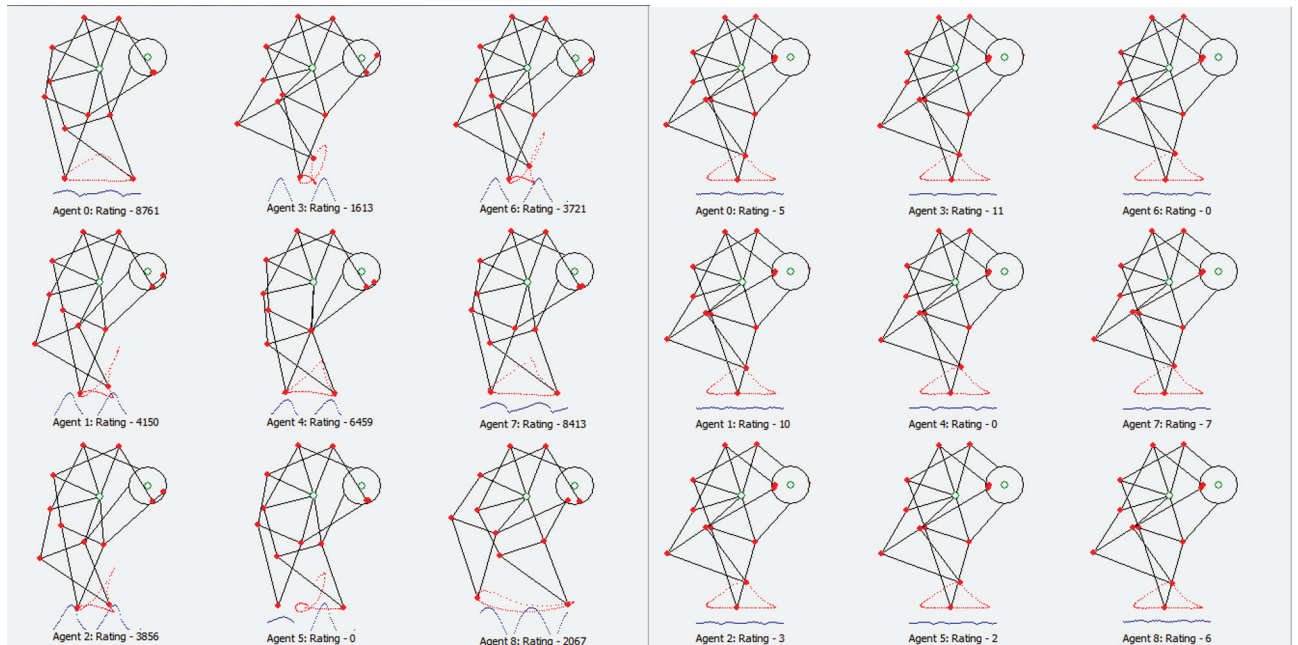


Рисунок 4: Состояние популяции для первого (слева) и 161-го (справа) поколений

за цикл значения, умноженную на масштабный коэффициент. Мы выбрали масштабный коэффициент равным 4-м, чтобы визуально оценивать качество работы алгоритма.

В первом поколении все траектории различны, несмотря на то, что получены малыми искажениями от одной неоптимальной хромосомы. Траектории центров масс представляют собой далёкие от прямых линий кривые с двумя характерными впадинами, характеризующими моменты смены опорной конечности на краях траекторий. Часть траекторий (1-я, 2-я, 3-я, 5-я и 6-я) совершенно непригодны для организации передвижения робота, так как представляют собой петлеобразные линии либо колебательные движения.

На 161 поколении победителем оказалась особь под номером 3 со следующим генотипом:  $L_1 = 199, 81; L_2 = 224, 96; L_3 = 245, 49; L_4 = 167, 00; L_5 = 161, 38; L_6 = 157, 03; L_7 = 148, 42; L_8 = 150, 46; L_9 = 265, 37; L_{10} = 208, 70; X_1 = 0; Y_1 = 0; X_2 = -152, 09; Y_2 = -35, 31; R_1 = 48, 65; R_2 = 49, 67; \alpha = -8^0$ .

Из сравнения рисунков видно насколько эволюционировали особи и как видоизменились траектории центров масс. У победившей особи траектория центра масс мало отличается от прямой линии. Некоторые отклонения связаны в основном с неустраняемыми погрешностями вычислений. Особенностью найденной алгоритмом траектории является малая фаза  $\alpha$ . Два истока практически слились в один общий исток. Мы запускали эволюцию много раз. Замеченная тенденция к объединению истоков наблюдалась при всех запусках. Это послужило причиной того, что для практического использования в конструкции робота мы объединили истоки и взяли значения параметров, близкие к рассчитанным величинам и компенсирующие объединение. Технически один исток использовать легче, чем два.

Траектория-победитель имеет очень острые края соответствующие моментам смены опорной конечности. Можно предположить, что обострение краёв траектории и являлось скрытым мотивом отбора. На траекториях в первом поколении соответствующие края округлены, что является источником характерных провалов траектории центра масс в моменты смены опорной ноги. Эволюция привела к сплюсчиванию траектории и максимальному спрямлению нижней части траектории.

На Рис. 5 показан график изменения суммарного среднеквадратичного отклонения для 9 эволюционировавших особей в течение 161 поколения.

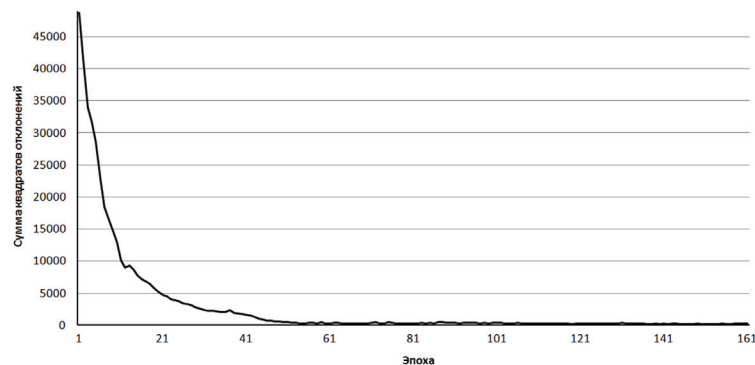


Рисунок 5: График изменения суммы квадратов отклонений координат стока опорной конечности от среднего значения

График демонстрирует прогрессирующее снижение отклонения с небольшими флуктуациями, вызванными мутациями аллелей хромосом. Алгоритм быстро избавляется от особей с большой суммой квадратов отклонений. На Рис. 4 первыми кандидатами на отбраковку были особи с номерами 1, 2, 3, 5 и 6. Любая мутация, приводящая к уменьшению отклонения, поднимает рейтинг особи и повышает шансы на переход особи в новое поколение и распространение своей хромосомы на другие особи. Все вышеуказанные факторы приводят сначала к быстрому выделению перспективного множества параметров, а затем к медленному улучшению траектории и приближению её к наилучшей.

В таблице 1 собраны результаты численного моделирования для параметров звеньев шарнирной конструкции и координат неподвижных шарниров.

В первой колонке приведены значения длин и координаты неподвижных шарниров для конструкций Тео Янсена, найденные нами в открытых источниках [24]. В скобках приведены эти же значения, пересчитанные в масштаб используемой нами модели. Второй столбец содержит параметры, найденные нами эмпирическим путём с помощью визуального оценивания траектории. Можно видеть, что эти значения очень близки к значениям Тео Янсена.

В третьем столбце таблицы приведены значения параметров, которые были использованы как исходные для запуска процесса эволюции. Следующий столбец соответствует значениям, полученным в ходе эволюции.

Последний столбец получен дополнительным запуском процесса эволюции в предположении, что истоки слиты в один. Полученные числа мало отличаются от чисел



Таблица 1: Параметры конечности

Параметр	Значения Тео Янсена	Значения, найденные эмпирически	Исходные значения для эволюции	Значения, найденные эволюцией	Окончательные значения
$L_1$	50 (166,67)	167	200	199,81	199,13
$L_2$	55,8 (186,00)	186	223	224,96	222,41
$L_3$	61,9 (206,33)	199	247	245,49	242,16
$L_4$	41,5 (138,33)	138	166	167,00	167,19
$L_5$	40,1 (133,67)	134	160	161,38	159,66
$L_6$	39,4 (131,33)	131	157	157,03	155,10
$L_7$	36,7 (122,33)	122	146	148,42	146,82
$L_8$	39,3 (131,00)	125	150	150,46	149,99
$L_9$	65,7 (219,00)	219	262	265,37	265,65
$L_{10}$	49 (163,33)	175	210	208,70	211,19
$O_1(X_1, Y_1)$	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
$O_2(X_2, Y_2)$	-38 (-126,67) -7,8 (-26,00)	-125 -28	-150 -33	-152,09 -35,31	-153,62 -36,99
$R_1$	15 (50)	50	50	48,65	50,38
$R_2$	-	-	50	49,67	-
$\alpha$	-	-	0	$-8^0$	-

из предыдущего столбца и лишь немного исправляют траекторию, сохраняя её полезные свойства, чтобы компенсировать соединение двух истоков в один. Единственным существенным отличием траектории из последнего столбца от предыдущей траектории было уменьшение высоты наивысшей точки. Траектория стала более «сплюснутой» и напоминала каплю ртути на несмачиваемой поверхности в поле силы тяжести.

Мы запускали эволюцию много раз. Отбор занимал в среднем 200 поколений. Каждый раз мы получали близкие значения с небольшими вариациями. Различия в основном были связаны с вариациями координат точки  $O_2$  относительно точки  $O_1$ , которую мы приняли за начало отсчёта. Вариации длин были связаны с необходимостью компенсировать различия в координатах  $O_2$ . Таким образом, существует целое семейство параметров, отвечающих оптимальной функции приспособленности (10). Введение дополнительных критериев отбора для траектории может выделить из этого множества более узкое подмножество.

В целом проведённое исследование позволило нам найти параметры конечности робота, которые позволяют роботу двигаться без видимых вертикальных колебаний корпуса. Такое движение энергетически более выгодно. Найденная нами в процессе эволюции траектория движения стока превосходит по качеству траекторию, которую демонстрируют конечности «кинетических скульптур» Тео Янсена в приложении к роботу с четырьмя конечностями.



Во время экспериментов мы заметили, что фаза  $\alpha$  сильно влияет на траекторию. Малые изменения фазы приводят к большим искажениям траектории стока. Часть траекторий была неприемлема по критерию (10), однако эти траектории могут быть полезны для движения в других условиях. С инженерной точки зрения управление фазой может оказаться удобнее, чем другими параметрами конечности (положение опорных шарниров, длины стержней), для адаптации конечности к условиям движения [29].

Найденные нами параметры удовлетворяли нашим требованиям и были применены для построения действующей модели шагающего робота с плавным ходом центра масс.

## 5 Заключение

В статье построена модель расчёта кинематики шарнирной конструкции на основе метода Ньютона. Описывались шаги по составлению системы нелинейных уравнений, описывающих кинематику произвольных шарнирных конструкций. Составленная система решалась последовательным применением метода Ньютона к группам уравнений. Описанная модель применена для расчёта кинематики конечности робота. Конечность представляет собой шарнирную конструкцию Тео Янсена.

В третьей части статьи описанный алгоритм расчёта кинематики был применён для подбора параметров конечности обеспечивающих прямолинейность движения центра масс робота с четырьмя конечностями. Черновой подбор параметров осуществлялся эмпирическим путём с использованием численного моделирования.

Эмпирически подобранные параметры использовались в качестве исходной точкой для эволюционного алгоритма. Построен генетический алгоритм, который позволил улучшить параметры конечности робота и обеспечить прямолинейное движение центра масс робота. Построена функция приспособленности генетического алгоритма, которая применена для поиска прямолинейной траектории центра масс двух конечностей и обеспечения быстрой смены опорной конечности в крайних точках шагового цикла. Найденная методом генетического отбора траектория гарантирует прямолинейное движение корпуса робота с четырьмя конечностями.

В заключение отметим, что дальнейшей работе планируется построить динамическую модель конечности с учётом трения в шарнирах и инерционных характеристик звеньев и исследовать энергетические затраты на движение и пути их минимизации. Так же планируется применить возможность регулировки фазы между истоками для адаптации шага робота к условиям движения.

## Список литературы

- [1] *Spagna J.C., Goldman D.I., Lin P-C, Koditschek and Full R.J.* Distributed mechanical feedback in arthropods and robots simplifies control of rapid running on challenging terrain // *Bioinspiration & biomimetics*. - 2007. - Vol.2, no.1. - P.9-18.
- [2] *Collins S., Ruina A., Tedrake R. and Wisse M.* Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers // *Science*. - 2005. - Vol.307, no.5712. - P.1082-1085.
- [3] *Горбцов А.С.* Программный комплекс расчета динамики и кинематики машин как систем твердых и упругих тел // *Справочник. Инженерный журнал с приложением*. - 2004. - №9(90). - С.40-43.

- [4] *Moldovan F. and Dolga V.* Analysis of Jansen walking mechanism using CAD // Solid State Phenomena. Robotics and Automation Systems. - 2010. - Vol.166. - P.297-302.
- [5] *Moldovan F., Dolga V., Ciontos O. and Pop C.* Cad design and analytical model of a twelve bar walking mechanism // University "Politehnica" of Bucharest Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering. - 2011. - Vol.73, no.2. - P.35-48.
- [6] *Павловский В.Е.* О разработках шагающих машин // Препринты Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. - 2013. - №101. - С.101-32.
- [7] *Akzhalova A., Inoue A. and Mukharsky D.* Intelligent Mobile Agents for Disaster Response: survivor search and simple communication support // Proceedings of International Symposium on Artificial Life and Robotics AROB 19th. - 2014. - P.254-259.
- [8] *Todd D.J.* Walking machines: an introduction to legged robots // Springer Science & Business Media, 2013. - P.189.
- [9] *Gorinevsky D.M. and Shneider A.Yu.* Force control in locomotion of legged vehicles over rigid and soft surfaces // Int. J. Robot. Res. - 1990. - Vol.9, no.2. - P.4-23.
- [10] *Чернышев В.В.* Опыт использования шагающей машины для ликвидации аварийного разлива нефти // Безопасность жизнедеятельности. - 2003. - № 5. - С.28-30.
- [11] *Chernyshev V.V. and Gavrilov A.E.* Traction properties of walking machines on underwater soils with a low bearing ability // In Minerals of the Ocean-7 & Deep-Sea Minerals and Mining-4: abstracts of Int. Conf. - 2014. - P.21.
- [12] *Yoo S.Y., Jun B.H. and Shim H.* Design of static gait algorithm for hexapod subsea walking robot: Crabster // Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers. - 2014. - Vol.38, no.9. - P.989-997.
- [13] *Jun B.H., Shim H., Kim B., Park J.Y., Baek H., Yoo S. and Lee P.M.* Development of seabed walking robot CR200 // In 2013 MTS/IEEE OCEANS-Bergen. - 2013. - P.1-5.
- [14] *Shim H., Yoo S.Y., Kang H. and Jun B.H.* Development of arm and leg for seabed walking robot CRABSTER200 // Ocean Engineering. - 2016. - Vol.116. - P.55-67.
- [15] *Digney B.L. and Penzes S.* High utility robotics in urban combat operations // CLAWAR-Catilian Italy. - 2003.
- [16] *Шаныгин С.В.* Роботы, как средство механизации сельского хозяйства // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. - 2013. - №3. - С.39-42.
- [17] *Briskin E.S., Shurygin V.A., Chernyshev V.V., Maloletov A.V., Sharonov N.G., Kalinin Ya V., Leonard A.V., Serov V.A., Mironenko K.B. and Ustinov S.A.* Problems of increasing efficiency and experience of walking machines elaborating // In Advances on Theory and Practice of Robots and Manipulators. Springer. - 2014. - P.383-390.
- [18] *Silva M.F., Machado J.T. and Lopes A.M.* Energy analysis of multi-legged locomotion systems // In Proc. CLAWAR'2001-4th International Symposium on Climbing and Walking Robots. - 2001 - P.143-150.
- [19] *Nolfi S., Floreano D. and Floreano D.D.* Evolutionary robotics: The biology, intelligence, and technology of self-organizing machines // MIT press, 2000. - P.320.
- [20] *Weng J.* Developmental robotics: Theory and experiments // International Journal of Humanoid Robotics. - 2004. - Vol.1, no.02. - P.199-236.
- [21] *Bongard J.* Morphological change in machines accelerates the evolution of robust behavior // Proceedings of the National Academy of Sciences. - 2011. - Vol.108, no.4. - P.1234-1239.
- [22] *Bongard J.C.* Morphological and environmental scaffolding synergize when evolving robot controllers: artificial life/robotics/evolvable hardware // In Proceedings of the 13th annual conference on Genetic and evolutionary computation. - 2011. - P.179-186.
- [23] *Bongard J.* Behavior Chaining-Incremental Behavior Integration for Evolutionary Robotics // In ALIFE. - 2008. - P.64-71.
- [24] *Jansen T.* Strandbeest [Электрон. ресурс]. - 2018. - URL: <https://www.strandbeest.com> (дата обращения: 20.02.2019г.)
- [25] *Wang C.Y. and Hou J.H.* Analysis and Applications of Theo Jansen's Linkage Mechanism-Theo Jansen's Linkage Mechanism on Kinetic Architecture [Электрон. ресурс]. - 2018. - URL: [http://papers.cumincad.org/data/works/att/caadria2018\\_140.pdf](http://papers.cumincad.org/data/works/att/caadria2018_140.pdf) (дата обращения: 20.02.2019г.)
- [26] *Mitchell M.* An introduction to genetic algorithms // MIT press, 1998. - P.203.

- [27] *Haupt R.L. and Haupt S.E.* Practical genetic algorithms // John Wiley & Sons, 2004. - P.251.
- [28] *Bächer M., Coros S. and Thomaszewski B.* LinkEdit: interactive linkage editing using symbolic kinematics // ACM Transactions on Graphics (TOG). - 2015 - Vol.34, no.4. - P.99.
- [29] *Komoda K. and Wagatsuma H.* A proposal of the extended mechanism for Theo Jansen linkage to modify the walking elliptic orbit and a study of cyclic base function // In Proceedings of the 7th Annual Dynamic Walking Conference (DWC'12). - 2012.

## References

- [1] *Spagna, Joseph C., Daniel I. Goldman, Pei-Chun Lin, Daniel E. Koditschek, and Robert J. Full.* "Distributed mechanical feedback in arthropods and robots simplifies control of rapid running on challenging terrain.", *Bioinspiration and biomimetics* 2(1) (2007): 9-18.
- [2] *Collins S., Ruina A., Tedrake R. and Wisse M.* "Efficient bipedal robots based on passive-dynamic walkers", *Science* 307(5712) (2005): 1082-1085.
- [3] *Gorobchev A.S.* "Programmnyiy kompleks rascheta dinamiki i kinematiki mashin kak sistem tverdyih i uprugih tel [The program complex of calculation of dynamics and kinematics of machines as systems of firm and elastic bodies]", *Directory. Engineering Journal with Application* 9(90) (2004): 40-43.
- [4] *Moldovan F. and Dolga V.* "Analysis of Jansen walking mechanism using CAD", *Solid State Phenomena. Robotics and Automation Systems* 166 (2010): 297-302.
- [5] *Moldovan F., Dolga V., Ciontos O. and Pop C.* "Cad design and analytical model of a twelve bar walking mechanism", *University "Politehnica" of Bucharest Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering* 73(2) (2011): 35-48.
- [6] *Pavlovskiy V.E.* "O razrabotkakh shagayuschih mashin [About the developments of walking machines]", *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS* 101 (2013): 101-32.
- [7] *Akzhalova A., Inoue A. and Mukharsky D.* "Intelligent Mobile Agents for Disaster Response: survivor search and simple communication support", *Proceedings of International Symposium on Artificial Life and Robotics AROB 19th* (2014): 254-259.
- [8] *Todd D.J.* "Walking machines: an introduction to legged robots", *Springer Science and Business Media, 2013*, 189.
- [9] *Gorinevsky D.M. and Shneider A.Yu.* "Force control in locomotion of legged vehicles over rigid and soft surfaces", *Int. J. Robot. Res.* 9(2) (1990): 4-23.
- [10] *Chernyshev V.V.* "Opyit ispolzovaniya shagayuschey mashiny dlya likvidatsii avariynogo razliva nefi [Experience in using a stepping machine to eliminate accidental oil spills]", *Life Safety* 5 (2003): 28-30.
- [11] *Chernyshev V.V. and Gavrilov A.E.* "Traction properties of walking machines on underwater soils with a low bearing ability", *In Minerals of the Ocean-7 and Deep-Sea Minerals and Mining-4: abstracts of Int. Conf* (2014): 21.
- [12] *Yoo S.Y., Jun B.H. and Shim H.* "Design of static gait algorithm for hexapod subsea walking robot: Crabster", *Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers* 38(9) (2014): 989-997.
- [13] *Jun B.H., Shim H., Kim B., Park J.Y., Baek H., Yoo S. and Lee P.M.* "Development of seabed walking robot CR200", *In 2013 MTS/IEEE OCEANS-Bergen* (2013): 1-5.
- [14] *Shim H., Yoo S.Y., Kang H. and Jun B.H.* "Development of arm and leg for seabed walking robot CRABSTER200", *Ocean Engineering* 116 (2016): 55-67.
- [15] *Digney B.L. and Penzes S.* "High utility robotics in urban combat operations", *CLAWAR-Catilian Italy, 2003*.
- [16] *Shanyigin S.V.* "Robotyi, kak sredstvo mehanizatsii selskogo hozyaystva [Robots as a means of mechanization of agriculture]", *News of higher educational institutions. Engineering* 3 (2013): 39-42.
- [17] *Briskin E.S., Shurygin V.A., Chernyshev V.V., Maloletov A.V., Sharonov N.G., Kalinin Ya V., Leonard A.V., Serov V.A., Mironenko K.B. and Ustinov S.A.* "Problems of increasing efficiency and experience of walking machines elaborating", *In Advances on Theory and Practice of Robots and Manipulators. Springer* (2014): 383-390.
- [18] *Silva M.F., Machado J.T. and Lopes A.M.* "Energy analysis of multi-legged locomotion systems", *In Proc. CLAWAR'2001-4th International Symposium on Climbing and Walking Robots* (2001): 143-150.

- 
- [19] *Nolfi S., Floreano D. and Floreano D.D.* "Evolutionary robotics: The biology, intelligence, and technology of self-organizing machines", *MIT press, 2000*, 320.
- [20] *Weng J.* "Developmental robotics: Theory and experiments", *International Journal of Humanoid Robotics* 1(02) (2004): 199-236.
- [21] *Bongard J.* "Morphological change in machines accelerates the evolution of robust behavior", *Proceedings of the National Academy of Sciences* 108(4) (2011): 1234-1239.
- [22] *Bongard J.C.* "Morphological and environmental scaffolding synergize when evolving robot controllers: artificial life/robotics/evolvable hardware", *In Proceedings of the 13th annual conference on Genetic and evolutionary computation* (2011): 179-186.
- [23] *Bongard J.* "Behavior Chaining-Incremental Behavior Integration for Evolutionary Robotics", *In ALIFE* (2008): 64-71.
- [24] *Jansen T.* "Strandbeest," Accessed February 20, 2019, <https://www.strandbeest.com>.
- [25] *Wang C.Y. and Hou J.H.* "Analysis and Applications of Theo Jansen's Linkage Mechanism-Theo Jansen's Linkage Mechanism on Kinetic Architecture 2018. - Accessed February 20, 2019, [http://papers.cumincad.org/data/works/att/caadria2018\\_140.pdf](http://papers.cumincad.org/data/works/att/caadria2018_140.pdf).
- [26] *Mitchell M.* "An introduction to genetic algorithms", *MIT press, 1998*, 203.
- [27] *Haupt R.L. and Haupt S.E.* "Practical genetic algorithms", *John Wiley and Sons, 2004*, 251.
- [28] *Bächer M., Coros S. and Thomaszewski B.* "LinkEdit: interactive linkage editing using symbolic kinematics", *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 34(4) (2015): 99.
- [29] *Komoda K. and Wagatsuma H.* "A proposal of the extended mechanism for Theo Jansen linkage to modify the walking elliptic orbit and a study of cyclic base function", *In Proceedings of the 7th Annual Dynamic Walking Conference (DWC'12)* (2012).

3-бөлім

Раздел 3

Section 3

Қолданылмалы  
математикаПрикладная  
математикаApplied  
Mathematics

МРНТИ 27.41.19, 27.35.25

**Метод численного анализа фильтрационных течений под каскадом гидросооружений**

Подгорный А.Р., Харьковский национальный университет радиоэлектроники,  
г. Харьков, Украина, E-mail: alex.aminuts@gmail.com

Сидоров М.В., Харьковский национальный университет радиоэлектроники  
г. Харьков, Украина, E-mail: maxim.sidorov@nure.ua

Фильтрационные течения широко распространены в природе и к необходимости их рассмотрения часто приходят в ходе хозяйственной деятельности. В работе рассматривается задача теории стационарной фильтрации в грунте под каскадом гидросооружений в предположении, что выполняется закон Дарси. Математической моделью этой задачи является эллиптические уравнения для функции тока с краевыми условиями второго рода на участках границы водоема и краевыми условиями первого рода на участках границы, являющимися непроницаемыми для жидкости. При этом в постановку задачи входят неизвестные значения полных расходов жидкости под каждым из гидросооружений каскада, для нахождения которых формулируются дополнительные интегральные соотношения. Для численного анализа задачи предлагается использовать структурно-вариационный метод (метод R-функций), что позволит наиболее полно учесть в вычислительном алгоритме всю геометрическую и аналитическую информацию, которая входит в постановку задачи. В соответствии с принципом суперпозиции от исходной задачи осуществлен переход к набору краевых задач с известными краевыми условиями. Для каждой из этих задач согласно методу R-функций построены структуры решения, точно учитывающие все краевые условия, и обосновано использование вариационного метода Ритца для аппроксимации неопределенной компоненты. После этого из дополнительных интегральных соотношений находятся приближенные значения неизвестных расходов жидкости, а значит, и приближенное решение исходной задачи. Был проведен вычислительный эксперимент для случая постоянного коэффициента фильтрации в области, которая имеет вид нижней половины кольца с двумя полукруглыми заглублениями, расположенными симметрично. Предлагаемый метод численного анализа показал свою эффективность при решении тестовой задачи и может быть использован для решения прикладных задач. Преимуществами разработанного численного метода является возможность получения решения краевой задачи в виде единого аналитического выражения и точное удовлетворение всем краевым условиям. **Ключевые слова:** фильтрационное течение, функция тока, принцип суперпозиции, метод R-функций, метод Ритца.

**Method of numerical analysis of fluid flows in porous media under a cascade of hydraulic structures**

Podhornyj A.R., Kharkiv National University of Radio Electronics,  
Kharkiv, Ukraine, E-mail: alex.aminuts@gmail.com

Sidorov M.V., Kharkiv National University of Radio Electronics,  
Kharkiv, Ukraine, E-mail: maxim.sidorov@nure.ua

Fluid flows in porous media are widespread in nature and they often come to the need for consideration in the course of economic activity. The paper deals with the problem of the theory of stationary fluid flows in porous media in the ground under the construction of hydraulic structures under the assumption that Darcy's law is fulfilled. The mathematical model of this problem is the elliptic equations for the stream function with boundary conditions of the second kind on sections of the boundary of the reservoir and boundary conditions of the first kind on sections of the boundary that are impermeable to liquid. At the same time, the formulation of the problem includes the unknown values of the total fluid flow rates under each of the hydraulic structures of the cascade, for the determination of which additional integral relations are formulated. For the numerical analysis of the problem, it is proposed to use the structural-variational method (the R-functions method), which will make it possible to fully take into account in the computational algorithm all the geometric and analytical information that is included in the formulation of the problem. In accordance with the principle of superposition from the original problem, a transition was made to a set of boundary-value problems with known boundary conditions. For each of these problems, according to the method of R-functions, the structures of the solution are constructed that accurately take into account all the boundary conditions, and the use of the Ritz variational method for approximation of the uncertain component is justified. After that, of the additional integral relations, the approximate values of the unknown flow rates of the fluid, and hence the approximate solution of the original problem, are found. A computational experiment was carried out for the case of a constant filtration coefficient in an area that has the form of the lower half of a ring with two semicircular burials located symmetrically. The proposed method of numerical analysis has shown its effectiveness in solving a test problem and can be used to solve applied problems. The advantages of the developed numerical method are the possibility of obtaining the solution of the boundary value problem in the form of a single analytical expression and the exact satisfaction of all the boundary conditions.

**Key words:** fluid flow in porous media, stream function, superposition principle, R-function method, Ritz method.

## 1 Введение

С самого начала хозяйственной деятельности человека одним из важнейших естественных природных ресурсов являются водные ресурсы. Их эффективное использование, в частности, для нужд энергетики, дало мощный толчок развитию цивилизации. Как следствие этого возникает необходимость для исследования соответствующих физических процессов совершенствовать численный аппарат математического моделирования. Важное место среди гидродинамических процессов занимают процессы просачивания жидкости (нефти, газа) в пористой среде - так называемые фильтрационные течения. К рассмотрению таких течений приводят процессы осушения и орошения, обтекания гидротехнических сооружений, просачивание воды сквозь земляные дамбы и др. [1]. Таким образом, разработка новых и усовершенствование существующих методов численного анализа фильтрационных течений является актуальной научной задачей.

Целью настоящей работы является разработка метода численного анализа плоских стационарных фильтрационных течений, математической моделью которого служит краевая задача для функции тока. Данная работа продолжает исследования, начатые в [2], и распространяет полученные там результаты на случай обтекания системы гидросооружений.



## 2 Обзор литературы

В качестве математических моделей течений жидкости в пористых средах обычно выступают краевые и начально-краевые задачи для уравнений в частных производных. Точные решения задач фильтрации можно получить лишь в некоторых простейших случаях [3, 4], поэтому более практичными и универсальными являются методы численные. Среди методов численного анализа фильтрационных течений можно выделить методы сеток, конечных элементов, мажорантных и фиктивных областей, стохастические методы [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. Общим недостатком упомянутых методов является то, что при их использовании в геометрически сложных областях граница области аппроксимируется, например, вписанной ломаной, то есть происходит потеря точности в учете геометрической информации в численном алгоритме.

Наиболее точно и полно учесть геометрическую и аналитическую информацию, которая содержится в постановке задачи математической физики, позволяет структурный метод R-функций [20, 21], разрабатываемый школой академика Национальной академии наук Украины В.Л. Рвачёва. Для численного решения задач фильтрации метод R-функций был применен, например, в [22, 23, 24], но в этих работах были рассмотрены лишь задачи фильтрации под единичными гидротехническими сооружениями и при условии, что все величины, входящие в постановку задачи, в частности, полный расход жидкости, известны.

## 3 Материалы и методы

### 3.1 Постановка задачи

Рассматривается задача стационарной напорной фильтрации [1, 10, 11, 12] в области, показанной на рис. 1. Область фильтрации  $\Omega$  ограничена непроницаемыми границами  $\partial\Omega_0$  и  $\partial\Omega_{2k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , которые являются линиями тока, а также проницаемыми границами (границами водоема)  $\partial\Omega_{2k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n + 1$ , которые являются потенциальными линиями.

Принимаем, что в заданной области действует закон Дарси, физический смысл которого означает, что потери напора при фильтрации пропорциональны скорости фильтрации. Вектор скорости фильтрации потока обозначим как  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ .

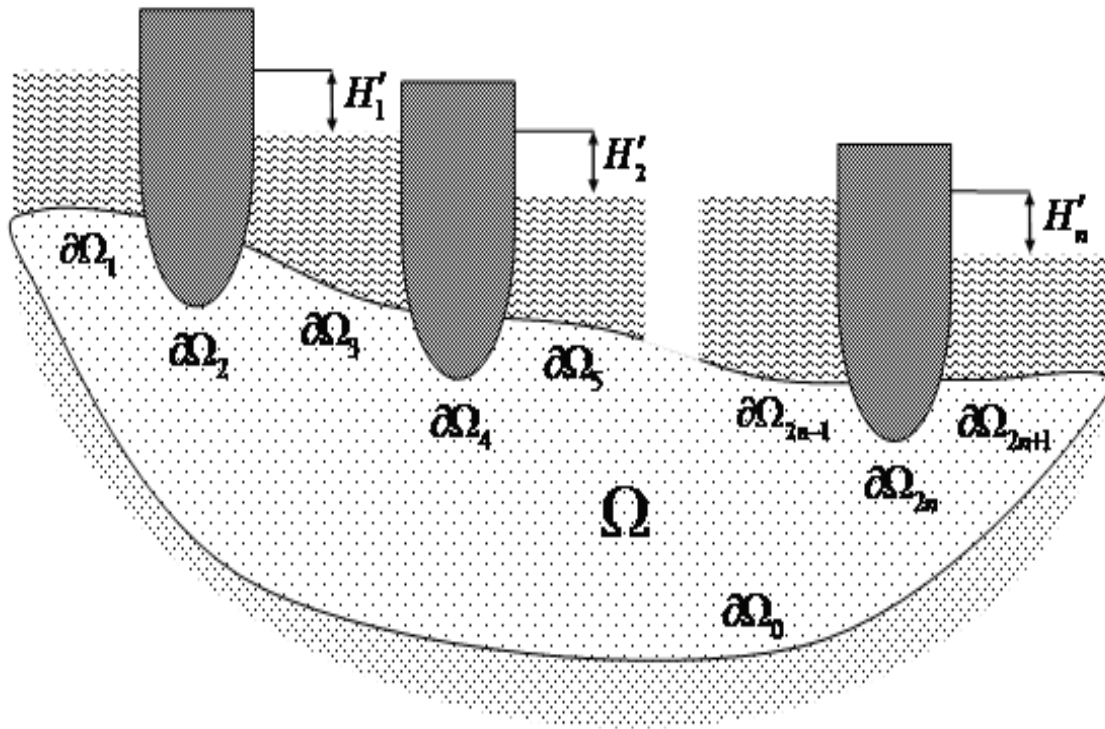
Анализ плоских фильтрационных течений удобно проводить с помощью функции тока  $\psi = \psi(x, y)$ , вводимой соотношениями:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Тогда для функции тока получим следующую краевую задачу:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \text{ в } \Omega, \quad (2)$$



Рисунок 1: Область фильтрации  $\Omega$ 

$$\psi|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega_{2k}} = Q_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega_{2k-1}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n+1. \quad (4)$$

Здесь  $\kappa = \kappa(x, y)$  - коэффициент фильтрации,  $\mathbf{n}$  - внешняя нормаль к соответствующим участкам границы,  $Q_k$  - полный расход жидкости на участке границы  $\partial\Omega_{2k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Величины  $Q_k$  являются неизвестными и определяются следующими интегральными соотношениями:

$$\int_{\partial\Omega_{2k}} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} ds = -H'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

где  $H'_k$  - действующий напор на участке границы  $\partial\Omega_{2k}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Граница  $\partial\Omega$  области фильтрации  $\Omega$  представляет собой объединение линий  $\partial\Omega_0, \partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_{2k+1}$ :  $\partial\Omega = \bigcup_{j=0}^{2n+1} \partial\Omega_j$ .

Для анализа задачи (2) - (5) воспользуемся принципом суперпозиции [25] и структурным методом (методом R-функций), предложенным академиком Национальной академии наук Украины В.Л. Рвачевым.

### 3.2 Основные сведения из теории метода R-функций

Рассмотрим основные сведения из теории R-функций и общую схему применения методов этой теории в математическом моделировании физико-механических полей [20, 21].

**Определение 1** Функция  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , называется R-функцией (функцией В.Л. Рвачева), соответствующей разбиению множества  $\chi = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$  на три градации

$$S_3^{-1}(0) = \chi(0) = (-\infty, 0), \quad S_3^{-1}(1) = \chi(1) = 0, \quad S_3^{-1}(2) = \chi(2) = (0, +\infty),$$

если существует такая функция трёхзначной логики  $Y = F(X_1, \dots, X_n)$ , что

$$S_3[f(x_1, \dots, x_n)] = F[S_3(x_1), \dots, S_3(x_n)], \quad (6)$$

$$\text{где } S_3(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t = 0, \\ 2, & t > 0. \end{cases}$$

Функция трёхзначной логики  $F$ , удовлетворяющая условию (6), называется сопровождающей для R-функции  $f$ .

Таким образом, среди функций непрерывного аргумента выделен класс функций, имеющих свойства, схожие со свойствами функций дискретного аргумента - функций трёхзначной логики. Доказано [20, 21], что этот класс функций имеет непустое пересечение с множеством элементарных функций.

Наиболее употребляемой на практике является система R-функций вида

$$\bar{x} \equiv -x, \quad x_1 \wedge_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_1 \vee_0 x_2 \equiv x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (7)$$

Для R-функций (7) сопровождающими являются функции трёхзначной логики отрицание, дизъюнкция и конъюнкция соответственно.

Схема применения аппарата теории R-функций при решении обратной задачи аналитической геометрии заключается в следующем. Пусть геометрический объект  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  построен из опорных множеств  $\Sigma_i = (\sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , с помощью операций  $-, \wedge, \vee$  алгебры логики над ними:

$$\Omega = F(\Sigma_1, \dots, \Sigma_m). \quad (8)$$

Будем считать, что  $\sigma_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , - простые непрерывные (элементарные) функции, то есть  $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$  является границей множеств  $\sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0$  и  $\sigma_i(\mathbf{x}) > 0$ . Если в (8) произвести формальную замену  $\Omega$  на  $\omega(\mathbf{x})$ ,  $\Sigma_i$  на  $\sigma_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , а символов  $-, \wedge, \vee$  алгебры логики на символы соответствующих R-функций, то получим в виде единого аналитического выражения элементарную функцию  $\omega(\mathbf{x})$ , равную нулю на границе  $\partial\Omega$ . При этом для внутренних точек  $\Omega$  выполняется неравенство  $\omega(\mathbf{x}) > 0$ .

Таким образом, уравнение  $\omega(\mathbf{x}) = 0$  в неявной форме определяет геометрическое место точек, которое является границей геометрического объекта  $\Omega$ .

Функцию  $\omega(\mathbf{x})$  также можно подчинить дополнительным условиям, например, условию нормализованности

$$\omega(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \partial\Omega; \omega(\mathbf{x}) > 0 \text{ внутри } \Omega; \left. \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega} = -1, \quad (9)$$

где  $\mathbf{n}$  - внешняя к  $\partial\Omega$  нормаль.

Для анализа краевых задач математической физики метод R-функций позволяет строить так называемые структуры решения краевых задач, то есть пучки функций, которые точно удовлетворяют всем краевым условиям задачи и зависят от некоторых неопределенных компонент.

Применение метода R-функций для численного анализа физико-механических полей состоит из следующих этапов:

- 1) точное аналитическое описание геометрии расчетной области, то есть построение функции  $\omega(\mathbf{x})$  со свойствами (9);
- 2) продолжение краевых условий внутрь области, то есть доопределение во внутренних точках области функций и операторов, заданных на границе;
- 3) построение общей структуры решения, то есть такой формулы, зависящей от одной или нескольких неопределенных функций (компонент), которая при любом их выборе точно удовлетворяет всем краевым условиям задачи;
- 4) построение приближенного решения, то есть аппроксимация неопределенных компонент структуры некоторым численным методом.

Для продолжения краевых условий внутрь области используются следующие два основных подхода [20].

Пусть функция  $\varphi_0$  в точках  $\partial\Omega$  задана как составная в виде

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} \varphi_0^{(1)}(s), & s \in \partial\Omega_1, \\ \dots & \dots \\ \varphi_0^{(r)}(s), & s \in \partial\Omega_r, \end{cases}$$

где участки границы  $\partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_r$  попарно различные, не имеют общих внутренних точек и  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_r$ .

Пусть далее  $\varphi_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, r$ , таковы, что  $\varphi_i|_{\partial\Omega_i} = \varphi_0^{(i)}$ , а  $\omega_i(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, r$ , такие, что  $\omega_i(\mathbf{x}) = 0$  на  $\partial\Omega_i$  и  $\omega_i(\mathbf{x}) > 0$  в  $\Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_i)$ . Тогда функция

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^r \varphi_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \omega_j}{\sum_{i=1}^r \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \omega_j}$$

имеет свойство  $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi_0$ .

Второй подход связан с продолжением дифференциальных операторов, заданных на  $\partial\Omega$ , внутрь области  $\Omega$ . Пусть  $\omega = 0$  - нормализованное уравнение границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ . Тогда оператор  $D_1$ , действующий по правилу

$$D_1 u \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

в регулярных точках  $\partial\Omega$  удовлетворяет равенству

$$-D_1 u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

где  $\mathbf{n}$  - внешняя к  $\partial\Omega$  нормаль.

При этом выражение  $D_1 u$  имеет смысл всюду в  $\Omega \cup \partial\Omega$ .

Общий метод построения структурных формул рассмотрен в [21, 26]. Основные применения метода R-функций к расчету физико-механических полей различной природы содержатся, например, в [26, 27].

### 3.3 Метод численного анализа

Решение задачи (2) - (5) в соответствие с принципом суперпозиции будем искать в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{i=1}^n Q_i u_i(x, y), \quad (10)$$

где  $u_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , - решение задачи

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (11)$$

$$u_i|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad u_i|_{\partial\Omega_{2k}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad k \neq i, \quad u_i|_{\partial\Omega_{2i}} = 1, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_{2k-1}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n + 1. \quad (13)$$

Пусть функции  $\omega_j(x, y)$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2n + 1$ , построенные с использованием конструктивного аппарата теории R-функций, таковы, что:

$$\omega_j(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega_j; \quad \omega_j(x, y) > 0 \text{ в } \Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_j);$$

$$\left. \frac{\partial \omega_j}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega_j} = -1, \quad j = 0, 1, \dots, 2n + 1.$$

Обозначим

$$\tau(x, y) = \omega_1(x, y) \wedge_0 \omega_1(x, y) \wedge_0 \dots \wedge_0 \omega_{2n+1}(x, y),$$

$$\tau_i(x, y) = \omega_0(x, y) \wedge_0 \omega_2(x, y) \wedge_0 \dots \wedge_0 \omega_{2j-2}(x, y) \wedge_0 \omega_{2j+2}(x, y) \wedge_0 \dots \wedge_0 \omega_{2n}(x, y),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда оператор  $D_1^{(\tau)}$ , определенный равенством

$$D_1^{(\tau)} u = \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y},$$

обладает свойством

$$D_1^{(\tau)} u \Big|_{\partial \Omega_{2k-1}} = - \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \Omega_{2k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n + 1,$$

а функция  $\tau_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , такова, что

$$\tau_i(x, y) = 0 \text{ на } \partial \Omega \setminus \partial \Omega_i,$$

$$\tau_i(x, y) > 0 \text{ на } \partial \Omega_i.$$

Тогда из результатов работы [28] следует, что пучок функций

$$u_i = f_i - \frac{\tau_i \wedge_0 \omega_{2i}}{\tau_i + \omega_{2i}} D_1^{(\tau)} f_i + (\tau_i \wedge_0 \omega_{2i}) \Phi_i - \frac{\tau_i \wedge_0 \omega_{2i}}{\tau_i + \omega_{2i}} D_1^{(\tau)} ((\tau_i \wedge_0 \omega_{2i}) \Phi_i), \quad (14)$$

где  $\Phi_i = \Phi_i(x, y)$  - неопределенная компонента,

$$f_i(x, y) = \frac{\tau_i(x, y)}{\tau_i(x, y) + \omega_{2i}(x, y)},$$

является общей структурой решения краевой задачи (11) - (13), т.е. при любом выборе неопределенной компоненты  $\Phi_i$  функция  $u_i$  вида (14) точно удовлетворяет краевым условиям (12), (13).

Для аппроксимации неопределенной компоненты  $\Phi_i$  в каждой из задач (11) - (13),  $i = 1, 2, \dots, n$ , воспользуемся вариационным методом Ритца [29, 30]. Для этого в задаче (11) - (13) сделаем замену

$$u_i = \varphi_i + v_i,$$

где  $\varphi_i = f_i - \frac{\tau_i \wedge_0 \omega_{2i}}{\tau_i + \omega_{2i}} D_1^{(\tau)} f_i$ , а  $v_i$  - новая неизвестная функция.

Тогда функция  $v_i$  будет решением краевой задачи с однородными краевыми условиями:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) = F_i \text{ в } \Omega, \tag{15}$$

$$v_i|_{\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_2 \cup \dots \cup \partial\Omega_{2n}} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3 \cup \dots \cup \partial\Omega_{2n+1}} = 0, \tag{17}$$

где  $F_i = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)$ .

С задачей (15) - (17) свяжем оператор  $A$  этой краевой задачи, действующий в пространстве  $L_2(\Omega)$  по правилу

$$Av = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \tag{18}$$

на области определения  $D_A$ , состоящей из тех функций пространства  $L_2(\Omega)$ , которые принадлежат множеству  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  и удовлетворяют краевым условиям (16), (17). Очевидно,  $D_A$  - линеал.

**Лемма 1** *Оператор  $A$  вида (18) является линейным, симметричным, положительным и даже положительно определенным оператором.*

*Доказательство* Линейность оператора  $A$  тривиально следует из линейности операции дифференцирования и того, что  $D_A$  - линеал.

Для доказательства симметричности рассмотрим теперь скалярное произведение  $(Av, w)$ , где  $v, w \in D_A$ . Применяя первую формулу Грина [29], получим:

$$\begin{aligned} (Av, w) &= \iint_{\Omega} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] w dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\kappa} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} w ds. \end{aligned}$$

Интеграл по  $\partial\Omega$  обнуляется в силу того, что  $v, w \in D_A$ , а значит,

$$(Av, w) = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy \quad (19)$$

и  $(Av, w) - (v, Aw) = (Av, w) - (Aw, v) = 0$ , то есть  $A$  - симметричный оператор. Положительность оператора  $A$  следует из того, что для всех  $v \in D_A$

$$(Av, v) = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq 0,$$

причем в силу условий (16), (17) равенство  $(Av, v) = 0$  возможно лишь, если  $v = 0$ .

Докажем теперь положительную определенность оператора  $A$  вида (18). Как известно [30], для функций  $u$  из пространства Соболева  $W_2^1(\Omega)$  имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq c \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma_1} u^2 ds \right\}, \quad (20)$$

где  $\Omega$  - область с липшицевой границей  $\partial\Omega$ ,  $\Gamma_1$  - открытая часть границы  $\partial\Omega$  области  $\Omega$  положительной меры Лебега,  $c > 0$  - постоянная, зависящая только от области  $\Omega$  и от  $\Gamma_1$ .

Поскольку

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} \left[ u^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

то из неравенства (20) следует оценка

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = \iint_{\Omega} u^2 dx dy \leq c \left\{ \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \int_{\Gamma_1} u^2 ds \right\}. \quad (21)$$

Пусть коэффициент фильтрации в области  $\Omega$  удовлетворяет неравенству  $0 < \kappa_1 \leq \kappa(x, y) \leq \kappa_2$ . Тогда для всех  $v \in D_A$

$$(Av, v) = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq \frac{1}{\kappa_2} \iint_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Выбирая далее в (21)  $\Gamma_1 = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_2 \cup \dots \cup \partial\Omega_{2n}$  и учитывая, что функции  $v \in D_A$  удовлетворяют краевому условию (16), получаем неравенство



$$(Av, v) \geq (c\kappa_2)^{-1} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

означающее, что  $A$  - положительно определенный оператор.

Лемма доказана.

На основании равенства (19) введем на  $D_A$  энергетическое произведение  $[v, w]$ , положив

$$[v, w] = \iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy, \quad v_1, v_2 \in D_A. \quad (22)$$

Пополняя  $D_A$  в смысле сходимости по энергетической норме

$$\|v\|_A = \sqrt{[v, v]} = \sqrt{\iint_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}, \quad (23)$$

порожденной скалярным произведением (22), получим энергетическое пространство  $H_A$  оператора  $A$  вида (18).

Тогда по теореме о функционале энергии [29] задача (15) - (17) при условии  $F_i \in L_2(\Omega)$  имеет в  $H_A$  единственное (обобщенное) решение  $v_i^*$ , являющееся точкой минимума в  $H_A$  функционала энергии

$$J[v_i] = \|v_i\|_A^2 - 2(F_i, v_i) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\kappa} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_i}{\partial y} \right)^2 \right] - 2F_i v_i \right] dx dy.$$

Для минимизации функционала  $J[v_i]$  воспользуемся методом Ритца, согласно которому приближенное решение задачи  $J[v_i] \rightarrow \inf_{H_A}$  ищем в виде

$$v_{i,N} = \sum_{k=1}^N c_k^{(i)} \varphi_k^{(i)},$$

где  $\{\varphi_k^{(i)}\}$  - координатная последовательность.

Из вида структуры (14) следует, что координатную последовательность  $\{\varphi_k^{(i)}\}$  можно составить из функций

$$\varphi_k^{(i)} = (\tau_i \wedge \omega_{2i}) \chi_k - \frac{\tau_i \wedge \omega_{2i}}{\tau_i + \omega_{2i}} D_1^{(\tau)}((\tau_i \wedge \omega_{2i}) \chi_k),$$

где  $\{\chi_k\}$  - любая полная в  $L_2(\Omega)$  система функций.

Тогда для определения постоянных  $c_k^{(i)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , будем иметь систему Ритца

$$\sum_{k=1}^N [\varphi_k^{(i)}, \varphi_j^{(i)}] c_k^{(i)} = (F_i, \varphi_j^{(i)}), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$[\varphi_k^{(i)}, \varphi_j^{(i)}] = \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\partial \varphi_k^{(i)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_k^{(i)}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j^{(i)}}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$(F_i, \varphi_j^{(i)}) = \int_{\Omega} F_i \cdot \varphi_j^{(i)} dx dy, \quad k, j = 1, 2, \dots, n.$$

Из теорем сходимости метода Ритца [29] следует сходимость последовательности  $\{v_{i,N}\}$  к  $v_i^*$  как в норме (23), так и в норме  $L_2(\Omega)$ .

Тогда функцию  $u_i^* = \varphi_i + v_i^*$  можно рассматривать как обобщенное решение задачи (11) - (13), к которому в норме  $L_2(\Omega)$  сходится последовательность  $\{u_{i,N}\}$ , где  $u_{i,N} = \varphi_i + v_{i,N}$ .

Если  $u_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , - решение задачи (11) - (13), то для определения величин  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n Q_i \int_{\partial\Omega_{2k}} \frac{\partial u_i^*}{\partial \mathbf{n}} ds = -H'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

которая в силу результатов [25] для видоизмененной задачи Дирихле имеет единственное решение.

Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1** Пусть  $F_i \in L_2(\Omega)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда последовательность

$$\psi_N = \sum_{i=1}^n Q_i^{(N)} u_{i,N},$$

где  $Q_i^{(N)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , - решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n Q_i^{(N)} \int_{\partial\Omega_{2k}} \frac{\partial u_{i,N}}{\partial \mathbf{n}} ds = -H'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

сходится в  $L_2(\Omega)$  к обобщенному решению задачи (2) - (5).

Заметим, что условия  $F_i \in L_2(\Omega)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , являются условиями применимости к решению задачи метода R-функций.

Также отметим, что условие  $\left. \frac{\partial v_i}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3 \cup \dots \cup \partial\Omega_{2n+1}} = 0$  является естественным, поэтому при выборе координатной последовательности  $\{\varphi_k\}$  ему можно не удовлетворять.

#### 4 Результаты и обсуждение

Вычислительный эксперимент в задаче (2) - (5) при  $\kappa = 1$  было проведено в области  $\Omega$ , граница  $\partial\Omega$  которой состоит из внешней полуокружности радиуса  $R$ , двух внутренних полуокружностей радиусов  $r_1$  и  $r_2$ ,  $r_1 < R$ ,  $r_2 < R$ , трех отрезков горизонтальной прямой  $y = 0$ . Для области  $\Omega$  функции  $\omega_i(x, y)$ ,  $i = 0, 1, \dots, 5$ , были выбраны следующим образом:

$$\omega_0(x, y) = \frac{1}{2R}(R^2 - x^2 - y^2), \quad \omega_1(x, y) = \omega_3(x, y) = \omega_5(x, y) = -y,$$

$$\omega_2(x, y) = \frac{1}{2r_1}(r_1^2 - (x + x_0)^2 - y^2), \quad \omega_4(x, y) = \frac{1}{2r_2}(r_2^2 - (x - x_0)^2 - y^2).$$

Область  $\Omega$  при  $R = 4$ ,  $r_1 = r_2 = 1$ ,  $x_0 = 2$  показана на рис. 2.

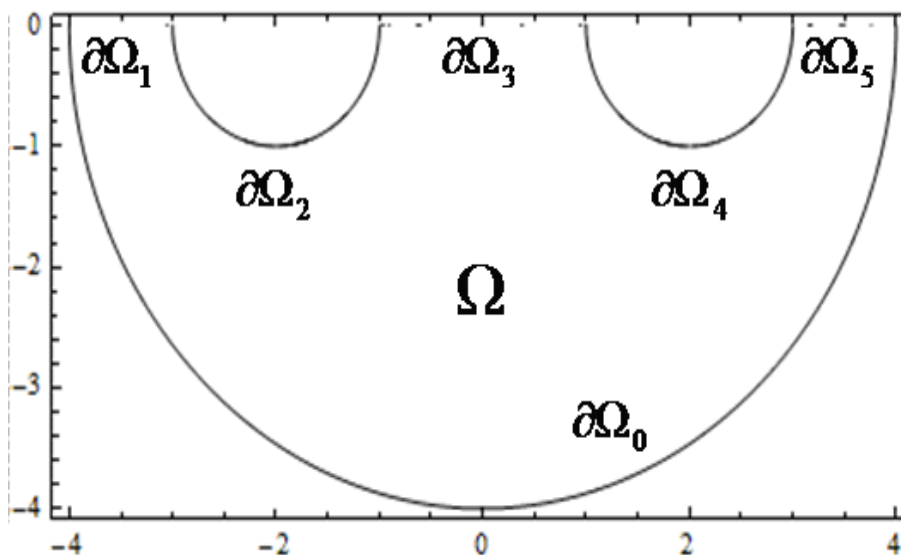


Рисунок 2: Область  $\Omega$  для вычислительного эксперимента

В качестве функций  $\{\chi_{ij}\}$  были выбраны произведения смещенных полиномов Лежандра:

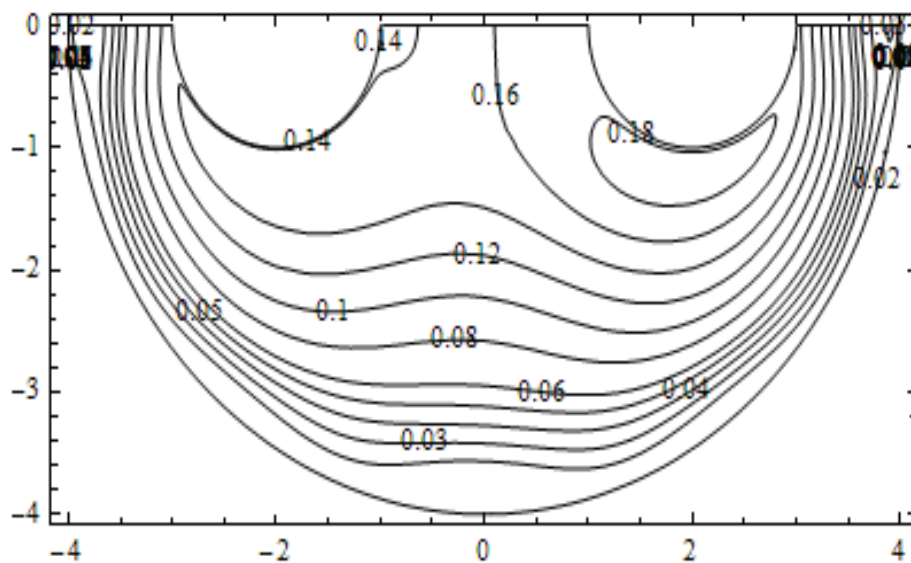
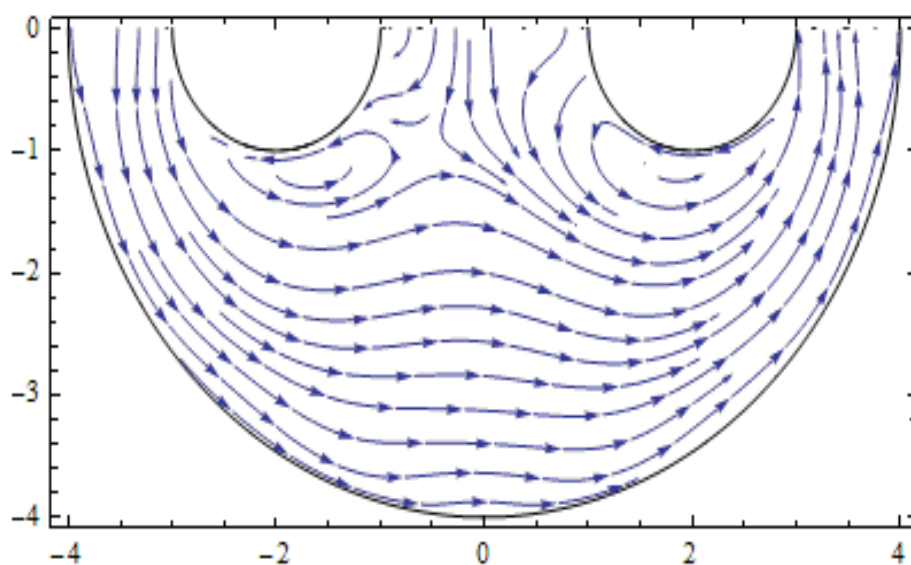
$$\chi_{ij}(x, y) = P_i\left(\frac{x}{R}\right) P_j\left(\frac{2y}{R} + 1\right), \quad i + j = 0, 1, 2, \dots$$

В таблице 1 приведены значения полных расходов жидкости  $Q_1^{(N)}$  и  $Q_2^{(N)}$  ( $H'_1 = 1$ ,  $H'_2 = 1, 1$ ) в зависимости от количества координатных функций  $N$ .

Как видно, значения  $Q_1^{(N)}$  и  $Q_2^{(N)}$  с ростом  $N$  стабилизируются. На рис. 3 приведены линии уровня приближенного решения  $\psi_{28}(x, y)$ , а на рис. 4 приведено векторное поле скоростей потока, восстановленное по формулам (1).

Таблица 1: Значения  $Q_1^{(N)}$  и  $Q_2^{(N)}$ 

$N$	6	10	15	21	28
$Q_1^{(N)}$	0,0933	0,0525	0,1086	0,1224	0,1351
$Q_2^{(N)}$	0,2314	0,1317	0,1293	0,1490	0,1676

Рисунок 3: Линии уровня приближенного решения  $\psi_{28}(x, y)$ Рисунок 4: Векторное поле скоростей, восстановленное по  $\psi_{28}(x, y)$

## 5 Заключение

Для численного анализа задачи фильтрации жидкости под каскадом гидросооружений в работе впервые предложено использовать метод R-функций в комбинации с методом Ритца. Особенностью постановки задачи при этом является то, что полные расходы жидкости под каждым из гидросооружений, входящих в каскад, заранее неизвестны и определяются из дополнительных интегральных соотношений. Вычислительный эксперимент, проведенный для тестовой задачи, продемонстрировал возможности и эффективность предлагаемого метода. Разработанный метод может найти применение при решении прикладных задач, связанных с расчетом фильтрационных течений. Этим определяется научная новизна и практическая значимость полученных в работе результатов.

## Список литературы

- [1] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. - М.: Наука, 1977. - 664 с.
- [2] Подгорний О.Р. Чисельний аналіз методом R-функцій фільтраційних течій у неоднорідному ґрунті. // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. - 2018. - Вип. 18. - С. 147-162.
- [3] Khan W. et al. Exact Solutions of Navier Stokes Equations in Porous Media // International Journal of Pure and Applied Mathematics. - 2014. - Vol. 96. - № 2. - P. 235-247.
- [4] Daly E., Bassar H., Rudman M. Exact solutions of the Navier-Stokes equations generalized for flow in porous media // The European Physical Journal Plus. - 2018. - Vol. 133. - № 5. - С. 173.
- [5] Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопечкий В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. - К.: Наук. думка, 2007. - 292 с.
- [6] Brebbia C.A., Connor J.J. Finite element techniques for fluid flow. - Newness-Butterworths, London, 1976. - 310 p.
- [7] Ferziger J.H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. - Berlin: Springer, 2002. - 423 p.
- [8] Chung T.J. Computational Fluid Dynamics. - United Kingdom: CUP, 2002. - 1022 p.
- [9] Wessiling P. Principles of computational Fluid Dynamics. - Berlin: Springer, 2001. - 644 p.
- [10] Ляшко И.И., Великоиваненко И.М., Лаврик В.И., Мистецький Г.Е. Метод мажорантных областей в теории фильтрации. - К.: Наук. думка, 1974. - 202 с.
- [11] Ляшко И.И., Великоиваненко И.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. - К.: Наук. думка, 1973. - 264 с.
- [12] Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике. - М.: Изд-во МГУ, 1991. - 156 с.
- [13] Zhang D. Stochastic methods for flow in porous media: coping with uncertainties. - San Diego: Academic Press, 2001. - 368 p.
- [14] Jenny P., Lee S.H., Tchelepi H.A. Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media // Multiscale Modeling & Simulation. - 2005. - Vol. 3. - № 1. - P. 50-64.
- [15] Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K. Numerical solutions for flow in porous media // International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics. - 2003. - Vol. 27. - № 7. - P. 565-583.
- [16] Bastian P. Higher order discontinuous Galerkin methods for flow and transport in porous media // Challenges in Scientific Computing-CISC 2002. - Springer, Berlin, Heidelberg, 2003. - P. 1-22.
- [17] Lee H.K.H. et al. Markov random field models for high-dimensional parameters in simulations of fluid flow in porous media // Technometrics. - 2002. - Vol. 44. - № 3. - P. 230-241.

- [18] Gray W. G., Miller C. T. Examination of Darcy's law for flow in porous media with variable porosity // *Environmental science & technology*. - 2004. - Vol. 38. - № 22. - P. 5895-5901.
- [19] Hoteit H. et al. Numerical reliability for mixed methods applied to flow problems in porous media // *Computational geosciences*. - 2002. - Vol. 6. - № 2. - P. 161-194.
- [20] Rvachev V.L., Sheiko T.I. R-functions in boundary value problems in mechanics // *Appl. Mech. Rev.* - 1995. - Vol. 48, №. 4. - P. 151-188.
- [21] Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. - М.: Физматлит, 2006. - 416 с.
- [22] Сидоров М.В., Стороженко А.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений // *Радиоэлектроника и информатика*. - 2004. - № 4. - С. 58-61.
- [23] Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода R-функций // *Радиоэлектроника и информатика*. -2010. - № 2. - С. 40-46.
- [24] Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г. Применение метода R-функций к численному анализу фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями // *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*. - 2012. - № 1. - С. 50-56.
- [25] Алексидзе М.А. Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. - М.: Наука, 1991. - 352 с.
- [26] Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. - К.: Наук. думка, 1982. - 552 с.
- [27] Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. - Харків, ІПМаш НАН України, 2009. - 306 с.
- [28] Подгорный О.Р. Математичні моделі фільтраційних течій та застосування методу R-функцій для їх чисельного аналізу // *Радиоэлектроника та информатика*. - 2018. - №1. - С. 40-47.
- [29] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. - М.: Наука, 1970. - 511 с.
- [30] Rektorys K. Variational methods in mathematics, science and engineering. - Springer Science & Business Media, 2012. - 571 p.

## References

- [1] Polubarinova-Kochina P.Ya., *Teoriya dvizheniya gruntovykh vod* [Theory of groundwater movement], (M.: Nauka, 1977): 664.
- [2] Podgornij O.R., "Chisel'nij analiz metodom R-funkcij fil'tracijnih techij u neodnorodnomu grunti [Numerical analysis by the R-functions method of flow in porous inhomogeneous soils]", *Matematichne ta komp'yuterne modelyuvannya. (ser. fiz.-mat. nauki)* vol. 18 (2018) : 147-162.
- [3] Khan W. et al., "Exact Solutions of Navier Stokes Equations in Porous Media", *International Journal of Pure and Applied Mathematics* vol. 96, no 2 (2014) : 235-247.
- [4] Daly E., Basser H., Rudman M., "Exact solutions of the Navier-Stokes equations generalized for flow in porous media", *The European Physical Journal Plus* vol. 133, no 5 (2018) : 173.
- [5] Bomba A.Ja., Bulavac'kij V.M., Skopec'kij V.V., *Nelinijni matematichni modeli procesiv geogidrodinamiki* [Nonlinear mathematical models of processes of geohydrodynamics], (K.: Nauk. dumka, 2007) : 292.
- [6] Brebbia C.A., Connor J.J., *Finite element techniques for fluid flow*, (Newness-Butterworths, London, 1976) : 310.
- [7] Ferziger J.H., Peric M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, (Berlin: Springer, 2002) : 423.
- [8] Chung T.J., *Computational Fluid Dynamics*, (United Kingdom: CUP, 2002) : 1022.
- [9] Wessiling P., *Principles of computational Fluid Dynamics*, (Berlin: Springer, 2001) : 644.

- [10] Ljashko I.I., Velikoivanenko I.M., Lavrik V.I., Mistec'kij G.E., Metod mazhorantnyh oblastej v teorii fil'tracii [The method of majorant domains in filtration theory], (K.: Nauk. dumka, 1974) : 202.
- [11] Ljashko N.I., Velikoivanenko N.M., Chislenno-analiticheskoe reshenie kraevykh zadach teorii fil'tracii [Numerical-analytical solution of boundary value problems of filtration theory], (K.: Nauk. dumka, 1973) : 264.
- [12] Vabishhevich P.N., Metod fiktivnyh oblastej v matematicheskoj fizike [The method of fictitious areas in mathematical physics], (M.: Izd-vo MGU, 1991) : 156.
- [13] Zhang D., Stochastic methods for flow in porous media: coping with uncertainties, (San Diego: Academic Press, 2001) : 368.
- [14] Jenny P., Lee S.H., Tchelepi H.A., "Adaptive multiscale finite-volume method for multiphase flow and transport in porous media", *Multiscale Modeling & Simulation* vol. 3, no 1 (2005) : 50-64.
- [15] Wang J.G., Leung C.F., Chow Y.K., "Numerical solutions for flow in porous media", *International Journal for numerical and analytical methods in geomechanics* vol. 27, no 7 (2003) : 565-583.
- [16] Bastian P., "Higher order discontinuous Galerkin methods for flow and transport in porous media", *Challenges in Scientific Computing-CISC 2002* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2003) : 1-22.
- [17] Lee H.K.H. et al., "Markov random field models for high-dimensional parameters in simulations of fluid flow in porous media", *Technometrics* vol. 44, no 3 (2002). : 230-241.
- [18] Gray W. G., Miller C. T., "Examination of Darcy's law for flow in porous media with variable porosity", *Environmental science & technology* vol. 38, no 22 (2004) : 5895-5901.
- [19] Hoteit H. et al., "Numerical reliability for mixed methods applied to flow problems in porous media", *Computational geosciences* vol. 6, no 2 (2002) : 161-194.
- [20] Rvachev V.L., Sheiko T.I., "R-functions in boundary value problems in mechanics", *Appl. Mech. Rev.* vol. 48, no 4 (1995) : 151-188.
- [21] Kravchenko V.F., Rvachev V.L., Algebra logiki, atomarnye funkcii i vejvlety v fizicheskikh prilozhenijah [Logic algebra, atomic functions and wavelets in physical applications], (M.: Fizmatlit, 2006) : 416.
- [22] Sidorov M.V., Storozhenko A.V., "Matematicheskoe komp'yuternoe modelirovanie nekotorykh fil'tracionnykh techenij [Mathematical and computer modeling of some fluid flows in porous media]", *Radioelektronika i informatika* no 4 (2004) : 58-61.
- [23] Blishun A.P., Sidorov M.V., Jalovega I.G., "Matematicheskoe modelirovanie i chislennyj analiz fil'tracionnykh techenij pod gidro-tehnicheskimi sooruzhenijami s pomoshh'ju [Mathematical modeling and numerical analysis of fluid flows in porous media under hydraulic structures using the R-function method]", *Radioelektronika i informatika* no 2 (2010) : 40-46.
- [24] Blishun A.P., Sidorov M.V., Jalovega I.G., "Primenenie metoda R-funkcij k chislenному анализу fil'tracionnykh techenij pod gidrotehnicheskimi sooruzhenijami [Application of the method of R-functions to the numerical analysis of fluid flows in porous media under hydraulic structures]", *Visnik Zaporiz'kogo nacional'nogo universitetu (ser. fiz.-mat. nauki)* no 1 (2012) : 50-56.
- [25] Aleksidze M.A., Fundamental'nye funkcii v priblizhennykh resheniyah granichnykh zadach [Fundamental functions in approximate solutions of boundary value problems], (M.: Nauka, 1991) : 352.
- [26] Rvachev V.L., Teoriya R-funkcij i nekotorye ejo prilozhenija [The R-functions theory and some of its applications], (K.: Nauk. dumka, 1982) : 552.
- [27] Maksimenko-Shejko K.V., R-funkcii v matematicheskom modelirovanii geometricheskikh ob"ektov i fizicheskikh polej [R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields], (Harkiv, IPMash NAN Ukrayiny, 2009) : 306.
- [28] Podgornij O.R., "Matematichni modeli fil'tratsijnykh techij ta zastosuvannya metodu R-funktsij dlya ikh chisel'nogo analizu [Mathematical modeling of flow in porous media and application of R-function's method for their numerical analysis]", *Radioelektronika ta informatika* no 1 (2018) : 40-47.
- [29] Mikhlín S.G., Variatsionnye metody v matematicheskoj fizike [Variational methods in mathematical physics], (M.: Nauka, 1970) : 511.
- [30] Rektorys K., Variational methods in mathematics, science and engineering, (Springer Science & Business Media, 2012) : 571.



## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал «Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика» (в английской версии «Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science Series») принимаются набранные только в текстовом формате  $\text{\LaTeX}2\epsilon$  на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat.dairbayeva@gmail.com (ответственный секретарь редколлегии, Даирбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы (название вуза, центра без сокращений), рабочий или моб. телефон, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета  $\text{\LaTeX}2\epsilon$  или формат eps [см. п.7]. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 7 страниц.  
Структура статьи.

Первая страница:

1) Первая строка - номер МРНТИ (IRSTI) (можно взять здесь: <http://grnti.ru/>), выравнивание - по левому краю, шрифт - полужирный.

2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.

3) Автор(ы) статьи - Инициалы и фамилия, место работы (аффилиация), город, страна, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.

4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие **ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ** пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.

5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.

Последующая страница (новая):

Стандартные разделы статьи: **Введение, Обзор литературы, Материал и методы, Результаты и обсуждение, Заключение, Благодарности (если имеются) , Список литературы** (названия разделов не менять)

6) **Введение.** Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания

опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором аспекте.

7) **Обзор литературы.** В разделе обзор литературы должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

8) **Материал и методы.** Раздел должен состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала - один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

9) **Результаты и обсуждение.** В этом разделе приводятся анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) **Заключение.** Обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) **Благодарности** (если имеются). Например: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством науки и образования Республики Казахстан (грант «Наименование темы гранта», 2018-2020 годы).

12) **Список литературы/References.** (оба списка, если статья на русском или казахском. Если статья на английском, то только один список по стилю Чикаго). Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50% на английском языке. В случае наличия в списке литературы работ, представленных на кириллице, необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый - в оригинале, второй - романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) -> название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке (год в круглых скобках) -> страницы. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossiiskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4 (2011): 8-30. Список литературы представляется по мере цитирования, и ТОЛЬКО

те работы, которые цитируются в тексте. Ссылки на литературу оформляются в квадратных скобках с указанием номера литературы. Стиль оформления "Список литературы" на русском и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления" (требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления "References" романизованного списка литературы (см. выше), а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений согласно Chicago Style ([www.chicagomanualofstyle.org](http://www.chicagomanualofstyle.org)).

В данном разделе необходимо учесть:

- а) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.
  - б) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
  - в) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
  - г) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.
6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов  $\LaTeX 2\epsilon$  и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps, либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета `Latexcad`. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера `Conversion Artist`. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

**МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ**

**1-бөлім****Математика**

*Aldibekov T.M., Aldazharova M.M.*

On a linear system of differential equations ..... 3

*Аймал Раса Гулам Хазрат, Аузерхан Г.С., Коньркулжаева М. Н.*

Функция Грина задачи Дирихле дифференциального оператора на графе - звезде при  $m$  ..... 14

*Айсагамиев С.А., Аязбаева А.М.*

Абсолютная устойчивость многомерных регулируемых систем. Проблема Айзермана ..... 29

*Жаруллаев Д.Б., Кангуржин Б.Е., Коньркулжаева М.Н.*

Функция Грина дифференциального оператора на графе-звезде с общими граничными условиями 48

**2-бөлім****Механика**

*Rakisheva Z.B., Kudryavtseva N., Kussembayeva K.K., Sakhayeva A.K.*

Studying the change of average waves of the Caspian Sea using the altimetry data ..... 59

**3-бөлім****Информатика**

*Murzabekov Z.N., Mirzakhmedova G.A.*

Stabilization of one non-linear system with coefficients depending on the condition of the control object . 76

*Ussatova O.A., Nyssanbayeva S.E., Wojcik W.*

Software implementation of two-factor authentication to ensure security when accessing an information system ..... 87

*Акжалова А.Ж., Мухарский Д.В., Саду А.*

Сглаживание траектории центра масс робота методом генетического отбора ..... 96

**4-бөлім****Колданылмалы  
математика**

*Подгорный А.Р., Сидоров М.В.*

Метод численного анализа фильтрационных течений под каскадом гидросооружений ..... 115

К сведению авторов ..... 132

**Раздел 1****Математика****Раздел 2****Механика****Раздел 3****Информатика****Раздел 4****Прикладная  
математика**

## CONTENTS

## Section 1

## Mathematics

- Aldibekov T.M., Aldazharova M.M.*  
On a linear system of differential equations ..... 3
- Ghulam Hazrat Aimal Rasa, Auzerkhan G.S., Konyrkulzhayeva M.N.*  
Green's function for differential operator on a star shaped graph for m ..... 14
- Aisagaliev S.A., Ayazbayeva A.M.*  
Absolute stability of multidimensional regulated systems. Aizerman problem ..... 29
- Kanguzhin B.E., Konyrkulzhayeva M.N., Zharullayev D.B.*  
Green's function of differential operator on a star shaped graph with common boundary conditions ..... 48

## Section 2

## Mechanics

- Rakisheva Z.B., Kudryavtseva N., Kussembayeva K.K., Sakhayeva A.K.*  
Studying the change of average waves of the Caspian Sea using the altimetry data ..... 59

## Section 3

## Computer science

- Murzabekov Z.N., Mirzakhmedova G.A.*  
Stabilization of one non-linear system with coefficients depending on the condition of the control object . 76
- Ussatova O.A., Nyssanbayeva S.E., Wojcik W.*  
Software implementation of two-factor authentication to ensure security when accessing an information system ..... 87
- Akzhalova A., Mukharsky D., Sadu A.*  
Smoothing the robot center mass trajectory by genetic selection ..... 96

## Section 4

## Applied Mathematics

- Podhornyj A.R., Sidorov M.V.*  
Method of numerical analysis of fluid flows in porous media under a cascade of hydraulic structures ... 115
- Note by authors ..... 132