

ISSN 1563 – 0277
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҮЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАБАРШЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№ 2 (98)

Алматы
«Қазақ университеті»
2018

*Зарегистрирован в Министерстве информации и коммуникаций Республики Казахстан,
свидетельство № 16508-Ж от 04.05.2017 г. (Время и номер первичной постановки на учет
№ 766 от 22.04.1992 г.). Язык издания: казахский, русский, английский. Выходит 4 раза в год.
Тематическая направленность: теоретическая и прикладная математика, механика, информатика.*

Редакционная коллегия

научный редактор – Б.Е. Кангүжин, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби,
заместитель научного редактора – Д.И. Борисов, д.ф.-м.н., профессор, Институт
математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН,
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Россия,
ответственный секретарь – Г.М. Даирбаева, к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., Университет международного бизнеса, Казахстан

Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Бектемесов М.А. – д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный педагогический
университет имени Абая, Казахстан

Жакебаев Д.Б. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной
математики и математической геофизики СО РАН, Россия

Кыдырбекулы А.Б. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института
аэродинамики, Германия

Малышкин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический
университет, Россия

Ракишева З.Б. – к.ф.-м.н., доцент, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания

Сагитов С.М. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Гетеборга, Швеция

Сукачев Ф.А. – профессор, академик АН Австралии, Университет Нового Южного Уэльса

Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л.
Соболева СО РАН, Россия

Темляков В.Н. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Южной Каролины, США

Токмагамбетов Н.Е. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Шиничи Накасука – PhD доктор, профессор, Университет Токио, Япония

Научное издание

Вестник. Серия математика, механика, информатика, № 2(98) 2018.

Редактор – Г.М. Даирбаева. Компьютерная верстка – Г.М. Даирбаева

ИБ № 12138

Подписано в печать 29.06.2018 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 8,5 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ N 4352. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.
Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

1-бөлім**Математика****Раздел 1****Математика****Section 1****Mathematics**

MSC 34K11, 39A11, 34C10, 39A12

Qualitative Behavior of the Solutions to Delay and Difference Euations

Ioannis P. Stavroulakis, Department of Mathematics,

University of Ioannina, 451 10 Ioannina, Greece,

Department of Mathematical Sciences, University of South Africa,

ipstav@uoi.gr

It is noteworthy to observe that a first-order linear ordinary differential equation *without delay does not possess oscillatory* solutions. Therefore the investigation of oscillatory solutions is of interest for equations with delays or for the discrete analogue difference equations. Furthermore, the mathematical modelling of several real-world problems leads to differential equations that depend on the past history rather than only the current state. In this article conditions are presented such that all solutions of delay and difference equations *are oscillatory* while *all solutions* of the corresponding ordinary differential equations without delay are, for example, *decreasing and tend to zero*. Equations with constant and variable arguments are investigated. Several examples of delay and difference equations with applications to many sectors of life are presented.

Key words: oscillation, delay differential equations, difference equations.

1 Introduction

The oscillation theory of Ordinary Differential Equations (ODEs) was originated by Sturm [26] in 1836. Since then hundreds of papers have been published studying the oscillation theory of ODEs.

The oscillation theory of Delay Differential Equations (DDEs) was mainly developed after the 2nd world war. It was during the war that the admirals and officers in Navy (Fleet) observed that the ships were vibrating and asked the engineers and the scientists to solve the problem. Investigating the problem of vibrations (oscillations) the scientists found out that the equation which was to be taken into consideration was not an ODE (a usual equation without delays) but it was a differential equation with delays.

In the decade of 1970 a great number of papers were written extending known results from ODEs to DDEs. Of particular importance, however, has been the study of oscillations which are caused by the delay and which do not appear in the corresponding ODE. In recent years there has been a great deal of interest in the study of oscillatory behavior of the solutions to DDEs and also the discrete analogue Delay Difference Equations ($D\Delta$ Es). See, for example, [1-31] and the references cited therein.

The problem of establishing sufficient conditions for the oscillation of all solutions to the differential equation

$$x'(t) + p(t)x(\tau(t)) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (1)$$

where the functions $p, \tau \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$ (here $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$), $\tau(t)$ is non-decreasing, $\tau(t) < t$ for $t \geq t_0$, and $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$, has been the subject of many investigations. See, for example, [4-6, 8-12, 14-17, 19, 21, 22, 24, 28, 29, 31] and the references cited therein.

By a solution of Eq. (1) we understand a continuously differentiable function defined on $[\tau(T_0), \infty)$ for some $T_0 \geq t_0$ and such that (1) is satisfied for $t \geq T_0$. Such a solution is called *oscillatory* if it has arbitrarily large zeros, and otherwise it is called *nonoscillatory*.

The oscillation theory of the (discrete analogue) delay difference equation

$$\Delta x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)'$$

where $p(n)$ is a sequence of nonnegative real numbers and $\tau(n)$ is a sequence of integers such that $\tau(n) < n - 1$ for $n \geq 0$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = \infty$, has also attracted growing attention in the recent few years. The reader is referred to [1-3, 7, 13, 18, 20, 23, 25, 27, 30] and the references cited therein.

By a solution of Eq. (1)' we mean a sequence $x(n)$ which satisfies (1)' for $n \geq 0$. A solution $x(n)$ of (1)' is said to be *oscillatory* if the terms of the solution are not eventually positive or eventually negative. Otherwise the solution is called *nonoscillatory*.

2 Oscillation Criteria for Delay Equations

In this section we study the delay equation

$$x'(t) + p(t)x(\tau(t)) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (1)$$

The first systematic study for the oscillation of all solutions to Eq.(1) was made by Myshkis. In 1950 [22] he proved that all solutions of Eq.(1) oscillate if

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [t - \tau(t)] < \infty \quad \text{and} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} [t - \tau(t)] \liminf_{t \rightarrow \infty} p(t) > \frac{1}{e}. \quad (C_1)$$

In 1972, Ladas, Lakshmikantham and Papadakis [19] and in 1982 Koplatadze and Canturija [15] concluded the same result if

$$A := \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau(t)}^t p(s)ds > 1, \quad (C_2)$$

or

$$\alpha := \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau(t)}^t p(s)ds > \frac{1}{e}; \quad (C_3)$$

respectively, while ([15]) if

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau(t)}^t p(s)ds < \frac{1}{e}, \quad (N_1)$$

then Eq.(1) has a nonoscillatory solution.

It is obvious that there is a gap between the conditions (C_2) and (C_3) when the limit $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau(t)}^t p(s)ds$ does not exist. How to fill this gap is an interesting problem which has been investigated by several authors.

In 1988, Erbe and Zhang [6] proved that all the solutions of Eq.(1) are oscillatory, if $0 < \alpha \leq \frac{1}{e}$ and

$$A > 1 - \frac{\alpha^2}{4}. \quad (C_4)$$

In 1991, Jian [12] derived the condition

$$A > 1 - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)}, \quad (C_5)$$

while in 1992, Yu and Wang [28] and Yu, Wang, Zhang and Qian [29] obtained the condition

$$A > 1 - \frac{1-\alpha - \sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}}{2}. \quad (C_6)$$

In 1990, Elbert and Stavroulakis [4] and in 1991, Kwong [17], using different techniques, improved (C_4) , in the case where $0 < \alpha \leq \frac{1}{e}$, to the conditions

$$A > 1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 \quad (C_7)$$

and

$$A > \frac{\ln \lambda_1 + 1}{\lambda_1}, \quad (C_8)$$

respectively, where λ_1 is the smaller root of the equation $\lambda = e^{\alpha\lambda}$.

In 1994, Koplatadze and Kvinikadze [16] improved (C_6) , while in 1998, Philos and Sficas [23] and in 1999, Zhou and Yu [31] and Jaroš and Stavroulakis [11] derived the conditions

$$A > 1 - \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)} - \frac{\alpha^2}{2}\lambda_1, \quad (C_9)$$

$$A > 1 - \frac{1-\alpha - \sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}}{2} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2, \quad (C_{10})$$

and

$$A > \frac{\ln \lambda_1 + 1}{\lambda_1} - \frac{1-\alpha - \sqrt{1-2\alpha-\alpha^2}}{2}, \quad (C_{11})$$

respectively.

Consider Eq.(1) and assume that $\tau(t)$ is continuously differentiable and that there exists $\theta > 0$ such that $p(\tau(t))\tau'(t) \geq \theta p(t)$ eventually for all t . Under this additional condition, in 2000, Kon, Sficas and Stavroulakis [14] and in 2003, Sficas and Stavroulakis [24] established the conditions

$$A > 2\alpha + \frac{2}{\lambda_1} - 1, \quad (C_{12})$$

$$A > \frac{\ln \lambda_1 - 1 + \sqrt{5 - 2\lambda_1 + 2\alpha\lambda_1}}{\lambda_1}. \quad (C_{13})$$

In the case where $\alpha = \frac{1}{e}$, then $\lambda_1 = e$, and (C_{13}) leads to $A > \sqrt{7-2e}/e \approx 0.459987065$.

It is to be noted that as $\alpha \rightarrow 0$, then all the previous conditions $(C_4) - (C_{12})$ reduce to the condition (C_2) , i.e. $A > 1$. However, the condition (C_{13}) leads to $A > \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$, which is an essential improvement. Moreover (C_{13}) improves all the above conditions when $0 < \alpha \leq \frac{1}{e}$ as well. Note that the value of the lower bound on A can not be less than $\frac{1}{e} \approx 0.367879441$. Thus the aim is to establish a condition

which leads to a value *as close as possible to* $\frac{1}{e}$. For illustrative purpose, we give the values of the lower bound on A under these conditions when $\alpha = \frac{1}{e}$. (C_4) :0.966166179, (C_5) :0.892951367, (C_6) :0.863457014, (C_7) :0.845181878, (C_8) :0.735758882, (C_9) :0.709011646, (C_{10}) :0.708638892, (C_{11}) :0.599215896, (C_{12}) :0.471517764, (C_{13}) :0.459987065.

We see that the condition (C_{13}) essentially improves all the known results in the literature.

Example 2.1 ([24]) Consider the delay differential equation

$$x'(t) + px(t - q \sin^2 \sqrt{t} - \frac{1}{pe}) = 0, \quad p > 0, \quad q > 0 \text{ and } pq = 0.46 - \frac{1}{e}.$$

Then $\alpha = \liminf_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau(t)}^t pds = \liminf_{t \rightarrow \infty} p(q \sin^2 \sqrt{t} + \frac{1}{pe}) = \frac{1}{e}$ and

$$A = \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\tau(t)}^t pds = \limsup_{t \rightarrow \infty} p(q \sin^2 \sqrt{t} + \frac{1}{pe}) = pq + \frac{1}{e} = 0.46.$$

Thus, according to (C_{13}) , all solutions of this equation oscillate. Observe that none of the conditions (C_4) - (C_{12}) apply to this equation.

3 Oscillation Criteria for Difference Equations

Consider the first order linear delay difference equation

$$\Delta x(n) + p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)'$$

where $p : N \rightarrow R_+$, $\tau : N \rightarrow N$, $\tau(n)$ is nondecreasing $\tau(n) \leq n - 1$ and $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(n) = +\infty$, and the particular case of the equation with constant delay

$$\Delta u(n) + p(n)u(n - k) = 0, \quad k \in N \quad (1)''$$

which has been the subject of many recent investigations.

In 1981, Domshlak [3] studied this problem in the case where $k = 1$. In 1989, Erbe and Zhang [7] proved that all solutions of $(1)''$ oscillate if

$$\beta := \liminf_{n \rightarrow \infty} p(n) > 0 \quad \text{and} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} p(n) > 1 - \beta \quad (D_1)$$

or

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p(n) > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \quad (D_2)$$

or

$$A := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-k}^n p(i) > 1. \quad (C_2)''$$

while Ladas, Philos and Sficas [20] improved the above condition (D_2) as follows

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}. \quad (C_3)''$$

Concerning the constant $\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$ in (D_2) and $(C_3)''$ it should be emphasized that, as it is shown in [7], if

$$\sup p(n) < \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}, \quad (N_1)$$

then $(1)''$ has a nonoscillatory solution. Moreover, when $p(n)$ is a constant, say $p(n) = p$, then conditions (D_2) and $(C_3)''$ reduce to

$$p > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}},$$

oscillation of all solutions to Eq.(1)''.

In 1990, Ladas [18] conjectured that Eq.(1)'' has a nonoscillatory solution if

$$\frac{1}{k} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) \leq \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

holds eventually. However this conjecture is not correct and a counter-example was given in 1994 by Yu, Zhang and Wang [30]. Moreover, in 1999 Tang and Yu [27], using a different technique, showed that Eq.(1)'' has a nonoscillatory solution if the so-called "corrected Ladas conjecture"

$$\sum_{i=n-k}^n p(i) \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \text{ for all large } n, \quad (N_2)$$

is satisfied.

In 2017 Karpuz [13] studied this problem and derived the following conditions. If

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\lambda \geq 1} \left[\frac{1}{\lambda} \prod_{i=n-k}^n [1 + \lambda p(i)] \right] > 1,$$

then every solution of Eq.(1)'' oscillates, while if there exists $\lambda_0 \geq 1$ such that

$$\frac{1}{\lambda_0} \prod_{i=n-k}^n [1 + \lambda_0 p(i)] \leq 1 \text{ for all large } n,$$

nonoscillatory solution. From the above conditions, using the Arithmetic-Geometric mean, it follows that if

$$\sum_{i=n-k}^n p(i) \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \text{ for all large } n, \quad (N_3)$$

then Eq.(1)'' has a nonoscillatory solution. That is, Karpuz [13] replaced condition (N_2) by (N_3) , which is a weaker condition.

As in Section 2, it is interesting to establish sufficient conditions for the oscillation of all solutions to Eq.(1)'' when both $(C_2)''$ and $(C_3)''$ are not satisfied.

In 2004 Stavroulakis [25] established the following: Assume that $0 < \alpha \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}$. Then either one of the conditions

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) > 1 - \frac{\alpha^2}{4} \quad (C_4)''$$

or

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i) > 1 - \alpha^k \quad (D_3)$$

implies that all solutions of (1)' oscillate.

In 2008, Chatzarakis, Koplatadze and Stavroulakis [1,2] investigated for the first time the oscillatory behaviour of equation (1)' in the case of a variable delay argument $\tau(n)$ and derived the following. If

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=\tau(n)}^n p(j) > 1 \quad (C_2)'$$

or $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) < +\infty$ and

$$\alpha := \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=\tau(n)}^{n-1} p(i) > \frac{1}{e} \quad (C_3)'$$

then all solutions of equation (1)' oscillate.

4 Applications

1. Nicholson's blowflies

The delay differential equation

$$\dot{N}(t) = -\delta N(t) + PN(t-\tau)e^{-aN(t-\tau)}, \quad t \geq 0 \quad (4.1)$$

was used by Gurney et al. [9, p.51] to describe the dynamics of Nicholson's blowflies. Here P is the maximum per capita daily egg production rate, $1/a$ is the size at which the population reproduces at its maximum rate, δ is per capita daily adult death rate, τ is the generation time and $N(t)$ is the size of the population at time t .

2. Delay logistic equation

The delay differential equation

$$\dot{N}(t) = rN(t)[1 - N(t-\tau)/K], \quad (4.2)$$

where $r, \tau, K \in (0, \infty)$ is known as *delay logistic equation* and has been investigated by numerous authors [9, p.85]. This equation is a prototype in modelling the dynamics of single-species population systems whose biomass or density is denoted by a differentiable function N . The constant r is called the *growth rate* and the constant K is called the *carrying capacity* of the habitat.

3. The Lasota-Wazewska model for the survival of red blood cells

The delay differential equation

$$\dot{N}(t) = -\mu N(t) + pe^{-\gamma N(t-\tau)}, \quad t \geq 0 \quad (4.3)$$

has been used by Wazewska-Cryzewska and Lasota [9, p.89] as a model for the survival of red blood cells in an animal. Here $N(t)$ denotes the number of red blood cells at time t , μ is the probability of death of a red blood cell, p and γ are positive constants related to the production of red blood cells per unit time, and τ is the time required to produce a red blood cell.

4. Discrete delay logistic equation

The delay difference equation

$$N_{t+1} = \frac{\alpha N_t}{1 + \beta N_{t-k}} \quad (4.4)$$

where $\alpha \in (1, \infty)$, $\beta \in (0, \infty)$, and $k \in \mathbb{N}$ was considered by Pielou [9, p.194] as the discrete analogue of the delay logistic equation (4.2).

5. Kalman Filter-Solar Station

Several real world PVC (Photovoltaic) parks use various mechanisms, including microcontrollers and autonomous robots to rotate the panels to the sun. The obvious advantage of rotating (as the sunflower) over stationary panels is that the first produce 40% more energy than the second.

There can be several approaches to track the sun. Since the sun's trajectory is fairly regular, the panel's current position – angle $\theta(n)$ and the sequence $\Delta\theta(n-1), \dots, \Delta\theta(n-k)$, of previous rotation to the sun provide an accurate estimate of the rotation to the sun's current location. This idea has a simple formal description in the following equation:

$$y(n) = \sum_{i=1}^N a_i \Delta\theta(n-i) + \sum_{i=0}^{N-1} b_i \theta(n-i) = 0, \quad (4.5)$$

meaning that the rotation to bring the panel to an optimal orientation to the sun's current location is a function of the preceding N rotations and the panel's angle in each of the panel's N most recent positions, along its trajectory.

5 Note

The results of this paper were presented in the 2nd SUMMER SCHOOL "Mathematical Methods in Science and Technology" held in Almaty, Kazakhstan, 28-08 June 2018.

References

- [1] G. E. Chatzarakis, R. Koplatadze and I. P. Stavroulakis, Oscillation criteria of first order linear difference equations with delay argument, *Nonlinear Anal.*, **68** (2008), 994–1005.
- [2] G. E. Chatzarakis, R. Koplatadze, and I. P. Stavroulakis, Optimal oscillation criteria for first order difference equations with delay argument, *Pacific J. Math.*, **235** (2008), 15–33.
- [3] Y. Domshlak, Discrete version of Sturmian Comparison Theorem for non-symmetric equations, *Doklady Azerb. Acad. Sci.* **37** (1981), 12–15.
- [4] A. Elbert and I.P. Stavroulakis, Oscillations of first order differential equations with deviating arguments, Univ.of ioannina TR No.172, 1990. *Recent trends in differential equations* 163–178, World Sci. Ser. Appl. Anal., 1, World Sci. Publishing Co.(1992).

- [5] L.H. Erbe, Qingkai Kong and B.G. Zhang, Oscillation Theory for Functional Differential Equations, Marcel Dekker, New York, 1995.
- [6] L.H. Erbe and B.G. Zhang, Oscillation of first order linear differential equations with deviating arguments, *Differential Integral Equations* **1** (1988), 305-314.
- [7] L.H. Erbe and B.G. Zhang, Oscillation of discrete analogues of delay equations, *Differential Integral Equations* **2** (1989), 300-309.
- [8] K. Gopalsamy, Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [9] I. Gyori and G. Ladas, Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [10] J.K. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [11] J. Jaroš and I.P. Stavroulakis, Oscillation tests for delay equations, *Rocky Mountain J. Math.*, **29** (1999), 139-145.
- [12] C. Jian, Oscillation of linear differential equations with deviating argument, *Math. in Practice and Theory*, **1** (1991), 32-41 (in Chinese).
- [13] B. Karpuz, Sharp oscillation and nonoscillation tests for linear difference equations, *J. Difference Equ. Appl.*, **23** (2017), no.12, 1229-1242.
- [14] M. Kon, Y.G. Sficas and I.P. Stavroulakis, Oscillation criteria for delay equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000), 2989-2997.
- [15] R.G. Koplatadze and T.A. Chanturia, On the oscillatory and monotonic solutions of first order differential equations with deviating arguments, *Differentsial'nye Uravneniya*, **18** (1982), 1463-1465.
- [16] R.G. Koplatadze and G. Kvinkadze, On the oscillation of solutions of first order delay differential inequalities and equations, *Georgian Math. J.* **1** (1994), 675-685.
- [17] M.K. Kwong, Oscillation of first order delay equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **156** (1991), 374-286.
- [18] G. Ladas, Recent developments in the oscillation of delay difference equations, *International Conference on Differential Equations, Stability and Control*, Marcel Dekker, New York, 1990.
- [19] G. Ladas, V. Lakshmikantham and J.S. Papadakis, Oscillations of higher-order retarded differential equations generated by retarded arguments, *Delay and Functional Differential Equations and Their Applications*, Academic Press, New York, 1972, 219-231.
- [20] G. Ladas, Ch.G. Philos and Y.G. Sficas, Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations, *J.Appl.Math. Simul.*,**2**(1989), 101-112.
- [21] G.S. Ladde, V. Lakshmikantham and B.G. Zhang, Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, Marcel Dekker, New York, 1987.
- [22] A.D. Myshkis, Linear homogeneous differential equations of first order with deviating arguments, *Uspekhi Mat. Nauk*, **5** (1950), 160-162.
- [23] Ch.G. Philos and Y.G. Sficas, An oscillation criterion for first-order linear delay differential equations, *Canad. Math. Bull.* **41** (1998), 207-213.
- [24] Y.G. Sficas and I.P. Stavroulakis, Oscillation criteria for first-order delay equations, *Bull. London Math. Soc.*, **35** (2003), 239-246.
- [25] I.P. Stavroulakis, Oscillation Criteria for First Order Delay Difference Equations, *Mediterr. J. Math.* **1** (2004), 231-240.
- [26] C. Sturm, Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, *J. Math. Pures Appl.* **1** (1836), 106-186
- [27] X.H. Tang and J.S. Yu, A further result on the oscillation of delay difference equations, *Comput. Math. Applic.*, **38** (1999), 229-237.
- [28] J.S. Yu and Z.C. Wang, Some further results on oscillation of neutral differential equations, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **46** (1992), 149-157.

- [29] J.S. Yu, Z.C. Wang, B.G. Zhang and X.Z. Qian, Oscillations of differential equations with deviating arguments, *Panam. Math. J.*, **2** (1992), 59-78.
- [30] J.S. Yu, B.G. Zhang and Z.C. Wang, Oscillation of delay difference equations, *Applicable Anal.*, **53** (1994), 117-124.
- [31] Y. Zhou and Y.H.Yu, On the oscillation of solutions of first order differential equations with deviating arguments, *Acta Math. Appl. Sinica* **15**, no.3, (1999), 288-302.

МРНТИ 27.31.17

О линейных уравнениях с частными производными первого порядка

Алдибеков Т.М., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,

г. Алматы, Республика Казахстан, +77011411069, E-mail: tamash59@mail.ru

Алдажарова М.М., Научно-исследовательский институт Казахского национального
университета имени аль-Фараби,

г. Алматы, Республика Казахстан, +77019870744, email: a_maira77@mail.ru

Исследуется линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, где коэффициенты уравнения заданы на неограниченном множестве и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Каждое дифференциальное уравнение с частными производными находится в тесной связи с некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений - системой так называемых характеристических уравнений данного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. Каждое дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка при некоторых условиях имеет фундаментальную систему интегралов или интегральный базис. Заметим, для общего линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка может не существовать нетривиального интеграла. Для линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка, где коэффициенты уравнения заданы на неограниченном множестве и имеют непрерывные частные производные первого порядка, причем первый коэффициент равен единице, интегральный базис существует. Для линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка приведено определение асимптотической устойчивости линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. Приведено достаточное условие асимптотической устойчивости линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. В настоящее время теория дифференциальных уравнений с частными производными находит свое применение в различных областях естествознания.

Ключевые слова: уравнение, частные производные первого порядка.

Сызықты бірінші ретті дербес туындылы тендеулер туралы

Алдибеков Т.М., Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті,

Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77017477069, Электрондық пошта: tamash59@mail.ru

Алдажарова М.М., Әл-Фараби атындағы қазақ ұлттық университетінің Ғылыми зерттеу институты,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77019870744, Электрондық пошта: a_maira77@mail.ru

Коэффиценттері үзіліссіз дербес туындылары бар, шенелмеген облыста берілген бірінші ретті дербес туындылы сызықты дифференциалдық тендеу зерттеледі. Әрбір дербес туындылы дифференциалдық тендеу берілген бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық тендеудің сипаттауыш тендеулер дең аталатын жүйесімен тығыз байланысты болады. Әрбір бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық тендеудің белгілі бір шарттарда фундаменталдық интегралдар жүйесі немесе интегралдық базисі бар болады. Жалпы сызықты бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық тендеудің, байқайтынымыз, тривидиалды емес интегралы табылмауы да мүмкін. Коэффиценттері шенелмеген жиында берілсе және үзіліссіз бірінші ретті дербес туындылары бар болса, сондай-ақ бірінші коэффициенттері бірге тең болса, оның интегралдық базисі болады. Сызықты бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық тендеулердің асимптотикалық орнықтылығының анықтамасы берілген. Сызықты бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық тендеулер үшін асимптотикалық орнықтылықтың жеткілікті шарттары көлтірілген. Нагызғы уақытта дербес туындылы дифференциалдық тендеулер теориясы жаратылыстанудың әртүрлі салаларында қолданыстарын табуда.

Түйін сөздер:тендеу, бірінші ретті дербес туындылар.

On linear partial equations of first-order

Aldibekov T.M., Al-Farabi Kazakh National University,

Almaty, Kazakhstan, +77017477069, E-mail: tamash59@mail.ru

Aldazharova M.M., Scientific Research Institute of the al-Farabi Kazakh National University,

Almaty, Kazakhstan, +77019870744, E-mail: a_maira77@mail.ru

We study a linear differential equation with first-order partial derivatives, where the coefficients of the equation are given on an unbounded set and have continuous first-order partial derivatives. Each partial differential equation is closely related to a system of ordinary differential equations, a system of so-called characteristic equations of a given first-order partial differential equation. Each first-order partial differential equation under certain conditions has a fundamental system of integrals or an integral basis. We note that for a general linear partial differential equation of the first order there can be no nontrivial integral. For a linear first-order partial differential equation, where the coefficients of the equation are given on an unbounded set and have continuous first-order partial derivatives, with the first coefficient equal to one, an integral basis exists. For a linear first-order partial differential equation, where the coefficients of the equation are given on an unbounded set and have continuous first-order partial derivatives, with the first coefficient equal to one, an integral basis exists. For a linear first-order partial differential equation, we define the asymptotic stability of a linear first-order partial differential equation. A sufficient condition for the asymptotic stability of a linear partial differential equation of the first order is given. At present, the theory of partial differential equations finds its application in various fields of natural science.

Key words:equation, first order partial derivatives

1 Введение

Исследуется линейное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, где коэффициенты уравнения заданы на неограниченном множестве и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Каждое дифференциальное уравнение с частными производными находится в тесной связи с некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений - системой так называемых характеристических уравнений данного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка. Каждое дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка при некоторых условиях имеет фундаментальную систему интегралов или интегральный базис. Заметим, для общего линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка может не существовать нетривиального интеграла. Для линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка, где коэффициенты уравнения заданы на неограниченном множестве и имеют непрерывные частные производные первого порядка, причем первый коэффициент равен единице, интегральный базис существует. Для линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка приведены определения асимптотической устойчивости. Приведены коэффициентные признаки асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

2 Обзор литературы

Общая теория излагается в книге "Уравнения с частными производными" (Берс, 1966: 352). Область существования решений были исследованы в работах (Wazewski, 1938: 522-

532). Об оценке области существования интегралов уравнения с частными производным первого порядка изложено в книге (Wazewski, 1935: 149-177). Книги по теория уравнений в частных производных: (Гельфанд 1959: 87-158), (Gross, 1914: 2233-2251), (Caratheodory, 1935: 7-9). В работе (Кружков, 1970: 228-255) рассматривается обобщенные решения. Теорема Ковалевской опубликована в работе (Kovalevskaya, 1885: 18-21). Общая теория излагается в книге (Курант, 1964: 23-27). Область существования решений исследован Камке и содержится в справочнике (Камке, 1966: 46-48). Второй метод Ляпунова применен для исследования в работе (Зубов, 1955: 25-31). Так же с общим курсом по теории уравнений в частных производных можно ознакомиться в книгах (Петровский, 1961: 38-43), (Петровский, 1970: 114-116), (Массера, 1970: 50-59), (Мизохата, 1977: 504). Пример не существования решения построил Перрон (Perron, 1911: 1-32). С дополнительные общими сведениями можно ознакомиться в (Смирнов, 1981: 551), (Степанов, 1959: 338-343), (Трикоми, 1957: 67), (Тихонов, 2004: 798), (Хартман, 1970: 627-329), (Hormander, 1958: 213-225); (Hormander, 1959: 177-190), (Эльсгольц, 2013: 57-67), (Яненко, 1978: 223-225). Рассмотрен частный случай в (Алдабеков, 2008: 1582).

3 Материалы и методы исследования

Рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k \frac{\partial u}{\partial y_1} + \cdots + \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \quad (1)$$

где $u(x, y_1, \dots, y_n)$ - неизвестная функция, $x_0 \leq x < +\infty$, $x_0 > 0$, $-\infty < y_1, \dots, y_n < +\infty$, $p_{ik}(x)$, $i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, n$; имеют непрерывные частные производные первого порядка на промежутке $x_0 \leq x < +\infty$. Для уравнения (1) характеристическая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(x)y_k, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Характеристическую систему (2) рассматриваем при начальных значениях $y_k|_{x=x_0} = y_0$, $k = 1, \dots, n$. Решение характеристической системы (2) существует

$$y_k = \varphi_k(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

при произвольных начальных данных y_k^0 , ($k = 1, \dots, n$). (3) разрешимы относительно y_1^0, \dots, y_n^0 и имеет место

$$y_k^0 = \varphi_k(x_0, x, y_1, \dots, y_k), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

(4) образует интегральный базис линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (1). Следующее дифференциальное

уравнение с частными производными первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k + g_1(x, y_1, \dots, y_n) \right) \frac{\partial u}{\partial y_1} + \\ \dots + \left(\sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k + g_n(x, y_1, \dots, y_n) \right) \frac{\partial u}{\partial y_n} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

называется возмущенным уравнением, где $g_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$; малые возмущения, которые удовлетворяют некоторому условию малости. Малые возмущения $g_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, \dots, n$; заданы на $x_0 \leq x < +\infty$, $x_0 > 0$, $-\infty < y_1, \dots, y_n < +\infty$ и имеют непрерывные частные производные и

$$g_i(x, 0, \dots, 0) = 0, i = 1, \dots, n.$$

Для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (5) характеристическая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(x)y_k + g_i(x, y_1, \dots, y_n), i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Принимаем следующее определение.

Определение 1. Если выполняются следующие условия:

- 1) линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) имеет интегральный базис, который стремится к нулю при $x_0 \rightarrow +\infty$,
- 2) возмущенное уравнение (5), которое получается из уравнения (1) при малых возмущениях, имеет интегральный базис, который стремится к нулю при $x_0 \rightarrow +\infty$, тогда линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) называется асимптотически устойчивым при $x_0 \rightarrow +\infty$. Легко устанавливается следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть для характеристической системы линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(x)y_k, i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

где коэффициенты непрерывные действительные функции, определенные на полуоси $I = [x_0, +\infty)$, выполняются следующие условия:

$$(1) p_{k-1,k-1}(x) - p_{kk}(x) \geq \alpha \varphi(x), x \in I, k = 2, \dots, n. \alpha > 0, \varphi(x) \in \mathbb{C}(I),$$

$$\varphi(x) > 0, q(x) = \int_{x_0}^x \varphi(s)ds \uparrow +\infty;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|p_{ik}(x)|}{\varphi(x)} = 0, i \neq k, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, n;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(x)} \int_{x_0}^x p_{kk}(s)ds = \beta_k, k = 1, 2, \dots, n, \beta_1 < 0; \text{ где } q(x) = \int_{x_0}^x \varphi(s)ds \uparrow +\infty.$$

Причем $\beta_1 < 0$, тогда линейная система (7) обобщенная правильная относительно $q(x)$

и асимптотически устойчива по Ляпунову при $x \rightarrow +\infty$.

Лемма 2. Пусть для характеристической системы возмущенного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^n p_{ik}(x)y_k + g_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

где функций $p_{ik}(x)$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, n$, непрерывные действительные функций, определенные на полуоси $I = [x_0, +\infty)$, выполняются следующие условия:

1) $p_{k-1,k-1}(x) - p_{kk}(x) \geq \alpha\varphi(x)$, $x \in I$, $k = 2, \dots, n$. $\alpha > 0$,

$\varphi(x) \in \mathbb{C}(I)$, $\varphi(x) > 0$, $\int_{x_0}^x \varphi(s)ds = +\infty$;

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|p_{ik}(x)|}{\varphi(x)} = 0$, $i \neq k$, $i = 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, n$;

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(x)} \int_{x_0}^x p_{kk}(s)ds = \beta_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. $\beta_1 < 0$;

4) $g_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$. непрерывна по первому аргументу и непрерывно дифференцируема начиная со второго аргумента, кроме того выполняются условия: $g_i(x, 0, \dots, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. $\|g(x, y)\| \leq \delta(x)\|y\|$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\delta(x)}{\varphi(x)} = 0$ Тогда нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (9) асимптотически устойчиво относительно $q(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Нелинейную систему дифференциальных уравнений (8) удобно рассматривать векторно-матричном виде

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + g(x, y) \quad (9)$$

Возьмем γ такое, что $0 < \gamma < |\frac{\beta_1}{3}|$ и в системе (9) выполним преобразование

$$y = ze^{-\gamma[q(x)-q(x_0)]}$$

который сохраняет обобщенную правильность и отрицательность старшего обобщенного показателя. Тогда будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = B(x)z + f(x, z) \quad (10)$$

где

$$B(x) = P(x) + \gamma \frac{dq(x)}{dx} E,$$

где $E - n \times n$ единичная матрица.

$$f(x, z) = e^{\gamma[q(x)-q(x_0)]} g(x, ze^{-\gamma[q(x)-q(x_0)]})$$

причем $z(x_0) = y(x_0)$. Линейная система

$$\dot{z} = B(x)z \quad (11)$$

обобщенно правильная и имеет отрицательный старший обобщенный показатель. Векторная функция $f(x, z)$ непрерывно по $x \geq x_0$ и непрерывно дифференцируема по z .

Переходим от дифференциального уравнения (10) к интегральному уравнению

$$z(x) = H(x)z(x_0) + \int_{x_0}^x K(x, \tau)f(\tau, z(\tau))d\tau \quad (12)$$

где $H(x)$ нормированная фундаментальная матрица линейной системы (11). В силу отрицательности старшего обобщенного показателя для фундаментальной матрицы линейной системы (11) имеет место оценка

$$\|H(x)\| \leq C_1, \quad (C_1 \geq 0), \quad x \geq x_0 \quad (13)$$

Заметим, что $\beta_1 + \gamma$ является обобщенным верхним центральным показателем линейной системы $\frac{dy}{dx} = P(x)y$, а $\beta_1 + \gamma$ является обобщенным верхним центральным показателем линейной системы (11), поэтому для любого $\varepsilon \in \left(0, \frac{|\beta_1|}{2}\right)$ для матрицы Коши $K(x, \tau)$ линейной системы (11) по определению имеет место оценка

$$\|K(x, \tau)\| \leq e^{(\beta_1 + \gamma + \varepsilon)[q(x) - q(\tau)]}, \quad x_0 \leq \tau \leq x < +\infty, \quad > 0 \quad (14)$$

Далее оценивая векторную функцию $f(x, z)$ имеем

$$\|f(x, z)\| \leq \delta(x)\|z\|$$

Теперь, из интегрального уравнения (12) оценивая по норме, в силу (13), (14)

$$\|z(x)\| \leq C_1\|z(x_0)\| + \int_{x_0}^x e^{(\beta_1 + \gamma + \varepsilon)[q(\tau) - q(x_0)]}\delta(\tau)\|z(\tau)\|d\tau \quad (15)$$

Имеет место неравенство

$$\int_{x_0}^x e^{(\beta_1 + \gamma + \varepsilon)[q(\tau) - q(x_0)]}\delta(\tau)d\tau < \frac{6B}{|\beta_1|}, \quad B > 0$$

Тогда из (15) используя лемму Гронуолла-Беллмана и возвращаясь к $y(x)$ имеем

$$\|y(x)\| \leq D\|y(x_0)\|e^{-\gamma(q(x) - q(x_0))}, \quad 0 < \gamma < \frac{|\beta_1|}{3}$$

при

$$\|y(x_0)\| < \gamma,$$

где δ достаточно мала. Поэтому, тривиальное решение нелинейной системы (8) асимптотически устойчиво при $x \rightarrow +\infty$. Лемма 2 доказана. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Если линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) и возмущенное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (5) удовлетворяют следующие условия: $p_{ik}(x), i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n$; непрерывные действительные функции, определенные на полуоси $I = [x_0, +\infty)$, кроме того выполняются 1)-4):

$$1) p_{k-1,k-1}(x) - p_{kk}(x) \geq \alpha \varphi(x), \quad x \in I, \quad k = 2, \dots, n, \quad \alpha > 0, \quad \varphi(x) \in (I),$$

$$\varphi(x) > 0, \quad \int_{x_0}^x \varphi(s) ds = +\infty;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|p_{ik}(x)|}{\varphi(x)} = 0, \quad i \neq k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(x)} \int_{x_0}^x p_{kk}(s) ds = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \beta_k < 0;$$

4) $g(x, y) = \text{colon}(g_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(x, y_1, \dots, y_n))$ имеет непрерывные частные производные на множестве $x_0 \leq x < +\infty, x_0 > 0, -\infty < y_1, \dots, y_n < +\infty$, $g_i(x, 0, \dots, 0) = 0, i = 1, \dots, n$. $\|g(x, y)\| \leq \varphi(x) \|y\|, \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ Тогда линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) асимптотически устойчиво при $x_0 \rightarrow +\infty$.

Доказательство теоремы. Как известно, если функции

$$\sum_{k=1}^n p_{ik}(x) y_k + g_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n$$

ограничены и имеют непрерывные частные производные по y_i

$$p_{ik}(x) + \frac{\partial g_i(x, y_1, \dots, y_n)}{\partial y_k}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n,$$

тогда, в каждой подобласти принадлежащей открытой полосе $x_0 < x < +\infty, -\infty < y_1, \dots, y_n < +\infty$, существует для уравнения (5) интегральный базис $\psi_i(x, y), i = 1, \dots, n$, для которого во всей области функциональный определитель

$$\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} > 0.$$

Интегральный базис (4) уравнения (1) в силу леммы 1 стремятся к нулю при $x_0 \rightarrow +\infty$. Рассмотрим уравнение (5) в области $\|y(x_0)\| < \delta, y(x_0) = \text{colon}[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)]$, $y_i(x_0) = y_i^0, i = 1, \dots, n$, $\|y(x)\| \leq D \|y(x_0)\| e^{-\gamma(q(x)-q(x_0))}$, $y(x) = \text{colon}[y_1(x), \dots, y_n(x)], x > x_0$. Тогда общее решение характеристической системы (6)

$$y_i = \psi_i(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0), \quad i = 1, \dots, n; \quad x \in (x_0, +\infty)$$

разрешимы относительно y_1^0, \dots, y_n^0 , поэтому

$$\psi_i(x, y) = \psi_i(x_0, x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n \tag{16}$$

образует интегральный базис возмущенного уравнения (5). В силу леммы 2 вытекает, что

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \psi_i(x_0, x, y_1, \dots, y_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, по приведенному определению линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (1) асимптотически устойчиво при $x_1^0 \rightarrow +\infty$. Теорема 1 доказана. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k=1}^n p_{1k}(x)y_k \frac{\partial u}{\partial y_1} + \dots + \sum_{k=1}^n p_{nk}(x)y_k \frac{\partial u}{\partial y_n} = f(x) \quad (17)$$

где правая часть $f(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $x_0 \leq x < +\infty$. Если $\psi_1(x, y_1, \dots, y_n)$ и $\psi_2(x, y_1, \dots, y_n)$ любые два решения уравнения (17), то их разность $\psi_1(x, y_1, \dots, y_n) - \psi_2(x, y_1, \dots, y_n)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (1). Если $\psi_0(x, y_1, \dots, y_n)$ решение уравнения (17) и $\varphi_k(x_0, x, y_1, \dots, y_n)$, $k = 1, \dots, n$ интегральный базис уравнения (1), то

$$\begin{aligned} \psi_0(x, y_1, \dots, y_n), u_k(x, y_1, \dots, y_n) = \psi_0(x_0, x, y_1, \dots, y_n) + \\ \varphi_k(x, y_1, \dots, y_n), k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (18)$$

образует интегральный базис уравнения (17).

Определение 2. Если линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (17) имеет интегральный базис, который стремится к некоторому решению уравнения (17) при $x_0 \rightarrow +\infty$, тогда линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (17) называется асимптотически устойчивой. Из (18) вытекает, для асимптотической устойчивости линейного неоднородного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка (17) достаточно асимптотическая устойчивость соответствующего линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка. Следовательно, имеем теорему 2.

Теорема 2. Если линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (17) удовлетворяют условиям: 1) выполняются условия теоремы 1; 2) $f(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $x_0 \leq x < +\infty$ тогда линейное неоднородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка (17) является асимптотически устойчивой.

4 Результаты и обсуждение

Приведено определение асимптотической устойчивости линейного однородного и неоднородного дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Установлены коэффициентные признаки асимптотической устойчивости линейного однородного и неоднородного дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

5 Заключение

В работе рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка, где коэффициенты уравнения заданы

на неограниченном множестве и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Получены признаки асимптотической устойчивости линейного дифференциального уравнения с частными производными первого порядка.

6 Благодарность

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования Министерством образования и науки Республики Казахстан на 2018-2020 гг., по теме «Исследование асимптотической устойчивости решений и разработка асимптотических характеристик системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка».

Список литературы

- [1] Caratheodory C. Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1935 [VI.6, 7-9].
- [2] Gross W. Bemerkung zum Existenzbeweise bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, S.-B.K. Akad. Wiss. Wien, Kl. Math. Nat., 123 (Abt. IIa), (1914), 2233-2251 [VI.7-9].
- [3] Hormander L. On the uniqueness of the Cauchy problem I // Math. Scand.-1958-No. 6,- P.213-225.
- [4] Hormander L. On the uniqueness of the Cauchy problem II // Math. Scand.-1959.-No. 7, P.177-190.
- [5] Kovalevskaya S. Zusatze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe // Astronomische Nachrichten.- 1885.-t. CXI., P.18-21
- [6] Perron O. Ueber diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten, Math. Ann., 70 (1911), 1-32 [VI.13]
- [7] Wazewski T. Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrals de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, Ann. Soc. Polon. Math., 14 (1935), 149-177 [VI.9].
- [8] Wazewski T. Ueber die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Zeit., 43 (1938), 522-532 [VI.7-9].
- [9] Алдабеков Т.М. Об обобщенных показателях Ляпунова // Дифференциальные уравнения. - 2008. - Т.44, №11. - С. 1582.
- [10] Берс Л., Джсон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными // М.: Мир.- 1966.- 352 с.
- [11] Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений//УМН.- 1959.-14(2),-С. 87-158.
- [12] Зубов В.И. Вопросы теории второго метода Ляпунова построения общего в области асимптотической устойчивости// ПММ.-1955.- т. XIX, вып.2, -С.25-31
- [13] Круженков С.Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Матем. Сборник.-1970.-81(2),-С. 228-255.
- [14] Курант Р. Уравнения с частными производными// Мир.-1964.- С.23-27
- [15] Камкэ Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка // М.: Наука.- 1966.-С.46-48
- [16] Массера Х.Л. Линейные дифференциальные и функциональные пространства// М., "Мир".- 1970.-С.50-59
- [17] Мизохата С. С. Теория уравнений с частными производными// М.: Мир.- 1977. - 504 с.
- [18] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными,3 изд// М.-1961.- С. 38-43
- [19] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 6 изд, // М.-1970.- С. 114-116

- [20] Смирнов В.М Курс высшей математики// М.: Наука, главная редакция физико-математической литературы.- 1981.-Т. 4, Часть вторая. - 551 с.
- [21] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений, изд. 6-е// Наука. Физматгиз.-1959.-С. 338-343
- [22] Ф. Трикоми Лекции по уравнениям в частных производных//ИЛ.- 1957.- С.67
- [23] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.7-е изд./ / М.: Изд-во МГУ; Наука.- 2004. - 798 с.
- [24] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения// М., "Мир"- 1970. С.627-629
- [25] Эльсгольц Л. Дифференциальные уравнения//М.-2013.- С.57-67
- [26] Яненко Н.Н., Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике// М.- 1968.

References

- [1] Aldibekov T.M. "Obobshennye pokazateli lyapunova"[Generalized Lyapunov exponents]" *Differential equations* V.44, №11(2008): 1582.
- [2] Bers L., John D. and Shechter M. "*Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*"[*Partial equations*] (M.: Mir, 1966): 352
- [3] Caratheodory C. *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung* VI 6 (Leipzig und Berlin:B. G. Teubner, 1935): 7-9.
- [4] Courant R. "*Uravneniya s chastnymi proizvodnymi*"[*Partial equations*] (Mir, 1964): 23-27
- [5] Elsgoltc L. "*Differentsialnye uravneniya*"[*Differential equations*] (M., 2013): 57-67
- [6] Gelfand I."*Nekotorye zadachi teorii kvazilineinyh uravneneii*"[*Some problems of quazilinear equations theory*] 14(2) (UMN, 1959): 87-158.
- [7] Gross W. *Bemerkung zum Existenzbeweise bei den partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* VI.7-9 (S.-B.K. Akad. Wiss. Wien, Kl. Math. Nat., 123 (Abt. IIa), 1914): 2233-2251 .
- [8] Hartman F. "*Obyknovennye differentsialnye uravneniya*"[*ODE*] (M.:Mir, 1970): 627-629
- [9] Hormander L. *On the uniqueness of the Cauchy problem I*No. 6 (Math. Scand., 1958): 213-225.
- [10] Hormander L. *On the uniqueness of the Cauchy problem II* No. 7 (Math. Scand., 1959): 177-190.
- [11] Kamke E."*Spravochnik po differentsialnym uravnennyam v chastnyh proizvodnyh pervogo poryadka*"[*Referense book in first-order partial differential equations*] (M.: Nauka, 1966): 46-48
- [12] Kovalevskaya S. *Zusatze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe* CXI (Astronomische Nachrichten, 1885): 18-21
- [13] Kruzhkov S.N. "*Kvazilineinyye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi*"[*First order quazilinear equations with many independent variables*] 81(2)(Mat. sbornik, 1970): 228-255.
- [14] Massera H.L. "*Lineinyye differentsialnye i funktsionalnye prostranstva*"[*Linear differential and functional spaces*] (M.:Mir, 1970): 50-59
- [15] Mizohata S.S. "*Teoriya uravnenii s chastnymi proizvodnymi*"[*Partial equations theory*] (M.: Mir, 1977): 504
- [16] Perron O. *Ueber diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten* VI.13, No 70, (Math. Ann., 1911): 1-32
- [17] Petrovsky I.G. "*Lektsii ob uravneniyah s chastnymi proizvodnymi*"[*Lectures in partial equations*] 3rd ed. (M., 1961): 38-43
- [18] Petrovsky I.G. "*Lektsii po teorii ODU*"[*Lectures in ODE*] 6th ed.(M., 1970): 114-116
- [19] Smirnov V. "*Kurs vyshei matematiki*"[*Higher math course*] V.4, 2nd part (M.: Nauka, 1981): 551

- [20] Stepanov V.V. "Kurs differentzialnyh uravnenii"/[Differential equations course] 6-th ed. (Nauka.Fizmatgiz, 1959): 338-343
- [21] Tichonov A.N and Samarsky A.A. "Uravneniya matematicheskoi fiziki"/[Mathematically physics equations] 7-th ed. (M.: Izd. MGU; Nauka, 2004): 798
- [22] Trikomi F. "Lektsii po uravnennyam v chastnykh proizvodnykh"/[Lectures in partial equations] (IL., 1957): 67
- [23] Wazewski T. *Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrals de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre* VI.9, No.14, (Ann. Soc. Polon. Math., 1935): 149-177
- [24] Wazewski T. *Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung* VI.7-9 No.43 (Math. Zeit., 1938): 522-532
- [25] Yanenko N.N. and Rojdestvensky B.L. "Sistemy kvazilineinyh uravneenii i ih prilozhenie k gazovoi dinamike"/[Systems of quazilinear differential equations and their application to gas dynamics] VI.7-9 (M., 1978): 223-225
- [26] Zubov V.I. "Voprosy teorii vtorogo metoda Lyapunova postroeniya obsh'ego v oblasti asimptoticheskoi ustoychivosti"/[General asymptotically stable domain building problems of the second method in lyapunov theory] Vol. XIX, 2nd edition(PMM., 1955): 25-31

МРНТИ 27.31.44

Задача Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка

Майкотов М.Н., Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77272391273, E-mail: mukhit777@mail.ru

Одной из фундаментальных задач математической физики является изучение поведение колеблющейся струны, которая некорректна, если краевые условия заданы на всей границе области. А.В.Бицадзе и А.М.Нахушев отметили, что задача Дирихле некорректна(в смысле однозначной разрешимости) не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. С.А.Алдашевым ранее была изучена задача Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений, где была доказана однозначная разрешимость этой задачи, котоая существенно зависит от высоты рассматриваемой цилиндрической области. В данной статье показана разрешимость задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка.

Ключевые слова: многомерные гиперболо-параболические уравнения, вырождение типа и порядка, цилиндрическая область, задача Дирихле, разрешимость, функция Бесселя.

Түрі мен реті азғындалған көп өлшемді гиперболо-параболалық тендеулерге Дирихле есебінің шешімділігі

Майкотов М.Н., Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті,
Қазақстан Республикасы, Алматы қ. +77272391273, E-mail: mukhit777@mail.ru

Математикалық физиканың негізгі есептерінің бірі ішпектің тербелісін зерттеу. Егерде зерттеу облысының барлық шекарасында мән берілсе, онда бұл есеп жазықтықта бір шешімді емес екен. А.В.Бицадзе, А.М.Нахушев кейін көрсеткендей Дирихле есебі тек қана толқын тендеуіне емес, және де басқа сызықтық гиперболалық тендеулерге де бір шешімді болмай шықты. С.А.Алдашевтың жұмысында сызықтық көп өлшемді гиперболо-параболалық тендеулерге Дирихле есебі зерттелген. Бұл есептің бір шешімділігі қарастырылған цилиндрлік облыстың биіктігіне тікелей байланысты екендігі дәлелденген. Бұл жұмыста түрі мен реті азғындалған көп өлшемді гиперболо-параболалық тендеулердің цилиндрлік облыста шешімділігі көрсетілген.

Түйін сөздер:көп өлшемді гиперболо-параболалық тендеулер,түрі мен реті азғындалған, цилиндрлік облыс, Дирихле есебі, шешімділік, Бессель функциясы.

The Dirichlet problem for multidimensional hyperbola-parabolic equations with degeneracy of type and order

Maikotov M.N., Kazakh national pedagogical university after Abay,
Almaty, Kazakhstan, +77272391273, email: mukhit777@mail.ru

The fundamental problems of mathematical physics-the study of the behavior of an oscillating string-is incorrect when the boundary conditions are given on the entire boundary of the region. As A. Bitsadze, A.Nakhushev noted, the Dirichlet problem is ill-posed (in the sense of unique solvability) not only for the wave equation, but also for general hyperbolic equations. S.A Aldashev previously studied the Dirichlet problem for degenerate multidimensional hyperbolic equations, where a unique solvability of this problem is proved, which depends essentially on the height of the cylindrical region under consideration. This paper shows the solvability of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional hyperbola-parabolic equations with degeneration of type and order.

Key words: multidimensional hyperbolic-parabolic equations, degeneration of type and porch, cylindrical domain, Dirichlet problem, solvability, Bessel function.

1 Введение

На плоскости теория краевых задач для вырождающихся гиперболо-параболических уравнений были изучены довольно глубоко (Нахушев А.М., 2006). Их многомерные аналоги исследованы не достаточно хорошо (Врагов В.Н., 1983). В предыдущей работе (Алдашев С.А., 2016) установлена корректность задачи Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений в цилиндрической области. В исследуемой работе для многомерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка в цилиндрической области показана разрешимость задачи Дирихле.

2 Обзор литературы

Ранее теорией по краевым задачам для гиперболо-параболических уравнений занимались известные ученые Нахушев А.М (Нахушев А.М., 2006), Врагов В.Н. (Врагов В.Н., 1983). В последние годы активно занимаются исследованиями Алдашев С.А. В его исследовании изучена задача Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений. Однако, многомерные аналоги мало исследованы и изучены.

3 Материалы и методы

Пусть $\Phi_{\eta\zeta}$ - есть цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (X_1, \dots, X_m, t) , которая ограничена цилиндром $\gamma = \{(X, t) : |X| = 1\}$ а также плоскостями $t = \eta > 0$, $t = \zeta < 0$, где $|X|$ - длина вектора $X = (X_1, \dots, X_m)$.

Через Φ_η и Φ_ζ обозначим части области $\Phi_{\eta\zeta}$, а Φ_η , Φ_ζ - это части поверхности Φ , которые обычно лежат в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_η - это верхнее основание области $\Phi_{\eta\zeta}$, а σ_ζ - это нижнее основание области $\Phi_{\eta\zeta}$.

S - общая часть границ областей Φ_η , Φ_ζ , которая представляет собой множество $\{t = 0, 0 < |X| < 1\}$ в E_m .

В указанной области $\Phi_{\eta\zeta}$ рассмотрим вырождающиеся многомерные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} h_1(t)\Delta_X U - h_2(t)U_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(X, t)U_{X_i} + b(X, t)U_t + c(X, t)U, & t > 0, \\ q(t)\Delta_X U - U_t + \sum_{i=1}^m d_i(X, t)U_{X_i} + e(X, t)U, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $h_i(t) > 0$ при $t > 0$, $h_i(0) = 0$, $h(t) \in C([0, \eta]) \cap C^2((0, \eta))$, $i = 1, 2$, $G(t) > 0$ при $t > 0$, $G(0) = 0$, $G(t) \in C([\zeta, 0])$, а Δ_X - это оператор Лапласа по переменным X_1, \dots, X_m , $m \geq 2$.

Затем нам необходимо перейти от декартовых координат X_1, \dots, X_m, t к сферическим координатам $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 1, 2, \dots, m-2$, $0 \leq \theta_{m-1} < 2\pi$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Задача 1(Дирихле). Необходимо найти решение уравнения (1) в области $\Phi_{\eta\zeta}$ при $t \neq 0$ из следующего класса $C(\bar{\Phi}_{\eta\zeta}) \cap C^2(\Phi_\eta \cup \Phi_\zeta)$, которая будет удовлетворять

следующим краевым условиям

$$U\Big|_{\sigma_\eta} = \varphi_1(r, \theta), \quad U\Big|_{\gamma_\eta} = \psi_1(t, \theta), \quad (2)$$

$$U\Big|_{\gamma_\zeta} = \psi_2(t, \theta), \quad U\Big|_{\sigma_\zeta} = \varphi_2(r, \theta). \quad (3)$$

где $\varphi_1(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta)$, $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$, $\psi_2(\zeta, \theta) = \varphi_2(1, \theta)$

$\{Z_{n,m}^k(\theta)\}$ – это система линейных независимых сферических функций следующего порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \dots$ пространства Соболева. При этом будет иметь место (Михлин С.Г., 1962).

Лемма 1. Если ряд $F(r, \theta) \in W_2^l(S)$. и $l \geq m-1$, то ряд

$$F(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} F_n^k(r) Z_{n,m}^k(\theta), \quad (4)$$

следующие ряды, которые были получены дифференцированием порядка $h \leq l-m+1$ будут сходится абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Чтобы ряд $F(r, \theta) \in W_2^l(S)$, которому необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли следующим неравенствам

$$|F_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |F_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Если через $\tilde{d}_{in}^k(r, t)$, $d_{in}^k(r, t)$, $\tilde{e}_n^k(r, t)$, $d_n^k(r, t)$, ρ_n^k , $\bar{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_{1n}^k(t)$, $\psi_{2n}^k(t)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (4), соответствующих функций $d_i(r, \theta, t)\rho$, $d_i \frac{x_i}{r}\rho$, $e(r, \theta, t)\rho$, $(r, \theta, t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \dots, m$, $\varphi_1(r, \theta)$, $\varphi_2(r, \theta)$, $\psi_1(t, \theta)$, $\psi_2(t, \theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, где H – это единичная сфера в E_m .

Если $\frac{a_i(r, \theta, t)}{h_2(t)}, \frac{b(r, \theta, t)}{h_2(t)}, \frac{c(r, \theta, t)}{h_2(t)} \in W_2^l(\Phi_\eta) \subset C(\bar{\Phi}_\eta)$, $d_i(r, \theta, t), e(r, \theta, t) \in W_2^l(\Phi_\zeta)$, $i = 1, \dots, m$, $l \geq m+1$. Тогда справедлива

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta) \in W_2^h(S)$, $\psi_1(t, \theta) \in W_2^h(\gamma_\eta)$, $\psi_2(t, \theta) \in W_2^h(\gamma_\zeta)$, $h > \frac{3m}{2}$ и

$$\cos \mu_{s,n} \eta' \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

то исследуемая задача 1 разрешима, где $\mu_{s,n}$ – это положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $\eta' = \int_0^\eta \sqrt{\frac{h_1(\xi)}{h_2(\xi)}} d\xi$.

4 Доказательство

Вначале укажем на разрешимость задачи (1) и (3). В сферических координатах уравнение (1) в области Φ_ζ имеет следующий вид:

$$L_1 U \equiv G(t) \left(U_{rr} + \frac{m-1}{r} U_r - \frac{1}{r^2} \delta U \right) - U_t + \sum_{i=1}^m d_i(r, \theta, t) U_{X_i} + e(r, \theta, t) U = 0, \quad (6)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{G_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \theta_j \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), G_1 = 1, G_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, j > 1.$$

Из первоисточников нам известно (Михлин С.Г., 1962), что спектр оператора δ , который состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых может соответствовать k_n ортонормированные собственные функции $Z_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение исследуемой задачи 1 в указанной области Φ_ζ будем искать в виде:

$$U(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{U}_n^k(r, t) Z_{n,m}^k(\theta), \quad (7)$$

где $\bar{U}_n^k(r, t)$ – это функции, которые подлежат определению.

Подставив (7) в (6), а затем умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$, а затем проинтегрировав его по сфере H для \bar{U}_n^k , в итоге получим (Алдашев С.А., 1994), (Алдашев С.А., 2006), (Алдашев С.А., 2007)

$$\begin{aligned} & G(t) \rho_0^1 \bar{U}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{U}_{0t}^1 + \left(\frac{m-1}{r} G(t) \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \right) \bar{U}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{U}_0^1 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ G(t) \rho_n^k \bar{U}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{U}_{nt}^k + \left(\frac{m-1}{r} G(t) \rho_n^k + \sum_{i=1}^m d_{in}^k \right) \bar{U}_{nr}^k + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{e}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} G(t) + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-1}^k - n d_{in}^k) \right] \bar{U}_n^k \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Далее будем рассматривать бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$G(t) \rho_0^1 \bar{U}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{U}_{0t}^1 + \frac{(m-1)}{r} G(t) \rho_0^1 \bar{U}_{0r}^1 = 0, \quad (9)$$

$$G(t) \rho_1^k \bar{U}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{U}_{1t}^k + \frac{(m-1)}{r} G(t) \rho_1^k \bar{U}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} G(t) \rho_1^k \bar{U}_1^k = -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m d_{i0}^1 \bar{U}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1 \bar{U}_0^1 \right), \quad n = 1, k = \overline{1, k_1}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & G(t) \rho_n^k \bar{U}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{U}_{nt}^k + \frac{(m-1)}{r} G(t) \rho_n^k \bar{U}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} G(t) \rho_n^k \bar{U}_n^k = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m d_{in-1}^k \bar{U}_{n-1r}^k + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^m (\tilde{d}_{in-2}^k - (n-1) d_{in-1}^k) \right] \bar{U}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Далее суммируя уравнение (10) от 1 до k_1 , а также уравнение (11) – от 1 до k_n , в дальнейшем сложив полученные выражения вместе с (9), приходим к следующему уравнению (8).

Далее следует, что если $\{\bar{U}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$ – это решение системы (9) – (11) и оно будет являться решением уравнения (8).

Можно заметить, что эти уравнения системы (9)-(11) можно представить в следующем виде:

$$G(t) \left(\bar{U}_{nrr}^k + \frac{(m-1)}{r} \bar{U}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{U}_n^k \right) - \bar{U}_{nt}^k = \bar{F}_n^k(r, t), \quad (12)$$

где $\bar{F}_n^k(r, t)$ будут определяться из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{F}_0^1(r, t) \equiv 0$.

Из краевого условия (3) в силу (7) имеем

$$\bar{U}_n^k(r, \zeta) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \bar{U}_n^k(1, t) = \psi_{2n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots. \quad (13)$$

Далее произведя замену $\bar{\Upsilon}_n^k(r, t) = \bar{U}_n^k(r, t) - \psi_{2n}^k(t)$ в (12) и (13), получим

$$G(t) \left(\bar{\Upsilon}_{nrr}^k + \frac{(m-1)}{r} \bar{\Upsilon}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{\Upsilon}_n^k \right) - \bar{\Upsilon}_{nt}^k = F_n^k(r, t), \quad (14)$$

$$\bar{\Upsilon}_n^k(r, \zeta) = \varphi_{2n}^k(r), \quad \bar{\Upsilon}_n^k(1, t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (15)$$

$$F_n^k(r, t) = \bar{F}_n^k(r, t) + \psi_{2nt}^k + \frac{\lambda_n G(t)}{r^2} \psi_{2n}^k, \quad \varphi_{2n}^k(r) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r) - \psi_{2n}^k(\zeta).$$

Далее произведя замену $\bar{\Upsilon}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} \Upsilon_n^k(r, t)$ следующие задачи (14) и (15), придем к следующей задаче

$$L\Upsilon_n^k \equiv G(t) \left(\Upsilon_{nrr}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \Upsilon_n^k \right) - \Upsilon_{nt}^k = \tilde{F}_n^k(r, t), \quad (16)$$

$$\Upsilon_n^k(r, \zeta) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \Upsilon_n^k(1, t) = 0, \quad (17)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad \tilde{F}_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} F_n^k(r, t), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (16), (17) будем искать в виде

$$\Upsilon_n^k(r, t) = \Upsilon_{1n}^k(r, t) + \Upsilon_{2n}^k(r, t), \quad (18)$$

где $\Upsilon_{1n}^k(r, t)$ - это и есть решение задачи

$$L\Upsilon_{1n}^k = \tilde{F}_n^k(r, t), \quad (19)$$

$$\Upsilon_{1n}^k(r, \zeta) = 0, \quad \Upsilon_{1n}^k(1, t) = 0, \quad (20)$$

а $\Upsilon_{2n}^k(r, t)$ - это решение задачи

$$L\Upsilon_{2n}^k = 0, \quad (21)$$

$$\Upsilon_{2n}^k(r, \zeta) = \tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad \Upsilon_{2n}^k(1, t) = 0. \quad (22)$$

Выше указанные задачи решим и рассмотрим в виде

$$\Upsilon_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (23)$$

пусть при этом

$$\tilde{F}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \quad \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \quad (24)$$

Подставив (23) в (19) и (20), с учетом (24), в конечном итоге получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (25)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (26)$$

$$T_{st} + \mu G(t) T_s = -a_{s,n}(t), \quad \zeta < t < 0, \quad (27)$$

$$T_s(\zeta) = 0. \quad (28)$$

Пусть ограниченным решением задачи (25) и (26) является (Камке Э., 1965)

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (29)$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (27) и (28) будет

$$T_{s,n}(t) = (\exp(-\mu_{s,n}^2 \int_0^t G(\xi) d\xi)) \left(\int_t^\zeta a_{s,n}(\xi) (\exp \mu_{s,n}^2 \int_0^\xi G(\xi_1) d\xi_1) d\xi \right). \quad (30)$$

Подставив (29) в (24) в конце получим

$$r^{-\frac{1}{2}} \tilde{F}_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \tilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}^k J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1. \quad (31)$$

Ряды (31)- это разложения в ряды Фурье-Бесселя (Бейтмен Г., 1971), где

$$a_{s,n}^k(t) = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{F}_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (32)$$

$$b_{s,n}^k = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (33)$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \dots$ – положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, которые расположены в порядке возрастания их величин.

Из (23),(29) и(30) в конечном итоге получим решение задач (19) и (20)

$$\Upsilon_{1n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (34)$$

где $a_{s,n}^k(t)$ будут определяются из (32).

Подставив (23) в (21) и (22), а также с учетом (24), имеем задачу

$$T_{st} + \mu_{s,n}^2 G(t) T_s = 0, \quad \zeta < t < 0, \quad T_s(\zeta) = b_{s,n}^k,$$

где решением является

$$T_{s,n}(t) = b_{s,n} \exp(\mu_{s,n}^2 \int_t^\zeta G(\xi) d\xi). \quad (35)$$

Из (29) и (35) будем иметь

$$\Upsilon_{2n}^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} \sqrt{r} \left(\exp \mu_{s,n}^2 \int_t^\zeta G(\xi) d\xi \right) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad (36)$$

где $b_{s,n}$ находится из (33).

Поэтому, вначале решив задачу (9) и (13) ($n = 0$), далее (10) и (13) ($n = 1$) и т.д. найдем последовательно все $\Upsilon_n^k(r, t)$ из (18), где $\Upsilon_{1n}^k(r, t)$, $\Upsilon_{2n}^k(r, t)$ будут определяться из (34) и (36).

Таким образом, в области Φ_ζ , будет иметь место

$$\int_H \rho(\theta) L_1 U dH = 0. \quad (37)$$

Если $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, где $R(r) \in V_0$, V_0 – плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ – плотна в $L_2(H)$, $T(t) \in V_1$, V_1 – плотна в $L_2((\zeta, 0))$. Будем иметь $F(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ – которая плотна в $L_2(\Phi_\zeta)$ (Колмогоров А.Н., Фомин С.В., 1976).

Из (37), следует, что

$$\int_{\Phi_\zeta} f(r, \theta, t) L_1 U d\Phi_\zeta = 0$$

и

$$L_1 U = 0, \quad \forall (r, \theta, t) \in \Phi_\zeta.$$

Решением задачи (1) и (3) в области Φ_ζ является следующая функция:

$$U(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \psi_{2n}^k(t) + r^{\frac{(1-m)}{2}} [\Upsilon_{1n}^k(r, t) + \Upsilon_{2n}^k(r, t)] \right\} Z_{n,m}^k(\theta), \quad (38)$$

где $\Upsilon_{1n}^k(r, t)$, $\Upsilon_{2n}^k(r, t)$ находятся из (34) и (36).

Используя формулу (Бейтмен Г., Эрдейи А.Н., 1974) $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, а также оценки (Тихонов А.Н., 1966) и (Михлин С.Г., 1962)

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{z^{3/2}} \right), \quad \nu \geq 0, \\ |k_n| &\leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Z_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (39)$$

и выше указанные леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\psi_2(t, \theta)$, $\varphi_2(t, \theta)$, как в (Алдашев С.А., 2016), можно доказать, что полученное решение (38) принадлежит классу $C(\bar{\Phi}_\zeta) \cap C^2(\Phi_\zeta)$.

Из (34), (36) и (38) $t \rightarrow -0$ будем иметь

$$U(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \tau_n^k(r) Z_{n,m}^k(\theta), \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \tau_n^k(r) &= \psi_{2n}^k(0) + \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} \left[\int_0^{\zeta} a_{s,n}(\xi) (\exp \mu_{s,n}^2 \int_0^{\xi} G(\xi_1) d\xi_1) d\xi + b_{s,n} \exp(\mu_{s,n}^2 \int_0^{\zeta} G(\xi) d\xi) \right] \\ &\quad J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r). \end{aligned}$$

Из (32)-(34), а также из (36) и выше указанных лемм вытекает, что $\tau(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $l > \frac{3m}{2}$.

Учитывая краевые условия (2) и (40), в итоге получим в области Φ_η задачу Дирихле для следующего уравнения

$$L_2 U \equiv h_1(t) \Delta_X U - h_2(t) U_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) U_{x_i} + b(r, \theta, t) U_t + c(r, \theta, t) U = 0, \quad (41)$$

с данными

$$U|_S = \tau(r, \theta), \quad U|_{\gamma_\eta} = \psi_1(t, \theta), \quad U|_{\sigma_\eta} = \varphi_1(r, \theta). \quad (42)$$

В [Майкотов М.Н., 2017] была доказана следующая теорема

Теорема 2. Если $\tau(r, \theta), \varphi_1(r, \theta) \in W_2^l(S)$, $\psi_1(t, \theta) \in W_2^l(\gamma_\eta)$, $l > \frac{3m}{2}$ и выполняется соотношение (5), то задачи (41) и (42) в классе $C^1(\bar{\Phi}_\eta) \cap C^2(\Phi_\eta)$ разрешима.

Используя теорему 2, в итоге приходим к разрешимости задачи 1.

Теорема доказана.

5 Результаты и обсуждение

Таким образом, в результате изучения предыдущих работ известных ученых, где изучались их многомерные аналоги. В данной работе впервые была получена разрешимость задачи Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка.

6 Заключение

В исследуемой работе получена разрешимость задачи Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений.

Список литературы

- [1] Альдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений// Алматы: Гылым. -1994. -С.170.
- [2] Альдашев С.А. Задача Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений//Научные ведомости БелГУ. математика, физика, - 2016, №27(248), вып.45 -С.16-25.
- [3] Альдашев С.А. Задачи Дарбу-Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений//Известия вузов, математика. - 2006, № 9(532)-С.3-9.
- [4] Альдашев С.А. Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения//Орал: ЗКАТУ.- 2007. - С.139.
- [5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - т.2, М.: Наука, 1974. - 297с.
- [6] Врагов В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.-Новосибирск:НГУ.- 1983.-84с.
- [7] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука,1965. - 703с.
- [8] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука. -1976. - 543с.
- [9] Маикотов М.Н. Задача Дирихле для многомерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка//Алматы:Вестник КазНПУ имени Абая. -2017, №3(59). -С.105-109.
- [10] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Физматгиз.- 1962.- 254с.
- [11] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных.- М.: Наука.- 2006. - 287с.
- [12] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.- 724с.
- [13] Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия для дифференциального уравнения третьего порядка. - М.: Наука. 2018. - 427с.

References

- [1] Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlya mnogomernykh giperbolicheskikh i smeshannykh uravnenij[Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations](Almaty: Gylym,1994),170.
- [2] Aldashev S.A. Zadacha Dirihiel dlya vyrozhdayushchihysa mnogomernykh giperbolo-parabolicheskikh uravnemij["The Dirichlet problem for degenerate multidimensional hyperbolic-parabolic equations,"] Scientific Bulletins of BelGU.mathematics, physics,no 45(2016):16-25.
- [3] Aldashev S.A. Zadachi Darbu-Protterra dlya vyrozhdayushchihysa mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenij//Izvestiya vuzov, matematika["Darboux-Protter problems for degenerate multidimensional hyperbolic equations,"]. Proceedings of high schools,mathematics. no 9(532)(2006):3-9.
- [4] Aldashev S.A. Vyrozhdayushchiesya mnogomernye giperbolicheskie uravneniya["Degenerating multidimensional hyperbolic equations"], Oral: ZKATU.(2007):139.
- [5] Bateman G., Erdei A. Vysshie transcendentnye funkciyi[Higher transcendental functions], vol.2(Moscow: Science,1974),297.
- [6] Vragov V.N. Kraevye zadachi dlya neklassicheskikh uravnenij matematicheskoy fiziki[Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics],(NGU:1983),84.
- [7] Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam[A Handbook of Ordinary Differential Equations] (Moscow: Science,1965),703.
- [8] Kolmogorov A.N, Fomin S. V. Elementy teorii funkciij i funkcional'nogo analiza[Elements of the theory of functions and functional analysis](Moscow:Science,1976),543.
- [9] Maikotov M.N.(2017). Zadacha Dirihiel dlya mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenij s vyrozhdieniem tipa i poryadka["The Dirichlet problem for multidimensional hyperbolic equations with degeneration of type and order],"Almaty: Bulletin of KazNPU named after Abai,no 59(2017):105-109.
- [10] Mikhlin S.G. Mnogomernye singulyarnye integraly i integral'nye uravneniya[Multidimensional singular integrals and integral equations] (Moscow: Fizmatgiz,1962),254.

- [11] *Nakhushev A.M.* Zadachi so smeshcheniem dlya uravneniya v chastnyh proizvodnyh [Problems with displacement for a partial differential equation] (Moscow: Science, 2006), 287.
- [12] *Tikhonov A.N., Samarskii A.A.* Equations of mathematical physics [Equations of mathematical physics] (Moscow: Science, 1966), 724.
- [13] *Akhtyamov A.M.* Vyrozhdennye kraevye usloviya dlya differencial'nogo uravneniya tret'ego poryadka ["Degenerate boundary conditions for a third-order differential equation,"] Moscow: Science (2018):427.

2-бөлім**Механика****Раздел 2****Механика****Section 2****Mechanics**

IRSTI 30.15.15

About the separation of finely divided particles during centrifugation in liquid media

Kydyrbekuly A.B., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
 +77071143341, E-mail: almatbek@list.ru,

Rahmetolla A.Sh., Science Research Institute of Mathematics and Mechanics, Almaty,
 Kazakhstan, +77476193631, E-mail: abzhan.rakhmatolla@mail.ru,

Ibraev G.E., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, +77051111745,
 E-mail: ybraev.alysher@mail.ru,

Rakhimzhanova A.Zh., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
 +77078191246, E-mail: anarar.88@mail.ru

This work is devoted to the study of centrifugation processes, which are one of the most complex processes of technology. The use of the action of the centrifugal force field for the separation of heterogeneous liquid systems in a rotor system (centrifuge) is very effective. Separability of centrifuged materials, multiphase dispersion, the relationship between phases cause ambiguous processes of centrifugation, and therefore it is not always possible to accurately predict and evaluate the main characteristics of the separation of heterogeneous systems in the centrifugal force field. For a qualitative assessment of the main separation characteristics, such as the angular velocity of rotation, the dependence of the angles of inclination of the glasses on the angular velocity, the settling time of particles, etc., is created a mathematical model of the vertical rotor system. The rotor represents a round disk on which cups (vial) with a multiphase liquid are symmetrically suspended. A particular case of a fixed rotor is considered. Nonlinear differential equations of motion of the suspension particle, which have no exact solution, are obtained. The research is conducted by analytical and numerical methods. The dependence of the slope angles of the tubes from the angular rotational speed of the rotor, sedimentation curves are obtained, which allow estimating the time of particle deposition and the effect of the particle size distribution on the separation process. The results of this research work allow us to determine with sufficient accuracy all the necessary characteristics of the sedimentation working process, and also, in certain cases, it is possible to exclude the conduct of experimental work. The results of the work confirm the physical meaning of the process, which can serve as a justification for the use and introduction of this mathematical model in industrial production.

Key words: separation, settling, centrifuge, multiphase fluid, rotor system, demetallization of oil.

Сүйық ортадағы ұсақ бөлшектердің центрифугирлеу кезіндегі сепарациясы
 Кыдыrbекұлы А.Б., Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
 +77071143341, E-mail: almatbek@list.ru,

Рахметолла А.Ш., Математика және механика ғылыми зерттеу институты, Алматы, Қазақстан
 Республикасы, +77476193631, E-mail: abzhan.rakhmatolla@mail.ru,

Ибраев Г.Е., Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,
 +77051111745, E-mail: ybraev.alysher@mail.ru,

Рахымжанова А.Ж., Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы,
 Қазақстан, +77078191246, E-mail: anarar.88@mail.ru

Берілген жұмыс технология процесстерінің ең күрделілердің бірі болып табылатын центрифугирлеу үдерісін зерттеуге арналған. Роторлық жүйеде (центрифугада) біртексіз сұйық жүйелерді бөлу үшін центрден тепкіш күштер өрісінің әсерін қолдану өте тиімді. Центрифугирленетін материалдардың бөлінгіштігі, дисперсті жүйелердің көпфазалығы, фазалардың өзара қатынасы центрифугирлеу үдерісінің бір мәнді емес болуын тұтызады, сондықтанда центрден тепкіш күштер өрісіндегі гетерогенді жүйелердің негізгі бөліну сипаттамаларына әрқашан нақты болжамдар мен бағалау жасау мүмкіншілігі бола бермейді. Бөлшектердің тұну уақыты, сынауықтардың көлбеулік бұрышы мен бұрыштық жылдамдықтың арасындағы қатынас, айналудың бұрыштық жылдамдығы және т.с. сепарацияның негізгі сипаттамаларына сапалық баға беру үшін вертикаль роторлық жүйенің математикалық моделі құрылды. Ротор ретінде симметриялы түрде дөңгелек дискке ораналастырылған көпфазалы сұйықтықтығы бар сынауықтар алынған. Фиксацияланған ротордың дербес жағдайы қарастырылып отыр. Нақты шешімі жоқ сусpenзия бөлшектерінің сзызықсыз дифференциал қозғалыс теңдеулері алынды. Зерттеу аналитикалық және сандық әдістер арқылы жүзеге асырылды. Бөлшектердің тұну уақытын бағалауга мүмкіндік беретін седиментация қысықтары, сынауықтардың көлбеулік бұрышы мен ротордың бұрыштық айналу жылдамдығының арасындағы, жалпы сепарация үдерісіне деген гранулометрлік құрамның әсерін ескеретін қатынастар алынды. Зерттеу нәтижелері седиментация жұмыс үдерісінің барлық қажетті сипаттамаларын қажетті дәлдікпен анықтауга мүмкіндік береді, және де кейбір жағдайларда тәжірибелік жұмыстарды жүргізу қажеттілігінен құтылуға мүмкіндік береді. Жұмыс нәтижелері есепте қарастырылып отырылған үдерістің физикалық мағынасын дәлелдейді, ал ол өз кезегінде берілген математикалық модельді өндірістік өнеркәсіпке енгізуге және қолдануға негіздеме бола алады.

Түйін сөздер: сепарация, тұну, центрифуга, көпфазалы сұйықтық, роторлық жүйе, мұнай деметаллизациясы.

О сепарации тонкоизмельчённых частиц при центрифугировании в жидких средах

Кыдырбекулы А.Б., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77071143341, E-mail: almatbek@list.ru,

Рахметолла А.Ш., Научно-исследовательский институт математики и механики, Алматы, Республика Казахстан, +77476193631, E-mail: abzhan.rakhmatolla@mail.ru,

Ибраев Г.Е., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77051111745, E-mail: yubraev.alisher@mail.ru,

Рахимжанова А.Ж., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77078191246, E-mail: anarar.88@mail.ru

Данная работа посвящена исследованию процессов центрифугирования, являющихся одними из наиболее сложных процессов технологии. Использование действия поля центробежных сил для разделения неоднородных жидких систем в роторной системе (центрифуге) весьма эффективно. Разделяемость центрифугируемых материалов, многофазность дисперсной системы, соотношение между фазами обуславливают неоднозначность процессов центрифугирования, и поэтому не всегда существует возможность точного прогноза и оценки основных характеристик разделения гетерогенных систем в центробежном поле сил. Для качественной оценки основных характеристик сепарации, такие как угловая скорость вращения, зависимость углов наклона стаканов от угловой скорости, время оседания частиц и т.д., построена математическая модель вертикальной роторной системы. Ротор представляет собой круглый диск, на котором симметрично подвешены стаканчики (пробирки) с многофазной жидкостью. Рассматривается частный случай фиксированного ротора. Получены нелинейные дифференциальные уравнения движения частицы супензии, которые точного решения не имеют. Исследование проводится аналитическими и численными методами.

Получены зависимости углов наклона пробирок от угловой скорости вращения ротора, кривые седиментации, позволяющие оценить время осаждения частиц, а также влияние гранулометрического состава на процесс сепарации в целом. Результаты исследования данной работы позволяют с достаточной точностью определить все необходимые характеристики рабочего процесса седиментации, а также позволяют в определенных случаях исключить проведение экспериментальных работ. Результаты работы подтверждают физический смысл процесса, рассматриваемого в задаче, что может служить обоснованием использования и внедрения данной математической модели в промышленном производстве.

Ключевые слова: сепарация, оседание, центрифуга, многофазная жидкость, роторная система, деметаллизация нефти.

1 Introduction

Today the purification of oil and the extraction of foreign bodies from it have several methods. These methods are conventionally divided into chemical, physical and physico-chemical. Such extraction methods as chemical impact, the impact of various fields and radiations, treatment with sorbents can well fit into the technological process of oil preparation for transportation and processing. However, currently used methods of demetallization of oil from foreign impurities with chemical and thermally treated are ineffective, they have low productivity and imperfect technology (the degree of purification is rather low, high cost, etc.) and quite harmful to the environment. One of the solutions to these problems is the using of special centrifuges for the separation of different densities' substances, in particular, for the separation of a mixture of solid particles of substances and liquids.

2 Literature Review

Centrifugation processes is the most complex processes of technology, and centrifuges are the most complex technological mechanism. Not all the questions of the theory of the centrifuges operation have been sufficiently developed. It is not always possible to accurately predict the separation of heterogeneous systems in centrifuges [1-3]. Fundamentals of theoretical and experimental research of these machines are laid in the works of G.I.Bremer, V.I. Sokolov, P.G. Romankova, N.N. Lipatova, E.M. Goldina. Research of U.N. Bochkova, S.A. Plyushkina, E.V. Semenova, and V.Shlau significantly developed the theory of centrifugation processes and contributed to the creation of new effective centrifuges [4]. Despite the complexity and ambiguity of the centrifugation processes, they still obey the corresponding mathematical dependencies. The flow of fluid inside the rotors of centrifuges can not be considered with its flow in the field of gravity. Coriolis forces play an important role in this case. Stability of flows in the field of centrifugal forces is not characterized by the measures which used to estimate the stability of flows in the field of gravity [3,5-6]. Modern trends in centrifugal technology have caused the appearance of multiple designs of centrifuges, some of which are difficult to estimate by calculation [7-8]. Numerous scientific works are devoted to this topic, patents and author's certificates have been obtained, methods of mechanically separating solid particles from liquids by means of centrifugation and devices for their implementation have been proposed [9-15]. In [16,17], where the particle motion accounted only for the tube axis, the results were insufficient to completely analyze the sedimentation process of the suspension. So, the spatial motion of a particle is studied in this work, where it is also necessary to take into account that the values of the angular rotational speed of the rotor, the tubes and the

angle of their inclination are variable depending on the time for a complete assessment of the separation of solid particles from the liquid, which also complicates the search general solution of the differential equations of motion of a particle and the mechanical system as a whole[18]. We propose a solution to this problem under certain assumptions in this work. A special case, which takes place in industrial production, has been given and analyzed. Analytical research methodology, which used for technical rotary installation used for slurry treatment in the industry was developed and presented in [19].

3 Material and methods

Consider a vertical rotor mounted on a flexible shaft symmetrically relative to the supports, which rotates with an angular velocity ω . The rotor represents the circular disk on which tubes with a suspension are symmetrically suspended. Tubes can rotate around their own horizontal axis (Figure 1).

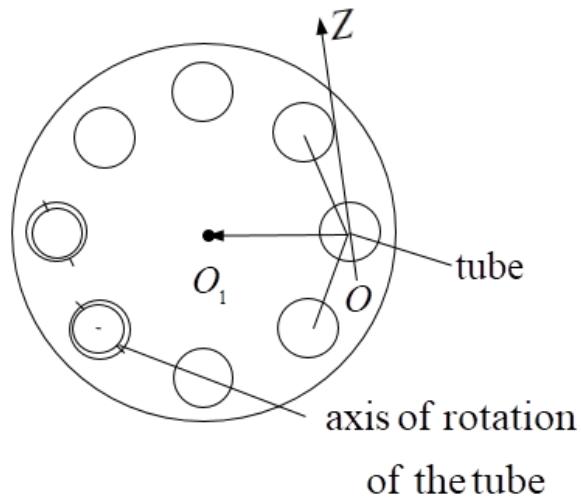


Figure 1 - Disc with test tubes

The rotation angle of the tubes from the vertical determines by the angle α ; $\Omega = \dot{\alpha}$ - the angular speed of tubes rotation, L_s - the distance from the axis of rotor rotation to the axis of tubes rotation, L_M - the distance to the particle M of the suspension with mass Δm , r - the radius of the cups, g - the acceleration of gravity, L - the length of the tubes. The position of the rotor defines in the fixed coordinate system $O_1x_1y_1z_1$ (Figure 2). The position of the investigated particle M is given in the moving coordinate system $Oxyz$, $M(x, y, z)$. The axis Oy is directed along the axis of symmetry of the tube downward. The axis Oz is directed along the axis of rotation of the tube.

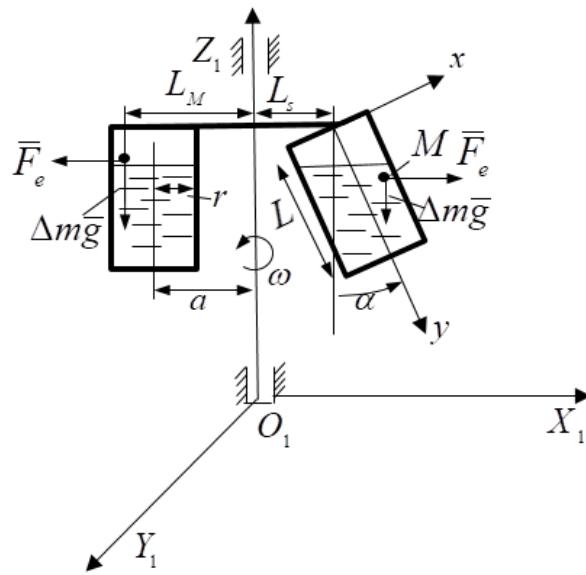


Figure 2 - Scheme of the rotor system

When compiling the equations of motion, the following assumptions were used:

1. the angular velocity of the rotor is sufficiently large, so the gravity can be neglected ($g \ll \omega^2 r$);
2. the particles have a spherical shape;
3. the length of a free particle is much larger than its size;
4. there is no turbulence in the suspension;
5. forces of interaction of particles between themselves and the walls of the glass (tubes) are absent;
6. the tube is narrow enough what allow take a diameter much smaller than the length;
7. after deposition on the tube wall, the particles stop their movement;
8. the frictional force between the tubes and their rotation axes, as well as the change in the severity of the tubes with suspensions and the frictional force of the particle with the tube wall is neglected.

To compose the equation of the particle motion, it is necessary to determine the transport \bar{F}_e and Coriolis forces \bar{F}_c of inertia of the suspension particle. The transport acceleration of a particle M determines by the formula (Figure 2)

$$\bar{a}_e = \bar{\Omega}_0(\bar{\Omega}_0 \cdot \bar{r}) - \bar{r}\bar{\Omega}_0^2 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}, \quad (1)$$

where

$$\bar{\Omega}_0 = \bar{\omega} + \bar{\Omega} \quad (2)$$

an instantaneous angular velocity of the rotor system.

Projecting the vector of the transport acceleration, which defined by the formula (1), on the moving coordinate axes Ox, Oy, Oz , we obtain:

$$\begin{cases} a_{ex} = \omega \sin \alpha \cdot [\omega(x \sin \alpha - y \cos \alpha) - \Omega z] - (L_s \cos \alpha + x)(\omega^2 + \Omega^2) + \\ + \dot{\Omega}(L_s \cos \alpha + x) - z \dot{\omega} \sin \alpha, \\ a_{ey} = -\omega \cos \alpha \cdot [\omega(x \sin \alpha - y \cos \alpha) - \Omega z] - (L_s \sin \alpha + y)(\omega^2 + \Omega^2) + \\ + \dot{\Omega}(L_s \cos \alpha + x) - z \dot{\omega} \sin \alpha, \\ a_{ez} = -\Omega \cdot [\omega(x \sin \alpha - y \cos \alpha) - \Omega z] - z(\omega^2 + \Omega^2) + \dot{\omega} \cdot (L_s + y \sin \alpha + x \cos \alpha) \end{cases} \quad (3)$$

The transport force of inertia is equal $\overline{F_e} = -\Delta m \overline{a_e}$, the Coriolis force of inertia is $\overline{F_c} = -\Delta m \overline{a_c}$. Coriolis acceleration of particle M of the suspension, taking into account the fact that $\Omega_{Ox} = \omega \sin \alpha, \Omega_{Oy} = -\omega \cos \alpha, \Omega_{Oz} = \Omega$, has the form

$$\begin{cases} a_{cx} = -2(\omega \cdot \dot{z} \cos \alpha - \dot{y} \Omega), \\ a_{cy} = -2(\omega \cdot \dot{z} \sin \alpha + \dot{x} \Omega), \\ a_{cz} = -2\omega(\dot{y} \sin \alpha + \dot{x} \cos \alpha), \end{cases} \quad (4)$$

After using formulas (3) and (4), taking into account the assumed assumptions, the motion equations of suspension particle M have the form:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -g \sin \alpha - 6\pi\eta_1 r_0 \dot{x} + (L_s \cos \alpha + x)(\omega^2 + \Omega^2) - \omega \sin \alpha [\omega(x \sin \alpha - y \cos \alpha) - \Omega z] - \dot{\Omega}(L_s \sin \alpha + y) + 2(\omega \cdot \dot{z} \cos \alpha - \dot{y} \Omega), \\ \ddot{y} = g \sin \alpha - 6\pi\eta_1 r_0 \dot{y} + (L_s \sin \alpha + y)(\omega^2 + \Omega^2) + \omega \cos \alpha [\omega(x \sin \alpha - y \cos \alpha) - \Omega z] - \dot{\Omega}(L_s \cos \alpha + x) + 2(\omega \cdot \dot{z} \sin \alpha - \dot{x} \Omega), \\ \ddot{z} = -6\pi\eta_1 r_0 \dot{z} + z(\omega^2 + \Omega^2) + \Omega[\omega(x \sin \alpha - y \cos \alpha) - \Omega z] - \dot{\omega}(L_s + y \sin \alpha + x \cos \alpha) - 2\omega(\dot{y} \sin \alpha + \dot{x} \cos \alpha), \\ \eta_1 = \frac{\eta}{\Delta m} = \frac{\eta}{\frac{3}{4}\pi r_0^3 \rho_r} = \frac{3\eta}{4\pi r_0^3 \rho_r}. \end{cases} \quad (5)$$

Here r_0 is the particle radius of the suspension M by mass Δm ; η - dynamic viscosity of the liquid (suspension); ρ_r - particle density; $6\pi\eta r_0$ - the friction coefficient of the particle M (the coefficient of resistance of the liquid of the medium) when it moves.

The system of equations (5) is nonlinear, because of $\omega = \omega(t), \alpha = \alpha(t), \Omega = \Omega(t)$, in this case, the rotation angle α is an argument of trigonometric functions. In addition, the coefficients of $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ are variables. In this connection the system (5) does not have an exact solution.

Let us consider a special case when the rotation of the rotor occurs with a constant angular velocity ($\omega = const$), and $\alpha \neq 0 = const$, i.e. $\dot{\alpha} = \Omega = 0$, which corresponds to the case of a fixed rotor. Also it is necessary to determine the dependence of the angle α from the angular velocity ω of the rotor. From the balance equation of forces acting on a tube

$$g \sin \alpha = \omega^2(L_s + l \sin \alpha) \cos \alpha. \quad (6)$$

we find

$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{L_s + l \sin \alpha}}, \quad (7)$$

where l - distance from the axis of rotation to the center of tube gravity with suspension. When $\omega \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ or when $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}, \omega \rightarrow \infty$ which follows from the physical meaning of the problem.

From the relation (7) it is obvious that if the angular velocity ω of the rotor is constant, the angle of rotation α of the cups is also constant. Each value ω has a corresponding specific value α (Figure 3). For example, for the slope angle $\alpha_1 = 15^\circ$ corresponds the angular velocity $\omega_1 = 30,5 \text{ rad/s}$ or 292 rpm. For the angle $\alpha_2 = 30^\circ - 382 \text{ rpm}$, for $\alpha_3 = 45^\circ - 463 \text{ rpm}$. For other angles of slope $\alpha_4 = 60^\circ, \alpha_5 = 70^\circ, \alpha_6 = 80^\circ, \alpha_7 = 85^\circ, \alpha_8 = 88^\circ$ correspond to angular velocities of 577 rpm, 820 rpm, 1005 rpm, 1422 rpm, 1640 rpm.

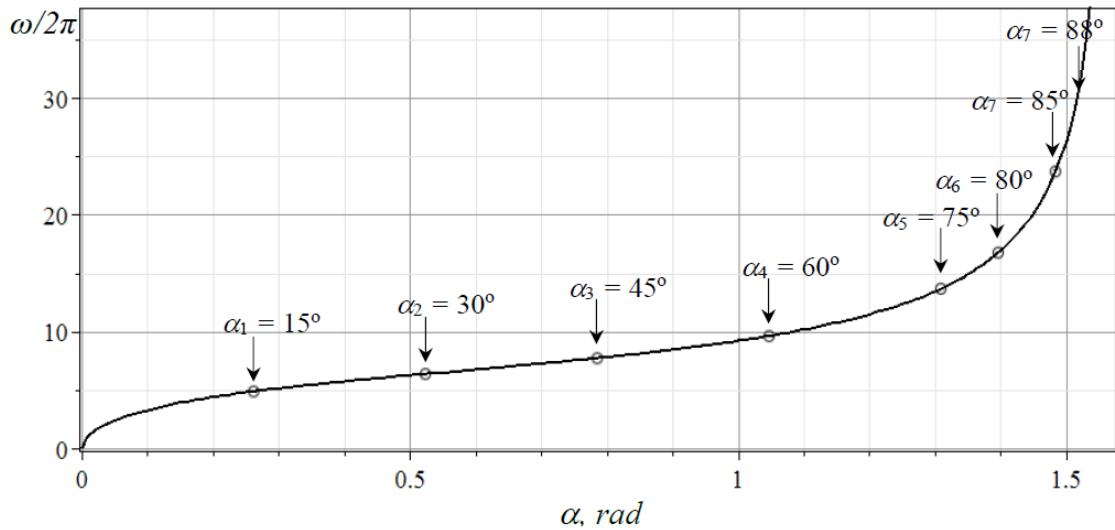


Figure 3 - Dependence between the angular velocity and the angle of inclination

Accordingly, the faster the angular velocity of rotation, the faster the process of particle sedimentation. But in general case it is better to avoid the acceleration of the rotor system to huge angular velocities, it is necessary to determine the optimum slope of the tubes and the corresponding rotational speeds that would satisfy the conditions of the problem of sedimentation of solid emulsion particles.

Now, when it is established that each value corresponds to a specific value, it is possible to obtain from the system (5) with $\omega = \text{const}, \alpha = \text{const}, \Omega = 0, \varepsilon = 0$

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2n\dot{x} - \omega^2 \cos^2 \alpha \cdot x = -g \sin \alpha + (L_s + y \sin \alpha) \omega^2 \cos \alpha + 2\omega \cos \alpha \dot{z}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{y} - \omega^2 \sin^2 \alpha \cdot y = g \cos \alpha + (L_s + x \cos \alpha) \omega^2 \sin \alpha + 2\omega \sin \alpha \dot{z}, \\ \ddot{z} + 2n\dot{z} - \omega^2 z = -2\omega(y \sin \alpha + \dot{x} \cos \alpha). \end{cases} \quad (8)$$

Where $2n = 6\pi\eta_1 r_0, n = 3\pi\eta_1 r_0 = \frac{9\eta}{4r_0^2 \rho_r} = \frac{9\nu}{4r_0^2 \rho_r}$ - coefficient of friction, ρ_r - fluid density. The equations system (8) can be solved analytically, assuming certain assumptions that were made in [19]. In this case, taking into account the spatial motion of the deposited substance in the cavity, it is possible to calculate the trajectory of the particle by a numerical method, to estimate the time and the trajectory of settling the particles in the suspension for different values of the slope of the tube, the particle size and the coefficient of resistance.

4 Results and discussion

The calculations were performed for a centrifuge rotating at a speed of 300 to 1700 rpm. During the calculation varies three basic parameters, the radius of the particles, the slope of the tubes and the coefficient of resistance of the environment, which are the most important and are fundamental in industrial production.

Figure 4 shows the results of calculations for different inclinations of glasses (tubes). As was shown above, when the angular velocity of the rotor tends to an infinitely large value, the angle of inclination of the tubes tends to an absolutely horizontal position, i.e. to a value of 90°. In the production process, it is impossible to achieve an absolutely horizontal position of the glasses (test tubes), which is confirmed by the mathematical model.

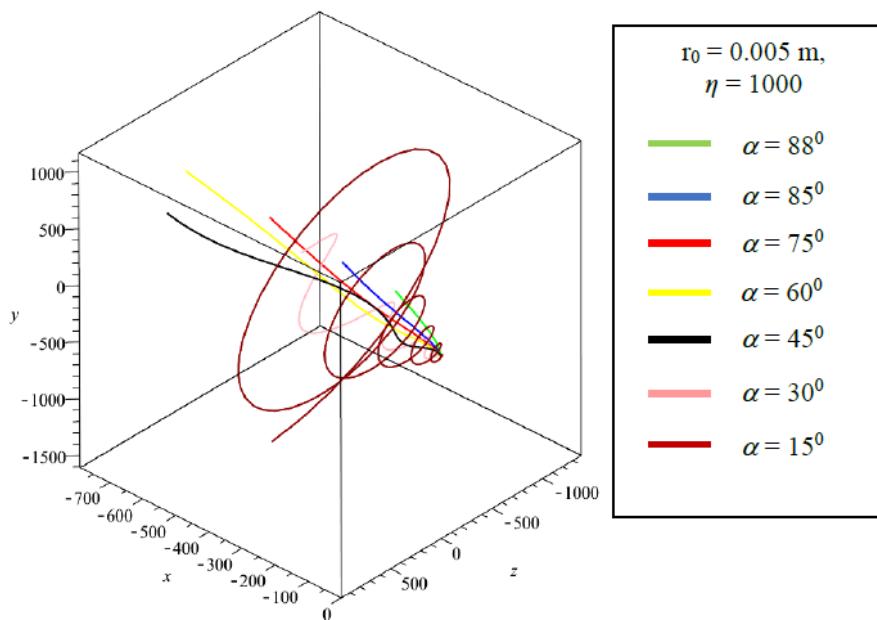


Figure 4 - Movement of the particle at different values of the slope of the tube

Therefore, it is necessary to determine the angle of inclination, which would provide a sufficient degree of purification and at the same time would be optimal from the constructive point of view. For industrial centrifuges with operating speeds from corners of 80° are suitable. For industrial centrifuges with operating speeds from 1500 rpm, the angles are from 80°. When tilted at 88°, the particles settle more quickly than at smaller tilt angles of the glass (test tube). Here cases with a larger slope are not considered in connection with design changes, which, given the parameters, can lead to a decrease in productivity, as follows from formula (7). Particle settling occurs already at the 9th second of the operating mode of the fixed rotor (Figure 5). In cases where the inclination angles are less than 80°, the sedimentation process passes more slowly and subsidence occurs along the spatial curves with increasing amplitudes due to the increase in the centrifugal force (Figures 4-5). The rotor needs rotate at a speed of 1640 rpm to achieve a tilt angle of 88°. Thus, if the working speed of the centrifuge is 3000 rpm or more, as in many modern centrifuges of this class, then the goal of separation is achieved at much lower speeds. This, obviously, will reduce certain economic costs for

centrifuges with a specified degree of purification. The rate of particle sedimentation also depends on the nature of the multiphase fluid, and, therefore, it is appropriate to consider the resistance of the medium as the next important parameter.

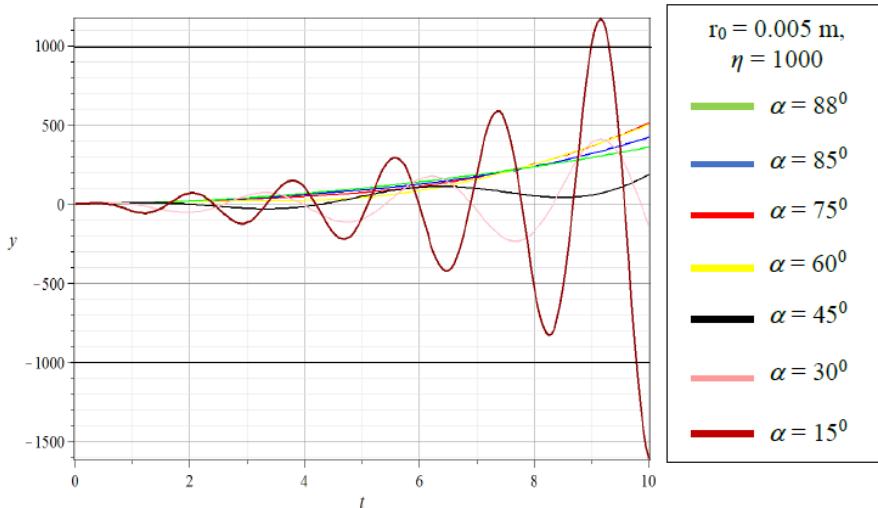


Figure 5 - Movement of a particle at different values of the inclination of the tube along the longitudinal axis as a function of time

For the calculation, the resistance coefficients for crude oil and some more viscous liquids were used. As expected, the resistance is higher, the longer the separation time, respectively, the lower the coefficient of resistance, the smaller the settling time of the particles (Figure 6), which confirms the correctness of the proposed mathematical model. The magnitude of the emerging resistance depends mainly on the driving mode and the shape of the streamlined body. The mode of precipitation of a solid phase particle can be taken as laminar as long as the condition $Re < 1 \div 1,6$ is satisfied. In practical centrifugation cases, the Reynolds number is less than the transition value from laminar to turbulent.

In laminar motion, the body is surrounded by a boundary layer of liquid and flows smoothly. If a precipitating particle, having reached a certain distance from the axis of rotation, continued to experience the effect of a constant centrifugal inertia force with further precipitation, then the deposition rate of the particle would soon become constant. At the same time, the resistance of the liquid would increase to the value of the centrifugal force. The increase in resistance is due to the fact that the fluid molecules in the layer near the body are densified, and when the distance between them decrease, the energy of mutual repulsion increases. But in reality the centrifugal force of a particle inertia is always greater than the resistance force of a liquid medium because of its increase (force) as the particle moves away from the axis of rotation [20].

The last parameter is the granulometric (or dispersed) composition of the particles, which must be separated. This characteristic is of decisive importance when choosing a centrifuge. For a separator of this configuration, its required productivity is less than the finer particles of the solid phase in the processed suspension, which results in a higher separation factor, which formally represents the Froude number. Since it is initially assumed that the particles

have the shape of a sphere, their radius is accordingly changed to consider different particle sizes. It should be noted that in this model in one cycle of the system operation the particle sizes were assumed to be equal, so, in each case all solid fractions in the suspension have the same size.

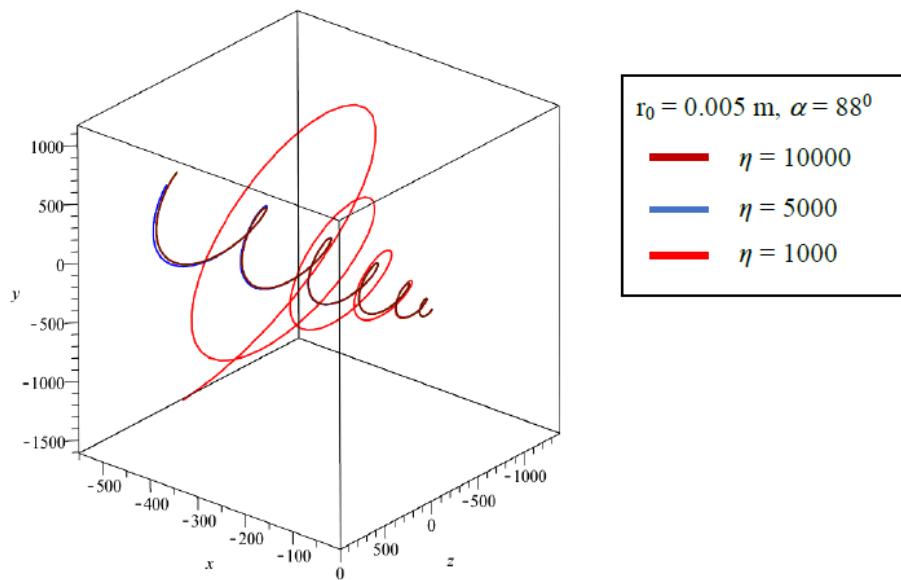


Figure 6 - Motion of a particle at different values of the coefficient of resistance of the medium

Also, colloidal disperse systems are not considered, because of the particle size plays not the most important role in the separation process as in a certain range (Figure 7). For example, particles with a size $r_0 = 0.01 - 0.05$ settle along an almost identical curvilinear trajectory, although here the particle size increases 5 times (Figure 7). Initially, all particles up to the fourth second of the operating mode of the fixed rotor have practically very close trajectories of subsidence. Until the ninth second, particles of size $r_0 = 0.01 - 0.05$ move along very close curves. The particles of size $r_0 = 5 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-6}$ until the ninth second settle on more curved trajectories, which further diverge even more. For these particles, these sedimentation curves are natural, because they are small in size, which means the need for higher operating speeds for micro- and nanoparticles. Since the separability of the suspension depends on the degree of dispersion, it becomes necessary to use the sedimentometric method to estimate the nature of the particle distribution. When applying this method, the duration of precipitation is plotted along the abscissa axis, and the ordinate is the total amount of solid phase deposited at the bottom of the centrifuge cup or passed through the reference level for a certain time. This amount is composed of the whole precipitated particles and still precipitated [20]. This method requires the presence of experimental data, which is not always possible. At a certain stage of the research, using the above sedimentation data for a qualitative assessment, it is possible to avoid the need for an experimental method.

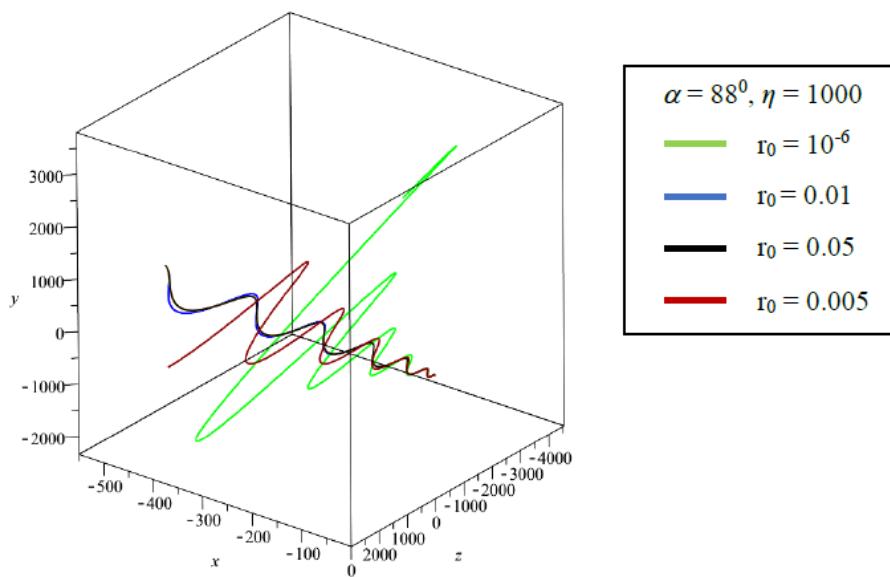


Figure 7 - Motion of a particle at different values of the particle radius

5 Conclusion

Important results were obtained in this work. A qualitative analysis of the results is carried out on the basis of classical numerical methods for solving differential equations. The time of particle deposition at different values of the tube inclination angle, the resistance coefficients and the size of these particles is taken into account when taking into account the spatial motion. Optimum parameters of operating modes for the a fixed rotor case, i.e.when each specific value of the inclination corresponds angle to a specific angular rotation velocity of the disk on the flexible shaft, are determined and proposed. The results of the performed work confirm the physical meaning of the problem, which can serve as a justification for the use and implementation of this mathematical model in industrial production. Obtained dependences with sufficient accuracy for engineering practice allow to determine such operational characteristics of the process as the time of sedimentation, the trajectory of precipitation and the dependence of the rotational speeds on the slope angles, and also to predict the efficiency of the centrifuge. In addition, these results allow to avoid the need of using the sedimentometric method and to exclude additional costly experimental work.

References

- [1] Canter N., "Separation of oil from emulsions," Tribology & Lubrication Technology 73-2(2017):14-15.
- [2] Burrows A., "Oil and Gas High performance separation," FILTRATION & SEPARATION 52-2 (2015):1.
- [3] Sokolov V.I., Centrifugirovanie [Centrifugation]. Moscow: Chemistry, (1976):407.
- [4] Shkoropad D.E, Novikov O.P., Centrifugi i separatory dlja himicheskikh proizvodstv [Centrifuges and separators for chemical industries]. Moscow: Chemistry, (1987):256.
- [5] Krzysztof Ligier, "Methods of diagnosing an acww 1000 sugar centrifuge with the use of vibration processes," Technical sciences 11(2008):289-300.

-
- [6] Janusz Zachwieja, Krzysztof Ligier, "Numerical analysis of vertical rotor dynamics of ACWW 1000 centrifuge," (paper presented at a Journal of theoretical and applied mechanics, 257-275, 2005).
 - [7] Fischer J., Strackeljan J., "Stability Analyses of High Speed lab centrifuges considering internal damping in rotor shafts," Technische Mechanik 26-2 (2006):131–147.
 - [8] Babenko A.E., "Dynamics of a centrifuge on a nonlinearly elastic base," Vestnik NTUU "KPI". Mechanical engineering 61 (2011):91-94.
 - [9] The patent 3729128 USA, B1;233/1R,1B/ High Pressure Centrifuge Lubrication System/Reed, Karl Gardner; 24.04.1973.
 - [10] The patent 6530871, USA, B1;256/1R,1B/ Methods for separating constituents of biologic liquid mixtures/ Nash; John E.;11.03.2003.
 - [11] The patent 67478, RU U1;415,1A,5B/ Inverting filter centrifuges/Alekseyev A.V.;04.05.2007.
 - [12] The patent 2622946, RU C2;13,3A,6C/ Extractor-Type Centrifuge/Aslanov G.G.;22.03.2013.
 - [13] The patent 03258359, JPH A;104,2C,7D/ High Performance Fixed Angle Rotor/Yamanaka S.;18.11.1991.
 - [14] The patent 03/086571,WO A1;405,4D,5D/Sliding discharge centrifuges/Miln K.;23.10.2003.
 - [15] The patent 19922237, DE A1;603, Z,7,1AA/ High Capacity Swinging Bucket /Damgard A; 07.12.2000.
 - [16] Proshin, I.A., Burkov V.V., "Mathematical modeling of centrifugation processes," Bulletin of VSTU T.11.
 - [17] Please C.P., Fowkes N.D., Mason D.P., Khalique C.M., Hutchinson A., Rademeyer M.C., Loubser R., and Davis S., "Extraction of Molasses from Sugar Crystals in a Centrifuge," Mathematical Modelling and Analysis 19-3 (2014):347-358.
 - [18] Childs D., Turbomachinery rotordynamics phenomena: Modeling and Analysis. (Wiley-Interscience, 1993).
 - [19] Kydyrbekuly A.B., Khajieva L.A., Ybraev G.E., "Researching of the Method of Separation of Fine-Grain Particles by Centrifugation in a Liquid Medium " (paper presented at Proc.12th International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms, ADVANCES IN MECHANISM DESIGN II, Mechanisms and Machine Science, 105-116, 2017).
 - [20] Sokolov V.I., Sovremennye promishlennye centrifugi [Modern industrial centrifuges]. Moscow: Mashinostroenie, (1967):524.

IRSTI 30.15.35

Determination of displacements in cross-sections of four-bar mechanism links from distributed dynamic loads and their animation using MAPLE

Utenov M.U., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
+77478976989, E-mail: umu53@mail.ru

Zhilkibayeva S.K., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
+77755828228, E-mail: sultanatzh.kz@gmail.com

Baygunchekov Zh.Zh., K.I. Satpaev Kazakh National Research Technical University,
Almaty, Kazakhstan, +77772255647, E-mail: bzh47@mail.ru

Myrzaliyev D.S., M. Auezov South Kazakhstan State University,
Shymkent, Kazakhstan, +7 725 230 05 70

The links of high-speed mechanisms and manipulators are deformed under the action of inertia forces and external loads. These deformations have significantly influence on the accuracy of execution of the required law of motion by the operating point of the mechanism and the positioning of the manipulator grip. Accordingly, longitudinal and transverse displacements, angles of rotation of cross-sections of links under the action of distributed dynamic and external loads are investigated in this paper. The developed technique allows defining deformations of links of mechanisms and manipulators and can be applied at their designing. To determine the transverse displacements, the angles of rotation of the cross-sections of the links – the basic differential equation of the elastic line of the beam, to determine the longitudinal displacements of the points of the links – Hooke's law and the boundary conditions of the computed scheme of the investigated linkages for elastic computation are used. The bending moment in the basic differential equation of the elastic line of the beam and the longitudinal force in Hooke's law were determined by the theory developed by the authors of the analytical definition of internal forces in the links of planar linkages with statically determinate structures, taking into account the distributed dynamic loads from the masses of links, dead weight and from the acting external loads. According to the developed technique, programs are created in the MAPLE system and animations of the movement of mechanisms are received, with the construction on the links the diagrams of transverse, longitudinal displacements and angles of rotation of the link cross-sections. The developed analytical technique for determining deformations in the cross-sections of links is used to calculate the strength and stiffness of elements of movable linkages.

Key words: Mechanisms, movable linkages, displacements, distributed dynamic loads.

Тарқалған динамикалық жүктемелер әсеріндегі төрт буынды механизмнің буын қималарында пайда болатын орын аудыстыруларды анықтау және MAPLE жүйесінде анимациясын құру

Утенов М.У., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,
Қазақстан Республикасы, +77478976989, E-mail: umu53@mail.ru

Жылқыбаева С.К., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,
Қазақстан Республикасы, +77755828228, E-mail: sultanatzh.kz@gmail.com

Байгөншеков Ж.Ж., Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ 5лттық техникалық зерттеу университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77772255647, E-mail: bzh47@mail.ru
Мырзалиев Д.С., М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті,
Шымкент қ., Қазақстан Республикасы, +7 725 230 05 70

Жоғарғы жылдамдықты механизмдер мен манипуляторлардың буындары инерция күштері мен сыртқы жүктемелер әсерінен деформацияланады. Бұл деформациялар механизмнің жұмыс нүктесінің қажетті қозгалу заңын атқару дәлдігіне және манипулятордың қармауышын тұрғыландаудың айтартықтай әсер етеді. Осыған орай, бұл жұмыста тарқалған динамикалық және сыртқы жүктемелер әсеріндегі буындар қимасында пайда болатын бойлық пен көлденең орын ауыстырулар, бұралу бұрыштары зерттелінген. Әзірленген әдіс механизмдер мен манипуляторлардың буындарындағы деформацияны анықтауга мүмкіндік береді және оларды жобалау кезінде қолдануға болады. Буын қималарындағы көлденең орын ауыстыруларды, бұралу бұрыштарын анықтау үшін арқалықтың серпімді сыйзығының негізгі дифференциалдық теңдеуі, буын нүктелерінің бойлық орын ауыстыруларын анықтау үшін Гук заңы, және де серпімді есептеуге қажет зерттелетін серпімді жүйелердің есептеу схемаларының шекаралық шарттары қолданылады. Арқалықтың серпімді сыйзығының негізгі дифференциалдық теңдеуіне кіретін июші момент және Гук заңына кіретін бойлық күш авторлардың жасаған құрылымы статикалық анықталған жазық серпімді механизмдер мен манипуляторлардың буындарында пайда болатын ішкі күштерді, буындар салмағынан, сыртқы күштерден туындастырын тарқалған динамикалық жүктемелер әсерін ескеретін талдамалы жолмен анықтау теориясымен табылады. Жасалған методика бойынша MAPLE жүйесінде программалар құрылыш, табылған көлденең, бойлық орын ауыстырулар мен бұралу бұрыштарының әшпорлері буындарға тұрғызылып, механизмдер қозғалысының анимациясы алынды. Буындар қимасындағы деформацияларды анықтайдын осы талдамалы әдіс қозғалмалы серпімді жүйелердің элементтерін беріктік пен қатаандыққа есептеуге ынғайлыш.

Түйін сөздер: Механизмдер, жылжымалы сырықты жүйелер, орын ауыстырулар, тарқалған динамикалық жүктемелер.

Определение перемещений сечений звеньев четырехзвенника от распределенных динамических нагрузок и их анимация в среде MAPLE

Утенов М.У., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы,

Республика Казахстан, +77478976989, E-mail: imu53@mail.ru

Жилкибаева С.К., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы,

Республика Казахстан, +77755828228, E-mail: saltanatzh.kz@gmail.com

Байгунчеков Ж.Ж., Казахский национальный технический университет имени К.И. Сатпаева, г. Алматы, Республика Казахстан, +77772255647, E-mail: bzh47@mail.ru

Мырзалиев Д.С., Южно-Казахстанский государственный университет имени М. Ауезова, г. Шымкент, Казахстан, +7 725 230 05 70

В высокоскоростных механизмах и манипуляторах звенья деформируются под воздействием сил инерции и внешних нагрузок. Эти деформации существенно влияют на точность исполнения требуемого закона движения рабочей точкой механизма и на позиционирование схвата манипулятора. В связи с этим, в данной работе исследуются продольные, поперечные перемещения, углы поворота сечений звеньев находящихся под воздействием распределенных динамических и внешних нагрузок. Разработанный метод позволяет определять деформаций звеньев механизмов и манипуляторов и может применяться при их проектировании. Для определения поперечных перемещений, углов поворота сечений звеньев использованы основное дифференциальное уравнение упругой линии балки, для определения продольных перемещений точек звеньев – закон Гука и граничные условия расчетной схемы исследуемых стержневых систем для упругого расчета. Изгибающий момент, входящий в основное дифференциальное уравнение упругой линии балки и продольная сила, входящая в закон Гука были определены по разработанной авторами теории аналитического определения внутренних усилий в звеньях плоских стержневых механизмов и манипуляторов со статически определимыми структурами с учетом распределенных динамических нагрузок от масс звеньев, собственного веса и от действующих внешних нагрузок.

По разработанной методике составлены программы в системе MAPLE и получены анимации движения механизмов с построением на звеньях поперечных, продольных перемещений и углов поворота сечений звеньев. Разработанный аналитический метод определения деформаций в сечениях звеньев применяется для расчета прочности и жесткости элементов подвижных стержневых систем.

Ключевые слова: Механизмы, подвижные стержневые системы, перемещения, распределенные динамические нагрузки.

1 Introduction

Dynamic analysis of high-speed mechanisms and manipulators received considerable attention in the last two decades. Every frame structure is deformed under the action of large static and dynamic loads. Whenever such a load occurs, several problems persist, for instance: the problems of failure, caused by large forces of inertia; elastic deformations of the mechanism can be significant, as a consequence, the mechanism become unusable; the mechanism cannot satisfy the kinematic requirements because of the large deformations of links. When designing high-speed mechanisms, the designer must either reduce the elastic deformations of the mechanism, or take them into account in computation. To test on stiffness and stability of the structure, it is necessary to be able to determine the displacements caused by the deformation of its elements. The techniques for determining these displacements are very diverse. They mainly differ from each other by the degree of complexity and scope of application.

2 Literature review

The method of direct integration of differential equation of elastic beam line is an earlier one for determination of displacements. However, in the case of beams with a large number of cross-sections, the implementation of this method involves considerable difficulties, which are not in the integration of differential equations, but in the technique of determining the arbitrary integration constants – drafting and solving of systems of linear algebraic equations (Jindal, 2012 : 294), (Timoshenko, 1948 : 134 – 135), (Darkov, 1975 : 289).

When computing by the displacement method, the main sought values are the displacements of the nodal points caused by the deformation of the system. Knowledge of these displacements is necessary and sufficient to determine all internal forces that arise in the cross-sections of the elements of a given system (Kaveti, 2014 : 412), (Tschiras, 1989 : 111), (Pisarenko, 1979 : 85). In the works of Sadler and Sandor (Sandor, 1973 : 497 – 516), the lateral bending vibrations of the elements of mechanisms, which can be considered as pinned beams making planar motions, are investigated. The normal dynamic stresses caused by the concerted actions of bending and axial loads are studied. A scheme is given for minimizing the maximum stresses in the flexible linkages of a given length without increasing the total mass. This is done using an iterative method of finding a full-strength form seeking method. The study is limited to the case of a rectangular cross-section, where the only variable is the width. Longitudinal deformations are considered negligible and, therefore, are not considered here. Abe proposed an accurate mathematical model of the flexible link in two-link rigid-flexible manipulators by taking the axial displacement and nonlinear curvature arising from large bending deformation into consideration for suppressing residual vibrations in optimal trajectory planning (Akira Abe, 2009 : 1627 – 1639). Mingxiang et al. presented

a kinetostatic modeling method for flexure-hinge-based compliant mechanisms with hybrid serial-parallel substructures to provide accurate and concise solutions by combining the matrix displacement method with the transfer matrix method. This work established a general kinetostatic model of the whole compliant mechanisms based on the equilibrium equation of the nodal force (Mingxiang, 2018).

Finite element method (FEM) is used to structure the system into single finite elements and the stiffness matrix of element and of the whole system provides connection between displacement of nodes of element and system, as well as forces therein (Hutton, 2007 : 387), (Gokhale, 2008 : 416). Du and Ling have developed a general non-linear finite element model for dynamic analysis of three dimensional beam-like mechanisms undergoing both large rigid body motion and large elastic deflections. They adopted the non-linear strain-displacement relationship taking into account the axial strain and the shear strains due to the pre-twist in the beams (Hejun Du, 1995 : 56). Absy and Shabana show that the consideration of longitudinal displacement caused by bending would eliminate the third and higher order terms from the strain-energy expression, if the strain energy is written in terms of axial deformation. This leads to nonlinear inertia terms and a constant stiffness matrix (El-Absy, 1997 : 207). Zhaocai studied the dynamic stress of the flexible beam element of planar flexible manipulators. Considering the effects of bending-shearing strain and tensile compression strain, the dynamic stress of the links and its position are derived by using the Kineto-Elastodynamics theory and the Timoshenko beam theory (Ding Zhaocai, 2006 : 17-20). Yue computed the maximum payload of kinematically redundant manipulators using a finite element method for describing the dynamics of a system (Shigang Yue, 2001 : 36). Korayem et al. considered a complete dynamic model to characterize the motion of a compliant link capable of large deflection (Moharam H. Korayem, 2010 : 17).

In this paper the longitudinal and transverse displacements, the angle of rotation of link cross-sections under the action of distributed dynamic loads and external forces are studied. The developed analytical technique makes it possible to accurately and quickly determine the deformations of links of mechanisms and manipulators and can be used in their design. Earlier the authors have developed a new analytical technique for determination of internal forces in the links of planar mechanisms and manipulators under the action of distributed dynamical loads and it was described in the work (Utenov, 2016 : 5-10).

3 Materials and methods

The main differential equation of elastic beam line (for the element k) has the form (Darkov, 1975 : 289), (Kaveti, 2014 : 412), (Tschiras, 1989 : 111), (Pisarenko, 1979 : 85) :

$$\frac{d^2y_k}{d(x'_k)^2} = \frac{M_k(x'_k)}{E_k I_k} \quad (1)$$

When a transverse distributed trapezoidal load acts on the element, the bending moment in the cross-sections of the element is determined by (3) from the previous work (Utenov, 2016 : 5-10). Substituting the values of $M_k(x'_k)$ from (3) into (1) and integrating one time, we will have expression to the rotation angles of cross-sections of the element k :

$$\begin{aligned} \widehat{O}_k(x'_k) = \frac{dy'_k}{dx'_k} &= \frac{1}{E_k I_k} \int \left\{ \left[1 - \frac{11}{2l_k} x'_k + \frac{9}{l_k^2} (x'_k)^2 - \frac{9}{2l_k^3} (x'_k)^3 \right] M_{k1} + \left[\frac{9}{l_k} x'_k - \frac{45}{2l_k^2} (x'_k)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{27}{2l_k^3} (x'_k)^3 \right] M_{k2} + \left[-\frac{9}{2l_k} x'_k + \frac{18}{l_k^2} (x'_k)^2 - \frac{27}{2l_k^3} (x'_k) \right] M_{k3} + \left[\frac{1}{l_k} x'_k - \frac{9}{2l_k^2} (x'_k)^2 + \frac{9}{2l_k^3} (x'_k)^3 \right] M_{k4} \right\} dx'_k = \\ &= \frac{1}{E_k I_k} \left\{ \left[x'_k - \frac{11}{4l_k} (x'_k)^2 + \frac{9}{3l_k^2} (x'_k)^3 - \frac{9}{8l_k^3} (x'_k)^4 \right] M_{k1} + \left[\frac{9}{2l_k} (x'_k)^2 - \frac{45}{6l_k^2} (x'_k)^3 + \frac{27}{8l_k^3} (x'_k)^4 \right] M_{k2} + \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{9}{4l_k} (x'_k)^2 + \frac{18}{3l_k^2} (x'_k)^3 - \frac{27}{8l_k^3} (x'_k)^4 \right] M_{k3} + \left[\frac{1}{2l_k} (x'_k)^2 - \frac{9}{6l_k^2} (x'_k)^3 + \frac{9}{8l_k^3} (x'_k)^4 \right] M_{k4} \right\} + C_{k1} \quad (2) \end{aligned}$$

which contains one arbitrary constant C_{k1} . By integrating second time, we find the expression for beam deflection $y'_k(x'_k)$

$$\begin{aligned} w_k(x'_k) = y'_k(x'_k) &= \frac{1}{E_k I_k} \left\{ \left[\frac{1}{2} (x'_k)^2 - \frac{11}{12l_k} (x'_k)^3 + \frac{9}{12l_k^2} (x'_k)^4 - \frac{9}{40l_k^3} (x'_k)^5 \right] M_{k1} + \right. \\ &\quad + \left[\frac{9}{6l_k} (x'_k)^3 - \frac{45}{24l_k^2} (x'_k)^4 + \frac{27}{40l_k^3} (x'_k)^5 \right] M_{k2} + \left[-\frac{9}{12l_k} (x'_k)^3 + \frac{18}{12l_k^2} (x'_k)^4 - \frac{27}{40l_k^3} (x'_k)^5 \right] M_{k3} + \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{6l_k} (x'_k)^3 - \frac{9}{24l_k^2} (x'_k)^4 + \frac{9}{40l_k^3} (x'_k)^5 \right] M_{k4} \right\} + C_{k1} x'_k + C_{k2} \quad (3) \end{aligned}$$

which contains two arbitrary constants C_{k1} and C_{k2} . The values of these arbitrary constants C_{k1} and C_{k2} are defined from consideration of two boundary conditions, i.e. from the conditions of end restraint.

The element aspect ratio dx'_k from the longitudinal force $N_k(x'_k)$ by Hooke's law would be:

$$\Delta dx'_k = \frac{N_k(x'_k) dx'_k}{E_k I_k} \quad (4)$$

When a distributed trapezoidal load is applied to the element, the longitudinal force is given by (5) in the work (Moharam H. Korayem, 2010 : 17). Substituting it into (4) and intergrating one time, we find the following expression for longitudinal displacements of the element points:

$$\begin{aligned} u_k(x'_k) = \frac{1}{E_k A_k} \int N_k(x'_k) dx'_k &= \frac{1}{E_k A_k} \int \left\{ \left[1 - \frac{3}{l_k} x'_k + \frac{2}{l_k^2} (x'_k)^2 \right] N_{k1} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{4}{l_k} x'_k - \frac{4}{l_k^2} (x'_k)^2 \right] N_{k2} + \left[-\frac{1}{l_k} x'_k + \frac{2}{l_k^2} (x'_k)^2 \right] N_{k3} \right\} dx'_k = \frac{1}{E_k A_k} \left\{ \left[x'_k - \frac{3}{2l_k} (x'_k)^2 + \frac{2}{3l_k^2} (x'_k)^3 \right] N_{k1} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{4}{l_k} x'_k - \frac{4}{l_k^2} (x'_k)^2 \right] N_{k2} + \left[-\frac{1}{l_k} x'_k + \frac{2}{l_k^2} (x'_k)^2 \right] N_{k3} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{4}{2l_k} (x'_k)^2 - \frac{4}{3l_k^2} (x'_k)^3 \right] N_{k2} + \left[-\frac{1}{2l_k} (x'_k)^2 + \frac{2}{3l_k^2} (x'_k)^3 \right] N_{k3} \} + C_{kn} \quad (5)$$

The arbitrary constant C_{kn} is determined from the conditions of end restraint.

Let us consider the determination of displacements in the links of four-bar mechanism (Figure 1). As the displacements of the link 1 cross-section O are known ($\Phi_{11}(0) = 0$ – the angle of rotation of cross-section O , $uy10 = w_1(0) = 0$ – the displacement that is perpendicular to the axis of the rod of the same cross-section, $ux10 = w_{1n}(0) = 0$ – the displacement along the axis of the rod of the same cross-section, that it is possible to define constants C_{11} , C_{12} and C_{1n} . Substituting into (2), (3) and (5) the value of $x'_k = 0$ and taking into account above said three boundary conditions, we will receive that C_{11} , C_{12} and C_{1n} are equal to zero. It allows defining transverse and longitudinal displacements in any cross-section of the link 1. Let us introduce three Cartesian coordinate systems $BX'_1Y'_1$, BX'_2 , Y'_2 and BX_2Y_2 at the point B (Figure 1), where X'_1 is directed along the axis of the first link, X'_2 is directed along the axis of the second link, X_2 is directed parallel to the axis X . Let us determine the coordinates of the point B of the first link B' (a new position of the point B after deformation) $ux1l_1$, $uy1l_1$ with respect to the coordinate system $BX'_1Y'_1$. For this we substitute into (5) and (3) the value of $X'_1 = l_1$, we will get:

$$ux1l = \frac{l_1}{E_1 A_1} \left(\frac{1}{6} N_{11} + \frac{2}{3} N_{12} + \frac{1}{6} N_{13} \right) \quad (6)$$

$$uy1l = \frac{l_1^2}{E_1 I_1} \left(\frac{13}{120} M_{11} + \frac{3}{10} M_{12} + \frac{3}{40} M_{13} \right) \quad (7)$$

We will denote the coordinates of the point B' in the coordinate system $BX'_2Y'_2$ through $ux20$, $uy20$. Then position of the point B' with respect to the coordinate system BX_2Y_2 , using the coordinates of the point B' in the coordinate system $BX'_1Y'_1$, will be equal to:

$$\begin{Bmatrix} x_{2b'} \\ y_{2b'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux1l_1 \\ uy1l_1 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

and using the coordinates of the point B' in the coordinate system $BX'_2Y'_2$, we get:

$$\begin{Bmatrix} x_{2b'} \\ y_{2b'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux20 \\ uy20 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Equating the equalities (8) and (9) we receive two equations with two unknowns $ux20$ и $uy20$:

$$ux20 \cos \theta_2 - uy20 \sin \theta_2 = ux1l_1 \cos \theta_1 - uy1l_1 \sin \theta_1$$

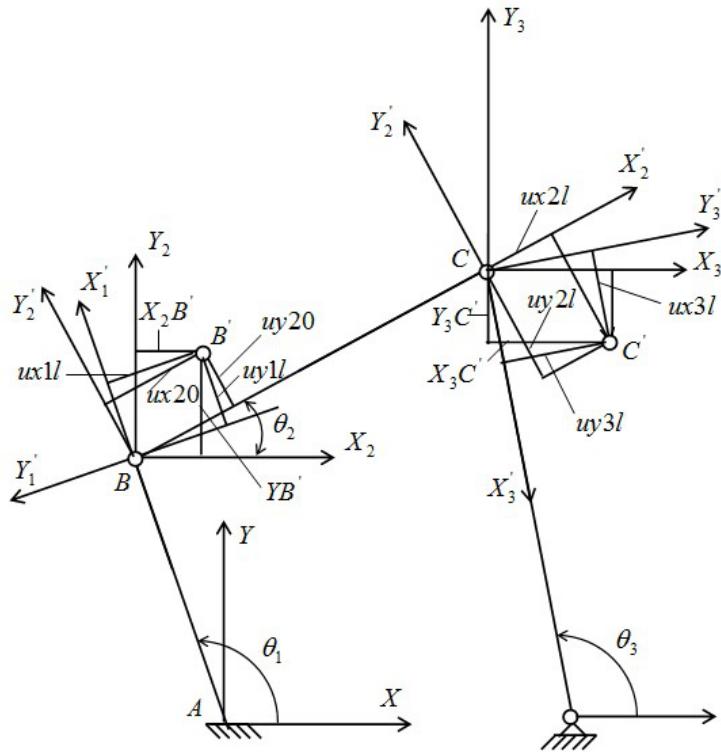


Figure 1 – The displacements in the links of four-bar mechanism

$$ux20 \sin \theta_2 + uy20 \cos \theta_2 = ux1l \sin \theta_1 + uy1l \cos \theta_2$$

Solving the resulting system of equations, we have:

$$ux20 = (ux1l \cos \theta_1 - uy1l \sin \theta_1) \cos \theta_2 + (ux1l \sin \theta_1 + uy1l \cos \theta_1) \sin \theta_2 \quad (10)$$

$$uy20 = (ux1l \sin \theta_1 + uy1l \cos \theta_1) \cos \theta_2 - (ux1l \sin \theta_1 + uy1l \cos \theta_1) \sin \theta_2 \quad (11)$$

Now, let us introduce three Cartesian coordinate systems $CX'_2Y'_2$, $CX'_3Y'_3$ and CX_3Y_3 in the point C where the axis X'_2 is directed along the axis of the second link, the axis X'_3 is directed along the axis of the third link, the axis X_3 is directed parallel to the axis X . Then position of the point C' with respect to the coordinate system CX_3Y_3 , using the coordinates of the point C' in the coordinate system $CX'_2Y'_2$ will be equal to:

$$\begin{Bmatrix} x_{3b'} \\ y_{3b'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux2l \\ uy2l \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

using the coordinates of the point C' in the coordinate system $CX'_3Y'_3$ will be equal to:

$$\begin{Bmatrix} x_{3b'} \\ y_{3b'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta'_3 & -\sin \theta'_3 \\ \sin \theta'_3 & \cos \theta'_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ux3l \\ uy3l \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

where $\theta'_3 = \arctg \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}$.

Equating the equalities (12) and (13) we receive:

$$-uy2l \sin \theta_2 + uy3l \sin \theta'_3 = -ux2l \cos \theta_2 + ux3l \cos \theta'_3 \quad (14)$$

$$uy2l \cos \theta_2 - uy3l \cos \theta'_3 = -ux2l \sin \theta_2 + ux3l \sin \theta'_3 \quad (15)$$

As the point D is hingedly fixed, that we have following boundary conditions:

$$\begin{cases} lux30 = 0 \\ uay30 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Substituting the value of $X'_2 = l_2$ into (5) we get:

$$ux2l = ux20 + \frac{l_2}{E_2 A_2} \left(\frac{1}{6} N_{21} + \frac{2}{3} N_{22} + \frac{1}{6} N_{23} \right)$$

Using the first boundary condition (15), and substituting $x'_3 = l_3$ into (5) with respect to the coordinate system $CX'_3Y'_3$ we have:

$$ux3l = -\frac{l_3}{E_3 l_3} \left(\frac{1}{6} N_{31} + \frac{2}{3} N_{32} + \frac{1}{6} N_{33} \right)$$

Substituting the found values $ux2l$ and $ux3l$ into (14) and (15), solving in common, we get:

$$uy2l = \frac{-(-ux2l \cos \theta_2 + ux3l \cos \theta'_3) \cos \theta'_3 - (-ux2l \sin \theta_2 + ux3l \sin \theta'_3) \sin \theta_3}{\sin \theta_2 \cos \theta'_3 - \sin \theta'_3 \cos \theta_2}$$

$$uy3l = \frac{-(-ux2l \sin \theta_2 + ux3l \sin \theta'_3) \sin \theta_2 - (-ux2l \cos \theta_2 + ux3l \cos \theta'_3) \cos \theta_2}{\sin \theta_2 \cos \theta'_3 - \sin \theta'_3 \cos \theta_2}$$

Substituting the found values $uy20$ and $uy2l$ into (2), conducting some simple transformations, we find:

$$\Phi_{20} = \frac{uy2l - uy20 - \frac{l_2^2}{E_2 I_2} \left(\frac{3}{10} M_{21} + \frac{3}{40} M_{23} \right)}{l_2}$$

Using the second boundary condition (16), we get:

$$\Phi_{30} = \frac{-uy3l - \frac{l_3^2}{E_3 I_3} \left(\frac{3}{10} M_{32} + \frac{3}{40} M_{33} \right)}{l_3}$$

4 Results and discussion

For the first time the authors have developed the technique for analytical determination of longitudinal and transverse displacements and the angles of rotation of cross-sections of links of the four-bar mechanism under the action of distributed dynamical loads. According to the given algorithm the programs in the Maple system were created and animations of the movement of mechanisms with the construction on the links the diagrams of transverse and longitudinal displacements and angles of rotation of the link cross-sections were received (Figure 2 – 6).

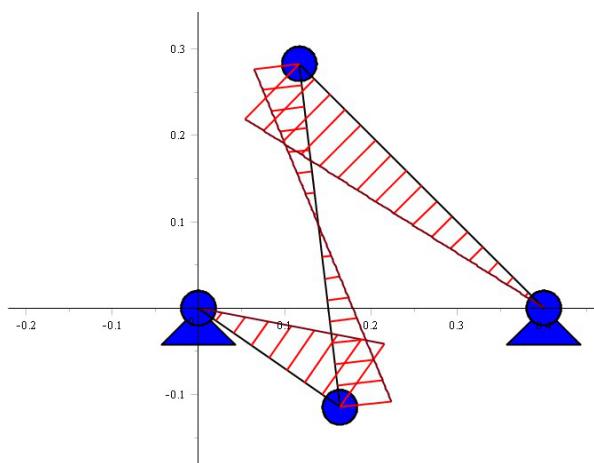


Figure 2 – The investigated mechanism with the construction on the links the diagrams of longitudinal inertial loads

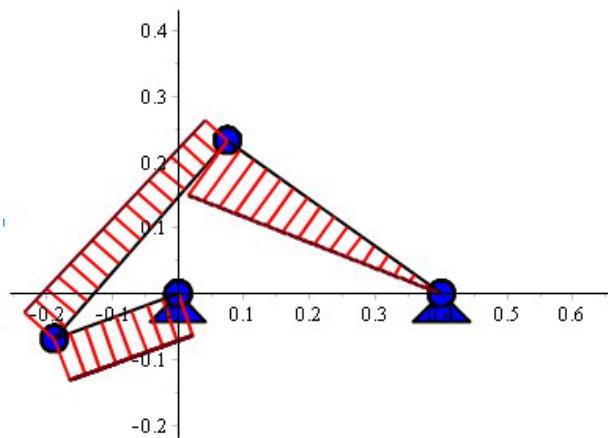


Figure 3 – The investigated mechanism with the construction on the links the diagrams of transverse inertial loads

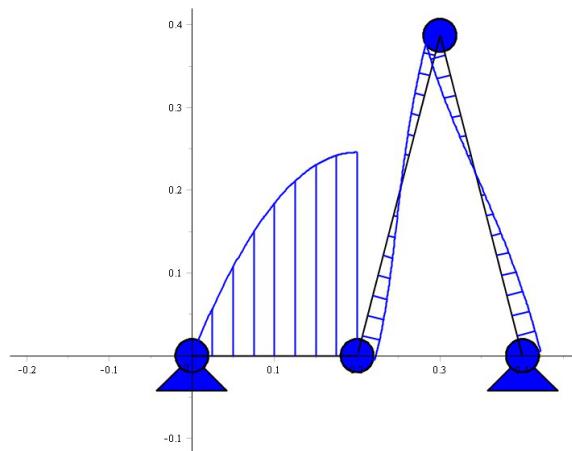


Figure 4 – The investigated mechanism with the construction on the links the diagrams of the angles of rotation of the link cross-sections

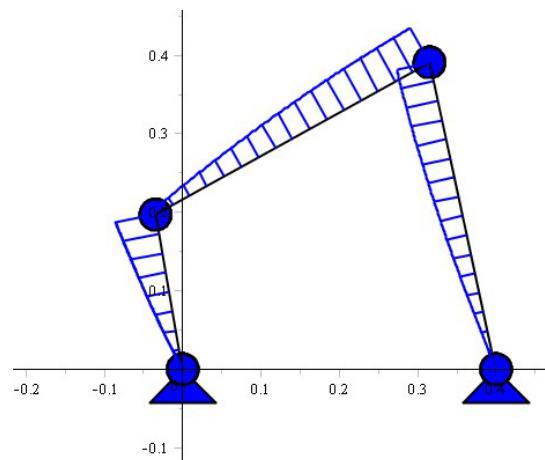


Figure 5 – The investigated mechanism with the construction on the links the diagrams of the longitudinal displacements of the link cross-sections

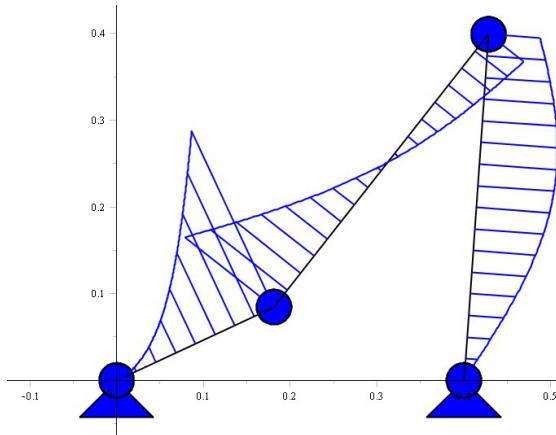


Figure 6 – The investigated mechanism with the construction on the links the diagrams of the transverse displacements (deflections) of the link cross-sections

5 Conclusion

The developed technique allows determining the deformations in the links of mechanisms and manipulators under the action of distributed dynamical loads and can be used in the study of stress-strain state of the projected and existing movable and fixed linkages (planar linkages, manipulators, frames, etc.).

6 Acknowledgement

This research was funded by Ministry of Science and Education of Republic of Kazakhstan (the grant «Development of analytical theory predicting the strength and stiffness of robotic systems and mechanisms», for the years 2015-2017).

References

- [1] U.C. Jindal, *Strength of Materials* (India: Pearson Education, 2012), 294.
- [2] Stephen Timoshenko, *Strength of Materials: Part I. Elementary Theory and Problems* (New York: D. Van Nostrand Company Inc., 1948), 134 – 135.
- [3] Anatoly Darkov and Hayman Shapiro, *Strength of Materials* (Moscow: High School, 1975), 289.
- [4] Seetharamulu Kaveti, "Displacement Method", in *Dynamic Analysis of Skeletal Structures: Force and Displacement Methods and Iterative Techniques* (India: McGraw-Hill Education, 2014), 412.
- [5] Alexander Tschiras, *Structural Mechanics: Theory and Algorithms* (Moscow: Stroyizdat, 1989), 111.
- [6] Georgy Pisarenko et al., *Strength of Materials* (Kiev: Vischa shkola, 1979), 85.
- [7] George N. Sandor and Imdad Imam, "A general method of kineto-elastodynamic design of high speed mechanisms", *Mech. Mach. Theory* 8 (1973), pp. 497 – 516, doi.org/10.1016/0094-114X(73)90023-2.
- [8] Akira Abe, "Trajectory planning for residual vibration suppression of a two-link rigid-flexible manipulator considering large deformation", *Mech. Mach. Theory* 44 (2009), pp. 1627 – 1639, doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.01.009.
- [9] Ling Mingxiang et al., "Kinetostatic modeling of complex compliant mechanisms with serial-parallel substructures: a semi-analytical matrix displacement method", *Mech. Mach. Theory* In Press 2018, doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2018.03.014.

- [10] David V. Hutton, *Fundamentals of finite element analysis* (New Delhi: Tata McGraw-Hill Publishing Company, 2007), 387.
- [11] Nitin S. Gokhale, *Practical Finite Element Analysis* (India: Finite To Infinite, 2008), 416.
- [12] Hejun Du and Shihfu Ling, "A nonlinear dynamic model for Three-Dimensional Flexible Linkages", *Computers and Structures* 56 (1995), doi.org/10.1016/0045-7949(94)00529-C.
- [13] H. El-Absy and Ahmed A. Shabana, "Geometric stiffness and stability of rigid body modes", *Journal of Sound and Vibration* 207 (1997), doi.org/10.1006/jsvi.1997.1051.
- [14] Ding Zhaocai, "Analysis of dynamic stress and fatigue property of flexible robot", (paper presented at the IEEE International Conference on Robotics and Biometrics, Kunming, China, December 17-20, 2006).
- [15] Shigang Yue, Shiu Kit Tso, Weiliang Xu, "Maximum-dynamic-payload trajectory for flexible robot manipulators with kinematic redundancy", *Mech. Mach. Theory* 36 (2001), doi.org/10.1016/S0094-114X(00)00059-8.
- [16] Moharam H. Korayem, Mohammad Haghpanahi, Hamidreza Heidari, "Maximum allowable dynamic load of flexible manipulators undergoing large deformation", *Transaction B: Mechanical Engineering* 17 (2010), <https://pdfs.semanticscholar.org/c481/b62788e8b3ffbc6ba3a1af07b05e849439d8.pdf>.
- [17] Muratulla Utenov et. al. "Computational method of determination of internal efforts in links of mechanisms and robot manipulators with statically definable structures considering the distributed dynamically loadings", (paper presented at the *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering Biometrics*, Crete, Greece, June 5-10, 2016).

3-бөлім**Колданылмаған
математика****Раздел 3****Прикладная
математика****Section 3****Applied
Mathematics**

IRSTI 27.35.33, 27.41.19, 06.52.13

Application of differential evolution algorithm for solving the Solow model with the addition of human capital

Kabanikhin S.I., Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation,
+7(383) 3308353, E-mail: kabanikhin@sscc.ru

Bektemessov M.A., Abai Kazakh National Pedagogical University Almaty, Kazakhstan, +7(777) 2629301, E-mail: maktagali@mail.ru

Shishlenin M.A., Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation,
+7(383) 3308460, E-mail: mshishlenin@ngs.ru

Yang Xin-She, Middlesex University, London, United Kingdom,
+44 (0)20 8411 5555, E-mail: x.yang@mdx.ac.uk

Bektemessov Zh.M., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
+7(702)9062830, E-mail: jolaman252@gmail.com

This paper is devoted to a numerical study of defining of parameters of dynamical systems arising in financial and economic problems. The importance of parameters that are difficult to measure is great, so defining them will help to make forecasts and a work plan for the future at the governmental level. An effective way to restore parameters is to solve the inverse problem. The method of coefficient recovery using the algorithm of differential evolution, which was proposed by Rainer Storn and Kenneth Price, is presented in this paper. On the example of solving the direct problem of the mathematical model of neoclassical economic growth of Robert Solow and the results obtained, the inverse problem was solved and unknown parameters were determined. The Solow model is based on the Cobb-Douglas production function, taking into account labor, capital and exogenous neutral technical progress. Also, for further calculations, the economic model proposed by Mankiw-Romer-Weil based on the Solow model was considered, but with the addition of human capital, where the number of variables and coefficients that need to be restored has already increasing. A direct problem was also solved, results were obtained that were applied in the algorithm of differential evolution for parameters recovery.

Key words: economical model, inverse problems, optimization, differential evolution, Solow model.

Адам капиталының қосу арқылы Солоу моделін шешу үшін дифференциалдық эволюция алгоритмін колдануы

Кабанихин С.И., РГА СБ есептеу математикасы және математикалық геофизика институты, Новосибирск қ., Ресей Федерациясы, +7(383) 3308353, E-mail: kabanikhin@sscc.ru

Бектемесов М.А., Абай атындағы қазақ Үлттүк педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +7(777) 2629301, E-mail: maktagali@mail.ru

Шишленин М.А., РГА СБ есептеу математикасы және математикалық геофизика институты, Новосибирск қ., Ресей Федерациясы, +7(383) 3308460, E-mail: mshishlenin@ngs.ru

Янг С.-Ш., Мидлсекс Университеті,

Лондон қ., Біріккен Корольдігі, +44 (0)20 8411 5555, E-mail: x.yang@mdx.ac.uk

Бектемесов Ж.М., әл-Фараби атындағы қазақ Үлттүк университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +7(702)9062830, E-mail: jolaman252@gmail.com

Негізгі жұмыс қаржы-экономикалық мәселелерде туындастын динамикалық жүйелердің параметрлерін анық таудың сандық зерттеуіне арналған. Өлшеуі қын параметрлердің маңыздылығы соншалық, олардың анық тамалары болашақ та мемлекеттік деңгейде болжам жасау және жұмыс жоспарын жасауга көмектеседі. Параметрлерін қалпына келтірудің тиімді жолы - кері есептерді шешу. Осы мақалада Райннер Сторн мен Кеннет Прайс ұсынған дифференциалдық эволюция алгоритмін пайдалану арқылы коэффициенттерді қалпына келтіру әдісі ұсынылған. Роберт Солоудың неоклассикалық экономикалық өсінің математикалық моделін тікелей шешіп және алынған нәтижелерді мысалында көрсетілген. Роберт Солоудың неоклассикалық экономикалық өсінің математикалық моделін тікелей шешіп және алынған нәтижелерді мысалында көрсетілген. Роберт Солоудың неоклассикалық экономикалық өсінің математикалық моделін тікелей шешіп және алынған нәтижелерді мысалында көрсетілген. Роберт Солоудың неоклассикалық экономикалық өсінің математикалық моделін тікелей шешіп және алынған нәтижелерді мысалында көрсетілген.

Түйін сөздер: экономикалық модель, кері есептер, онтайланылу, дифференциалдық эволюция, Солоу модельі.

Применение алгоритма дифференциальной эволюции для решения модели Солоу с добавлением человеческого капитала

Кабанихин С.И., Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация, +7(383) 3308353, E-mail: kabanikhin@sscc.ru

Бектемесов М.А., Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
г. Алматы, Казахстан, +7(777) 2629301, E-mail: maktagali@mail.ru

Шишленин М.А., Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация, +7(383) 3308460, E-mail: mshishlenin@ngs.ru
Янг С.-Ш., Университет Мидлсекс, г. Лондон, Объединенное Королевство,
+44 (0)20 8411 5555, E-mail: x.yang@mdx.ac.uk

Бектемесов Ж.М., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика
Казахстан, +7(702)9062830, E-mail: jolaman252@gmail.com

Данная работа посвящена численному исследованию определения параметров динамических систем, возникающих в финансовых и экономических задачах. Значимость параметров, труднодоступных для измерения, велика, поэтому их определение поможет на государственном уровне составлять прогнозы и план работы на будущее. Эффективным способом восстановления параметров является решение обратной задачи. В работе приведен метод восстановления коэффициентов с помощью алгоритма дифференциальной эволюции, которая была предложена Райннером Сторном и Кеннетом Прайсом. На примере решения прямой задачи математической модели неоклассического экономического роста Роберта Солоу и полученных результатов, была решена обратная задача и были определены неизвестные параметры. Модель Солоу основана на производственной функции Кобба-Дугласа, с учетом труда, капитала и экзогенного нейтрального технического прогресса. Также, для дальнейших расчетов рассматривается экономическая модель, предложенная Мэнкью-Ромер-Уэйлом (Mankiw - Romer - Weil), основанная на модели Солоу, но с добавлением человеческого капитала, где уже увеличивается количество переменных и коэффициентов которые надо восстановить. Также решалась прямая задача, были получены результаты, которые применялись в алгоритме дифференциальной эволюции для восстановления параметров.

Ключевые слова: экономическая модель, обратные задачи, оптимизация, дифференциальная эволюция, модель Солоу.

1 Introduction

Nowadays economic processes plays a huge role in human's life, because it is in every part of our daily routine: food, clothes, home, entertainment and many others. Peoples' economic independence is the one of the most valuable things that is why we go to work and earn money. Also no one wants to waste hard earned money, so we try to optimize it by mathematical tools. It is not only the personal issue, but also of the countries and government, where interesting roles play the population growth and capital accumulation. There is a mathematical model of neoclassic economical growth of Robert Solow (Solow 1956: 65 - 94) which will help to predict economic situations by using differential evolution algorithm. There will be used methods for solving inverse problems to identify the coefficients by known data at the fixed time moments.

2 Literature review

The study of economic models was developed in the 1930s XX century. The first publications on production functions include the work of Cobb and Douglas (Cobb 1928: 139-165), which gave impetus to subsequent studies in the field of economics as the work of Douglas (Douglas 1976: 903-916), Houthakker (Houthakker 1955: 27-31), Berndt (Berndt 1973: 81-113), and further based on the work of Cobb-Douglas and their production function, the work of Solow (Solow 1956: 65-94) and Swan (Swan 1954: 334-361) was published. These works served to develop the proposed models described in the articles of Mankiw-Romer-Weil (Mankiw 1992: 407-437), Nazrul (Nazrul 1995: 1127-1170), Benhabib (Benhabib 1994: 143-173), Temple (Temple 1999: 112-156), Durlauf (Durlauf 2005: 555-677) and many others.

As for the identification of the parameters, the work was based on the publications of Yang (Yang 2014: 1-300), Storn and Price (Storn 1995: 1-12), (Storn 1997: 341-359), and later Lampinen (Storn, Lampinen 2005: 1-539).

In his 1956s article Solow proposed that the study of economic growth starts by assuming a standard neoclassical production function with decreasing returns on capital (Solow 1956: 65 - 94). He showed that two variables such as the population growth and rates of saving determine the steady-state level of income per capita. Because these variables illustrates different steady-states of various countries. Solow's model gives simple testable predictions about how these variables influence the steady-state level of income. The higher the rate of saving, the richer the country. The higher the rate of population growth, the poorer the country.

Solow's model takes the rates of saving, population growth, and technological progress as exogenous. There are two inputs, capital and labor, which are paid their marginal products. The Cobb-Douglas production function was assumed, so production at time t is given as

$$Y(t) = K(t)^\alpha (A(t)L(t))^{1-\alpha} \quad (1)$$

The notation is as following: Y is output, K capital, L labor and A the level of technology. L and A are assumed to grow exogenously at rates \mathbf{n} and \mathbf{g} :

$$L(t) = L(0)e^{nt} \quad (2)$$

$$A(t) = A(0)e^{gt} \quad (3)$$

The number of effective units of labor, $A(t)L(t)$, growth at rate $\mathbf{n} + \mathbf{g}$. The model assumes that a constant fraction of output, s_k , is invested. Defining \mathbf{k} as the stock of capital per effective unit of labor, $\mathbf{k} = K/AL$ and \mathbf{y} , and y as the level of output per effective unit of labor, $\mathbf{y} = Y/AL$, where we substitute $y(t)$ as $k^\alpha(t)$, so the evolution of \mathbf{k} is governed by

$$\dot{k}(t) = s_k k^\alpha(t) - (n + g + \delta)k(t) \quad (4)$$

where δ is the rate of depreciation. The sum of rates of population growth, technological progress and depreciation can be rewritten as s . So the direct problem that we solve has the following form

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = s_k k^\alpha(t) - sk(t) \\ k(0) = 1 \end{cases} \quad (5)$$

with the time period $t \in [0, 0.5]$ i.e. half of the year with the time step $h = 0.1$ and the given coefficients as $s_k = 0.5$, $\alpha = 0.3$ and $s = -0.5$.

Then for the inverse problem, we assume that the coefficients are unknown and to identify them, we can use, the additional data from the direct problem, the obtained solution at the time steps $t = 0.0, 0.1, \dots, 0.5$ for the differential evolution algorithm.

3 Materials and methods

Differential Evolution (DE) is a vector-based metaheuristic algorithm. The method of differential evolution was developed by Rayner Storn and Kenneth Price in 1995 and published in 1997 (Storn 1995: 1-12), (Storn 1997: 341-359). The main example of the application of this algorithm is search engine Yandex uses the differential evolution method to improve its ranking algorithms.

Differential evolution is a method for solving multidimensional mathematical optimization related to the class of stochastic optimization algorithms (that it uses some random numbers) and has some mutation with some similarity to genetic algorithms, but, unlike genetic algorithm, DE does not require working with variables in a binary code. It is a gradient-free optimization method because it requires only the ability to calculate the values of the objective functions, but not its derivatives. The method of differential evolution is designed to find a global minimum (or maximum) of non-differentiable, nonlinear, multimodal functions with many design variables. The method is easy to implement and use (it contains three control parameters that require selection), it can also be easily parallelized (Storn, Lampinen 2005: 1-539).

Initially, a certain set of vectors ($n \geq 4$), called the generation t , representing possible solutions of the optimization problem, is generated. By vectors we mean points of d -dimensional space in which the objective function $f(x)$ is defined, which is required to be minimized. And then the vector on each generation is written as

$$x_i^t = (x_{1,i}^t, x_{2,i}^t, \dots, x_{d,i}^t) \quad (6)$$

and has d -parameters in d -dimensional space.

The algorithm of differential evolution is divided into three stages: mutation, crossover and selection. At each iteration, the algorithm generates a new generation of vectors, randomly

combining vectors from the previous generation. For each new generation ($t + 1$) of a vector from each vector x_i from the old generation (t), we randomly select three vectors x_p, x_q and x_r , with the exception of the vector itself, and generate so-called a mutant vector according to the following formula:

$$v_i^{t+1} = x_p^t + F(x_q^t - x_r^t) \quad (7)$$

where $F \in [0, 2]$ is a constant called the differential weight. Although in theory it is assumed that $F \in [0, 2]$, but in practice $F \in [0, 1]$ gives greater efficiency and stability. In fact, almost all literature studies use $F \in (0, 1)$.

Crossover operation is performed on the mutant vector, during which the coordinates of the mutant vector are replaced by the corresponding coordinates from the base vector. Each coordinate is replaced with some probability ($r_i \in [0, 1]$) and the crossover coefficient $C_r \in [0, 1]$ is used, which is also part of the differential evolution setting controlling the rate or probability of crossing. All this is presented as

$$u_{j,i}^{t+1} = \begin{cases} v_{j,i} & \text{if } r_i \leq C_r \\ x_i & \text{otherwise} \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (8)$$

This way, it can be decided randomly whether to exchange each component with a donor vector or not.

The vector obtained after crossover is called the test vector. If it is better than the base vector (that is, the value of the objective function has improved), then in the new generation the base vector is replaced by a trial one, otherwise the base vector is stored in the new generation.

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} u_i^{t+1} & \text{if } f(u_i^{t+1}) \leq f(x_i^t) \\ x_i^t & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

It is worth noting that the overall search efficiency is controlled by two parameters: the differential weight F and the probability of crossing Cr (Yang 2014: 1-300).

4 Results and discussion

In the first experiment, the direct problem of the Solow model with given coefficients and initial conditions, $k(0) = 1$, was solved in the time period t from 0 to 0.5 measured in years (that is, six months) and the following were obtained results (Figure 1):

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = s_k k^\alpha(t) - sk(t) \\ k(0) = 1 \end{cases} \quad (10)$$

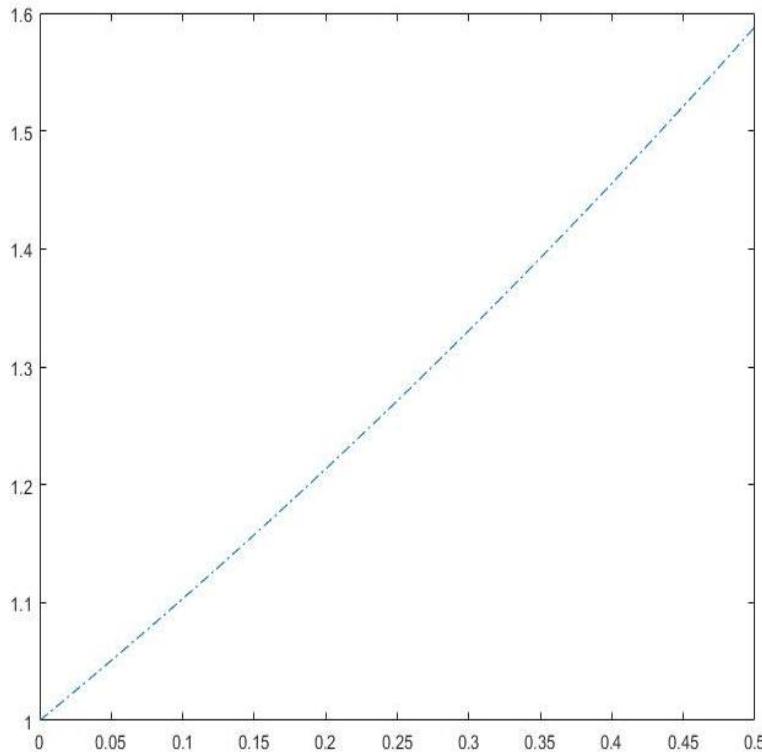


Figure 1 - Growth of capital intensity with given coefficients

To the results obtained, a 5% error was added to restore the parameters, so using them in the differential evolution algorithm gave the results of the identified coefficients (Table 1).

Table 1 – Comparison of restored values with true

Coefficients	True solution	Restored values	Difference
s_k	0.5	0.4749	0.0251
α	0.3	0.3487	0.0487
s	-0.5	-0.1344	0.3656

As it is shown in the table 4, the restored unknown coefficients are way too similar to the true ones. The value of the identified parameter s_k is 0.4749, which slightly differs from the true solution of 0.5, and the value of the parameter α is 0.3487, which diverges from the true solution 0.3 only by 0.0487. However, compared with the previous coefficients, the last parameter s , while restoring, showed not so good results and has a difference with the true value of about 0.37, which is very much for such small coefficients.

In the second experiment, the model proposed by Mankiw-Romer-Weil based on the Solow model (Mankiw 1992: 407-437) was used. Where they changed the production function as

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = s_k k(t)^\alpha h(t)^\beta - sk(t) \\ \dot{h}(t) = s_h k(t)^\alpha h(t)^\beta - sh(t) \end{cases} \quad (11)$$

where $k = K/AL$ and $h = H/AL$ are quantities per effective unit of labor. They assumed that the same production function applies to human capital, physical capital and consumption. It means the one unit of consumption can be transformed costlessly into either one unit of physical capital or one unit of human capital. In addition, it is assumed that human capital depreciates at the same rate as physical capital (Temple 1999: 112-156), (Durlauf 2005: 555-677).

To solve the direct problem of the second experiment, we used the following initial conditions and coefficients (true): $k(0) = 10$, $h(0) = 0.1$, $s_k = 0.3$, $s_h = 0.2$, $s = 0.042$, $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.5$; in a time interval of up to 10 years, and the following results of solving a direct problem were obtained (Figure 2):

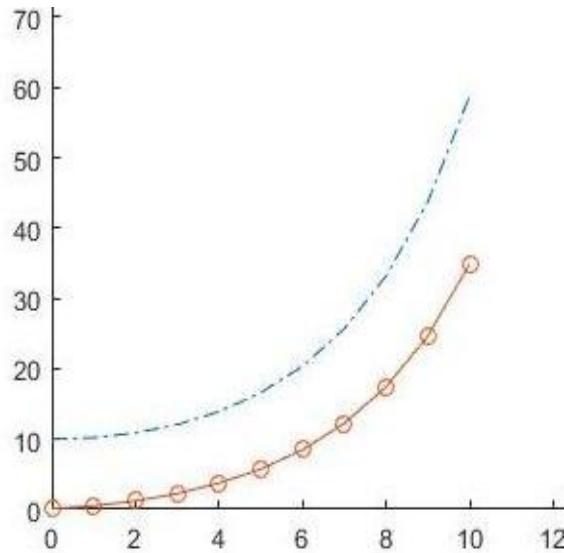


Figure 2 - The graph of direct solutions for k is the stock of physical capital (blue dotted line) and h is the stock of human capital (red line with circles)

There was illustrated that both stocks of physical and human capital experienced exponential growth at the hole period $T \in [0, 10]$ and repeating the curve of each other and doing no crossover. The graph of physical capital started from 10 billion and finished at nearly 60 billion, while the human capital began from 0.1 billion and in the end of period was at about 36 billion. The obtained results, where we took only 10 points, helped us to recreate the graph (Figure 3) using only data of stock of physical capital and to identify the unknown 5 coefficients (Table 2).

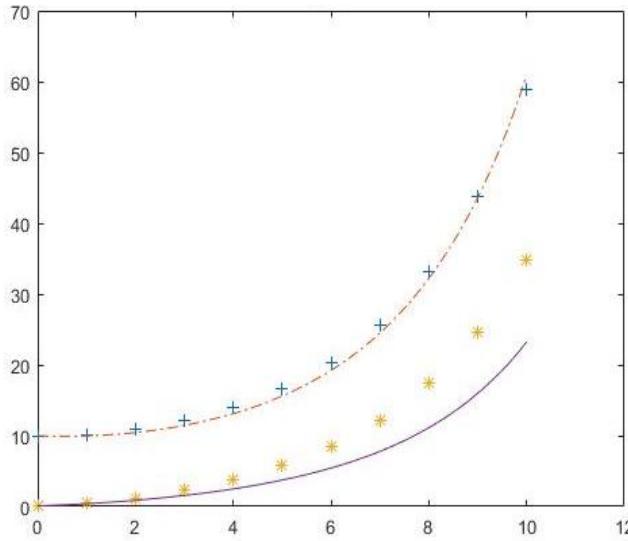


Figure 3 - Restoration of two graphs (red and purple lines) using only the obtained data on physical capital (10 blue crosses)

As it can be seen the recreated graph line goes through the given known data, which means that inverse problem solved correct enough. Also the graph repeated the exponential way of growth and did not over rose the last measured point at $T = 10$, whereas the graph line of the stock of human capital showed the similar trade and repeated the graph of direct solution (yellow stars), but from the 4th year there is started the residual and it was getting bigger with following years.

Table 2 – Comparison of recovered values (using data only on physical capital) with true

Coefficients	True solution	Restored values	Difference
s_k	0.3	0.3576	0.0576
s_h	0.2	0.1469	0.0531
α	0.6	0.6599	0.0599
β	0.5	0.5031	0.0031
s	0.042	0.0806	0.0386

There clearly showed that two coefficients out five are identified almost correct with small differences as 0.0599 and 0.0576 in coefficients α and s_k , also the coefficient showed a great result with residual from true solution equal to 0.0031, while other two parameters s_h и s namely have errors and difference in values from true solution equal to 0.0531 and 0.0386 respectively.

After the quite success of restoring parameters only using the data of one variable, we tried to do it with data set of both variables and got sufficient results (Figure 4 and Table 3).

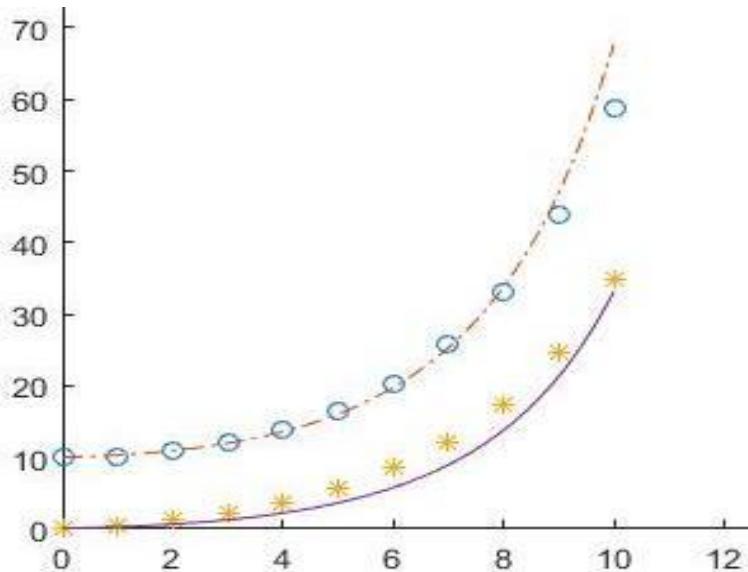


Figure 4 - Restoration of two graphs (red dashed and purple lines), using the obtained data on both physical and human capital (10 blue circles and stars)

Even though there are some residuals of physical capital with known data and over rising in the end of period and of human capital with its known data in the middle of period, the coefficients identified much better than in previous experiment (Table 3).

Table 3 – Comparison of recovered values (using both capital data) with true

Coefficients	True solution	Restored values	Difference
s_k	0.3	0.3134	0.0134
s_h	0.2	0.1783	0.0217
α	0.6	0.5212	0.0788
β	0.5	0.6402	0.1402
s	0.042	0.0038	0.0382

As it can be seen, the α and β coefficients got worse, by 0.0788 and 0.1402 namely, than in experiment written above, but also are close to the true solution. What about the parameters s_k and s_h , they showed significant progress in identifying, becoming really close to true values and decreasing the difference down to 0.0134 and 0.0217 namely. Also the s coefficient identified the way too bad and was far for 0.0382 from true value. Worse identifying of α and β parameters could be explained by similarity of equations and little difference of coefficients values.

This kind of problem with big residuals in identifying unknown parameters refers to identifiability analysis problem that could give us extra confidence in designed program, chosen method and algorithm, which helps to find unknowns by indicating identifiable and non-identifiable parameters, that some of our coefficients could be.

5 Conclusion

The work was carried out in the ICMaMG SB RAS, Novosibirsk, where an algorithm of differential evolution was considered and applied. As a result of all three experiments, it can be said that although the third coefficient (s) was incorrectly identified in all experiments and the difference varied from large to small, but still was significant than in s_k and s_h , in the second experiment. This can be defined as the non-identifiability of the coefficients or because of too big of their nonlinearity. Maybe changing the model or using more known data will give better results, as it was in the third experiment.

6 Gratitude

This work was supported by the grant of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project № AP05134121 «Numerical methods of identifiability of inverse and ill-posed problems of natural science»)

References

- [1] Benhabib J. and Spiegel M. M., "The role of human capital in economic development evidence from aggregate cross-country data." *Journal of Monetary Economics* 43 (1994): 143 - 173.
- [2] Berndt E. R. and Christensen L. R., "The Translog Function and the Substitution of Equipment, Structures, and Labor in U.S. manufacturing 1929–68." *Journal of Econometrics*. 1 (1973): 81–113.
- [3] Cobb C. W. and Douglas P. H., "A Theory of Production." *American Economic Review*. 18 (1928): 139–165.
- [4] Douglas P. H., "The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, Its Testing, and Some New Empirical Values." *Journal of Political Economy*. 84 (1976): 903–916.
- [5] Durlauf S. N., Johnson P. A. and Temple J.R.W., "Chapter 8 Growth Econometrics" *Handbook of Economic Growth*. 1 (2005): 555–677.
- [6] Houthakker H. S., "The Pareto Distribution and the Cobb–Douglas Production Function in Activity Analysis" *The Review of Economic Studies*. 23 (1955): 27–31.
- [7] Storn R., Price K. and Lampinen R., *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*. (Springer, 2005), 539 p.
- [8] Mankiw G. N., Romer D. and Weil D. N., "A Contribution to the Empirics of Economic Growth" *The Quarterly Journal of Economics*. 107 (1992): 407–437.
- [9] Nazrul I., "Growth Empirics: A Panel Data Approach" *The Quarterly Journal of Economics*. 110 (1995): 1127-1170.
- [10] Solow R. M., "A contribution to the theory of economic growth" *Quarterly Journal of Economics. Oxford Journals*. 70 (1956): 65–94.
- [11] Storn R. and Price K., "Differential Evolution — A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization over Continuous Spaces." *Technical Report TR-95-012, ICSI*. 95 (1995): 1–12.
- [12] Storn R. and Price K., "Differential Evolution — A Simple and Efficient Differential Evolution — A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces." *Journal of Global Optimization, ICSI*. 11 (1997): 341–359.
- [13] Swan T. W., "Economic growth and capital accumulation." *Economic Record. Wiley*. 32 (1956): 334–361.
- [14] Temple J., "The New Growth Evidence." *Journal of Economic Literature* 37 (1999): 112–156.
- [15] Yang XS., *Nature-Inspired Optimization Algorithms*. (Elsevier, 2014), 300 p.

4-бөлім	Раздел 4	Section 4
Информатика	Информатика	Computer science
IRSTI 81.93.29		

Enterprise Security Assessment Framework for Cryptocurrency Mining Based on Monero

Bissaliyev M.S.* , Al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Republic of Kazakhstan, +77015539459

Nyussupov A.T., Institute of Information and Computational Technologies,
Almaty, Republic of Kazakhstan, +77073120047

Mussiraliyeva Sh.Zh., Al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Republic of Kazakhstan, +77059011283

*Email: mbissaliyev@gmail.com

Mining a cryptocurrency is profitable on someone's resources. It is becoming increasing problem in the enterprise to control the operations of its infrastructure while in idle or "off-work" time. In this paper we present enterprise security assessment framework for cryptocurrency mining based on Monero cryptocurrency. The framework consists from surveying power consumption on GPU mining farms and traditional desktop PCs, analysis of web resources for browser-based mining on both internal and external domain names, the handy network logs analysis tool based on the regular expressions. While there had been significant difference between GPU and traditional desktop PC's power consumption, computational ratio of the idle PCs after working time remains questionable. In the browser-based cryptocurrency mining, there were no data on public domains, however there had been a possibility for using the private domain names, thus further research and different tools are required. In the network analysis, there were not enough evidences on the network mining, and this leads to the different research question that attackers may use proxy techniques to bypass traffic filtering and network analysis.

Key words: cryptocurrency mining, monero, hidden mining, cloud abuse

Методы, модели и алгоритмы оценки безопасности предприятия для криптовалютного майнинга на основе Monero

Монеро негізінде криптовалюталық майнинг қауіпсіздік үшін кәсіпорынның қауіпсіздігін бағалау әдістері модельдері және алгоритмдері

Бисалиев М.С.* , әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77015539459,

Нюсупов А.Т., Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77073120047,

Мусираліева Ш.Ж., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77059011283

*Email: mbissaliyev@gmail.com

Криптовалютаны өндеу басқа ресурстарда тиімді. Кәсіпорында жұмыс уақыты мен жұмыстан тыс уақыт инфраструктурасы операцияларын бақылау маңызды мәселеге айналып бара жатыр. Бұл мақалада Monero криптовалютасы негізінде криптовалюта жасайтын кәсіпорын қауіпсіздігі құрылымын бағалауды ұсынып отырмыз. Бұл құрылым GPU – да және дәстүрлі ДК жұмыс үстелінде энергияны пайдалануды қарастырудан, ішкі және сыртқы домен атауларының екеуінде де браузерге негізделген өндеулер үшін веб-реурстарды талдаудан, регуляр өрнектерде инструмент негізінде ынғайлыш жөлі журналдарын талдаудан тұрады. GPU мен дәстүрлі ДК жұмыс үстелінде энергияны

пайдалану арасында айтарлықтай айырмашылық бар, ДК жұмыс істемей тұрған уақытта есептеген қатынас оның жұмысы аяқталған кезде күдікті болып қалады. Браузерге негізделген криптовалюталық қорғаныс негізінде, жалпыға қолжетімді домен атаулары жок, бірақ жеке домен атауларын пайдалануға болады, ол үшін қосымша зерттеулер және әр түрлі құрал-саймандар қажет. Шабуылдаушылар трафикті сұзді және желілік талдауды айналып өту үшін прокси әдістерін пайдалана алғатын желі талдауларда, желілік интеллект талдау саласында жеткілікті дәлел жок, және де бұл әр түрлі зерттеу сұраптарына алыш келеді.

Түйін сөздер: криптовалютаны өндіу, monero, жасырын өндіу, бұлтты теріс пайдалану

Бисалиев М.С.*¹, Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Алматы, Республика Казахстан, +77015539459

Нюсупов А.Т., Институт информационных и вычислительных технологий,
Алматы, Республика Казахстан, +77073120047

Мусиралиева Ш.Ж.², Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
Алматы, Республика Казахстан, +77059011283

*Email: mbissaliyev@gmail.com

Криптовалютный майнинг является выгодным, если он реализован на сторонних ресурсах. Для предприятия становится все более проблематично контролировать работу ИТ инфраструктуры вне рабочее время. В этой статье мы представляем методы, модели и алгоритмы для оценки безопасности предприятия основе криптовалюты Monero. Модель состоит из исследования энергопотребления GPU и традиционных настольных ПК; анализа веб-ресурсов на наличие майнинг скриптов как во внутренних; так и во внешних доменных именах; инструмента анализа сетевых журналов на основе регулярных выражений. Несмотря на то, что разница энергопотребления между GPU и традиционным настольным ПК была значительная, соотношение бездействующих ПК после рабочего времени остается сомнительным. В основе криптовалютной защиты на основе браузера не было данных о публичных доменах, однако была возможность исследовать открытые поддомены, поэтому необходимы дальнейшие исследования и различные инструменты для исследования закрытых доменных имен. В сетевом анализе было недостаточно доказательств в скрытом майнинге, и это приводит к разным вопросам исследования, что злоумышленники могут использовать методы прокси для обхода фильтрации трафика и анализа сети.

Ключевые слова: криптовалютный майнинг, monero, скрытый майнинг, облачное злоупотребление

1 Introduction

Mining a cryptocurrency is profitable on someone else's resources. It is becoming increasing problem in enterprise to control the operations of IT infrastructure in the off-duty time. There had been reported cases, where IT personnel were involved in intentional abuse of utilizing enterprise resources for personal enrichment [1]. Also, there had been reported cases on cryptocurrency mining in public [2] and corporate sectors [3].

In this paper, we present the enterprise security assessment framework for cryptocurrency mining based on Monero cryptocurrency. The framework consists from the survey of power consumption on GPU hardware and traditional desktop PCs; analysis of web resources for browser-based mining on both internal and external domain names; handy network logs analysis tool based on the regular expressions.

In Section 2.1 we explore the miners and hidden mining; how mining software is spread in Section 2.2; mining detection methods in Section 2.3; case based framework in Section 3; the results and limitations in Section 4.

2 Literature Review

2.1 Miners and hidden mining

Miners can be compared to those who distribute files on torrent tracker: they provide work to the peer-to-peer network by making peers to download a movie or a music album, as a result, making it possible to download those files later from other peers later. In case of cryptocurrency, miners play the role of distributors, supporting the work of monetary system: they carry out transactions and keep the consensus about the unified state of cryptocurrency network. As the reward, miners receive cryptocurrency asset, which could be converted into the fiat money.

Cryptocurrency mining heavily worns out hardware, since it has to work with great intensity and computational load. In addition, the cryptocurrencey mining reduces the network bandwidth and causes network performance problems [4].

One of the important considerations for cryptocurrency mining is electricity: as the complexity grows, more computational capacity is required for the mining. Initially, a simple home computer was enough for mining, later on, miners switched to the top gaming graphics cards, and later, to specialized mining devices. At first, they were just reprogramming chips, and then application specific integrated circuits (ASICs), which gave them an opportunity to increase the performance of hash calculation and lower power consumption. The hash rate is the measuring unit of the processing power of cryptocurrency network. For example, the Bitcoin network must make intensive mathematical operations for securing the network. When the network reached a hash rate of 1 Th/s, it meant it could make 1 trillion calculations per second [5].

After the hardware acquisition, the cost of the miner consists of the utility bills: electricity and the Internet. In 2011, the purchase of a top-end video game card for mining could be paid off in approximately two weeks, but with the increasing complexity, it had became increasingly expensive to get investments recovered in such short time frame.

2.2 Mining software distribution

There are many methods exists for spreading mining software from Trojans, abuse of the resources, cryptojacking and to the threat of the bring-your-own-devices.

Inserting the malicious code into the downloaded software [6]. Such programs are usually called Trojan horses, as they are masked as *genuine tools*. By misleading users, such malicious program resides in the victim's machine and activates its hidden functions.

Embedding the code in mailing lists [7]. This method is implemented on the basis of sending spam messages, which usually contain malicious code or malware. The recipients of such attachments are unaware of the danger and are often exposed to them.

Transmitting through social networks [8]. Social networks are the most favorable place for malicious activity. With the help of various methods of social engineering, on the basis of the weakness of the human factor, the active spread of malicious software is explored.

Cryptojacking web resources [9]. Cryptojacking refers to the process by which web administrators insert a piece of JavaScript code into the websites for the purpose of hidden digital currency mining. In most cases, the malicious script is the Monero miner, which is used for the hidden mining of the Monero cryptocurrency. The Monero miner is developed

on the basis of the cryptocurrency service Coinhive [10]. Especially vulnerable are the advertising modules of the most popular web resources. In reported cases, by injecting the small Javascript code, web administrator was earning \$10,000 per month [11].

Bringing Your Own Device. It had been reported that attackers use enterprise technical infrastructure to bring your own device (BYOD) [12] in order to avoid paying the utility bills such as electricity and the Internet usage.

2.3 Mining detection methods

Standard antivirus tools reduce risks but do not guarantee a complete solution due to the fact that mining is a standard application process that is launched by many users [13].

Another approach is deploying the network policy at the enterprise level: there are known IP addresses, hostnames, and miner signatures. However, miners may combine their computational resources into grouped or pool mining.

While we are solving problems with the pool mining, solo or personal mining is becoming an issue, since the miners can configure network settings in their own desirable way to bypass the network filtering methods.

3 Material and Methods

Based on the literature readings, we propose the theoretical framework based on the power consumption usage, network analysis, and tool for scanning web resources (Figure 1).

The power consumption, mining software and network logs defined within the context of mining in enterprise organizations. The research method is based on the case study research methods used in software engineering [14]. The power consumption is divided into two units of analysis. First is the GPU farms power consumption. Second unit of analysis is considered that during the off-work time, the IT administrators may use the desktop PCs and make them work for their purposes. In the mining software context, we observe the Monero based web browser mining and for public and private domains based on the web resources. In the network logs analysis, we study the raw network logs generated on the firewall.

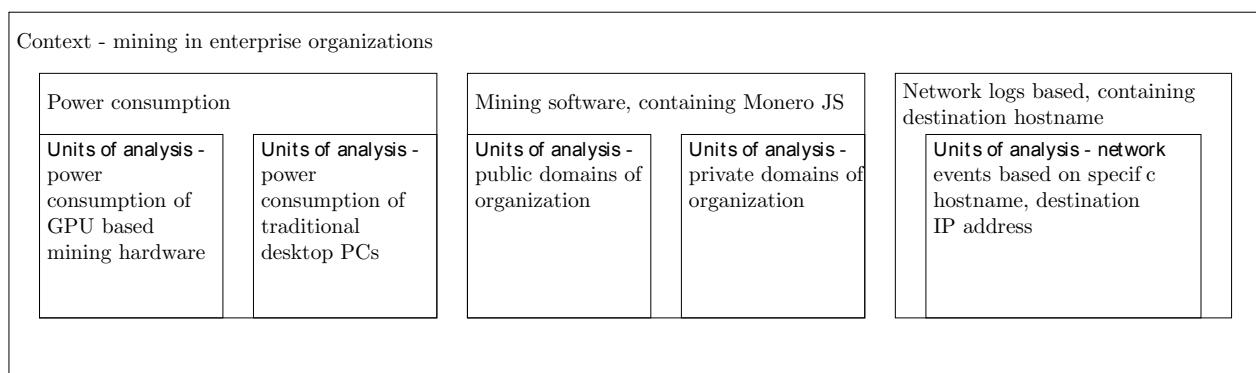


Figure 1 – The theoretical framework based on the power consumption usage, network analysis, and tool for scanning web resources.

3.1 Power consumption of mining hardware

For data collection on power consumption, *Floureon power meter Energy Monitor TS-836A* was used (Figure 2). The data had been collected during 30 days period, running 24 hours without interruptions.

The components of Setup #1 (Figure 3): 6x Nvidia GTX 1080 Ti, 1x Motherboard, 4x 2GB RAM, 1x Intel Celeron CPU, 1x 500GB HDD, 6x Power Risers Generation 4.

The components of Setup #2 (Figure 3): 2x AMD Radeon 480, 1x Nvidia GTX 1050, 1x Motherboard, 1x 500GB HDD, 4x 2GB RAM, 2x Power Risers Generation 4. The power consumption was calculated as following:

$$E(kWh/day) = P(w) \times t(h/day) \div 1000(W/kW)$$

Where:

E - electricity power consumption per day in *kilowatt-hours*

P - power in *watts*

t - time in *hours*

The data had been collected for 30 days period. The power consumption rate based in Almaty, Kazakhstan prices.

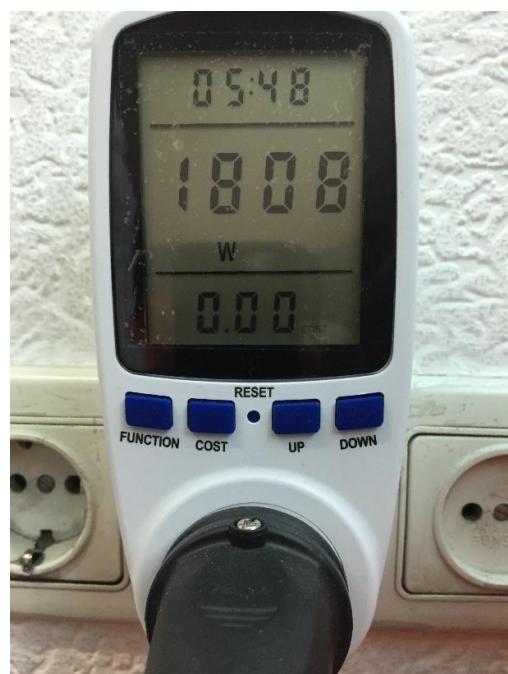


Figure 2 – Power Meter Energy Monitor TS-836A shows the power consumption of setup #1 consuming an average of 1,800 Watts per hour running on the sample rate of 5 minutes.



Figure 3 – Example of cryptocurrency miner setup: at the bottom level Setup #1 is shown; at top Setup #2 is shown. We compare data to the average power consumption of Desktop PC with LCD Display [15].

3.2 Detection framework for Monero web miner

One of the techniques is the injection of Javascript code or the Monero library into the web page. The following framework was developed.

Algorithm 1: Detect Monero Miner in Web Resources

Input : Text file with the list of websites
Output: List of websites with boolean values for Monero miner

- 1 Load list of websites
- 2 **while** *The end of the file do*
- 3 Scan next website in the file
- 4 Get the source code of the web page
- 5 Search of malicious Javascript code, containing Monero miner
- 6 **if** *match = true then*
- 7 flag = true
- 8 append website name, flag, scantime to report file
- 9 **end**
- 10 **end**
- 11 **return** *final report containing viruses-miners on input website*

The method for the analysis of Monero miner is based on case study unit analysis within *Mining software, containing Monero JS* (Figure 1).

3.3 Network events log analyzer

The data was collected in the raw text containing between 7-8 million events. Due to the absence of applications for analyzing the real time traffic, the custom solutions was developed for analyzing processed traffic using regular expressions.

Algorithm 2: Universal network logs analysis based on Fortinet logs structure using regular expressions

Input : Network Log Files
Output: Grouped Data From Logs

- 1 Put all files into one folder
- 2 Concatenate log files into one log file
- 3 Load list of websites
- 4 Set regex search:
- 5 (date=\d+-\d+-\d+\s+time=\d+:\d+:\d+)(.*)(srcip=\d+\.\d+\.\d+\.\d+)(.*)(srcport=\d+)(.*)(hostname=.+?)")
- 6 **while** The end of file **do**
- 7 **if** search = true **then**
- 8 Store match into the database
- 9 **end**
- 10 **end**

4 Results and Discussion

4.1 Results on power consumption

The data had collected during for 30 days period, running 24 hours without interruption (Table 1). The data is limited to the traditional electricity miners, not included with the photovoltaic-based (solar miners) [16].

Table 1 – Results on of power consumption of Setup #1, Setup #2 (Figure 3) and average desktop PC with LCD display. The cost was calculated based on Almaty, Kazakhstan power grid provider rate in 2017.

Item Name	Setup #1 (6x Nvidia GTX 1080 Ti)	Setup #2 (2x AMD Radeon RX480 +1 Nvidia GTX 1050 Ti)	Average Desk-top PC with LCD display [15]
Average Power consumption (Watts/hour)	1.8	0.45	0.1
Hours of operation per day (hours)	24	24	24
Total kWs per day (kWs)	43.2	10.86	2.4
Price per kWh (in US Dollars)	\$0.082	\$0.082	\$0.082
Number of operating days	30	30	30
Total cost (in US Dollars)	\$106.27	\$26.71	\$5.90

4.2 Results on Monero miner analysis on subdomains

While we were able to make the analysis on public subdomains, however, we were unable to analyze the internal domain names. The data of the full Uniform Resource Identifier (URI) was truncated (Table 2).

Table 2 – Results on the Monero web based miner on the enterprise domain and subdomains.

URL	isExist	Scan Timestamp
kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:18
univer.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:18
pps.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:19
online-test.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:20
elibrary.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:21
welcome.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:22
repository.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:22
icd.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:22
science.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:23
portal.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:23
journal.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:24
open.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:24
post.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:24
student.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:25
be.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:25
philart.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:25
cu.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:26
bulletin-geography.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:27
jirbis.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:28
ijbch.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:28
dl.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:29
univer_okmpi.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:30
connect.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:31
bulletin-history.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:32
demou.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:33
atu.kaznu.kz	FALSE	April 7, 2018 15:03:34

4.3 Results on network log analysis

We analyzed between 7.5 and 8 million events with the total of 4.4 GB of logs. As the example, singular regular expression (regex) with four search groups was proposed. The groups consist of date, source IP, source port and hostname respectively. However, the regular expression may have different setup depending on the required search groups.

While the log analysis required significant amount of time to process the large datasets, on demand analysis tools are required.

In the network analysis, there were not enough evidences (Table 3) on the mining: this may lead to the different research question that attackers may use proxy techniques to bypass traffic filtering and network analysis.

Table 3 – Categorized data collected from the enterprise firewall.

Category	Number of Events	Percent
Mining	17,180	0.22605
Uncategorized	7,582,820	99.77395
Total	7,600,000	100.0

5 Conclusion

In this paper, the conceptual framework for enterprise security assessment for cryptocurrency mining detection was proposed. Within the framework, the different units of analysis in three different contexts: power consumption, application mining and network analysis were proposed. While there is significant difference in power consumption between GPU and traditional desktop PC's, the ratio of the idle PCs and GPUs after the duty time still questionable. On the browser-based cryptocurrency mining, there were no evidence that application mining exists on public domains, however, investigation on internal domain names should be considered. On the network analysis, there were little data on the network mining, and this may lead to the different research question that attackers may use proxy techniques to bypass traffic filtering and network analysis.

The results of this paper were presented in the 2nd SUMMER SCHOOL "Mathematical Methods in Science and Technology" held in Almaty, Kazakhstan, 28-08 June 2018.

References

- [1] Broderick, Ryan. "How to Get Rich on Bitcoin, By a System Administrator Who's Secretly Growing Them On His School's Computers". Motherboard. 2011. Accessed May 5, 2018.
https://motherboard.vice.com/en_us/article/nzzz37/how-to-get-rich-on-bitcoin-by-a-system-administrator-who-s-secretly-growing-them-on-his-school-s-computers
- [2] Getbitcoin.com.au. "Government employee caught mining using work supercomputer". Getbitcoin.com.au. 2014. Accessed May 5, 2018.
<https://www.getbitcoin.com.au/bitcoin-news/government-employee-caught-mining-using-work-supercomputer>
- [3] Falconer, Joel. "ABC employee caught mining for Bitcoins on company servers". The Next Web. 2011. Accesssed May 5, 2018.
<https://thenextweb.com/au/2011/06/23/abc-employee-caught-mining-for-bitcoins-on-company-servers/>
- [4] Seals, Tara. "ABC employee caught mining for Bitcoins on company servers". Infosecurity Magazine. 2018. Accessed May 5, 2018.
<https://www.infosecurity-magazine.com:443/news/cryptomining-spikes-500/>
- [5] Bitcoin.org. "Some Bitcoin words you might hear". Vocabulary Bitcoin. 2018. Accessed May 5, 2018.
<https://bitcoin.org/en/vocabulary>
- [6] Makandar, Aziz, and Anita Patrot. "Trojan Malware Image Pattern Classification". Paper presented at the annual International Conference on Cognition and Recognition, 253-262. Springer, Singapore, 2018.
- [7] Edge, Charles, and Daniel O'Donnell. "Malware Security: Combating Viruses, Worms, and Root Kits". Paper presented at the annual conference for the Enterprise Mac Security, 221-242. Apress, Berkeley, CA, 2016.

- [8] Hajli, Nick, and Xiaolin Lin. "Exploring the security of information sharing on social networking sites: The role of perceived control of information". *Journal of Business Ethics*, 133, no. 1 (2016): 111-123.
- [9] Zalbina, M. Ridwan, Tri Wanda Septian, Deris Stiawan, Moh Yazid Idris, Ahmad Heryanto, and Rahmat Budiarto. "Payload recognition and detection of Cross Site Scripting attack". Paper present at the annual conference for Anti-Cyber Crimes (ICACC), 2017 2nd International Conference, 172-176. IEEE, Abha, 2017.
- [10] Coinhive. "Coinhive – Monero JavaScript Mining". Coinhive. 2018. Accessed May 5, 2018.
<https://coinhive.com/>
- [11] Eskandari, Shayan, Andreas Leoutsarakos, Troy Mursch, and Jeremy Clark. "A first look at browser-based Cryptojacking". Accessed May 5, 2018 arXiv preprint, arXiv:1803.02887, (2018).
- [12] Miller, Keith W., Jeffrey Voas, and George F. Hurlburt. "BYOD: Security and privacy considerations". *It Professional*, 14, no. 5 (2012): 53-55.
- [13] Kizza, Joseph Migga. "Virus and Content Filtering". Paper presented at the annual conference for Guide to Computer Network Security, 325-343. Springer, London, 2015.
- [14] Runeson, Per, Martin Host, Austen Rainer, and Bjorn Regnell. *Case study research in software engineering Guidelines and examples*. (New Jersey: John Wiley & Sons, 2012), 135-136.
- [15] Pickavet, Mario, Willem Vereecken, Sofie Demeyer, Pieter Audenaert, Brecht Vermeulen, Chris Develder, Didier Colle, Bart Dhoedt, and Piet Demeester. "Worldwide energy needs for ICT: The rise of power-aware networking". Paper presented at the annual conference for Advanced Networks and Telecommunication Systems, 2008. ANTS'08. 2nd International Symposium on, 1-3. IEEE, Bombay, 2008.
- [16] Torpey, Kyle. "How Bitcoin Mining Could Solve One Of The Issues With Space-Based Solar Power". Forbes. 2018. Accessed May 5, 2017.
<https://www.forbes.com/sites/ktorpey/2017/09/15/how-bitcoin-mining-could-solve-one-of-the-issues-with-space-based-solar-power/#1d98e4a22c8d>

МРНТИ 28.23.25

Построение оптимальной иммунносетевой модели на основе модифицированного алгоритма роя частиц

Самигулина Г.А.* , Масимканова Ж.А.**

Казахстанско-Британский технический университет,
Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК,
г. Алматы, Республика Казахстан,
*galinasamigulina@mail.ru, **masimkanovazh@gmail.com

Разработка информационных технологий на основе биоинспирированных интеллектуальных методов, например подхода искусственных иммунных систем, для компьютерного молекулярного дизайна новых лекарственных препаратов и прогнозирования зависимости "структура-свойство/активность" (QSAR) химических соединений является актуальной проблемой. Статья посвящена решению задачи QSAR по построению иммунносетевой модели на основе выбора оптимального набора дескрипторов для облегчения процесса отбора новых химических соединений в кандидаты лекарственных препаратов с заданными свойствами. В соответствии с концепцией мультиалгоритмического подхода разработка оптимальной иммунносетевой модели и выделение информативных дескрипторов осуществляется на основе алгоритмов роя частиц. В данной работе описано сравнение классического алгоритма роя частиц (PSO) и модифицированного алгоритма роя частиц с весом инерции (IWPSO) для отбора информативных дескрипторов на примере лекарственных соединений сульфаниламидной группы с различной фармакологической активностью. Проанализирован выбор параметров (фитнес-функций, размер популяций, количество итераций и др.), определяющих эффективность работы предложенных алгоритмов для построения оптимального набора дескрипторов. Приведены результаты моделирования зависимости значений фитнес-функций от количества итераций в программных продуктах WEKA и Yarpiz (PSO).

Ключевые слова: оптимальная иммунносетевая модель, выделение информативных дескрипторов, алгоритмы роя частиц (PSO).

**Құстар үйірінің модификацияланған алгоритмі негізінде
онтайлы иммунды желілік модель құру**

Самигулина Г.А.* , Масимканова Ж.А.**

Қазақстан-Британ техникалық университеті,

ҚР БФМ ҒК Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты,

Алматы қ., Қазақстан Республикасы,

*galinasamigulina@mail.ru, **masimkanovazh@gmail.com

Биоинспирацияланған интеллектуалды әдістер негізінде, мысалы, жана дәрілік препараттардың компьтерлік молекулярлық дизайны үшін және химиялық қосылыстардың "құрылым-қасиет/белсенділік" (QSAR) тәуелділігін болжамдауда жасанды иммунды жүйелердің ақпараттық технологиясын құру өзекті мәселе болып отыр. Мақала иммунды желілік модель негізінде дәрілік препаратта кандидат ретінде берілген қасиеттері бар жана химиялық қосылыстарды таңдау әдерісін жеңілдету үшін онтайлы дескрипторлар жиынын таңдау арқылы QSAR-дың тапсырмасын шешуге арналған. Мультиалгоритмдік тәсіл концепциясы негізінде онтайлы иммунды желілік моделді құру мен ақпараттық дескрипторларды белгілеу құстар үйірінің алгоритмдері негізінде жүзеге асады. Берілген жұмыста ақпараттық дескрипторларды сұрыптау үшін мысал ретінде, әртүрлі фармакологиялық белсенділігі бар сульфаниламид тобының дәрілік қосылыстарын құстар үйірінің классикалық алгоритмі (PSO) мен инерциялық салмақты құстар үйірінің түрленген алгоритмдерін (IWPSO) салыстыруы сипатталған. Онтайлы дескрипторлар жиынын құру үшін ұсынылған алгоритм жұмысының тиімділігін анықтауда параметрлерді таңдау (фитнес-функциялар, популяция мөлшері, итерация саны және т.б.) талданды. WEKA және Yarpiz (PSO) программалық өнімдерінде итерация санына байланысты фитнес-функция мәндерінің тәуелділігін модельдеу нәтижелері келтірілген.

Түйін сөздер: оңтайлы иммунды желілік модель, ақпараттық дескрипторларды сұрыптау, құстар үйірінің алгоритмі (PSO).

**Construction of an optimal immune network model
based on the modified swarm algorithm**

Samigulina G.A.*; Massimkanova Zh.A.**

Kazakh-British technical university

Institute of information and computational technologies CS MES RK

Almaty, Kazakhstan,

*galinasamigulina@mail.ru, **masimkanovazh@gmail.com

The development of information technologies based on bioinspired intellectual methods, such as the approach of artificial immune systems, for the computer molecular design of new drugs and prediction the "structure-property/activity" relationship (QSAR) of chemical compounds is an actual problem. The article is devoted to the solution of the task of QSAR on the construction of immune network model based on the choice of optimal set of descriptors to facilitate the selection of new chemical compounds for candidate drugs with predefined properties. According to the concept of multialgorithmic approach development of optimal immune network model and allocation of informative descriptors is carried out on the basis of swarm intelligence algorithms. In this work comparison of standard particle swarm optimization algorithm (PSO) and modified inertia weight particle swarm optimization (IWPSO) is described for selection of informative descriptors on the example of drug compounds of the sulfanilamide group with various pharmacological activities. The choice of the parameters (fitness functions, population size, the number of iterations, etc.), which define performance of the offered algorithms for creation of optimal set of descriptors is analysed. The results of modeling of dependence of fitness function values on the number of iterations in software products WEKA and Yarpiz (PSO) are given.

Key words: optimal immune network model, selection of informative descriptors, particle swarm optimization(PSO).

1 Введение

В настоящее время актуально применение интеллектуальных методов для обработки химических данных и решения задачи прогнозирования зависимости "структура-свойство/активность"(QSAR) новых соединений. Широкое распространение получили интеллектуальные технологии с использованием нейронных сетей, эволюционных алгоритмов, искусственных иммунных систем, алгоритмов роевого интеллекта (РИ) и др. За последние годы особенно широкое применение получили алгоритмы РИ, такие как алгоритмы роя частиц (particle swarm optimization, PSO), муравьиной и пчелиной колонии, серых волков, кукушки и бактерий, которые применяются для решения оптимизационных задач. Алгоритмы РИ отличаются от эволюционных алгоритмов большей точностью и простотой программной реализации. Эффективность алгоритмов РИ зависит от ряда факторов, таких как качество и размер обрабатываемых данных, настройки параметров, выбора фитнес-функций и др. Правильный подбор значений весовых коэффициентов алгоритмов улучшает способность к глобальному и локальному поиску, решает проблему преждевременной сходимости. Одним из эффективных подходов является алгоритм роя частиц (PSO). Разработаны различные модифицированные алгоритмы роя частиц, такие как Guaranteed Convergence PSO (GCPSO) [Farsangi, 2007: 1], modified PSO (MPSO) [Khan, 2016: 1; Jena, 2015: 3263–3272], inertia weight PSO (IWPSO) [Mu, 2009: 151-155], Fully informed PSO (FIPSO) [Jukasik, 2014: 155-161], Adaptive PSO (APSO) [Zhan, 2009: 1362-1381] и др.

2 Обзор литературы

Работа [Thamaraichelvi, 2016: 744-760] посвящена применению метода роя частиц и алгоритма светлячка для диагностики опухоли в изображениях магнитной резонансной и компьютерной томографии. Предложенный метод роя частиц применяется для поиска оптимального количества дескрипторов и уменьшения размерности данных спектрального изображения. В статье [Liu, 2015: 147-156] совместно используются хаотический алгоритм оптимизации и алгоритм роя частиц для повышения точности прогноза при отборе данных с определенными фармакологическими свойствами препарата. Результаты эксперимента показывают, что предложенный метод имеет хорошую обучаемость и способность к обобщению. В работе [Goodarzi, 2012: 636-651] предлагается использование модифицированного алгоритма роя частиц (MPSO) и множественной линейной регрессии (MLR) для отбора информативных дескрипторов при моделировании QSAR. В статье [Guo, 2014: 2251] описываются оптимизационные алгоритмы (эволюционные алгоритмы, метод роя частиц) для прогнозирования свойств химических соединений. Исследования выполнены с использованием программного продукта AutoDock. Сравнение результатов моделирования показывает эффективность применения алгоритмов роя частиц. В работе [Bin, 2008: 698-705] рассматривается модифицированный алгоритм роя частиц, в котором с увеличением количества итераций уменьшается вес инерции. По сравнению с классическим алгоритмом роя частиц данный алгоритм улучшает поиск оптимального решения. В статье [Umapathy, 2010: 1] анализируется влияние веса инерции (постоянный вес инерции, изменяющийся во времени вес инерции и вес инерции при локально-глобальной лучшей позиции) на эффективность работы алгоритма роя частиц. В результате отмечается, что использование алгоритма роя частиц с предложенным весом инерции позволяет быстро обрабатывать большой объем данных и обеспечивает лучшее решение.

Одним из известных интеллектуальных подходов при компьютерном молекулярном дизайне новых лекарственных препаратов являются искусственные иммунные системы (ИИС), основанные на применении принципов теоретической иммунологии [Timmis, 2000: 143-150]. Работа [Carkli, 2017: 1387-1391] посвящена прогнозированию карбона диоксида на основе алгоритмов клonalной селекции CLONALG и AIRS. Использование предложенных алгоритмов позволяет более точно прогнозировать выбросы карбона диоксида по сравнению с алгоритмом многослойного перцептрона и методом ближайших соседей. В статье [Lasisi, 2017: 101-110] предлагается ИИС на основе алгоритма клonalной селекции для прогнозирования вторичной структуры белка. Искусственная иммунная система прогнозирует вторичную структуру гемоглобина с высокой точностью прогнозирования 88,38 процентов. В исследованиях [Samigulina, 2017а: 88-94; Самигулина, 2017б: 92-104] решается задача построения оптимальной иммунносетевой модели на основе алгоритмов роевого интеллекта. В соответствии с концепцией мультиалгоритмического подхода [Samigulina, 2013: 21-29] рассматриваются различные модифицированные алгоритмы роевого интеллекта. Проведенные эксперименты показывают, что выделение информативных дескрипторов с использованием алгоритмов роевого интеллекта, а также построенные оптимальные иммунносетевые модели существенно повышают качество прогноза при решении задачи распознавания образов на основе ИИС [Samigulina, 2015: 172].

Постановка задачи формулируется следующим образом: необходимо построить оптимальную иммунносетевую модель на основе модифицированного алгоритма роя с весом инерции (IWPSO) частиц для прогнозирования зависимости "структурно-свойства/активность"(QSAR) новых лекарственных препаратов (сульфаниламидов). Сравнить результаты моделирования классического алгоритма роя частиц и модифицированного алгоритма роя частиц с весом инерции.

3 Материалы и методы

В статье сравниваются классический (PSO) и модифицированный алгоритмы роя частиц (IWPSO) для построения оптимального набора дескрипторов химических соединений (на примере сульфаниламидов), а также дальнейшей разработки оптимальной иммунносетевой модели.

3.1 Классический алгоритм роя частиц (PSO)

Классический алгоритм роя частиц [Kennedy, 1995: 1942-1948] разработан Дж. Кеннеди и Р. Эберхартом в 1995 году для оптимизационных задач. Пусть позиция частицы в D -мерном пространстве представляется следующим образом [Ми, 2009: 151-152]: $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD})$, а скорость частицы: $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD})$. Для выбранной фитнес-функции задается размер популяции, количество итераций и весовые коэффициенты алгоритма. При каждой итерации определяются локальное лучшее (p_{id}) и глобальное лучшее (p_{gd}) значения. Локальное лучшее значение рассматривается как наилучшее положение частицы в пространстве поиска. Глобальное лучшее значение является лучшим положением всех частиц в популяции.

Далее частицы меняют скорость (1) и положения (2) по формулам:

$$v_{id}^{k+1} = wv_{id}^k + c_1r_1(p_{id} - x_{id}^k) + c_2r_2(p_{gd} - x_{id}^k), \quad (1)$$

$$x_{id}^{k+1} = x_{id}^k + v_{id}^{k+1}, i = 1, 2, \dots, N; d = 1, 2, \dots, D, \quad (2)$$

где v_{id} - скорость частицы, k - количество итераций, w - вес инерции, c_1, c_2 - коэффициенты ускорения, r_1, r_2 - равномерно распределенные случайные числа в интервале $[0,1]$, которые используются для сохранения разности популяции, p_{id} - локальное лучшее значение, p_{gd} - глобальное лучшее значение, N - размер популяции.

Выбор дескрипторов выполняется с использованием алгоритма CFS (Correlation-based feature selector, CFS), предложенного в работе [Hall, 1999: 69]. Фитнес-функция представляется следующим образом:

$$M_s = \frac{kr_{sf}^-}{\sqrt{k+k(k-1)r_{ff}^-}}, \quad (3)$$

где s - подмножество, которое содержит k дескрипторов, r_{sf}^- - средняя корреляция "дескриптор-класс" ($f \in s$), r_{ff}^- - средняя корреляция между "дескриптор-дескриптор".

Далее сравниваются значения фитнес-функций [Ahmad, 2015: 3-4]:

- если $M(x_{id}^{k+1}) \leq M(p_{id})$, то установить $p_{id} = x_{id}^{k+1}$,

- если $M(p_{id}) \leq M(p_{gd})$, то установить $p_{gd} = p_{id}$.

Одной из особенностей алгоритмов роя частиц является необходимость подбора коэффициентов в зависимости от условий задачи. Если установить $c_1 > c_2$, то частицы стремятся к своим лучшим положениям. Если $c_1 < c_2$, то все частицы будут стремиться к лучшему глобальному положению, которое приводит к преждевременной сходимости [Пичужкина, 2017: 8-9].

3.2 Алгоритм роя частиц с весом инерции (IWPSO)

Алгоритм IWPSO [Shi, 1998: 73-79] был предложен Р. Эберхартом и Ю. Ши для решения проблемы преждевременной сходимости. При итерации вес инерции частицы меняется от большого значения к меньшему [Mi, 2009: 153] по формуле:

$$w = w_{\max} - \frac{w_{\max} - w_{\min}}{iter_{\max}} k, \quad (4)$$

где w - вес инерции, w_{\max} - начальный вес инерции, w_{\min} - конечный вес инерции, $iter_{\max}$ - максимальное количество итерации, k - текущая итерация. При $w \geq 1$ скорость частицы увеличивается и позволяет частицам лучше исследовать пространство поиска. При $w < 1$ частицы замедляются и находят локальные значения.

4 Результаты и обсуждение

Для исследования эффективности предложенных методов используется база данных дескрипторов сульфаниламидов на базе ресурса Mol-instincts и PubChem [molinstincts, 2018: 1]. База данных (БД) состоит из более 1000 дескрипторов разных уровней. Рассмотренные химические соединения классифицированы на сульфаниламиды короткого действия, средней длительности действия и длительного действия. Примерами дескрипторов являются количество атомов, относительное количество атомов карбона, относительное количество атомов водорода, молекулярный вес, количество связей, гравитационный индекс и др [Самигулина, 2017в: 99-107]. Необходимо построить оптимальный набор дескрипторов, который наиболее полно описывает химическое соединение.

Существуют различные программные продукты на основе алгоритмов роя частиц для решения прикладных задач. Например, WEKA (Waikato Environment for Knowledge Analysis) [Moraglio, 2007: 125-137], Yarpiz [Yarpiz, 2017: 1], SwarmNLP [SwarmNLP, 2015: 1], Co-PSO [Shen, 2011: 1], DPSO (Dissipative particle swarm optimization) [Jia, 2014: 37-47], ParadisEO [Liefooghe, 2010: 87], EPSO [tribespso, 2017: 1] и др.

Для выделения информативного набора данных на основе классического алгоритма роя частиц используется программный пакет WEKA, реализованный на языке программирования Java. При моделировании заданы следующие параметры: количество частиц в рое $N = 100$, количество итераций $k = 50$, коэффициенты ускорения $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$, вес инерции $w = 1$, равномерно распределенное случайное число $r_1 = 1$. Время вычисления равно 3 мс. В результате моделирования из 1024 дескрипторов выбраны 49 информативных дескрипторов. На рисунке 1 приведены результаты

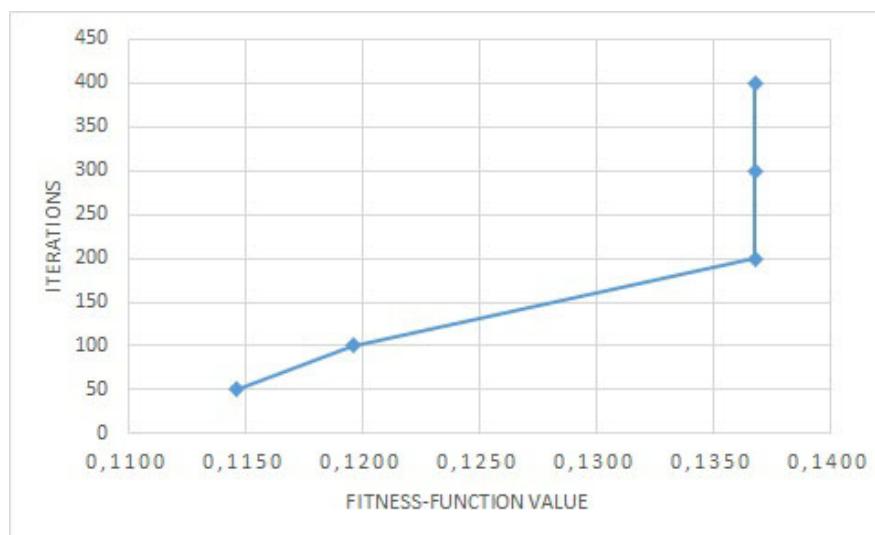


Рисунок 1 – Моделирование классического алгоритма роя частиц (PSO)

моделирования зависимости значений фитнес-функций от количества итераций в программном продукте WEKA.

Значение фитнес-функции характеризует информативность отобранного набора дескрипторов и меняется от 0 до 1. При увеличении итерации увеличивается значение фитнес-функции. Если количество итераций больше 100, то возникает проблема преждевременной сходимости.

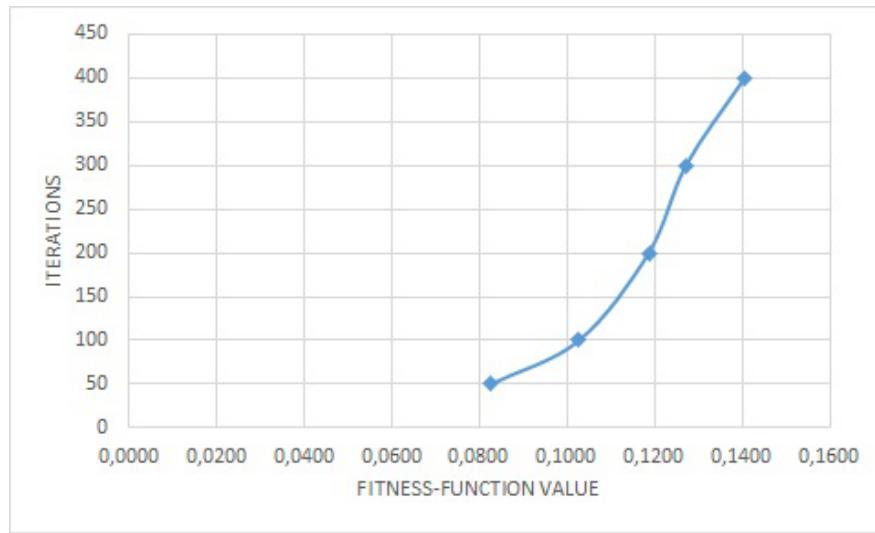


Рисунок 2 – Моделирование модифицированного алгоритма роя частиц (IWPSO)

Выделение информативных дескрипторов на основе алгоритма IWPSO выполняется в программном продукте Yarpiz, разработанного на языке программирования Python. При моделировании заданы следующие параметры: количество частиц в рое $N = 100$, количество итераций $k = 50$, коэффициенты ускорения $c_1 = 1$ и $c_2 = 2$, вес инерции $w_{\max} = 0,9$ и $w_{\min} = 0,4$, равномерно распределенное случайное число $r_1=1$.

Время вычисления равно 3 мс. В результате моделирования из 1024 дескрипторов выбраны 44 информативных дескрипторов. На рисунке 2 приведены результаты моделирования зависимости значений фитнес-функций от количества итераций в программном продукте Yarpiz.

Для оценки эффективности предложенных алгоритмов в таблице 1 сравниваются результаты моделирования оптимальных наборов дескрипторов сульфаниламидов при разном количестве итераций.

Таблица 1 - Сравнение результатов моделирования оптимального набора дескрипторов на основе алгоритмов PSO и IWPSO.

Алгоритмы роя частиц	Количество итераций	Значение фитнес-функций	Набор информативных дескрипторов
Алгоритм PSO	50	0.1146	49
	100	0.1196	49
	200	0.1368	48
	300	0.1368	48
	400	0.1368	48
Алгоритм IWPSO	50	0.0826	44
	100	0.1028	43
	200	0.1187	40
	300	0.1272	38
	400	0.1406	38

При сравнении результатов моделирования на основе алгоритмов PSO и IWPSO следует отметить:

- в алгоритме PSO решение достигается при итерации равной 100 и выбирается 49 дескрипторов. При дальнейших итерациях в качестве исходных данных используется случайная выборка данных из пространства поиска, что приводит к преждевременной сходимости;

- в алгоритме IWPSO с увеличением количества итераций улучшается значение фитнес-функции. При итерации 400 достигается лучшее значение фитнес-функции и выбирается 38 информативных дескрипторов.

Таким образом, большое количество итераций дает более точное решение, но приводит к дополнительным вычислениям.

5 Заключение

Одной из важнейших задач при молекулярном дизайне новых лекарственных препаратов и прогнозировании зависимости "структура-свойство/активность" на основе подходов искусственного интеллекта является построение оптимального набора дескрипторов, наиболее полно характеризующих рассматриваемые химические соединения. Результаты моделирования показали эффективность предварительной обработки данных с использованием модифицированного алгоритма роя частиц с

весом инерции IWPSO для выделения информативных дескрипторов и построения оптимальной иммунносетевой модели, а также дальнейшего решения задачи распознавания образов на основе подхода искусственных иммунных систем и прогнозирования свойств новых антисептических препаратов сульфаниламидной группы.

6 Благодарности

Работа выполнена по гранту КН МОН РК на тему: "Разработка и анализ баз данных для информационной системы прогнозирования зависимости "структурно-свойство" лекарственных соединений на основе алгоритмов искусственного интеллекта" (2018-2020 г.г.)

Список литературы

- [1] Ahmad I. Feature Selection Using Particle Swarm Optimization in Intrusion Detection // International Journal of Distributed Sensor Networks. - 2015. - Vol. 11. - URL: <https://doi.org/10.1155/2015/806954> (дата обращения: 28.03.2018)
- [2] Bin J., Zhigang L., Xingsheng G. A dynamic inertia weight particle swarm optimization algorithm // Chaos, Solitons and Fractals. - 2008. - Vol. 37. - P. 698-705.
- [3] Carkli Y.B., Sertkaya C., Yurtay N. Prediction of secondary structures of hemoglobin using clonal selection algorithm // 7th International Workshop on Computer Science and Engineering. - 2017. - P. 1387-1391.
- [4] Farsangi M.M., Nezamabadi-pour H., Lee K.Y. Implementation of GCPSO for Multi-objective VAr Planning with SVC and Its Comparison with GA and PSO // Intelligent Systems Applications to Power Systems. - IEEE, 2007. - DOI: 10.1109/ISAP.2007.4441632 (дата обращения: 15.03.2018)
- [5] Goodarzi M., Dejaegher B. Feature selection methods in QSAR studies // Journal AOAC Int. - 2012. - Vol. 95(3). - P. 636-651.
- [6] Guo L., Yan Z., Zheng X., Hu L., Yang Y., Wang J. A comparison of various optimization algorithms of protein-ligand docking programs by fitness accuracy // Journal Molecular modeling. - 2014. - Vol. 20(7). - 2251 p.
- [7] Hall M.A. Correlation-based Feature Selection for Machine Learning // Thesis of Doctoral dissertation. - The University of Waikato, 1999. - 198 p.
- [8] Jena P.K., Parhi D.R. A Modified Particle Swarm Optimization Technique for Crack Detection in Cantilever Beams // Arabian Journal for Science and Engineering. - Springer, 2015. - Vol. 40. - P. 3263–3272.
- [9] Jia Y., Chen W., Zhang J., Li J. Generating Software Test Data by Particle Swarm Optimization // Materials of Asia-Pacific Conference on Simulated Evolution and Learning. - 2014. - P. 37-47.
- [10] Jukasik S., Kowalski P. Fully Informed Swarm Optimization Algorithms: Basic Concepts, Variants and Experimental Evaluation // Proceedings of the 2014 Federated Conference on Computer Science and Information Systems. - IEEE, 2014. - Vol.2. - P.155–161.
- [11] Kennedy J., Eberhart, R.C. Particle swarm optimization // IEEE International Conference on Neural Network. - 1995. - P. 1942-1948.
- [12] Khan S.U., Yang S., Wang L., Liu L. A Modified Particle Swarm Optimization Algorithm for Global Optimizations of Inverse Problems // IEEE Transactions on Magnetics. - IEEE, 2016. - Vol.52. - DOI:10.1109/TMAG.2015.2487678 (дата обращения: 17.03.2018)
- [13] Lasisi A., Ghazali R., Chiroma H. Utilizing clonal selection theory inspired algorithms and K-means clustering for predicting OPEC carbon dioxide emissions from petroleum consumption // Advances in Intelligent Systems and Computing. - 2017. - Vol.549. - P. 101-110.
- [14] Liefooghe A., Jourdan L., Legrand T., Humeau J., Talbi E. ParadisEO-MOEO: A Software Framework for Evolutionary Multi-objective Optimization // Studies in Computational Intelligence. - Springer, 2010. - Vol. 272. - P. 87-117.

- [15] Liu F., Zhou Z. A new data classification method based on chaotic particle swarm optimization and least square-support vector machine // Chemometrics and intelligent laboratory systems. - 2015. - P.147-156.
- [16] Moraglio A., Di Chio C., Poli R. Geometric Particle Swarm Optimisation // EuroGP, LNCS 445. - 2007. - P. 125-135.
- [17] Mu A., Cao D., Wang X. A Modified Particle Swarm Optimization Algorithm // Natural Science. - 2009. - Vol.1, No.2. - P. 151-155.
- [18] Пичужкина А.В. Метод роя частиц в задачах оптимальной ориентации спутников // Магистерская работа. - МФТИГУ, 2017. - 35 с.
- [19] Samigulina G.A. Immune network modeling technology for complex objects intellectual control and forecasting system: monograph. - USA: Science Book Publishing House, 2015. - 172 p.
- [20] Samigulina G.A., Massimkanova Zh.A. Computer modeling og new drugs based on the methods of swarm intelligence and immune network modeling // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". - 2017. - Vol. 50(1271). - C. 88-94.
- [21] Самигуллина Г.А., Масимканова Ж.А. Онтологические модели алгоритмов роевого интеллекта для иммунносетевого моделирования лекарственных препаратов // Вестник КазНУ им. аль-Фараби: серия математика, механика, информатика. - Алматы, 2017. - № 1 (93). - С. 92-104.
- [22] Samigulina G.A., Samigulina Z.I. The construction of an optimal immune network model for forecasting the properties of unknown drug compounds on the basis of multialgorithmic approach // Problems of informatics. - 2013. - Vol. 2. - P. 21-29.
- [23] Самигуллина Г.А., Самигуллина З.И. Применение современных методов Data Mining для прогнозирования зависимости "структура/свойство" химических соединений сульфаниламидов // Проблемы эволюции открытых систем. - Алматы-Красноярск, 2017. - Вып.19, Т.№2. - С. 99-107.
- [24] Shen H., Zhao Y. An improved cooperative PSO algorithm // Mechatronic Science, Electric Engineering and Computer. - IEEE, 2011. - DOI: 10.1109/MEC.2011.6025643 (дата обращения: 19.11.2017)
- [25] Shi Y., Eberhart R.C. A modified particle swarm optimizer // Proceedings of Congress on Evolutionary Computation. - 1998. - P. 73-79.
- [26] Thamaraichelvi B., Yamuna G. Hybrid firefly swarm intelligence based feature selection for medical data classification and segmentation in SVD - NSCT domain // International Journal of Advanced Research. - 2016. - Vol. 4(9). - P. 744-760.
- [27] Timmis J., Neal M., Hunt J. An artificial immune system for data analysis // BioSystems. - 2000. - № 55 (1). - P. 143-150.
- [28] Umapathy P., Venkataseshiah C., Arumugam M.S. Particle Swarm Optimization with Various Inertia Weight Variants for Optimal Power Flow Solution // Discrete Dynamics in Nature and Society. - 2010. - URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2010/462145> (дата обращения: 15.05.2018)
- [29] Zhan Z., Zhang J., Li Y., Chung H.S. Adaptive Particle Swarm Optimization // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. - 2009. - Vol. 39. - P.1362-1381.
- [30] Molecular descriptors [Электрон.ресурс]. - 2017. - URL: <https://www.molinstincts.com/features/features03.html> (дата обращения: 15.03.2018)
- [31] Python implementation of Particle Swarm Optimization [Электрон.ресурс]. - 2017. - URL: <http://yarpiz.com/463/ypea127-python-implementation-particle-swarm-optimization-pso> (дата обращения: 15.03.2018)
- [32] Particle swarm optimization for non-linear programming [Электрон.ресурс]. - 2011. - URL: <http://github.com/swax/SwarmNLP> (дата обращения: 29.11.2017)
- [33] Tribes particle swarm optimization technique [Электрон.ресурс]. - 2013. - URL: <http://tribespso.codeplex.com> (дата обращения: 14.03.2017)

References

- [1] Ahmad I., «Feature Selection Using Particle Swarm Optimization in Intrusion Detection», *International Journal of Distributed Sensor Networks* 11 (2015), accessed on March 28,2018, <https://doi.org/10.1155/2015/806954>
- [2] Bin J., Zhigang L. and Xingsheng G., «A dynamic inertia weight particle swarm optimization algorithm», *Chaos, Solitons and Fractals* 37 (2008): 698-705.
- [3] Carkli Y.B., Sertkaya C. and Yurtay N., «Prediction of secondary structures of hemoglobin using clonal selection algorithm», *Proc. 7th International Workshop on Computer Science and Engineering*(2017): 1387-1391.
- [4] Farsangi M.M., Nezamabadi-pour H. and Lee K.Y., «Implementation of GCPSO for Multi-objective VAr Planning with SVC and Its Comparison with GA and PSO», *Intelligent Systems Applications to Power Systems* (2007), accessed March 15, 2018, DOI:10.1109/ISAP.2007.4441632
- [5] Goodarzi M. and Dejaegher B., «Feature selection methods in QSAR studies», *Journal AOAC Int* 95(3) (2012): 636-651.
- [6] Guo L. et al., «A comparison of various optimization algorithms of protein-ligand docking programs by fitness accuracy», *Journal Molecular modeling* 20(7) (2014): 2251.
- [7] Hall M.A., «Correlation-based Feature Selection for Machine Learning». PhD diss., The University of Waikato, 1999.
- [8] Jena P.K. and Parhi D.R., «A Modified Particle Swarm Optimization Technique for Crack Detection in Cantilever Beams», *Arabian Journal for Science and Engineering* 40 (2015): 3263–3272.
- [9] Jia Y. et al., «Generating Software Test Data by Particle Swarm Optimization», *Materials of Asia-Pacific Conference on Simulated Evolution and Learning* (2014): 37-47.
- [10] Jukasik S. and Kowalski P., «Fully Informed Swarm Optimization Algorithms: Basic Concepts, Variants and Experimental Evaluation», *Proceedings of the 2014 Federated Conference on Computer Science and Information Systems* 2 (2014):155–161.
- [11] Kennedy J. and Eberhart R.C., «Particle swarm optimization», *IEEE International Conference on Neural Network* (1995): 1942-1948.
- [12] Khan S.U. et al., «A Modified Particle Swarm Optimization Algorithm for Global Optimizations of Inverse Problems», *IEEE Transactions on Magnetics* 52 (2016), accessed March 17, 2018, DOI:10.1109/TMAG.2015.2487678.
- [13] Lasisi A., Ghazali R. and Chiroma H., «Utilizing clonal selection theory inspired algorithms and K-means clustering for predicting OPEC carbon dioxide emissions from petroleum consumption», *Advances in Intelligent Systems and Computing* 549 (2017): 101-110.
- [14] Liefooghe A. et al., «ParadisEO-MOEO: A Software Framework for Evolutionary Multi-objective Optimization», *Studies in Computational Intelligence* 272 (2010): 87-117.
- [15] Liu F. and Zhou Z., «A new data classification method based on chaotic particle swarm optimization and least square-support vector machine», *Chemometrics and intelligent laboratory systems* (2015): 147-156.
- [16] Moraglio A., Di Chio C. and Poli R., «Geometric Particle Swarm Optimization», *EuroGP, LNCS* 445 (2007): 125-135.
- [17] Mu A., Cao D. and Wang X., «A Modified Particle Swarm Optimization Algorithm», *Natural Science* 1 (2009):151-155.
- [18] Pichuzhkina A.V., «Metod roya chastic v zadachah optimalnoi orientacii sputnikov». [Particle swarm optimization in problems of optimal orientation of satellites] Master diss., Moscow Institute of Physics and Technology, 2017.
- [19] Samigulina G.A., *Immune network modeling technology for complex objects intellectual control and forecasting system*. USA: Science Book Publishing House, 2015, 172.
- [20] Samigulina G.A. and Massimkanova Zh.A., «Computer modeling og new drugs based on the methods of swarm intelligence and immune network modeling», *Bulletin of national technical university "KHPI"* 50(1271) (2017): 88-94.
- [21] Samigulina G.A. and Massimkanova Zh.A., «Ontologicheskie modeli algoritmov roevogo intellekta dlya immunnosetevogo modelirovaniya lekarstvennyh preparatov». [The ontological models of swarm intelligence algorithm for immune network modeling of medical drugs] *Bulletin of Al-Farabi Kazakh national university: Mathematics, Mechanics and Computer Science Series* 1(93)(2017): 92-104.
- [22] Samigulina G.A., Samigulina Z.I., «The construction of an optimal immune network model for forecasting the properties of unknown drug compounds on the basis of multialgorithmic approach», *Problems of informatics* 2 (2013): 21-29.

- [23] Samigulina G.A., Samigulina Z.I., «Применение современных методов Data Mining для прогнозирования зависимости "структура-свойство" химических соединений сульфаниламидов», [Application of modern methods of Data Mining for prediction "structure/property" relationship of chemical compounds of sulfonamides] *Problems of evolution of open systems* 19 (2017): 99-107.
- [24] Shen H., Zhao Y., «An improved cooperative PSO algorithm», *Mechatronic Science, Electric Engineering and Computer* (2011), accessed November 19, 2017, DOI: 10.1109/MEC.2011.6025643
- [25] Shi Y. and Eberhart R.C., «A modified particle swarm optimizer», *Proceedings of Congress on Evolutionary Computation* (1998): 79-73.
- [26] Thamaraihelvi B. and Yamuna G., «Hybrid firefly swarm intelligence based feature selection for medical data classification and segmentation in SVD - NSCT domain», *International Journal of Advanced Research* 4(9) (2016): 744-760.
- [27] Timmis J., Neal M. and Hunt J., «An artificial immune system for data analysis», *BioSystems* 55 (1) (2000): 43-150.
- [28] Umapathy P., Venkataseshiah C. and Arumugam M.S., «Particle Swarm Optimization with Various Inertia Weight Variants for Optimal Power Flow Solution», *Discrete Dynamics in Nature and Society* (2010), accessed May 15, 2018, <http://dx.doi.org/10.1155/2010/462145>.
- [29] Zhan Z. et al., «Adaptive Particle Swarm Optimization», *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 39 (2009): 1362-1381.
- [30] «Molecular descriptors», accessed March 15, 2018, <https://www.molininstincts.com/features/features03.html>
- [31] «Python implementation of Particle Swarm Optimization», accessed March 15, 2018, <http://yarpiz.com/463/ypea127-python-implementation-particle-swarm-optimization-ps>
- [32] «Particle swarm optimization for non-linear programming», accessed November 19, 2017, <http://github.com/swax/SwarmNLP>
- [33] «Tribes particle swarm optimization technique», accessed March 14, 2017, <http://tribespso.codeplex.com>

Design of adaptive unstructured grids using differential methods

Turar O.N., Al-Farabi Kazakh National University,
 Almaty, Kazakhstan, E-mail: turar_olzhas@mail.ru
 Akhmed-Zaki D.Zh., University of International Business
 Almaty, Kazakhstan, E-mail: Darhan.Ahmed-Zaki@kaznu.kz

Adaptive generation of computational grids can improve the efficiency of mathematical modeling by increasing the accuracy of numerical approximations. The paper describes a method for constructing unstructured grids with adaptation based on differential methods. The application of these methods ensures a smooth distribution of the geometric characteristics of the grid, i.e. the appearance of adjacent cells that differ greatly in size and shape becomes unlikely. To achieve proper adaptation in unstructured grids we use the novel approach based on methodology of adaptive structured grid construction. This approach uses the method of grid construction based on solving inverted Beltrami equation to create mapping of some sample grid domain to the physical area. This mapping is used to construct point set on which the unstructured grid is constructed using Delaunay triangulation method. Thus, the result is unstructured grid with proper adaptation. Adding fault and fractures or other structure elements may be supported by implementing constrained Delaunay triangulation.

Key words: computational grid construction algorithm, unstructured mesh, adaptive mesh, differential elliptic equations, reversed Beltrami equation

Дифференциалды әдістердің қолданып бейімделген құрылымдық емес торларды құру
 Тұрар О.Н., Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті,
 Алматы қ., Қазақстан, E-mail: turar_olzhas@mail.ru
 Ахмед Заки Д.Ж., Халықаралық Бизнес Университеті
 Алматы қ., Қазақстан, E-mail: Darhan.Ahmed-Zaki@kaznu.kz

Есептеуіш бейімделген торларды жасау сандық аппроксимация дәлдігін арттыру арқылы математикалық модельдеудің тиімділігін арттырады. Мақалада дифференциалды әдістерге негізделген бейімделген құрылымдық емес торларды құру әдісі сипатталған. Осы әдістердің қолдану тор ұяшықтарының геометриялық сипаттамаларының тегістелуін қамтамасыз етеді, яғни бұл жағдайда көрші ұяшықтардың көлемдері мен пішіндері тым ұқсамау мүмкіндігі өтеді. Құрылым сақтамайтын торларда дұрыс бейімделуді қамтамасыз ету үшін адаптивті құрылымдық торларды құру әдістемесіне негізделген жаңа тәсіл қолданылады. Бұл тәсілде керіленген Белтрами теңдеуін шешуге негізделген торларды құру әдісі белгілі бір анықтамалық аймақты физикалық түрде картага бейнелеуді табу үшін пайдаланылады. Осы салыстыруды пайдалана отырып, Делоне триангуляция әдісін пайдаланып құрылым сақтамайтын тор құру үшін пайдаланылатын нүктелер жиынтығы жасалады. Осылайша, нәтиже дұрыс бейімделуі бар құрылым сақтамайтын тор болып табылады. Жарықтар және сынықтар немесе басқа да құрылымдық элементтердің қосу шектеулері бар Делоне триангуляциясының көмегімен жүзеге асырылады.

Түйін сөздер: Есептеу торын құру алгоритмі, құрылымдық емес тор, бейімделген тор, дифференциалдық эллиптикалық теңдеулер, керіленген Белтрами теңдеуі.

Разработка аддаптивных неструктурированных сеток с помощью дифференциальных методов

Тұрар О.Н., Казахский национальный университет имени Аль-Фараби
 Алматы, Казахстан, E-mail: turar_olzhas@mail.ru
 Ахмед-Заки Д.Ж., Университет Международного Бизнеса
 Алматы, Казахстан, E-mail: Darhan.Ahmed-Zaki@kaznu.kz

Генерация вычислительных адаптивных сеток может повысить эффективность моделирования за счет повышения точности численной аппроксимации. В статье описывается метод построения неструктурированных сеток с адаптацией на основе дифференциальных методов. Применение этих методов обеспечивает плавное распределение геометрических характеристик ячеек сетки, то есть возможность появления соседних ячеек, которые сильно отличаются по размеру и форме, является крайне низкой. Для обеспечения надлежащей адаптации в неструктурированных сетках используется новый подход, основанный на методологии построения адаптивных структурированных сеток. В этом подходе используется метод построения сеток на основе решения обращенного уравнения Бельтрами для создания отображения некоторой эталонной области в физическую. С помощью этого отображения строится набор точек, который будет использован для построения неструктурированной сетки методом триангуляции Делоне. Таким образом, результатом является неструктурированная сетка с хорошей адаптацией. Добавление разломов и трещин или других структурных ограничивающих элементов поддерживается путем реализации триангуляции Делоне с ограничениями.

Ключевые слова: алгоритм построения расчетных сеток, неструктурированная сетка, адаптивная сетка, дифференциальные эллиптические уравнения, обращенное уравнение Бельтрами.

1 Introduction

Adaptation methods for computational grid generation improve the efficiency of physical simulations. They increase accuracy of numerical approximations, because most industrial computational processes have big changes of physical values in some parts of domain. It leads to high gradients and values of solution in those locations which, in turn, leads to lack of accuracy.

Generally grids constructed to numerical solving of partial differential equations are grouped into two essential groups: structured and unstructured grids [1]. Each of those groups has its own construction methodology and fields of use which is almost does not intersect. However, some theoretical principles that may be implemented to overall numerical grids let us consider comparing and combining those methods. One of those is adaptation of the grids.

Adaptive grids allow researchers to avoid creating fine grids for the whole domain. Such grids critically increase computational run time. In many cases locations with smooth solution does not need such surplus accuracy, since it does not take effect considering bad accuracy of places with high gradients of solution.

Computational grids can be constructed in such a way that the places of such big solution values and gradients are covered with small cells. It reduces the error of numerical solution generated in the locations of steep gradients and high values. The grid on the smooth solution locations is coarsened to optimize the computation time. Computational grids are grouped into fundamentally different types of grids called structured and unstructured grids. Both of them have own grid construction methodology.

Unstructured grids are widely used in finite element and finite volume methods. They are necessary in certain situations and have a several benefits comparing to structured grids in case of complicated shapes of domain. Mostly such grids are constructed by geometric and graph methods. The adaptation in those methods are done by adding additional points in the certain locations of the grid.

Common structured grids usually used in finite difference methods are constructed using simple algebraic methods. But the construction gets complicated in situations of adaptation

to physical area boundaries and control functions. In such case the structured grid represents curvilinear coordinate system and found by solving non-linear differential equations.

The paper describes grid construction method that has positive characteristics of both approaches by combining them in one method. Combination implemented by constructing unstructured grid based on set of points uniformly scattered over the curvilinear structured grid. In such method the result grid is unstructured grid and, therefore, have all its positive sides. It also keeps the smooth adaptation based on differential methods.

2 Literature review

Most of unstructured grid generation algorithms [2] have 3 groups separated by general approach to construction. First group is advancing front algorithms [3, 4]. In such algorithms they grid is constructed by attaching new cells to the existing grid starting from boundaries of the domain. Next approach is iterative construction of Delaunay triangulation by adding new points to the existing triangulation [5, 6]. After adding the new point whole triangulation is to be reconstructed to satisfy principle of Delaunay. Algorithms based on tree containers such as quadtree algorithms [7, 8]. In such algorithms the forms of the result grid cells may be far from perfect. However this approach allows very convenient adaptation of grid in terms of cell fining.

These approaches may be improved to support constrained grids such as constrained delaunay triangulation [9, 10]. Constrained grids are the grids that keep some initial given structure elements such as pre initialized curves or edges, surfaces and volumes. This is the way we are going to add faults and fractures in the mesh.

In the case of unstructured grids several approaches exist at the moment [11, 12, 13, 14, 15]. But all of them based on the algebraic methods. In common case it is hard for algebraic methods to guarantee such good characteristics of grid as smoothness and proper cell forms. Best numerical grids keep the similarity of forms and sizes of adjacent cells all over the domain. Methods based on differential equations can be very handful in for this purpose.

Such differential methods are very widely used in structured grid construction. Methods are based on numerical differential geometry and those lead to very natural adaptation of structured grids [16, 17, 18]. There are very much of such approaches of constructing structured adaptive grids [19, 20, 21, 22].

Namely, the approach we are going to use is solving the inverted Beltrami equation [19, 17]. This approach guarantee the property of smoothness for cell form and size changes since it is based on variational methods. The equation is taken by minimization of energy functional which is based on theory of constructing isometric coordinate system on the surface [16]. Thus, the approach is the best in terms of the physicality of the result grids.

3 Materials and methods

3.1 Unstructured grid construction

To construct unstructured grids, we used Delaunay triangulation and Voronoy diagram [6] since they create comparatively good grids for computations on the given set of points using control volume methods. Delaunay triangulation is the triangulation of the set of points in

which all the triangles and points satisfy principle of Delaunay (figure 1A). This principle states that the triangles are not to contain other points from set inside of their circumcircles. The goal is to create such grids in common cases with initial structural limitations such as pre-defined edges that cannot be reconstructed.

To implement support of limitations we chose iterative method that allows adding new points to existing Delaunay triangulation. On figure 1 cases of adding new points inside the triangular cells and on the existing edge are demonstrated. Simple fragmentation of those cells may lead to appearance of cells that does not satisfy the principle of Delaunay. For such triangle and point we have to make flip operation, i.e. change diagonal in quadrilateral convex figure constructed on those 4 points (figure 1, E).

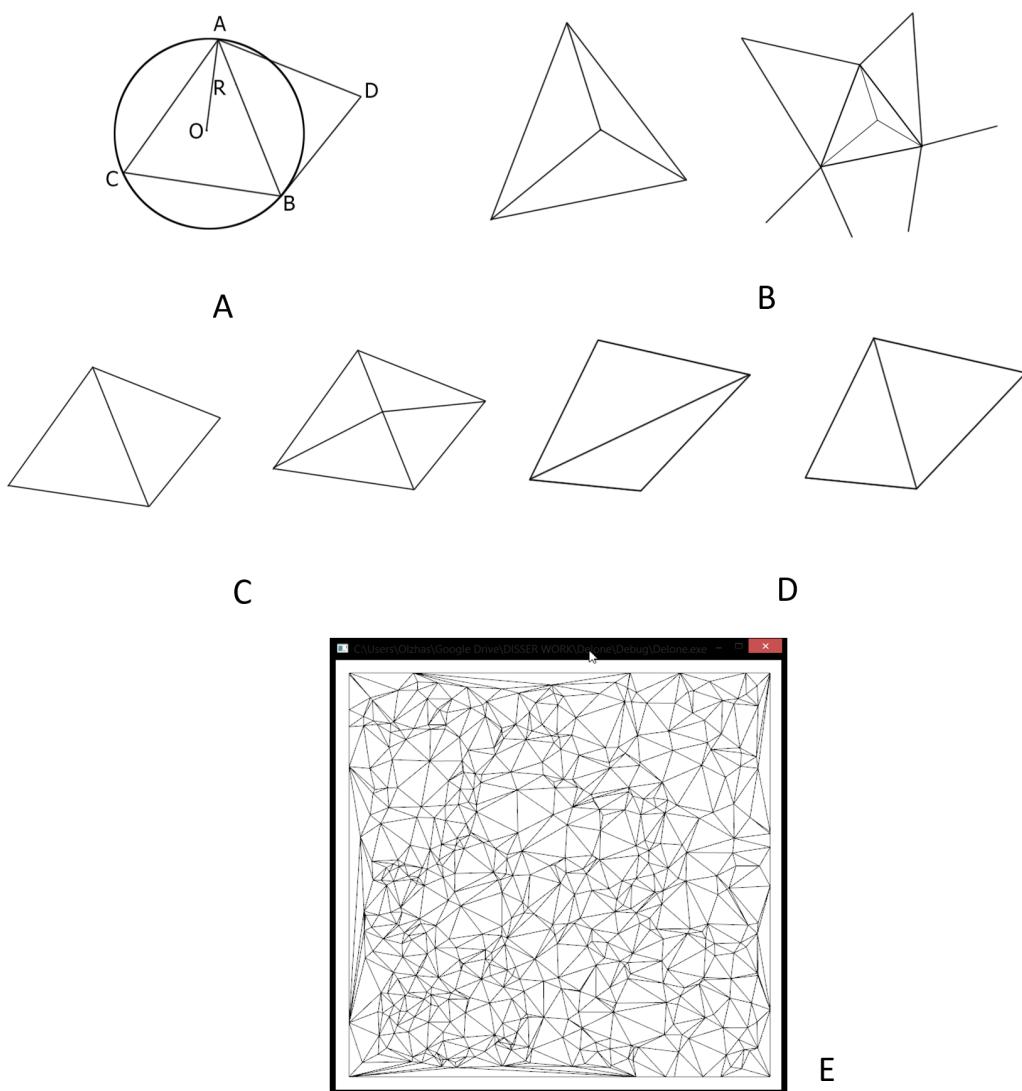


Figure 1 - Delaunay triangulation: A) Delaunay principle; B) Delaunay construction: adding new point in triangular cell; C) Delaunay construction: adding new point to existing edge; D) flip operation; E) demonstration of constructed triangulation on the random 100 points

Diagram of Voronoy is constructed using Delaunay triangulation by constructing central perpendicular segments for every triangle of Delaunay triangulation. Those segments connect mass centers of corresponding triangles. Such grid has many positive sides for computation using finite volume methods.

3.2 Adaptive structured grid construction

Structured grid adaptations are based mostly on solving differential elliptic equations. Consequently, they tend to smooth scattering of nodes of the grid. They find the mapping of some sample domain with common cartesian grid to the given physical area (figure 2, A). One of the most advanced in terms of adaptation is the method based on solving reversed Beltrami equation. The following equation is the reversed Beltrami equation that can be used to construct structured grids adaptive to gradients or values of scalar fields or to directions of vector field [19, 17].

$$\frac{\partial}{\partial s^j} (\sqrt{g^s} g_s^{jl}) = \sqrt{g^s} g_s^{im} \frac{\partial^2 s^l}{\partial \xi^i \partial \xi^m} \quad (1)$$

In the formula (1), repeating indexation means summation over those indexes on the one side of equality. S represents new grid coordinate system and ξ^i is initial grid's curvilinear coordinate system. Here g_s^{jl} are contravariant tensor components and g^s is its determinant of the mapping shown in figure 2, A. Equation (1) is non-linear in such form and cannot be solved using standard elliptic equation solving methods, so to solve it we have to add time derivative. Thus, we convert it into parabolic equation and solve it by iterations. In each iteration we get new curvilinear grid which is little closer to the result adaptation than the previous one. Boundary conditions in those methods are taken by solution of the same problem on the lesser dimension. For 3D domain it is surface grid construction which in turn uses curve 1D grids as boundary conditions. The result grid constructed by described method shown in figure 2.

3.3 Proposed adaptive unstructured grid method

The unstructured grid construction method described above can construct it on any point set. So, the problem is initialization of the proper point set.

Our way to choose the point set is to use curvilinear adaptation provided by differential methods. The set is uniformly scattered on the sample domain, which is represented on the left side of figure 2, A. So, after mapping it represents uniformly scattered set with adaptation to the values of some scalar control function. Further this adapted set of points is used to construct the unstructured grid. Figures 3 and 4 demonstrates the results of the implementation of proposed algorithm. The points in figure 3 are chosen simply as the nodes of structured grid after adaptation. Since the sample cells are squares adaptive grid lines are still close to orthogonal. Therefore, in triangulation represented in figure 3, B, we can see that triangles are close to right triangles.

Figure 4 demonstrates unstructured grid constructed on the adaptive set of points. This set defined by mapping of regular triangulation on the sample field.

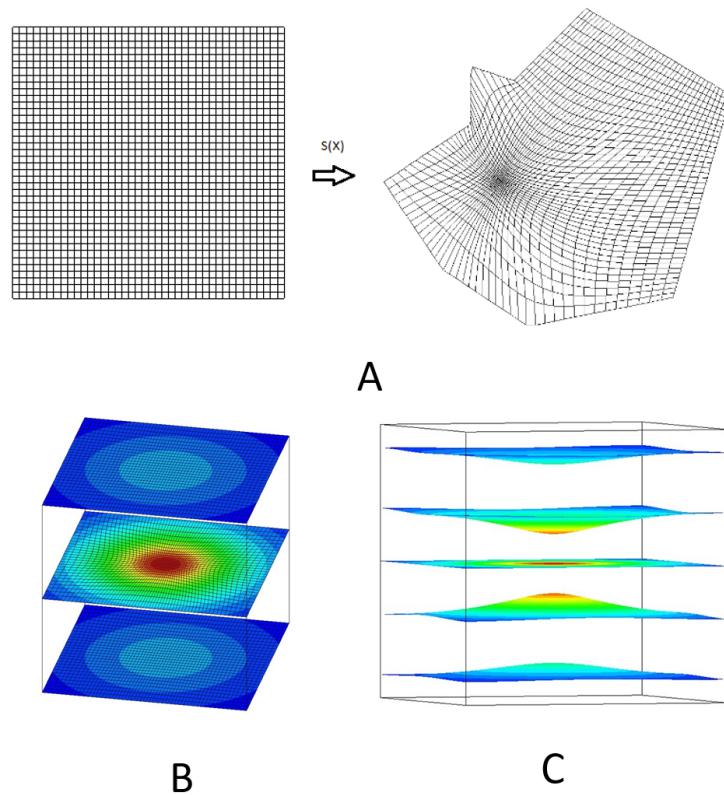


Figure 2 - Structured grid construction: A) mapping demonstration; B-C) using reversed Beltrami equation, control function is presented by colors

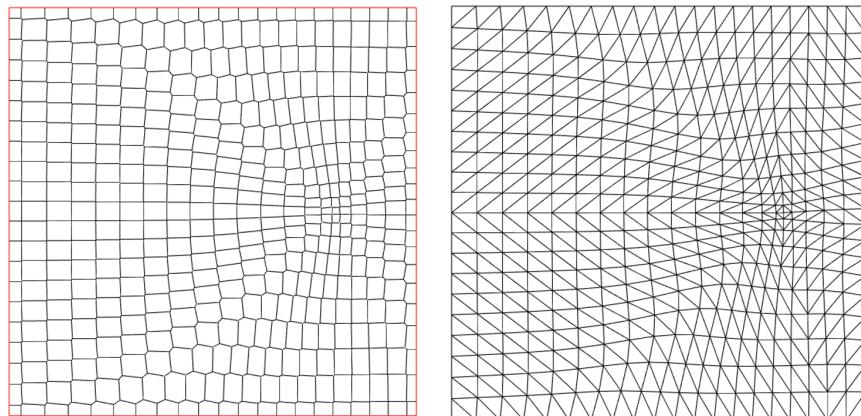


Figure 3 - Example of unstructured grid constructed using points set defined by nodes of adaptive structured grid: left – Voronoi diagram and right – Delaunay triangulation

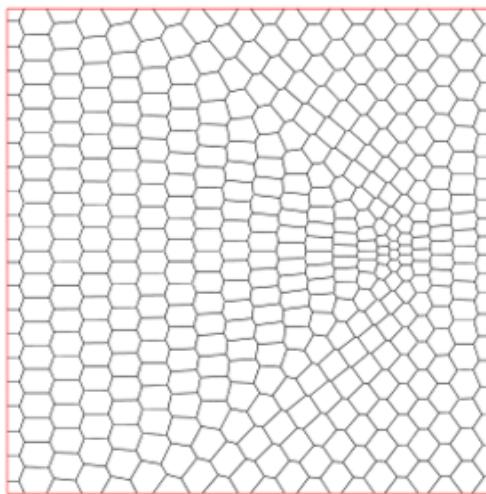


Figure 4 - Example of unstructured grid constructed using adaptive close regular points set

4 Results and discussion

In real industrial applications of physical simulation, the domain of physical process may have very complicated forms. They may have inner limitation structures, such as faults or fractures or very sophisticated boundary topology. In such cases it is very hard to use structured grids even with adaptation. Adaptive structured grids demand choosing sample domain for mapping close enough to physical one. Since in opposite case it is possible to generate prolonged cells of grid. This process is not automatized at all and it is the first serious drawback of the adaptive structured grids.

Complicated boundaries force researchers to make extremely fine grids near those boundaries in structured grids. Because the topology of the boundary has to become smoother in inner part of the domain. It leads redundant amount of fine parts and overall loss of optimization. In case when the domain has structural elements that put limitations for computational grid construction such as, for example, faults and fractures of porous media or some objects inside of continuous media, etc., unstructured grids also have benefits comparing structured grids. Those structural lines or surfaces can intersect in random order and make complicated non-structured topology. In such cases it is impossible for grid lines to trace the limitation lines. But in many cases, it is necessary to trace those lines as accurate as possible in numerical methods since the behaviour of the model along them are very critical to correctness of the solution.

Those advantages of unstructured grids fully preserved in our method since our result grid is unstructured grid. Only the choose of the sample domain for adaptive structured grid generation is still not automatized and have to be done manually before construction. However now it is not such limited as in construction of fully structured grid on the physical domain. Now the mapping must not map exactly to given boundaries. In general, it is enough to map to some area that contains whole physical domain. Researcher still have possibility to manually bind some boundaries or inner grid lines to boundaries or inner structural limitations of physical area correspondingly to get grids with proper tracing of such structural elements.

Adaptive structured grids in turn have main advantage that briefly can be stated as physicality of adaptation. Since we got adaptation on the base of solving differential equations that also used to describe the behaviour of physical simulations. Namely elliptic equations are used to implement diffusion processes and, therefore, to produce smoothly adaptive grids. This leads to smooth changes of such grid cell properties as size and elongation, i.e. how much the cell is squeezed in one dimension.

Existing unstructured grid adaptation techniques are based on using algebraic, geometry and graph algorithms. It is very unnatural and inconvenient to design those methods in such a way that they can guarantee the smoothness of such properties of the grid. Most of them does not guarantee that there are no leaps in size changes of adjacent cells. But the smoothness of size and forms of cells shows positive impact on the accuracy of the overall numerical method.

Unlike them differential methods based on elliptic equations guarantee such smoothness. It is due to fundamental property of elliptic equations to even the values of solution. Also, the method of solving reversed Beltrami equation is based on minimization of energy functional. It constructs the adaptive coordinate system in such way that grid cells are close to equal in case when the control metric is the metric of the surface itself.

Our method keeps that smoothness property of adaptive grid and transfer it to unstructured grids. Initial point set on sample domain is regular triangular grid nodes and its adaptation tries to keep those regularity. Due to that fact inner angles of cells are close to each other in the whole triangulation. Exceptions may occur if we need to add structural limitation lines that are not traced by structured grid lines because in such case initial point set has not any kind of relation to the predefined structural line or surface.

One significant drawback of adaptive structured grids is the process of using it with finite difference methods. Since the computational grid on physical domain is a mapping of some sample grid researchers must bring the expression to the correct form. Expressions are to be modified by substituting function to be found by its complicated mapped form and further implementation of all the derivations. Thus, researcher obtains complicated equation with Jacobians of the mapping and components of the metric tensor. Simple heat transfer equation is written in the following form

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu & \left(\frac{\partial}{\partial \xi^1} (\sqrt{g} g^{11} \frac{\partial u}{\partial \xi^1} + \sqrt{g} g^{12} \frac{\partial u}{\partial \xi^2} + \sqrt{g} g^{13} \frac{\partial u}{\partial \xi^3}) + \right. \\ & \frac{\partial}{\partial \xi^2} (\sqrt{g} g^{21} \frac{\partial u}{\partial \xi^1} + \sqrt{g} g^{22} \frac{\partial u}{\partial \xi^2} + \sqrt{g} g^{23} \frac{\partial u}{\partial \xi^3}) + \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \xi^3} (\sqrt{g} g^{31} \frac{\partial u}{\partial \xi^1} + \sqrt{g} g^{32} \frac{\partial u}{\partial \xi^2} + \sqrt{g} g^{33} \frac{\partial u}{\partial \xi^3}) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

This process has to be done manually for every equation in the model and yet has not any automatization. Solving the same equation with the finite volume method is much easier. Taking into account the fact that we have constructed Voronoy diagram and choose initial points as cell centers we can avoid non-orthogonal diffusion components in approximation. This approximation has not any differences from any other unstructured grid.

However, the most important reason to use adaptive structured grids is a possibility to use finite differences method with higher order approximation difference schemes. Proposed approach may be handy in situations when those schemes are not necessary.

5 Conclusion

The paper describes methods of unstructured grid construction based on differential methods. Differential equations are very good when it is necessary to create adaptive grids with smooth change of cell sizes and forms. Up to the moment such methods were used mostly for construction of adaptive structured grids. To transfer this property to unstructured grids we implemented standard grid construction algorithms with ability to construct grid on any given set of points. Further we choose the set of points that are going to be nodes of the Delaunay triangulation and centres of Voronoy diagram by solving boundary problem for reverse Beltrami equation. Solving the equation provides certain mapping of some sample grid to physical domain and we use that mapping to define the point set with adaptation.

Such approach gives us a list of advantages comparing raw adaptive structured grids. It is more effective and convenient to use in most cases except the case when it is important to use finite difference approximation schemes of higher order. Also, such method has good influence to adaptation of unstructured grid since differential elliptic methods have fundamental property to smoothen the solution.

6 Future work

This work is the first step of using differential methods for unstructured grid construction. At the moment it is simple sequential execution of two algorithms using the results of structured adaptive grid as an initialization point set to unstructured grid construction. Further work is going to be aimed to solving of the described differential equations by FEM or FVM methods for construction of unstructured grids.

7 Acknowledgements

This work was performed as part of the grant funding Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan on the topic "Development of a distributed high-performance information system for analysis of oil and gas fields within the «i-fields» concept".

References

- [1] Thompson, Joe F., B. K. Soni, and N. P. Weatherill. *Handbook of Grid Generation*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999.
- [2] Shewchuk, J. R. "Unstructured mesh generation." In U. Naumann and O. Schenk, editors, *Combinatorial Scientific Computing*, CRC Press, chapter 10 (2012):257–297.
- [3] Lo, S. H. "A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 21, no. 8 (1985): 1403-426. doi:10.1002/nme.1620210805.
- [4] Peraire, J., J. Peir?, and K. Morgan. "Adaptive Remeshing for Three-dimensional Compressible Flow Computations." *Journal of Computational Physics* 101, no. 1 (1992): 229. doi:10.1016/0021-9991(92)90068-a.
- [5] Shewchuk, J.R. "Tetrahedral mesh generation by Delaunay refinement." *Symp. on Comp. Geom.* (1998):86–95.
- [6] Klein, Rolf, Franz Aurenhammer, and Der-Tsai Lee. *Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations*. New Jersey: World Scientific, 2013.

-
- [7] Yerry, Mark, and Mark Shephard. "A Modified Quadtree Approach To Finite Element Mesh Generation." *IEEE Computer Graphics and Applications*. 3, no. 1 (1983): 39-46. doi:10.1109/mcg.1983.262997.
 - [8] Mitchell, Scott A., and Stephen A. Vavasis. "Quality Mesh Generation in Three Dimensions." *Proceedings of the Eighth Annual Symposium on Computational Geometry - SCG*. 92 (1992). doi:10.1145/142675.142720.
 - [9] Frederick, C. O., Y. C. Wong, and F. W. Edge. "Two-dimensional Automatic Mesh Generation for Structural Analysis." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2, no. 1 (1970): 133-44. doi:10.1002/nme.1620020112.
 - [10] Der-Tsai Lee and Arthur K. Lin. "Generalized Delaunay Triangulations for Planar Graphs.,, *Discrete & Computational Geometry*, 1 (1986):201–217.
 - [11] Bronson, Jonathan R., Shankar P. Sastry, Joshua A. Levine, and Ross T. Whitaker. "Adaptive and Unstructured Mesh Cleaving." *Procedia Engineering*. 82 (2014). doi:10.1016/j.proeng.2014.10.389.
 - [12] Riemsagh, K., and E. Dick. "A multigrid method with unstructured adaptive grids for steady Euler equations." *Journal of Computational and Applied Mathematics* 67 (1996): 73-93.
 - [13] Vilsmeier, R., and D. H?nel. "Adaptive Methods on Unstructured Grids for Euler and Navier-Stokes Equations." *Computers & Fluids*. 22, no. 4-5 (1993): 485-99. doi:10.1016/0045-7930(93)90021-z.
 - [14] Bronson, Jonathan R., Joshua A. Levine, and Ross T. Whitaker. "Particle Systems for Adaptive, Isotropic Meshing of CAD Models." *Proceedings of the 19th International Meshing Roundtable*. (2010). doi:10.1007/978-3-642-15414-0_17.
 - [15] Mavriplis, D. J. "Unstructured Grid Techniques." *Annual Review of Fluid Mechanics*. 29, no. 1 (1997): 473-514. doi:10.1146/annurev.fluid.29.1.473.
 - [16] Vekua, I. N. *Generalized Analytic Functions*. Oxford: Pergamon Press, 1962.
 - [17] Liseikin, V. D. *Grid Generation Methods*. Cham: Springer, 2017.
 - [18] Castillo, Jose E. *Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation*. Philadelphia: SIAM, 1991.
 - [19] Glasser, A. H., V. D. Liseikin, and I. A. Kitaeva. "Specification of Monitor Metrics for Generating Vector Field-aligned Numerical Grids." *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 20, no. 5 (2005):439-461. doi:10.1515/156939805775186686..
 - [20] Godunov, S. K., A. V. Zabrodin, and M. Ja. Ivanov. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki (Numerical solving of multidimensional problems in gas dynamics)*. Moscow: Nauka, 1976.
 - [21] Khakimzyanov, G. S., and N. Yu. Shokina. "Equidistribution Method for the Construction of Adaptive Grids." *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling* 14, no. 4 (1999):339-358. doi:10.1515/rnam.1999.14.4.339.
 - [22] Thompson, Joe F., Z. U. A. Warsi, and C. Wayne. Mastin. *Numerical Grid Generation: Foundations and Applications*. New York: North-Holland, 1985.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал «Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика» (в английской версии «Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science Series») принимаются набранные только в текстовом формате L^AT_EX2ε на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat.dairbayeva@gmail.com (ответственный секретарь редколлегии, Даираева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы (название вуза, центра без сокращений), рабочий или моб. телефон, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета L^AT_EX2ε или формат eps [см. п.7]. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисуточными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 7 страниц.

Структура статьи.

Первая страница:

- 1) Первая строка - номер МРНТИ (IRSTI) (можно взять здесь: <http://grnti.ru/>), выравнивание - по левому краю, шрифт - полужирный.
- 2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 3) Автор(ы) статьи - Инициалы и фамилия, место работы (аффилиация), город, страна, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.
- 5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.

Последующая страница (новая):

Стандартные разделы статьи: **Введение, Обзор литературы, Материал и методы, Результаты и обсуждение, Заключение, Благодарности (если имеются), Список литературы** (названия разделов не менять)

- 6) **Введение.** Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания

опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором аспекте.

7) Обзор литературы. В разделе обзор литературы должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

8) Материал и методы. Раздел должен состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала - один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

9) Результаты и обсуждение. В этом разделе приводятся анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) Заключение. Обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) Благодарности (если имеются). Например: Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерством науки и образования Республики Казахстан (грант «Наименование темы гранта», 2018-2020 годы).

12) Список литературы/References. (оба списка, если статья на русском или казахском. Если статья на английском, то только один список по стилю Чикаго). Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50% на английском языке. В случае наличия в списке литературы работ, представленных на кириллице, необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый - в оригинале, второй - романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) -> название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке (год в круглых скобках) -> страницы. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossiskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4 (2011): 8-30. Список литературы представляется по мере цитирования, и ТОЛЬКО

те работы, которые цитируются в тексте. Ссылки на литературу оформляются в квадратных скобках с указанием номера литературы. Стиль оформления "Список литературы" на русском и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления"(требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления "References" романизированного списка литературы (см. выше), а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений согласно Chicago Style (www.chicagomanualofstyle.org).

В данном разделе необходимо учесть:

- a) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.
 - b) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
 - c) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
 - d) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.
6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов $\text{\LaTeX}2\epsilon$ и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.
- Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.
7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате `.eps`, либо выполнеными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов `Maple`, `Mathematica` или с помощью пакета `Latexcad`. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат `.eps` с помощью `Adobe Photoshop` или конвертера `Conversion Artist`. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.
- Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта""ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятий и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ

1-бөлім

Математика

Ioannis P. Stavroulakis

Qualitative Behavior of the Solutions to Delay and Difference Euations 3

Алдабеков Т.М., Алдаңжарова М.М.

О линейных уравнениях с частными производными первого порядка 12

Майқометов М.Н.

Задача Дирихле для многомерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка 23

Раздел 1

Математика

2-бөлім

Механика

Kydyrbekuly A.B., Rahmetolla A.Sh., Ibraev G.E., Rakhimzhanova A.Zh

About the separation of finely divided particles during centrifugation in liquid media 33

Utenov M.U., Zhilkibayeva S.K., Baygunchekov Zh.Zh., Myrzaliev D.S.

Determination of displacements in cross-sections of four-bar mechanism links from distributed dynamic loads and their animation using MAPLE 45

Раздел 2

Механика

3-бөлім

Колданылмалы математика

Kabanikhin S.I., Bektemessov M.A., Shishlenin M.A., Yang Xin-She., Bektemessov Zh.M.

Application of differential evolution algorithm for solving the Solow model with the addition of human capital 57

Раздел 3

Прикладная математика

4-бөлім

Информатика

Bissaliyev M.S., Nyussupov A.T., Mussiraliyeva Sh.Zh.

Enterprise Security Assessment Framework for Cryptocurrency Mining Based on Monero 67

Самигулина Г.А., Масимканова Ж.А.

Построение оптимальной иммунносетевой модели на основе модифицированного алгоритма роя частиц 77

Раздел 4

Информатика

Turar O.N., Akhmed-Zaki D.Zh.

Design of adaptive unstructured grids using differential methods 88

К сведению авторов 98

CONTENS**Section 1
Mathematics**

<i>Ioannis P. Stavroulakis</i>	
Qualitative Behavior of the Solutions to Delay and Difference Euations	3
<i>Aldibekov T.M., Aldazharova M.M.</i>	
On linear partial equations of first-order	12
<i>Maikotov M.N.</i>	
The Dirichlet problem for multidimensional hyperbola-parabolic equations with degeneracy of type and order	23

**Section 2
Mechanics**

<i>Kydyrbekuly A.B., Rahmetolla A.Sh., Ibraev G.E., Rakhimzhanova A.Zh.</i>	
About the separation of finely divided particles during centrifugation in liquid media	33
<i>Utenov M.U., Zhilkibayeva S.K., Baygunchekov Zh.Zh., Myrzaliyev D.S.</i>	
Determination of displacements in cross-sections of four-bar mechanism links from distributed dynamic loads and their animation using MAPLE	45

**Section 3
Applied Mathematics**

<i>Kabanikhin S.I., Bektemessov M.A., Shishlenin M.A., Yang Xin-She, Bektemessov Zh.M.</i>	
Application of differential evolution algorithm for solving the Solow model with the addition of human capital	57

**Section 4
Computer science**

<i>Bissaliyev M.S., Nyussupov A.T., Mussiraliyeva Sh.Zh.</i>	
Enterprise Security Assessment Framework for Cryptocurrency Mining Based on Monero	67
<i>Samigulina G.A., Massimkanova Zh.A.</i>	
Construction of an optimal immune network model based on the modified swarm algorithm	77
<i>Turar O.N., Ahmed-Zaki D.Zh.</i>	
Design of adaptive unstructured grids using differential methods	88
Note by authors	98