

ISSN 1563 – 0277  
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

# ХАБАРШЫ

Математика, механика, информатика сериясы

---

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

# ВЕСТНИК

Серия математика, механика, информатика

---

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

# Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№ 1 (97)

Алматы  
«Қазақ университеті»  
2018

Зарегистрирован в Министерстве информации и коммуникаций Республики Казахстан, свидетельство № 16508-Ж от 04.05.2017 г. (Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.). Язык издания: казахский, русский, английский. Выходит 4 раза в год. Тематическая направленность: теоретическая и прикладная математика, механика, информатика.

### Редакционная коллегия

научный редактор – *Б.Е. Кангужин, д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби,*  
заместитель научного редактора – *Д.И. Борисов, д.ф.-м.н., профессор, Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Россия,*  
ответственный секретарь – *Г.М. Даирбаева, к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.*

*Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., Университет международного бизнеса, Казахстан*

*Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Бектемесов М.А. – д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный педагогический университет имени Абая, Казахстан*

*Жакебаев Д.Б. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия*

*Кыдырбекулы А.Б. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института аэродинамики, Германия*

*Мальшикин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия*

*Ракишева З.Б. – к.ф.-м.н., доцент, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания*

*Сагитов С.М. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Гетеборга, Швеция*

*Сукачев Ф.А. – профессор, академик АН Австралии, Университет Нового Южного Уэльса*

*Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия*

*Темляков В.Н. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Южной Каролины, США*

*Токмагамбетов Н.Е. – PhD доктор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан*

*Шиничи Накасука – PhD доктор, профессор, Университет Токио, Япония*

### Научное издание

Вестник. Серия математика, механика, информатика, № 1(97) 2018.

Редактор – Г.М. Даирбаева. Компьютерная верстка – Г.М. Даирбаева

**ИБ N 11822**

Подписано в печать 28.03.2018 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 13,8 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ N 1523. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

IRSTI 27.29.23

**Singularly perturbed linear oscillator with piecewise-constant argument**

Akhmet M.U., Middle-east technical university, Ankara, Turkey,  
+90 (312) 210-2970, E-mail: marat@metu.edu.tr

Dauylbayev M.K., al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan,  
+7-777-232-37-69, E-mail: dmk57@mail.ru

Mirzakulova A.E., al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan,  
+7-707-859-13-90, E-mail: aziza.mirzakulova@mail.ru

Atakhan N., Kazakh state women's pedagogical university, Almaty, Kazakhstan,  
+7-701-106-30-50, E-mail: atakhan-nilupar@mail.ru

The Cauchy problem for singularly perturbed linear differential equation the second order with piecewise-constant argument is considered in the article. The definition of singularly perturbed linear harmonic oscillator with piecewise-constant argument is given in the paper. The system of fundamental solutions of homogeneous singularly perturbed differential equation with piecewise-constant argument are constructed according to the nonhomogeneous singularly perturbed differential equation with piecewise-constant argument. With the help of the system of fundamental solutions, the initial functions are constructed and their asymptotic representation are obtained. By using the reduction method, the analytical formula of the solution of singularly perturbed the initial value problem with piecewise-constant argument is obtained. In addition, the unperturbed Cauchy problem is constructed according to the singularly perturbed Cauchy problem. The solution of the unperturbed Cauchy problem is obtained. When the small parameter tends to the zero, the solution of singularly perturbed the Cauchy problem with piecewise-constant argument approaches the solution of the unperturbed Cauchy problem with piecewise-constant argument. The theorem on the passage to the limit is proved.

**Key words:** piecewise-constant argument of generalized type, small parameter, singular perturbation.

**Сингулярно возмущенный линейный осциллятор с кусочно-постоянным аргументом**

Ахмет М.У., Средне-восточный технический университет, г. Анкара, Турция,  
+90 (312) 210-2970, E-mail: marat@metu.edu.tr

Дауылбаев М.К., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика  
Казахстан, +7-777-232-37-69, E-mail: dmk57@mail.ru

Мирзакулова А.Е., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика  
Казахстан, +7-707-859-13-90, E-mail: aziza.mirzakulova@mail.ru

Атахан Н., Казахский государственный женский педагогический университет, г. Алматы, Республика  
Казахстан, +7-701-106-30-50, E-mail: atakhan-nilupar@mail.ru

В статье рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с кусочно-постоянным аргументом. В статье дано определение сингулярно возмущенного линейного гармонического осциллятора с кусочно-постоянным аргументом. Построена система фундаментальных решений однородного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с кусочно-постоянным аргументом. С помощью системы фундаментальных решений, начальные функции построены и их асимптотических представлений получены. Используя метод редукции, получена аналитическая формула решения сингулярно возмущенной начальной задачи с кусочно-постоянным аргументом. Кроме того, невозмущенная задача Коши построена в соответствии с сингулярно возмущенной задачей Коши. Получено решение невозмущенной задачи Коши. Когда малый параметр стремится к нулю, доказана сходимости решения сингулярно возмущенной задачи Коши с кусочно-постоянным аргументом к решению невозмущенной задачи Коши с кусочно-постоянным аргументом. Доказана теорема о предельном переходе.

**Ключевые слова:** кусочно-постоянный аргумент обобщенного типа, малый параметр, сингулярное возмущение.

### **Құрақ-тұрақты аргументті сингулярлы ауытқыған сызықты осциллятор**

Ахмет М.У., Орталық-шығыс техникалық университеті, Анкара қ., Түркия,  
+90 (312) 210-2970, Электрондық пошта: marat@metu.edu.tr

Дауылбаев М.К., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан  
Республикасы, +7-777-232-37-69, Электрондық пошта: dmk57@mail.ru

Мирзакулова А.Е., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан  
Республикасы, +7-707-859-13-90, Электрондық пошта: aziza.mirzakulova@mail.ru

Атахан Н., Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан  
Республикасы, +7-701-106-30-50, Электрондық пошта: atakhan-nilupar@mail.ru

Мақалада құрақ-тұрақты аргументті екінші ретті сингулярлы ауытқыған сызықты дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебі қарастырылған. Жұмыста құрақ-тұрақты аргументті сингулярлы ауытқыған сызықты гармоникалық осциллятордың анықтамасы келтірілді. Құрақ-тұрақты аргументті сингулярлы ауытқыған біртекті емес дифференциалдық теңдеуге сәйкес біртекті құрақ-тұрақты аргументті сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі құрылды. Іргелі шешімдер жүйесінің көмегімен бастапқы функциялары құрылып, олардың асимптотикалық сипаттары алынған. Редукция тәсілін қолданып, қойылған құрақ-тұрақты аргументті сингулярлы ауытқыған бастапқы есебінің шешімінің аналитикалық формуласы алынды. Сонымен қоса, сингулярлы ауытқыған Коши есебіне сәйкес ауытқымаған Коши есебі құрылды. Ауытқымаған Коши есебінің шешімі алынды. Кіші параметр нөлге ұмтылғанда, құрақ-тұрақты аргументті сингулярлы ауытқыған Коши есебінің шешімі құрақ-тұрақты аргументті ауытқымаған Коши есебінің шешіміне ұмтылатыны көрсетілді. Шектік көшу теоремасы дәлелденді.

**Түйін сөздер:** жалпыланған түрдегі құрақ-тұрақты аргумент, кіші параметр, сингулярлы ауытқы.

## **1 Introduction and review of literature**

Singularly perturbed equations are often used as mathematical models describing processes in physics, chemical kinetics and mathematical biology and they often arise during investigation of applied problems of technology and engineering (Damiano, 1996: 333-372), (Gondal, 1988: 1080-1085), (Hek, 2010: 347-386), (Kokotovic, 1984: 501-550), (Owen, 2001: 655-684). The first who emphasis application significance of singular problems and the necessity of their appearance as mathematical models was Prandtl. He attracted attention to them, when he

developed the theory of the boundary layer in hydrodynamics in 1904. Several scientists such as S. Haykin, L. I. Gutenmakher, I. S. Gradstein, K. Friedrichs, W. Wazow, Levinson and others were interested in singularly perturbed equations. Systematic investigation of singularly perturbed equation by many mathematicians began after the proof by A. N. Tikhonov fundamental and well-known limit theorems for nonlinear systems of ordinary differential equations in (Tikhonov, 1952: 575-586). Note that other mathematical school of singularly perturbed equations in Kazakhstan and abroad investigate only boundary value problems, which does not have an initial jump. In works (Dauylbaev, 2017: 214-225), (Dauylbaev, 2016: 147-154), (Dauylbaev, 2015: 747-761), the initial and boundary value problems were considered that are equivalent to the Cauchy problem with the initial jump for differential and integro-differential equations in the stable case.

Systematic study of theoretical and practical problems involving piecewise constant arguments was initiated in the early 80's. Since then, differential equations with piecewise constant arguments have attracted great attention from the researches in mathematics, biology, engineering and other fields. A mathematical model including piecewise constant argument was first considered by Busenberg and Cooke (Busenberg, 1982: 179-187) in 1982. They constructed a first-order linear equation to investigate vertically transmitted diseases. Following this work, using the method of reduction to discrete equations, many authors have analyzed various types of differential equations with piecewise constant argument.

In (Akhmet, 2005: 11-20), (Akhmet, 2011), (Akhmet, 2007: 367-383), (Akhmet, 2007: 646-663), (Akhmet, 2015: 2483-2495), (Akhmet, 2012: 337-352) M. Akhmet first proposed to investigate differential equations with piecewise constant argument of generalized type. Currently, these equations are widely used and the foundations of the theory are constructed. There are many works that are written in the framework of the theory created by M. Akhmet. Theoretically, this concerns theorems on the existence of bounded solutions, periodic, almost periodic solutions, exponential dichotomies, integral surfaces, differential equations of mathematical physics, and many others.

The movement of the weights on the spring, the pendulum, the charge in the electrical circuit and also the evolution of many systems in physics, chemistry, biology and other sciences in time under certain assumptions can be described by the same differential equations that in the theory of oscillations serves as the basic model. This model is called a linear harmonic oscillator.

The equation for the free oscillations of singularly perturbed linear harmonic oscillator with piecewise-constant argument has the form

$$\varepsilon y''(t) + ly'(t) + ky(\beta(t)) = 0,$$

where  $y(t)$  is a variable describing the state of the system (weight shift, capacitor charge, etc.),  $l$  is a parameter characterizing the energy loss (friction in the mechanical system, resistance in the circuit),  $k$  is a natural frequency of oscillation,  $t$  is a time.

## 2 Material and methods

**2.1** Consider the following Cauchy problem for singularly perturbed differential equation

with piecewise-constant argument

$$\varepsilon y''(t) + ly'(t) + ky(\beta(t)) = F(t) \quad (1)$$

$$y(0, \varepsilon) = y_0, \quad y'(0, \varepsilon) = y_1, \quad (2)$$

where  $\varepsilon > 0$  is a small parameter,  $l, k, y_0, y_1$  are known constants. The piecewise-constant argument is determined with the function  $\beta(t) = \theta_i$ , if  $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, p}$ ,  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_p < T$ .

The following conditions are hold:

(C1)  $F(t)$  is a continuously differentiable function in the segment  $0 \leq t \leq T$ .

(C2)  $l > 0$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

If  $t \in [0, \theta_1)$ , then the Cauchy problem (1),(2) has a form:

$$\varepsilon y''(t) + ly'(t) = F(t) - ky_0, \quad (3)$$

$$y(0, \varepsilon) = y_0, \quad y'(0, \varepsilon) = y_1. \quad (4)$$

The system of fundamental solutions of the homogeneous equation according to the equation (3) is determined the following type:

$$y_1(t, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon), \quad y_2(t, \varepsilon) = e^{-\frac{l}{\varepsilon}t}(1 + O(\varepsilon)). \quad (5)$$

**Definition.** Let the functions  $K_i(t, s, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq s < t \leq \theta_1$  be a solution for the following problem

$$\varepsilon K_i''(t, s, \varepsilon) + lK_i'(t, s, \varepsilon) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$K_i^{(j)}(s, s, \varepsilon) = \delta_{i-1, j}, \quad j = 0, 1, \quad (7)$$

the functions  $K_i(t, s, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2$  are called *the initial functions* and can be represented as

$$K_i(t, s, \varepsilon) = \frac{W_i(t, s, \varepsilon)}{W(s, \varepsilon)} \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

where  $\delta_{i-1, j}$  is the Kronecker symbol,  $W(s, \varepsilon)$  is the Wronskian of the fundamental set of solutions  $y_1(s, \varepsilon), y_2(s, \varepsilon)$ ,  $W_i(t, s, \varepsilon)$  are the second order determinant obtained from the Wronskian  $W(s, \varepsilon)$  by replacing the  $i$ -th row with the system of fundamental solutions (5).

By the formula (5),(8), we obtain the asymptotic representation of the initial  $K_i(t, s, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2$  functions as  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$K_1(t, s, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon), \quad K_2(t, s, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{l} \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}(t-s)} + O(\varepsilon) \right). \quad (9)$$

The solution of the Cauchy problem (3),(4) is as follows:

$$y(t, \varepsilon) = y_0 + \frac{\varepsilon}{l} \left( \frac{ky_0}{l} + y_1 \right) \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}t} \right) - \frac{ky_0}{l} t + \frac{1}{l} \int_0^t \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}(t-s)} \right) F(s) ds. \quad (10)$$

We get the unperturbed problem according to the Cauchy problem (3),(4) as  $\varepsilon = 0$  :

$$l\bar{y}'(t) + ky_0 = F(t), \quad \bar{y}(0) = y_0. \quad (11)$$

The solution of unperturbed initial problem is as follows:

$$\bar{y}(t) = y_0 - \frac{ky_0}{l}t + \frac{1}{l} \int_0^t F(s)ds. \quad (12)$$

Thus, if  $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, p}$ , then the Cauchy problem (1),(2) has a form:

$$\varepsilon y''(t) + ly'(t) = F(t) - ky(\theta_i), \quad (13)$$

$$y(\theta_i, \varepsilon) = y(\theta_i), \quad y'(\theta_i, \varepsilon) = y'(\theta_i). \quad (14)$$

The system of fundamental solutions of the homogeneous equation according to the equation (13) is determined the following type:

$$y_1(t, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon), \quad y_2(t, \varepsilon) = e^{-\frac{l}{\varepsilon}(t-\theta_i)}(1 + O(\varepsilon)). \quad (15)$$

By the formula (8),(15), we obtain the asymptotic representation of the initial  $K_i(t, s, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2$  functions as  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$K_1(t, s, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon), \quad K_2(t, s, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{l} \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}(t-s)} + O(\varepsilon) \right). \quad (16)$$

Let us try to define the solution of the Cauchy problem (1),(2) in the interval  $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, p}$ , we make the change of variable  $s = t - \theta_i$ ,  $t = \theta_i \implies s = 0$ , we obtain

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{ds^2} + l \frac{dy}{ds} = F(t) - ky(\theta_i), \quad y(0, \varepsilon) = y(\theta_i), \quad y'(0, \varepsilon) = y'(\theta_i). \quad (17)$$

The problem (17) is similar to (3),(4), the solution of the problem (17) is as follows  $s \in [0, \theta_1)$ :

$$y(s, \varepsilon) = y(\theta_i) + \frac{\varepsilon}{l} \left( \frac{ky(\theta_i)}{l} + y'(\theta_i) \right) \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}s} \right) - \frac{ky(\theta_i)}{l}s + \frac{1}{l} \int_0^s \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}(t-p)} \right) F(p)dp. \quad (18)$$

As a result, the solution of the problem (13),(14) is as follows:

$$y(t, \varepsilon) = y(\theta_i) + \frac{\varepsilon}{l} \left( \frac{ky(\theta_i)}{l} + y'(\theta_i) \right) \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}(t-\theta_i)} \right) - \frac{ky(\theta_i)}{l}(t - \theta_i) + \frac{1}{l} \int_{\theta_i}^t \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}(t-s)} \right) F(s)ds. \quad (19)$$

For determining vector  $\begin{pmatrix} y(\theta_i) \\ y'(\theta_i) \end{pmatrix}$ ,  $i = \overline{1, p}$ , we obtain system of difference equation:

$$y(\theta_{i+1}, \varepsilon) = \left( 1 - \frac{k}{l}(\theta_{i+1} - \theta_i) + \frac{\varepsilon k}{l^2} \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right) \right) y(\theta_i) + \frac{\varepsilon}{l} \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right) y'(\theta_i) + \frac{1}{l} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}(\theta_{i+1} - s)} \right) F(s) ds, \quad (20)$$

$$y'(\theta_{i+1}, \varepsilon) = -\frac{k}{l} \left( 1 - e^{-\frac{l}{\varepsilon}(\theta_{i+1} - \theta_i)} \right) y(\theta_i) + e^{-\frac{l}{\varepsilon}(\theta_{i+1} - \theta_i)} y'(\theta_i) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} e^{-\frac{l}{\varepsilon}(\theta_{i+1} - s)} F(s) ds.$$

We get the unperturbed problem according to the Cauchy problem (13),(14) as  $\varepsilon = 0$  :

$$l\bar{y}'(t) + ky(\theta_i) = F(t), \quad \bar{y}|_{t=\theta_i} = \bar{y}(\theta_i). \quad (21)$$

The solution of the unperturbed initial problem (21) is as follows:

$$\bar{y}(t) = \bar{y}(\theta_i) - \frac{k\bar{y}(\theta_i)}{l}t + \frac{1}{l} \int_{\theta_i}^t F(s) ds. \quad (22)$$

**Theorem.** If the conditions (C1),(C2) are true, then the Cauchy problem (1),(2) has a unique solution on the interval  $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ ,  $i = \overline{0, p}$  and expressed by the formula (19), such that the following limiting equalities hold:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t), \quad \theta_i \leq t < \theta_{i+1},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y'(t, \varepsilon) = \bar{y}'(t), \quad \theta_i \leq t < \theta_{i+1}.$$

**Proof.** Consider first the interval  $t \in [0, \theta_1)$ . With the help of the solution (10) of singularly perturbed initial problem (3),(4) and the solution (12) of the unperturbed problem (11), when  $\varepsilon \rightarrow 0$ , as a result

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = y_0 - \frac{ky_0}{l}t + \frac{1}{l} \int_0^t F(s) ds \equiv \bar{y}(t), \quad 0 \leq t < \theta_1,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y'(t, \varepsilon) = -\frac{ky_0}{l} \equiv \bar{y}'(t), \quad 0 \leq t < \theta_1.$$

Continue in this way to prove the limiting equalities of the Theorem in the interval  $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ ,  $i = \overline{1, p}$ . Theorem is proved.



**2.2 Example.** Consider the following initial value problem:

$$\varepsilon y''(t) + y'(t) - y([t]) = 0, \quad (23)$$

$$y(0, \varepsilon) = 1, \quad y'(0, \varepsilon) = 3, \quad (24)$$

where  $[\cdot]$  denotes the greatest integer function.

If  $t \in [0, 1)$ , then the Cauchy problem (23),(24) has a form:

$$\varepsilon y''(t) + y'(t) = 1, \quad y(0, \varepsilon) = 1, \quad y'(0, \varepsilon) = 3. \quad (25)$$

The solution of the initial value problem (25) is as follows:

$$y(t, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right) + t, \quad t \in (0, 1).$$

Let us try to define the solution of the Cauchy problem (23),(24) in the interval  $t \in [n, n+1)$ , we make the change of variable  $s = t - n$ ,  $t = n \implies s = 0$ , we obtain the solution of the Cauchy problem (23),(24)

$$y(t, \varepsilon) = \left(1 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t-n}{\varepsilon}}\right) + t - n\right) y(n) + \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t-n}{\varepsilon}}\right) y'(n), \quad t \in [n, n+1). \quad (26)$$

For determining vector  $\widehat{y}(n) = \begin{pmatrix} y(n) \\ y'(n) \end{pmatrix}$ , we obtain system of difference equation:

$$\widehat{y}(n+1) = A(\varepsilon)\widehat{y}(n), \quad (27)$$

where

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) & \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) \\ \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) & e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Vector  $\widehat{y}(n)$  has a form

$$\widehat{y}(n) = A^n(\varepsilon)\widehat{y}(0), \quad (29)$$

where

$$A^n(\varepsilon) = T(\varepsilon)J_A(\varepsilon)T^{-1}(\varepsilon), \quad \widehat{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$J_A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \lambda_2(\varepsilon) \end{pmatrix}$  is a matrix Jordan,  $T(\varepsilon)$  is a transforming matrix.

We construct the characteristic equation respectively system (27):

$$\lambda^2 - \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right) \lambda + 2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) = 0. \quad (31)$$

Roots of the characteristic equation (31) is defined by the formula

$$\lambda_{1,2}(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) \pm \sqrt{\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^2 - 4 \left(2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)}}{2}. \quad (32)$$

Eigenvectors according to the found eigenvalues is determined by linear algebraic system

$$\begin{cases} \left(2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) - \lambda_{1,2}\right) \xi_1 + \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) \xi_2 = 0 \\ \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) \xi_1 + \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \lambda_{1,2}\right) \xi_2 = 0. \end{cases} \quad (33)$$

The solution of linear algebraic system (33) is as follows

$$\xi_1(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 2 + \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) \mp \sqrt{\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^2 - 4 \left(2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)}}{2 \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right)} \xi_2(\varepsilon). \quad (34)$$

By the found eigenvectors according to eigenvalues are defined the elements of matrix  $T(\varepsilon)$  :

$$T_{11}(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 2 + \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) - \sqrt{\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^2 - 4 \left(2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)}}{2 \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right)}, \quad (35)$$

$$T_{12}(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 2 + \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^2 - 4 \left(2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)}}{2 \left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 1\right)},$$

$$T_{21}(\varepsilon) = 1, \quad T_{22}(\varepsilon) = 1.$$

The elements of the inverse matrix  $T^{-1}(\varepsilon)$  are as follow:

$$T_{11}^{-1}(\varepsilon) = \frac{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\sqrt{\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^2 - 4 \left(2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)}}, \quad (36)$$

$$T_{12}^{-1}(\varepsilon) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 2 + \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) + \sqrt{\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^2 - 4 \left(2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)}}{\sqrt{\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^2 - 4 \left(2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)}}$$

$$T_{21}^{-1}(\varepsilon) = -\frac{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{\sqrt{\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^2 - 4 \left(2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)}},$$

$$T_{22}^{-1}(\varepsilon) = -\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - 2 + \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right) - \sqrt{\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^2 - 4 \left(2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)}}{\sqrt{\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}} + 2 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)^2 - 4 \left(2e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right)\right)}}.$$

$$J_A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda_1^n(\varepsilon) & 0 \\ 0 & \lambda_2^n(\varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Considering the formulas (30),(32),(35)-(37), we obtain the limiting equalities for the elements of the matrix  $A^n(\varepsilon)$  :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{11}^n(\varepsilon) = 2^n, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{12}^n(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{21}^n(\varepsilon) = 2^{n-1}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{22}^n(\varepsilon) = 0. \quad (38)$$

The solution of the initial value problem (23),(24) on the interval  $[n, n+1)$  is as follows:

$$y(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon) \cdot A^n(\varepsilon) \cdot \widehat{y}(0), \quad (39)$$

where

$$A(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t-n}{\varepsilon}}\right) + t - n & \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{t-n}{\varepsilon}}\right) \\ \left(1 - e^{-\frac{t-n}{\varepsilon}}\right) & e^{-\frac{t-n}{\varepsilon}} \end{pmatrix}, \quad (40)$$

and  $A^n(\varepsilon)$ ,  $\widehat{y}(0)$  are expressed by the formula (30).

Consider unperturbed initial value problem:

$$\begin{cases} \overline{y}'(t) = \overline{y}([t]), \\ \overline{y}(0) = 1. \end{cases} \quad (41)$$

If  $t \in [0, 1)$ , then the problem (41) has a form

$$\begin{cases} \overline{y}'(t) = 1, \\ \overline{y}(0) = 1. \end{cases} \quad (42)$$

The solution of unperturbed problem (42) is as follows

$$\overline{y}(t) = t + 1. \quad (43)$$

As shown in the above, the solution of the unperturbed problem (41) in the interval  $t \in [n, n+1)$  is defined by the formula

$$\overline{y}(t) = (t - n + 1)\overline{y}(n). \quad (44)$$

The unknown value  $\bar{y}(n)$  is determined by the following difference equation:

$$\bar{y}(n+1) = 2\bar{y}(n). \quad (45)$$

By solving the equation (45), we obtain  $\bar{y}(n) = 2^n$ .

The results can be seen to perform the following limiting equalities:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = t + 1 \equiv \bar{y}(t), \quad 0 < t < 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y'(t, \varepsilon) = 1 \equiv \bar{y}'(t), \quad 0 < t < 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(t, \varepsilon) = 2^n(t - n + 1) \equiv \bar{y}(t), \quad n < t < n + 1,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y'(t, \varepsilon) = 2^n \equiv \bar{y}'(t), \quad n < t < n + 1.$$

### 3 Conclusion

The Cauchy problem for a singularly perturbed linear differential equation with piecewise-constant is considered in the article. A solution of a singularly perturbed Cauchy problem is obtained using the reduction method. A solution of the unperturbed problem is obtained. The theorem on the passage to the limit is proved.

### References

- [1] *Akhmet M.* On the integral manifolds of the differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations at the Florida Institute of Technology.-Florida, 2005.-P.11-20.
- [2] *Akhmet M.* Nonlinear Hybrid Continuous/Discrete-Time Models.- Paris: Atlantic Press, 2011.
- [3] *Akhmet M.* Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument generalized type // Nonlinear Anal.-Theor. - 2007.- Vol.66.- P.367-383.
- [4] *Akhmet M.* On the reduction principle for differential equations with piecewise constant argument of generalized // J Math Anal. Appl. - 2007.-Vol.336.-P.646-663.
- [5] *Akhmet M., Fen M., Kirane M.* Almost periodic solutions of retarded SICNNs with functional response on piecewise constant argument // Neural Comp. and Appl.- 2015.-Vol.27.-P.2483-2495.
- [6] *Akhmet M.* Exponentially Dichotomous linear systems of differential equations with piecewise constant argument // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity.-2012.- Vol.1.-P.337-352.
- [7] *Busenberg S., Cooke K.L.* Models of vertically transmitted diseases with sequential-continuous dynamics // Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences. -1982. -P.179-187.
- [8] *Damiano E.R., Rabbitt R.D.* A singular perturbation model of fluid dynamics in the vestibular semicircular canal and ampulla // J Fluid Mech.-1996.-Vol.307.-P.333-372.
- [9] *Gondal I.* On the application of singular perturbation techniques to nuclear engineering control problems // IEEE Nucl.Sci.-1988.-Vol.35.- P.1080-1085.
- [10] *Hek G.* Geometric singular perturbation theory in biological practice // J Math Biol.-2010.-Vol.60.-P.347-386.

- 
- [11] *Kokotovic P.V.* Applications of singular perturbation techniques to control problems // SIAM Rev. -1984. -Vol.26. - P.501-550.
- [12] *Owen M.R., Lewis M.A.* How predation can slow, stop, or reverse a prey invasion // B Math Biol. -2001. -Vol.63. - P.655-684.
- [13] *Tikhonov A.N.* Systems of differential equations containing small parameters in the derivatives // Matematicheskii sbornik. -1952. -Vol.73, № 3. - P.575-586.
- [14] *Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E.* Boundary-value problems with initial jumps for singularly perturbed integro-differential equations // Journal of Mathematical Sciences. -2017. -Vol.222, №2. - P.214-225.
- [15] *Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E.* Asymptotic behavior of solutions of singular integro-differential equations // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. -2016. -Vol.5, №2. - P.147-154.
- [16] *Dauylbaev M.K., Atakhan N.* The initial jumps of solutions and integral term in singular BVP of linear higher order integro-differential equations // Miskols Mathematical Notes. -2015. -Vol.16. - P.747-761.

IRSTI 27.33.19

**The Cauchy problem for singularly perturbed higher-order integro-differential equations**

Mirzakulova A.E., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,  
+7-707-859-13-90, E-mail: aziza.mirzakulova@mail.ru

Dauylbaev M.K., al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan,  
+7-777-232-37-69, E-mail: dmk57@mail.ru

Akhmet M.U., Middle-east technical university, Ankara, Turkey,  
+90 (312) 210-2970, E-mail: marat@metu.edu.tr

Dzhetpisbaeva A.K., al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan

The article is devoted to research the Cauchy problem for singularly perturbed higher-order linear integro-differential equation with a small parameter at the highest derivatives, provided that the roots of additional characteristic equation have negative signs. The aim of this paper is to bring asymptotic estimation of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem and the asymptotic convergence of the solution of a singularly perturbed initial value problem to the solution of an unperturbed initial value problem. In this paper the fundamental system of solutions, initial functions of a singularly perturbed homogeneous differential equation are constructed and their asymptotic estimates are obtained. By using the initial functions, we obtain an explicit analytical formula of the solution. The theorem about asymptotic estimate of a solution of the initial value problem is proved. The unperturbed Cauchy problem is constructed. We find the solution of the unperturbed Cauchy problem. An estimate difference of the solution of a singularly perturbed and unperturbed initial value problems. The asymptotic convergence of solution of a singularly perturbed initial value problem to the solution of the unperturbed initial value problem is proved.

**Key words:** singular perturbation, small parameter, the initial functions, asymptotics, passage to the limit.

**Задачи Коши для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка**

Мирзакулова А.Е., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +7-707-859-13-90, E-mail: aziza.mirzakulova@mail.ru

Дауылбаев М.К., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +7-777-232-37-69, E-mail: dmk57@mail.ru

Ахмет М.У., Средне-восточный технический университет, г. Анкара, Турция, +90 (312) 210-2970, E-mail: marat@metu.edu.tr

Джетписбаева А.К., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы

В работе рассматривается сингулярно возмущенная задача Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения высшего порядка с малым параметром при старших производных при условии, что корни дополнительного характеристического уравнения имеют отрицательные знаки. Работа посвящена получению асимптотических оценок решения сингулярно возмущенной задачи Коши и асимптотическая сходимость решения сингулярно возмущенной начальной задачи к решению вырожденной начальной задачи. В статье построена фундаментальная система решений, начальные функции сингулярно возмущенного однородного дифференциального уравнения, получены их асимптотические оценки. С помощью начальных функции получена явная аналитическая формула решений заданной начальной задачи. С помощью аналитической формулы доказана теорема об асимптотической оценке решения рассматриваемой начальной задачи. Построена невозмущенная задача Коши. Найдено решение невозмущенной задачи Коши. Получена оценка разности между решениями сингулярно возмущенной и невозмущенной начальных задач. Доказана асимптотическая сходимость решения заданной сингулярно возмущенной начальной задачи к решению невозмущенной начальной задачи.

**Ключевые слова:** сингулярное возмущение, малый параметр, начальные функции, асимптотика, предельный переход

### Сингулярлы ауытқыған жоғарғы ретті интегралды-дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі

Мирзакулова А.Е., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,  
Қазақстан Республикасы, +7-707-859-13-90, Электрондық пошта: aziza.mirzakulova@mail.ru  
Дауылбаев М.Қ., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,  
Қазақстан Республикасы, +7-777-232-37-69, Электрондық пошта: dmk57@mail.ru  
Ахмет М.У., Орталық-шығыс техникалық университеті, Анкара қ., Түркия,  
+90 (312) 210-2970, Электрондық пошта: marat@metu.edu.tr  
Джетписбаева А.К., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,  
Қазақстан Республикасы, +7-707-826-52-17, Электрондық пошта: kakimovna\_a@mail.ru

Жұмыста үлкен туындыларының алдында кіші параметрі бар жоғарғы ретті сингулярлы ауытқыған сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін "қосымша сипаттауыш теңдеу" деп аталатын теңдеудің түбірлерінің таңбасы теріс болған жағдайында Коши есеп қарастырылған. Жұмыс сингулярлы ауытқыған Коши есеп шешімінің асимптотикалық бағалауын алуға және сингулярлы ауытқыған бастапқы есебінің шешімі сәйкес ауытқымаған бастапқы есебінің шешіміне асимптотикалық жинақталуын зерттеуге бағытталған. Мақалада берілген теңдеуге сәйкес біртекті сингулярлы ауытқыған дифференциалдық теңдеудің іргелі шешімдер жүйесі, бастапқы функциялары құрылып, олардың асимптотикалық бағалаулары алынған. Бұл функциялардың көмегімен қарастырылып отырған Коши есеп шешімінің аналитикалық формуласы алынған. Аналитикалық формуланың көмегімен қойылған бастапқы есеп шешімінің асимптотикалық бағалауы туралы теорема дәлелденген. Осы сингулярлы ауытқыған Коши есебіне сәйкес ауытқымаған Коши есебі құрылды. Ауытқымаған Коши есебінің шешімі алынды. Сингулярлы ауытқыған бастапқы есеп шешімі мен ауытқымаған бастапқы есеп шешімінің арасындағы айырым бағаланды. Берілген сингулярлы ауытқыған бастапқы есеп шешімінің ауытқымаған бастапқы есеп шешіміне ұмтылатыны дәлелденді.

**Түйін сөздер:** сингулярлы ауытқы, кіші параметр, бастапқы функциялар, асимптотика, шектік көшу.

## 1 Introduction and review of literature

Singularly perturbed equations act as mathematical models in many applied problems related to diffusion, heat and mass transfer, chemical kinetics and combustion, heat propagation in thin bodies, semiconductor theory, gyroscope motion, quantum mechanics, biology and biophysics, and many other branches of science and technology.

Various asymptotic methods exist to approximate solutions of certain singularly perturbed problems: the method of matching of outer and inner expansions (Cole, 1968), (Hinch, 1981), (Kevorkian, 1981), (Nayfeh, 2008), (Van Dyke, 1964), (Lagerstrom, 1988), (Eckhaus, 1973); the boundary layer function method (or composite asymptotic expansion) (O'Malley, 1974); the method of Lomov or regularization method (Lomov, 1992); the method WKB or Liouville-Green method (Olver, 1974); the method of multiple scales (Verhulst, 2005); the averaging method (Sanders, 1985); methods for relaxation oscillations (Grasman, 1987) and others. Development of different asymptotic methods can be found, e.g., in O'Malley (O'Malley, 1991) and Vasil'eva (Vasil'eva, 1994: 440-452). Each of these methods has a certain area of applicability; it successfully works in solving certain problems and becomes inapplicable in solving other problems. The initial value problem with initial jumps for a nonlinear ordinary differential equation of the second order with a small parameter was studied by M.I. Vishik and L.A. Lyusternik (Vishik, 1960: 1242-1245) and K. A. Kassymov (Kassymov, 1962: 187-188). They show that the solution of the original initial value problem tends to the solution of the

degenerate equation with changed initial conditions, when the small parameter approaches zero. Such problems became known as the Cauchy problems with initial jumps. Solution of a singularly perturbed problems have the phenomenon of an initial jump at some point (for example, at the initial point) in given segment if the value of the solution at this point is not the same as the solution of the unperturbed problem and the fast variable of solution at this point is unbounded as the small parameter tends to zero. Singularly perturbed problems with the initial jump possess specific characteristics, which is not typical for a singularly perturbed problems, do not have the phenomenon of the initial jump.

## 2 Material and methods

Consider the following singularly perturbed the Cauchy problem:

$$L_\varepsilon y \equiv \sum_{r=1}^m \varepsilon^r A_{n+r}(t) y^{(n+r)}(t, \varepsilon) + \sum_{k=0}^n A_k(t) y^{(k)}(t, \varepsilon) = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) y^{(j)}(x, \varepsilon) dx, \quad (1)$$

$$y^{(i)}(0, \varepsilon) = \alpha_i, \quad i = \overline{0, n+m-1}, \quad (2)$$

where  $\varepsilon > 0$  is a small parameter,  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{0, n+m-1}$  are known constants,  $A_{n+m}(t) = 1$ ,  $l = \text{fix}\{0, 1, \dots, n-2\}$ .

We will need the following assumptions:

(C1)  $A_i(t) \in C^{n+m-1}([0, 1])$ ,  $i = \overline{0, n+m}$ ,  $F(t) \in C([0, 1])$  and  $H_j(t, x)$ ,  $j = \overline{0, l+1}$  are sufficiently smooth functions in the domain  $D = \{0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ .

(C2)  $A_n(t) \neq 0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

(C3) The roots  $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \dots \neq \mu_m$  of "additional characteristic equation"  $\mu^m + A_{n+m-1}(t)\mu^{m-1} + \dots + A_{n+1}(t)\mu + A_n(t) = 0$  satisfy the following inequalities  $\text{Re}\mu_1 < 0$ ,  $\text{Re}\mu_2 < 0$ ,  $\dots$ ,  $\text{Re}\mu_m < 0$ .

Similarly the Cauchy problem (1),(2) for ordinary differential equation was considered in (Nurgabyly, 2012: 4-8). In the particular case, similarly boundary value problem with initial jumps for this case  $m = 2$ ,  $l = 2$  (Dauylbaev, 2016: 145-152), (Dauylbaev, 2017: 214-225).

### 2.1 Construction of the fundamental systems of solutions

We consider the following homogeneous singularly perturbed differential equation associated with (1):

$$L_\varepsilon y \equiv \sum_{r=1}^m \varepsilon^r A_{n+r}(t) y^{(n+r)}(t, \varepsilon) + \sum_{k=0}^n A_k(t) y^{(k)}(t, \varepsilon) = 0. \quad (3)$$

The fundamental systems of solutions of the equation (3) has the following asymptotic representation as  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$y_i^{(q)}(t, \varepsilon) = y_{i0}^{(q)}(t) + O(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n}, \quad q = \overline{0, n+m-1},$$

$$y_{n+r}^{(q)}(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_r(x) dx} (\mu_r^q(t) y_{n+r,0}^{(q)}(t) + O(\varepsilon)), \quad r = \overline{1, m}, \quad q = \overline{0, n+m-1} \quad (4)$$



where  $y_{i0}(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$  are solutions of the problem:

$$L_0 y_{i0}(t) = 0, y_{j0}^{(i-1)}(0) = \delta_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}, \tag{5}$$

$\delta_{ij}$  is a Kronecker symbol,  $y_{n+r,0}(t)$ ,  $r = \overline{1, m}$  are solutions of the following problem:

$$p_r(t)y'_{n+r,0}(t) + q_r(t)y_{n+r,0}(t) = 0, y_{n+r,0}(0) = 1, r = \overline{1, m}$$

where

$$p_r(t) = \sum_{i=0}^m A_{n+i}(t)(n+i)\mu_{r0}^{n+i-1}(t), r = \overline{1, m},$$

$$q_r(t) = \mu'_{r0}(t) \sum_{i=0}^m A_{n+i}(t)C_{n+i}^2 \mu_{r0}^{n+i-2}(t) + A_{n-1}(t)\mu_{r0}^{n-1}(t), r = \overline{1, m},$$

$$C_{n+i}^2 = \frac{(n+i)!}{2!(n+i-2)}, i = \overline{0, m}.$$

In view of (4), for the Wronskian  $W(t, \varepsilon)$  the following asymptotic representation holds as  $\varepsilon \rightarrow 0$  :

$$W(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\lambda} \overline{W}(t)\pi(t)\omega(t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \overline{\mu}(x)dx\right) (1 + O(\varepsilon)) \neq 0, \tag{6}$$

where  $\overline{W}(t)$  is the Wronskian,

$$\overline{W}(t) = \begin{vmatrix} y_{10}(t) & \dots & y_{n0}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{10}^{(n-1)}(t) & \dots & y_{n0}^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \lambda = \frac{2n+m-1}{2},$$

$$\overline{\mu}(x) = \mu_1(x) + \dots + \mu_m(x) = \sum_{k=1}^m \mu_k(x), \pi(t) = \prod_{k=1}^m y_{n+k}(t)\mu_k^n(t),$$

the determinant  $\omega(t)$  is the  $m$ -th order Vandermond determinant,

$$\omega(t) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mu_1(t) & \dots & \mu_m(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{m-1}(t) & \dots & \mu_m^{m-1}(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

### 2.2 Construction of the initial functions

**Definition.** The functions  $K_i(t, s, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, n+m}$  are called *initial functions*, if they satisfy the following problem:

$$L_\varepsilon K_i(t, s, \varepsilon) = 0, i = \overline{1, n+m}, 0 \leq s < t \leq 1,$$

$$K_i^{(j)}(s, s, \varepsilon) = \delta_{i-1, j}, \quad j = \overline{0, n + m - 1},$$

and that can be represented in the form:

$$K_i(t, s, \varepsilon) = \frac{W_i(t, s, \varepsilon)}{W(s, \varepsilon)}, \quad i = \overline{1, n + m}, \tag{7}$$

$W_i(t, s, \varepsilon)$  is the  $n + m$ -th order determinant obtained from the Wronskian  $W(s, \varepsilon)$  by replacing the  $i$ -th row with  $y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), \dots, y_{n+m}(t, \varepsilon)$ .

In view of (6),(7), for the initial functions  $K_i^{(q)}(t, s, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, n + m}$ ,  $q = \overline{0, n + m - 1}$  the following asymptotic representation hold as  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$K_i^{(q)}(t, s, \varepsilon) = \frac{\overline{W}_i^{(q)}(t, s)}{\overline{W}(s)} + \varepsilon^{n-q} \sum_{k=1}^m e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_k(x) dx} \frac{y_{n+k,0}(t) \mu_k^q(t)}{y_{n+k,0}(s) \mu_k^n(s)} \cdot \frac{\omega_{1k}(s)}{\omega(s)} \cdot \frac{\overline{W}_i(s)}{\overline{W}(s)} +$$

$$+ O \left( \varepsilon + \varepsilon^{n+1-q} \sum_{k=1}^m e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_k(x) dx} \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad q = \overline{0, n + m - 1}; \tag{8}$$

$$K_{n+r}^{(q)}(t, s, \varepsilon) = \varepsilon^r \left( (-1)^r \frac{\omega_{r+1}(s)}{\omega(s) A_n(s)} \cdot \frac{\overline{W}_n^{(q)}(t, s)}{\overline{W}(s)} + \varepsilon^{n-1-q} \sum_{k=1}^m e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_k(x) dx} \cdot \right.$$

$$\left. \frac{y_{n+k,0}(t) \mu_k^q(t)}{y_{n+k,0}(s) \mu_k^n(s)} \cdot \frac{\omega_{rk}(s)}{\omega(s)} + O \left( \varepsilon + \varepsilon^{n-q} \sum_{k=1}^m e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_k(x) dx} \right) \right), \quad r = \overline{1, m}, \quad q = \overline{0, n + m - 1}, \tag{9}$$

where  $\omega_{ij}(s)$  is the  $m - 1$ -th order determinant obtained from the determinant  $\omega(s)$  by deleting  $i$ -th row and  $j$ -th column,  $\omega_i(s)$  is the  $m$ -th order determinant obtained from the following determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mu_1(s) & \dots & \mu_m(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^m(s) & \dots & \mu_m^m(s) \end{vmatrix}$$

by deleting  $i$ -th row,  $\overline{W}_n^{(q)}(t, s)$  is the determinant obtained from the Wronskian  $\overline{W}(s)$  by replacing the  $n$ -th row with  $y_{10}^{(q)}(t), \dots, y_{n0}^{(q)}(t)$ ,  $\overline{W}_i(t)$  is the  $n + 1$ -th order determinant obtained from the following determinant

$$\begin{vmatrix} y_{10}(t) & \dots & y_{n0}(t) \\ y'_{10}(t) & \dots & y'_{n0}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{10}^{(n)}(t) & \dots & y_{n0}^{(n)}(t) \end{vmatrix}$$

by deleting the  $i$ -th row.

### 2.3 The analytical formula of solution

Let us denote by the right-hand side of the equation (1):

$$z(t, \varepsilon) = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) y^{(j)}(x, \varepsilon) dx. \quad (10)$$

We seek to find the solution of the differential  $L_\varepsilon y \equiv z(t, \varepsilon)$  equation in the form:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+m} C_i K_i(t, 0, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K_{n+m}(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds, \quad (11)$$

where  $K_i(t, s, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, n+m}$  are the initial functions,  $z(t, \varepsilon)$  is a unknown function.

Substituting (11) into (10), we obtain the following expression:

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &= F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) \sum_{i=1}^{n+m} C_i K_i^{(j)}(x, 0, \varepsilon) dx + \\ &+ \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^x K_{n+m}^{(j)}(x, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds dx. \end{aligned}$$

By replacing the order of sum and integral, we obtain

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) &= F(t) + \sum_{i=1}^{n+m} C_i \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) K_i^{(j)}(x, 0, \varepsilon) dx + \\ &+ \int_0^1 z(s, \varepsilon) ds \frac{1}{\varepsilon^m} \int_s^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) K_{n+m}^{(j)}(x, s, \varepsilon) dx. \end{aligned}$$

By introducing of additional symbols, we obtain the following Fredholm integral equation of the second kind:

$$z(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon) + \int_0^1 H(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds, \quad (12)$$

where

$$\begin{aligned} f(t, \varepsilon) &= F(t) + \sum_{i=1}^{n+m} C_i \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) K_i^{(j)}(x, 0, \varepsilon) dx, \\ H(t, s, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon^m} \int_s^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) K_{n+m}^{(j)}(x, s, \varepsilon) dx. \end{aligned}$$

(C4) 1 is not an eigenvalue of the kernel  $H(t, s, \varepsilon)$ .

In view of condition (C4) integral equation (12) has a unique solution, that can be represented in the form:

$$z(t, \varepsilon) = f(t, \varepsilon) + \int_0^1 R(t, s, \varepsilon) f(s, \varepsilon) ds, \quad (13)$$

where  $R(t, s, \varepsilon)$  is a resolvent of the kernel  $H(t, s, \varepsilon)$ .

Substituting (13) into (11), we obtain the analytical formula of solution:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+m} C_i \left( K_i(t, 0, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K_{n+m}(t, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_i(s, \varepsilon) ds \right) + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K_{n+m}(t, s, \varepsilon) \bar{F}(s, \varepsilon) ds, \quad (14)$$

where  $C_i$ ,  $i = \overline{1, n+m}$  are unknown constants,  $K_i(t, s, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, n+m}$  are the initial functions,

$$\bar{\varphi}_i(s, \varepsilon) = \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} \bar{H}_j(s, x, \varepsilon) K_i^{(j)}(x, s, \varepsilon) dx, \quad i = \overline{1, n+m},$$

$$\bar{H}_j(s, x, \varepsilon) = H_j(s, x) + \int_0^1 R(s, p, \varepsilon) H_j(p, x) dp, \quad (15)$$

$$\bar{F}(s, \varepsilon) = F(s) + \int_0^1 R(s, p, \varepsilon) F(p) dp.$$

By using initial conditions (2) in (14), we find the constants  $C_i = \alpha_{i-1}$ ,  $i = \overline{1, n+m-1}$ .

**Theorem 1.** Let assumptions (C1)-(C4) hold. Then the Cauchy problem (1),(2) on the interval  $0 \leq t \leq 1$  has a unique solution and expressed by the formula:

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n+m} \alpha_{i-1} \left( K_i(t, 0, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K_{n+m}(t, s, \varepsilon) \bar{\varphi}_i(s, \varepsilon) ds \right) + \frac{1}{\varepsilon^m} \int_0^t K_{n+m}(t, s, \varepsilon) \bar{F}(s, \varepsilon) ds, \quad (16)$$

where  $K_i(t, s, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, n+m}$  are initial functions, functions  $\bar{\varphi}_i(s, \varepsilon)$ ,  $\bar{F}(s, \varepsilon)$ ,  $\bar{H}_j(s, x, \varepsilon)$  defined by the formula (15).

### 2.4 Asymptotic estimations of solution

**Theorem 2.** Let assumptions (C1)-(C4) hold. Then for the solution of the Cauchy problem (1),(2) and its derivatives the following asymptotic estimation hold as  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$|y^{(q)}(t, \varepsilon)| \leq C \left( \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i| + \sum_{r=1}^m \varepsilon^r \cdot |\alpha_{n-1+r}| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right) + C\varepsilon^{n-q} e^{-\gamma \frac{t}{\varepsilon}} \left( \sum_{i=0}^n |\alpha_i| + \sum_{r=1}^{m-1} \varepsilon^r \cdot |\alpha_{n+r}| + \max_{0 \leq t \leq 1} |F(t)| \right) \cdot \left| \sum_{k=1}^m \frac{\bar{\mu}_k^q(t) \omega_{mk}(t)}{\bar{\mu}_k^{n+1}(0)} \right|, \quad (17)$$

where  $q = \overline{0, n + m - 1}$ ,  $C > 0, \gamma > 0$  is a constant independent of  $\varepsilon$ ,

$$\sum_{k=1}^m \frac{\bar{\mu}_k^q(t) \omega_{mk}(t)}{\bar{\mu}_k^{n+1}(0)} \Big|_{t=0} \equiv 0, \quad j = \overline{n + 1, n + m - 1}.$$

**Proof.** In view of (7)-(9) and conditions (C1)-(C3), for the initial functions  $K_i(t, s, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, n + m}$  the following asymptotic estimation hold:

$$|K_i^{(q)}(t, s, \varepsilon)| \leq C \left( 1 + \varepsilon^{n-q} \exp \left( -\frac{t-s}{\varepsilon} \right) \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad q = \overline{0, n + m - 1}, \quad (18)$$

$$|K_{n+r}^{(q)}(t, s, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^r \left( 1 + \varepsilon^{n-1-q} \exp \left( -\frac{t-s}{\varepsilon} \right) \right), \quad r = \overline{1, m}, \quad q = \overline{0, n + m - 1}. \quad (19)$$

By applying the asymptotic estimations of the initial functions (18),(19) in (15), we obtain the following asymptotic estimations for the function  $\bar{\varphi}_i(s, \varepsilon)$ ,  $i = \overline{1, n + m}$ :

$$|\bar{\varphi}_i(s, \varepsilon)| \leq C, \quad i = \overline{1, n}, \quad |\bar{\varphi}_{n+r}(s, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^r, \quad r = \overline{1, m}. \quad (20)$$

By applying (18)-(20) in (16), we obtain asymptotic estimations of the solution (17). Theorem 2 is proved.

### 2.5 The unperturbed initial problem

We consider the following unperturbed initial value problem:

$$L_0 \bar{y} \equiv \sum_{k=0}^n A_k(t) \bar{y}^{(k)}(t) = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) \bar{y}^{(j)}(x) dx, \quad (21)$$

$$\bar{y}^{(i)}(0) = \alpha_i, \quad i = \overline{0, n - 1}. \quad (22)$$

Let us denote by

$$\bar{z}(t) = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) \bar{y}^{(j)}(x) dx. \quad (23)$$

We seek to find the solution of the problem (21),(22):

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \bar{K}_i(t, 0) + \frac{1}{A_n(t)} \int_0^t \bar{K}_n(t, s) \bar{z}(s) ds, \quad (24)$$

where  $C_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  are unknown constants,  $\bar{K}_i(t, s)$ ,  $i = \overline{1, n}$  are the initial functions,  $\bar{z}(t)$  is a unknown function. By substituting function (24) in (23), we obtain the following Fredholm integral equation of the second kind:

$$\bar{z}(t) = F(t) + \sum_{i=1}^n C_i \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) \bar{K}_i^{(j)}(x, 0) dx + \int_0^1 \bar{H}(t, s) \bar{z}(s) ds, \quad (25)$$

where

$$\bar{H}(t, s) = \int_s^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) \left( \frac{\bar{K}_n(x, s)}{A_n(x)} \right)^{(j)} dx.$$

(C5) 1 is not an eigenvalue of the kernel  $\bar{H}(t, s)$ . Then the integral equation (25) has an unique solution and that can be represented in the form:

$$\bar{z}(t) = \bar{F}^0(t) + \sum_{i=1}^n C_i \bar{\varphi}_i^0(t), \quad (26)$$

where  $\bar{R}(t, s)$  is a resolvent of the kernel  $\bar{H}(t, s)$ ,

$$\bar{\varphi}_i^0(t) = \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} \bar{H}_j^0(t, x) \bar{K}_i^{(j)}(x, 0) dx, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\bar{H}_j^0(t, x) = H_j(t, x) + \int_0^1 \bar{R}(t, s) H_j(s, x) ds, \quad j = \overline{0, l+1}, \quad (27)$$

$$\bar{F}^0(t) = F(t) + \int_0^1 \bar{F}(t, s) F(s) ds.$$

Substituting (26) into (24) and by using initial conditions (22) into obtained solution, we obtain the solution of the initial value problem (21),(22):

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} \left( \bar{K}_i(t, 0) + \frac{1}{A_n(t)} \int_0^t \bar{K}_n(t, s) \bar{\varphi}_i^0(s) ds \right) + \frac{1}{A_n(t)} \int_0^t \bar{K}_n(t, s) \bar{F}^0(s) ds, \quad (28)$$

where  $\bar{K}_i(t, s)$ ,  $i = \overline{1, n}$  are the initial functions, functions  $\bar{\varphi}_i^0(s)$ ,  $\bar{F}^0(s)$  are defined by the formula (27).

Let us denote by

$$u(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon) - \bar{y}(t) \Rightarrow y(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) + \bar{y}(t). \quad (29)$$

Substituting (29) into the initial value problem (1),(2), in view of the problem (21),(22), we obtain the following problem for  $u(t, \varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u \equiv & \sum_{r=1}^m \varepsilon^r A_{n+r}(t) u^{(n+r)}(t, \varepsilon) + \sum_{k=0}^n A_k(t) u^{(k)}(t, \varepsilon) = - \sum_{r=1}^m \varepsilon^r A_{n+r}(t) \bar{y}^{(n+r)}(t) + \\ & + \int_0^1 \sum_{j=0}^{l+1} H_j(t, x) u^{(j)}(x, \varepsilon) dx, \end{aligned} \quad (30)$$

$$u^{(i)}(0, \varepsilon) = 0, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad u^{(i)}(0, \varepsilon) = \alpha_i - \bar{y}^{(i)}(0), \quad i = \overline{n, n+m-1}. \quad (31)$$

The problem (30),(31) is of the same type as the problem (1),(2), by applying estimates (17), we obtain asymptotic estimations for the function  $u(t, \varepsilon)$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} |u^{(q)}(t, \varepsilon)| \leq & C \left( \sum_{r=1}^m \varepsilon^r \cdot |\alpha_{n-1+r} - \bar{y}^{(n-1+r)}(0)| + \varepsilon \right) + \\ & + C \varepsilon^{n-q} e^{-\gamma \frac{t}{\varepsilon}} \left( \sum_{r=1}^{m-1} \varepsilon^r \cdot |\alpha_{n+r} - \bar{y}^{(n+r)}(0)| + \varepsilon \right) \cdot \left| \sum_{k=1}^m \frac{\bar{\mu}_k^q(t) \omega_{mk}(t)}{\bar{\mu}_k^{n+1}(0)} \right|, \end{aligned} \quad (32)$$

$$q = \overline{0, n+m-1}.$$

From the estimations (32), the following limiting equalities hold:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^{(q)}(t, \varepsilon) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad q = \overline{0, n},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^{(q)}(t, \varepsilon) = 0, \quad 0 < t \leq 1, \quad q = \overline{n+1, n+m-1}.$$

**Theorem 3.** Let assumptions (C1)-(C5) hold. Then for the solution  $y(t, \varepsilon)$  of the Cauchy problem the following limiting equalities hold:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(q)}(t, \varepsilon) = \bar{y}^{(q)}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad q = \overline{0, n},$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(q)}(t, \varepsilon) = \bar{y}^{(q)}(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad q = \overline{n+1, n+m-1}$$

where function  $\bar{y}(t)$  is the solution of the unperturbed problem (21),(22) and defined by the formula (28).

### 3 Conclusion

The article is devoted to research the Cauchy problem for singularly perturbed  $n + m$  order linear integro-differential equation with a small parameter at the  $m$ -th derivatives. In the work the fundamental system of solutions, initial functions of a singularly perturbed homogeneous differential equation are constructed and their asymptotic representation are obtained. By using the initial functions, we obtain an explicit analytical formula of the solution. The asymptotic convergence of solution of a singularly perturbed initial value problem to the solution of the unperturbed initial value problem is proved.

### References

- [1] *Cole J.D.* Perturbation methods in applied mathematics. - New York: Blaisdell Publishing Company, 1968.
- [2] *Hinch E. J.* Perturbation methods. - Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [3] *Kevorkian J., Cole J.D.* Perturbation methods in applied mathematics. - New York: Springer-Verlag, 1981.
- [4] *Nayfeh A.H.* Perturbation methods. - New York: John Wiley & Sons, 2008.
- [5] *Van Dyke M.* Perturbation methods in fluid dynamics. -New York: Academic Press, 1964.
- [6] *Lagerstrom* Matched asymptotic expansions. - New York: Springer-Verlag, 1988.
- [7] *Eckhaus W.* Matched asymptotic expansions and singular perturbations. -London, 1973.
- [8] *O'Malley R.E.* Introduction to singular perturbation. -New York: Academic Press, 1974.
- [9] *Lomov S.A.* Introduction to the general theory of singular perturbations. -Providence, Rhode Island: AMS, 1992.
- [10] *Olver F.* Introduction to asymptotics and special functions. - New York: Academic Press, 1974.
- [11] *Verhulst F.* Methods and applications of singular perturbations: Boundary layers and multiple timescale dynamics. - New York: Springer, 2005.
- [12] *Sanders J.A., Verhulst F.* Averaging methods in nonlinear dynamical systems. - New York: Springer-Verlag, 1985.
- [13] *Grasman J.* Asymptotic methods for relaxation oscillations and applications. - New York: Springer-Verlag, 1987.
- [14] *O'Malley R.E.* Singular perturbations methods for ordinary differential equations. -New York: Springer-Verlag, 1991.
- [15] *Vasil'eva A.* On the development of singular perturbation theory at Moscow State University and elsewhere // SIAM Review. -1994.- №36. -P. 440-452.
- [16] *Vishik I., Lyusternik L. A.* On the initial jump for non-linear differential equations containing a small parameter // Doklady Akademii Nauk SSSR. -1960. - Vol. 132, № 6. -P. 1242-1245.
- [17] *Kassymov K. A.* On the asymptotics of the solution of the Cauchy problem with large initial conditions for nonlinear ordinary differential equations containing a small parameter // Uspehi Mat. Nauk. -1962.-Vol. 17, № 5. -P. 187-188.
- [18] *Нургабыл Д.Н.* Асимптотические оценки решения начальной задачи для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Вестник ЖГУ им.И.Жансугурова. -2012. - № 2. - С.4-8.
- [19] *Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E.* Asymptotic behavior of solutions of singular integro-differential equations // Discontinuity, Nonlinearity and Complexity. -2016. -Vol.5, №2. - P.147-154.
- [20] *Dauylbaev M.K., Mirzakulova A.E.* Boundary-value problems with initial jumps for singularly perturbed integro-differential equations // Journal of Mathematical Sciences. -2017. -Vol.222, №2. - P.214-225.



IRSTI 27.31.21

## Mathematical Analysis of the Euler-Bernoulli Beam Subject to Swelling Pressure

Wei D., Nazarbayev University,  
Astana, Kazakhstan, E-mail: dongming.wei@nu.edu.kz

Zhapsarbayeva L., al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, +77752628325, E-mail: leylazhk67@gmail.com

Kazbek Zh., Nazarbayev University,  
Astana, Kazakhstan, E-mail: zkazbek@nu.edu.kz

Swelling pressures from materials confined by structures can cause structural deformations and instability. Due to the complexity of interactions between expansive solid and solid-liquid equilibrium, the forces exerting on retaining structures from swelling are highly nonlinear. In this paper, we consider the initial/boundary value problem of an Euler-Bernoulli elastic beam subject to the swelling pressure with one end clamped and another end free. We are interested in establishing and validating a mathematical model for dynamic deflections of an elastic Euler-Bernoulli beam with constant cross-sectional area subject to swelling pressure and some initial and boundary conditions. We built a sequence of functions by using the Galerkin approximation method and the eigenfunctions of the corresponding 4th order eigenvalue problem. It has been showed that the sequence of solutions to the ODE systems converges to the unique solution and that the weak solution is also a classical solution. This work is our initial attempt to study a semi-linear hyperbolic problem based on the Euler-elastic beam theory and some simplistic swelling pressure model in soil and rock mechanics.

**Key words:** Cantilever Euler-Beam, Expansive Swelling Pressure, Retaining Wall, Vibration Analysis, Existence and Uniqueness of Solution.

### Математический анализ балки Эйлера-Бернулли с учетом давления набухания

Вей Д., Назарбаев университет,  
Астана, Казахстан, E-mail: dongming.wei@nu.edu.kz  
Жапсарбаева Л., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
Алматы, Республика Казахстан, +77752628325, E-mail: leylazhk67@gmail.com  
Казбек Ж., Назарбаев университет,  
Астана, Республика Казахстан, E-mail: zkazbek@nu.edu.kz

Давление набухания из материалов, ограниченных структурами, может вызвать структурные деформации и нестабильность. Из-за сложности взаимодействия между расширяющимися твердым и твердо-жидким равновесием силы, действующие на удерживающие структуры от набухания, сильно нелинейны. В настоящей работе рассматривается начальная / краевая задача для уравнения упругой балки Эйлера-Бернулли, с одним прикрепленным концом и другим свободным концом, с учетом давления набухания. Мы интересуемся вопросами установления и подтверждения математической модели для динамических прогибов упругой балки Эйлера-Бернулли с постоянной площадью поперечного сечения с учетом давления набухания и некоторых начальных и граничных условий. Построили последовательность функций, используя метод приближения Галеркина и собственные функции соответствующей спектральной задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка. Было показано, что последовательность решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений сходится к единственному решению и что слабое решение также является классическим решением. Эта работа представляет собой нашу первоначальную попытку изучения полулинейной гиперболической задачи, основанной на теории Эйлера упругой балки и некоторой модели упрощенного давления набухания в механике почв и горных пород.  
**Ключевые слова:** Консольная Эйлера балка, давление набухания, подпорная стенка, анализ колебаний, существование и единственность решения.

## Бөгу қысымын ескерген жағдайдағы Эйлер-Бернулли білікшесінің математикалық талдауы

Вей Д., Назарбаев университеті,

Астана, Қазақстан, E-mail: dongming.wei@nu.edu.kz

Жапсарбаева Л., әл-Фараби Қазақ ұлттық университеті,

Алматы, Қазақстан Республикасы, +77752628325, E-mail: leylazhk67@gmail.com

Қазбек Ж., Назарбаев университеті,

Астана, Қазақстан, E-mail: zkazbek@nu.edu.kz

Әр түрлі құрылымдармен шектелген материалдардың бөгу қысымы құрылымдық деформация мен тұрақсыздық тудыруы мүмкін. Кеңейтілген қатты дене және қатты-сұйық денелердің тепе-теңдігі арасындағы өзара әрекеттесудің күрделілігіне байланысты, құрылымдарды бөгуден ұстап қалушы әрекет ететін күштер күшті сызықты емес болып табылады. Бұл жұмыста бөгу қысымын ескере отырып, бір ұшы бекітілген және еінші ұшы еркін қозғалыстағы Эйлер-Бернулли серпімді білікше теңдеуі үшін бастапқы / шекаралық есепті қарастырамыз. Біз бөгу қысымы мен белгілі бір бастапқы және шекаралық шарттарды есепке ала отырып, көлденең қимасының ауданы тұрақты Эйлер-Бернулли серпімді білікшесінің динамикалық ауытқуларына арналған математикалық модельді құру және бекіту мәселелеріне мүдделіміз. Галеркиннің жуықтау әдісі мен төртінші ретті дифференциалдық теңдеуге сәйкес келетін спектрлік есептің меншікті функцияларын қолдану арқылы функциялар тізбегін құрамыз. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің жалғыз шешімге жинақталатыны және әлсіз шешімнің классикалық шешім болатыны көрсетілді. Бұл жұмыс Эйлердің серпімді білікше теориясына негізделген жартылай сызықты гиперболалық есепті және топырақ пен тау жыныстары механикасындағы жеңілдетілген бөгу қысымының кейбір моделін зерттеуге арналған алғашқы әрекетімізді білдіреді.

**Түйін сөздер:** Эйлер білікше консолі, бөгу қысымы, тіреу қабырғасы, тербеліс талдауы, шешімінің бар болуы мен жалғыздығы.

## 1 Introduction

Expansive solids such as elastomer, hydrogel, some rocks, and expansive clay present significant problems when lateral expansive solid pressures acting on retaining walls due to swelling, see, e.g., (Illeperuma, 2013), (Lou, 2012), and (Mansour, 2011) for descriptions of some of the materials and their swelling properties. Determination of the deflections and the stability of retaining walls (Illeperuma, 2013) or pipes (Rjeily, 2012) due to swelling pressures are important for design and integrity of such walls or pipes.

## 2 Review of literature

In 1994, Mesri et al., see (Mesri, 1994), developed a simplistic equation for swelling pressure as a function of mobilized volume strain which can be used to show that the pressure  $p$  acting on a wall due to swelling can be modeled by  $p = \beta e^{-\alpha v(x,t)}$ , where  $\beta$  is the swelling pressure against the unyielding wall,  $\alpha$  a constant depending upon the solid-liquid equilibrium (see, e.g., (Schädlich, 2012), (Illeperuma, 2013)) and  $v(x, t)$  the deflection of the wall modeled as a cantilever beam at location  $x$  along the beam from the clamped end and at time  $t$ . Similar and equivalent forms of the swelling pressure formula were also presented earlier in (Grob, 1972), (Gysel, 1977), and (Gysel, 1978) and are used in (Rjeily, 2012) and it is also called Grob's semi-logarithmic swelling law in literature.

In this paper, we consider the initial/boundary value problem of an Euler-Bernoulli elastic beam subject to the swelling pressure with one end clamped and another end free. We are interested in establishing and validating a mathematical model for dynamic deflections of an elastic Euler-Bernoulli beam with constant cross-sectional area subject to swelling pressure and some initial and boundary conditions.

### 3 Materials and methods

In Section 1, we state the dynamic beam problem and define the solution spaces. In Section 2, we prove that there exists a unique weak solution. In Section 3, we construct a sequence converging to the unique solution and show that the solution is also a classical solution.

#### 3.1 The Semi-linear Hyperbolic Problem

Based on Euler's elastic beam theory and adapting the formula of the swelling force stated in the introduction, we consider the following semi-linear hyperbolic problem

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = F(v, t), \quad (1)$$

subject to the initial conditions

$$\begin{cases} v(x, 0) = v_0(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = v_1(x), 0 < x < L \end{cases} \quad (2)$$

and the boundary conditions

$$\begin{cases} v(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L, t) = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L, t) = 0, 0 < t < T, \end{cases} \quad (3)$$

where  $v(x, t)$  is the vertical deflection of the beam at  $x$  and at time  $t$ ,  $T$  and  $L$  are positive constants,  $F(v, t) = \beta e^{-\alpha v} + g(x, t)$ ,  $v_0(x)$  is the initial deflection,  $v_1(x)$  the initial velocity. This semi-linear hyperbolic problem defined by (1), (2), and (3) is used to model an elastic cantilever beam subject to the swelling force  $p = \beta e^{-\alpha v}$  and a dynamic driving force  $g(x, t)$ . The boundary conditions (3) correspond to the standard clamped-free ends conditions in structural mechanics as mentioned in the introduction. We are interested in studying the well-posedness of the problem defined by (1), (2), and (3). We will use  $\dot{v}$  for the time derivative  $\frac{\partial v}{\partial t}$  and prime  $v'$  for the spatial derivative  $\frac{\partial v}{\partial x}$  respectively and the similarly for the higher order derivatives. We will use the standard Sobolev norm spaces  $H_0^2(0, L) = \{v, v', v'' \in L^2(0, L) | v \text{ satisfies the boundary condition (3)}\}$ ,  $L^2(0, T; H_0^2(0, L))$ ,  $L^2(0, T; L^2(0, L))$ , and  $L^2(0, T; H^{-1}(0, L))$  in the following sections. Here  $H^{-1}(0, L)$  stands for the topological dual space of  $H_0^2(0, L)$ . We also use  $X = \{v \in L^\infty(0, T; H_0^2(0, L)) | v'' \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))\}$  with the norm

$$\|v\| = \text{esssup}_{0 \leq t \leq T} (\|v(t)\|_{H_0^2(0, L)} + \|v(t)\|_{L^2(0, L)})$$

as solution space.

### 3.2 Existence and Uniqueness of Solution

We use the following definition of a weak solution:

**Definition 1** We say that a function  $u \in L^2(0, T; H_0^2(0, L))$ , for which  $\dot{u} \in L^2(0, T; L^2(0, L))$ ,  $\ddot{u} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, L))$ , is a weak solution of the semi-linear hyperbolic problem defined by (1), (2), and (3), if

$$\int_0^L (\rho A \ddot{u} v + EI u'' v'' - \beta e^{-\alpha u} v - gv) dx = 0$$

for each  $v \in H_0^2(0, L)$  and a.e. in  $[0, T]$ ; and  $u(x, 0) = v_0(x)$ ,  $\dot{u} = v_1(x)$ ,  $\forall x \in (0, L)$ .

First, we show a priori boundedness of a solution by using the method of conservation of energy.

**Theorem 1** Suppose that  $v_0 \in H_0^2(0, L)$  and  $v_1 \in L^2(0, L)$  and both satisfy the boundary condition (3), and suppose that  $u$  is a solution of the problem in the sense of Definition 1 with these initial conditions, and with  $g \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$ . Then  $u \in X$  and there exists a positive constant  $M > 0$  such that  $\|u\| \leq M$ .

**Proof.** Suppose that  $u$  is a solution of the problem. Let

$$E(t) = \int_0^L \left( \frac{\rho A}{2} |\dot{u}|^2 + \frac{EI}{2} |u''|^2 + \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha u} - gu \right) dx,$$

we have

$$\dot{E}(t) = \int_0^L (\rho A \dot{u} \ddot{u} + EI u'' \dot{u}'' + \beta e^{-\alpha u} \dot{u} - g \dot{u}) dx.$$

By using integrations by parts on the second term and applying the boundary conditions, we have  $\int_0^L u'' \dot{u}'' dx = \int_0^L u^{(IV)} \dot{u} dx$ . Therefore

$$\dot{E}(t) = \int_0^L (\rho A \dot{u} + EI u^{(IV)} - \beta e^{-\alpha u} - g) \dot{u} dx = 0,$$

which implies that

$$E(t) = E(0) = \int_0^L \left( \frac{\rho A}{2} |v_1|^2 + \frac{EI}{2} |v_0''|^2 + \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha v_0} - g_0 v_0 \right) dx = C,$$

where  $C$  equals a constant, where  $g_0$  denotes  $g(x, 0)$ . Therefore, we have

$$\int_0^L \left( \frac{\rho A}{2} |\dot{u}|^2 + \frac{EI}{2} |u''|^2 + \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha u} \right) dx = \int_0^L g u dx + C,$$

which implies that  $\|u''(t)\|_{L^2(0, L)}^2 \leq C_1 \|g(t)\|_{L^2} \|u(t)\|_{L^2(0, L)} + C$ . By Sobolev inequalities, we have

$$\|u(t)\|_{L^2(0, L)}^2 \leq C_2 \|u''(t)\|_{L^2}^2 \leq C \|g(t)\|_{L^2} \|u(t)\|_{L^2(0, L)} + C_3,$$

where  $C_1, C_2, C_3$  are all positive constants. This last inequality implies that there exists  $M > 0$  independent on  $u$ , such that  $\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} + \|u''\|_{L^\infty(0, T; L^2(0, L))} \leq M$ .

**Theorem 2** Suppose that  $v_0 \in H_0^2(0, L)$  and  $v_1 \in L^2(0, L)$  both satisfy the boundary condition (3), and  $g \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$ . Then problem defined by (1), (2), and (3) can have only one weak solution in  $u \in L^2(0, T; H_0^2(0, L))$  in the sense of Definition 1.

**Proof.** To prove existence and uniqueness of solutions, we shall assume that  $v_0 \in H^2(0, L)$  and  $v_1 \in L^2(0, L)$ . Therefore  $E(t)$  is a constant for the given initial conditions  $\dot{u}(x, 0) = v_0(x)$ ,  $u(x, 0) = v_1(x)$ ,  $0 < x < L$ .

We shall adapt the standard energy method to prove uniqueness of the solution to our problem. Suppose that there are two solutions which are denoted by  $v_1$  and  $v_2$  respectively. Let  $w = v_1 - v_2$ , then we have

$$\rho A \ddot{w} + EI w^{(IV)} = F(v_1, t) - F(v_2, t).$$

Multiply both sides of this equation by  $\dot{w}$ , perform integration by parts and applying the initial/boundary conditions, we have

$$\frac{\rho A}{2} \int_0^L |\dot{w}|^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L |w''|^2 dx = \int_0^t \int_0^L [\beta(e^{-\alpha v_1} - e^{-\alpha v_2}) + g] \dot{w} dx dt.$$

By Hölder's inequality, the Sobolev inequality, and by Theorem 1, we have

$$\frac{\rho A}{2} \int_0^L |\dot{w}|^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^L |w''|^2 dx \leq C \int_0^t (\|w\|_{L^2(0, L)} + \|g\|_{L^2(0, L)}) \|\dot{w}\|_{L^2(0, L)} dt.$$

Whence, an application of Gronwall's lemma yields  $w = 0$  and  $v_1 = v_2$ . By using Brouwer's Fixed Point Theorem in the Banach space  $X$  defined above, we can prove the existence of solution by the method similar to the what is presented in B§12.2.1 of (Evans, 2010) and obtain the following:

**Theorem 3** Suppose that  $v_0 \in H_0^2(0, L)$  and  $v_1 \in L^2(0, L)$  both satisfy the boundary condition (3), and  $g \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$ . Then, problem defined by (1), (2), and (3) has an unique solution in  $u \in L^2(0, T; H_0^2(0, L))$  in the sense of Definition 1.

For simplicity, we do not present the proof here.

### 3.3 Construction of a classical Solution

In the above, we have shown the well-posedness of our problem for a general force  $g$ . In this sections, we show that an explicit construction of a sequence of functions can be made for smooth  $g$  and this sequence converges to a classical solution of our problem. We denote by  $C_0^4(\bar{G}, \mathbf{R})$  the set of fourfold continuously differentiable functions  $v(x, t)$  defined in  $\bar{G} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$  satisfying the initial and boundary conditions (2), and (3). We rewrite equation (1) in the following operator form

$$Bv \equiv \rho A \ddot{v} + EI v^{(IV)} = F(v, t). \quad (4)$$

We use  $C_0^4[0, L]$  for the set of fourfold continuously differentiable functions of  $x$  in  $[0, L]$  satisfying the boundary condition (3).

**Definition 2** A function  $v(x, t) \in C(\bar{G}, \mathbf{R})$  is said to be a solution of the problem (1), (2), and (3), if there exists a sequence  $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$  and a function  $v(x, t)$  in  $C_0^4(0, L)$  such that  $\|v_m - v\|_{C_0^4[0, L]} \rightarrow 0$  and  $\|Bv_m - F(v)\|_{C[0, L]} \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow \infty$  for all fixed  $t \in [0, T]$  and moreover that the limit function  $v(x, t)$  satisfies conditions (3).

We first consider the free vibration case  $g = 0$ , which means  $F(v, t) = \beta e^{-\alpha v}$ . For simplicity, we shall use  $v'$  for the spatial derivative  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\dot{v}$  for the time-derivative  $\frac{\partial v}{\partial t}$ , and similar notations for the higher order derivatives. We use  $G = \{(x, t) : 0 < x < L, 0 < t < T\}$  as the space-time domain. The main result of this section is

**Theorem 4** For the given functions  $F(v, t) = \beta e^{-\alpha v}$ ,  $v_0, v_1$ , suppose that

$$v_0(x), v_1(x) \in C_0^4[0, L], \quad (5)$$

then there exists a unique solution  $v(x, t) \in C(\bar{G}, \mathbf{R})$  of the nonlinear problem (1), (2), and (3) in the sense of Definition 2.

The proof of this theorem requires some classical results of the corresponding linear Euler beam problem which can be found in, e.g., (Collatz, 1963). For completeness, we state the results as auxiliary lemmas below.

### 3.4 Some classical results

We denote by  $\tilde{B}$  the operator, corresponding to the boundary value problem

$$\begin{aligned} \varphi^{IV}(x) &= f(x), 0 < x < L, \\ \varphi(0) &= 0, \varphi'(0) = 0, \varphi''(L) = 0, \varphi'''(L) = 0, \end{aligned}$$

which maps a function  $f \in L_2(0, L)$  to  $\varphi = \tilde{B}(f)$  as the solution to the problem. It is well known that it is a closed operator and domain, denoted by  $D(\tilde{B})$ , of the operator  $\tilde{B}$  is dense in the functional space  $L_2(0, L)$ .

**Lemma 1** Operator  $\tilde{B}$  is self-adjoint in the space  $L_2(0, L)$ .

**Proof.** Since

$$\begin{aligned} (\tilde{B}\varphi, \psi) &= \int_0^L \varphi^{(IV)}(x)\psi(x)dx = \varphi'''(x)\psi(x)|_0^L - \varphi''(x)\psi'(x)|_0^L + \varphi'(x)\psi''(x)|_0^L \\ &\quad - \varphi(x)\psi'''(x)|_0^L = \int_0^L \varphi(x)\psi^{(IV)}(x)dx = (\varphi, \tilde{B}\psi) \end{aligned} \quad (6)$$

for all  $\varphi(x), \psi(x) \in D(\tilde{B})$  and since the range of the symmetric operator  $\tilde{B}$  coincides with  $L_2(0, L)$ , the operator  $\tilde{B}$  is self-adjoint. The eigenvalue problem for the operator  $\tilde{B}$  is

$$\begin{aligned} \varphi^{(IV)}(x) &= \lambda\varphi, 0 < x < L, \\ \varphi(0) &= 0, \varphi'(0) = 0, \varphi''(L) = 0, \varphi^{(IV)}(L) = 0. \end{aligned}$$

It is also well known that the operator  $\tilde{B}$  has a discrete spectrum. The eigenvalues of the operator  $\tilde{B}$  can be arranged in non-decreasing order  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$ . The proof of this Lemma is omitted here. We will state and outline the proof of the following lemma.

**Lemma 2** *The asymptotic distribution of the eigenvalues of the operator  $\tilde{B}$  satisfies the following expression*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{(2k+1)^4} = \tilde{\delta},$$

where  $\tilde{\delta}$  is a constant.

**Proof.** It is known (cf., e.g., (Collatz, 1963)) that the spectrum of the operator  $\tilde{B}$  can be determined uniquely by the zeroes of entire function

$$\Delta(\lambda) = \cos rL \cosh rL = -1, \quad (7)$$

where  $r^4 = \lambda$ .

Applying the well-known Rouché's theorem, one can determine the asymptotic behavior of the zeroes of entire function. The two sets of zeros of equation (7) as the spectrum of the operator are found to be asymptotically expressed by

$$r_k = \pm \frac{(2k+1)\pi}{2L} (1 + \bar{o}(1)), \quad r'_k = \pm i \frac{(2k+1)\pi}{2L} (1 + \bar{o}(1)), \quad k = 1, 2, \dots$$

with the corresponding eigenfunctions also expressed asymptotically as

$$\tilde{y}_k(x) = \left( -\frac{e^{\frac{(2k+1)\pi}{2}}}{r_k} e^{\frac{(2k+1)\pi}{2L}x} + \frac{e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2}}}{r_k} e^{-\frac{(2k+1)\pi}{2L}x} \right) (1 + o(1)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Here we denote by  $\bar{o}(1)$  and  $o(1)$  the infinitesimal quantities as  $k \rightarrow \infty$ .

Let  $m_k \leq \tilde{y}_k(x) \leq M_k$  for all  $k = 1, 2, \dots$ , where  $m_k = \min_{x \in [0, L]} \tilde{y}_k(x)$  and  $M_k = \max_{x \in [0, L]} \tilde{y}_k(x)$ .

We note that the eigenfunctions  $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k \geq 1}$  of the operator  $\tilde{B}$  is orthogonal system of functions in  $L_2(0, L)$ , since  $\tilde{B} = \tilde{B}^*$  by Lemma 1. For further purposes it is convenient to normalize the system of functions  $\{\tilde{y}_k(x)\}_{k \geq 1}$ , namely traverse to system

$$\left\{ y_k(x) = \frac{\tilde{y}_k(x)}{\|\tilde{y}_k\|_{L_2(0, L)}} \right\}_{k \geq 1},$$

where  $\|\cdot\|_{L_2(0, L)}$  is the norm of the space  $L_2(0, L)$ .

Let  $m$  be a fixed natural number. We consider the system of nonlinear differential equations with respect to  $c_1(t), c_2(t), \dots, c_m(t)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \ddot{c}_1(t) + EI \lambda_1 c_1(t) = \beta \int_0^L e^{-\alpha \sum_{k=1}^m c_k(t) y_k(x)} y_1(x) dx, \\ \rho A \ddot{c}_2(t) + EI \lambda_2 c_2(t) = \beta \int_0^L e^{-\alpha \sum_{k=1}^m c_k(t) y_k(x)} y_2(x) dx, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \rho A \ddot{c}_m(t) + EI \lambda_m c_m(t) = \beta \int_0^L e^{-\alpha \sum_{k=1}^m c_k(t) y_k(x)} y_m(x) dx, \end{array} \right. \quad (8)$$

with initial conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1(0) = d_1, \dots, c_m(0) = d_m, \\ \dot{c}_1(0) = h_1, \dots, \dot{c}_m(0) = h_m \end{array} \right. \quad (9)$$

for a given set of numbers  $d_1, \dots, d_m$  and  $h_1, \dots, h_m$ .

**Lemma 3** *The system of nonlinear differential equations (8), (9) is equivalent to the following system of nonlinear integral equations*

$$c_k(t) = d_k \cos \sqrt{\tilde{\lambda}_k} t + \frac{h_k}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k} t + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \int_0^t \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k} (t - \tau) \int_0^L e^{-\alpha \sum_{j=1}^m c_j(\tau) y_j(x)} y_k(x) dx d\tau. \quad (10)$$

where  $\tilde{\lambda}_k = \frac{EI\lambda_k}{\rho A}$ ,  $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\rho A}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

**Proof.** The proof of the Lemma 3 is based on the direct verification that the right-hand side of (10) satisfies relations (8), (9). The reverse is also true.

Lemma 3 implies immediately that

**Corollary 1** *If there exist the solutions of (10), then they are infinitely differentiable with respect to  $t$ .*

**Lemma 4** *There exists an unique solution of the system of integral equations (10) in the class of smooth functions with respect to  $t$ .*

**Proof.** For each positive integer  $k$  between 1 and  $m$ , we construct the sequence of approximations to solution of system (10)

$$c_k^{(n)}(t) = c_k^{(0)}(t) + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \int_0^t \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k} (t - \tau) \int_0^L y_k(x) e^{-\alpha \sum_{j=1}^m c_j^{(n-1)}(\tau) y_j(x)} dx d\tau$$

for  $n \geq 1$ , with  $c_k^{(0)}(t) = d_k \cos \sqrt{\tilde{\lambda}_k} t + \frac{h_k}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k} t$ . For  $n \geq 2$ , we have the following difference equations

$$\begin{aligned} \left| c_k^{(n)}(t) - c_k^{(n-1)}(t) \right| = & \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \int_0^t \left| \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k} (t - \tau) \right| \times \\ & \times \int_0^L |y_k(x)| \left| e^{-\alpha \sum_{j=1}^m c_j^{(n-1)}(\tau) y_j(x)} - e^{-\alpha \sum_{j=1}^m c_j^{(n-2)}(\tau) y_j(x)} \right| dx d\tau. \\ & (k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

By the mean value theorem, we obtain the inequality

$$\begin{aligned} & \left| e^{-\alpha \sum_{j=1}^m c_j^{(n-1)}(\tau) y_j(x)} - e^{-\alpha \sum_{j=1}^m c_j^{(n-2)}(\tau) y_j(x)} \right| \leq \\ & \leq m\alpha \max_{1 \leq j \leq m} |y_j(x)| e^{-\alpha \sum_{j=1}^m (c_j^{(n-1)}(\tau) + \theta(x) c_j^{(n-2)}(\tau)) y_j(x)} \cdot \left| c_j^{(n-1)}(\tau) - c_j^{(n-2)}(\tau) \right|, \\ & (k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$



where values of  $\theta(x)$  lie between 0 and 1. By virtue of boundedness of the quantities  $\left| \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k}(t - \tau) \right|$ ,  $|y_j(x)|$ ,  $\left| c_j^{(n-1)}(\tau) + \theta(x)c_j^{(n-2)}(\tau) \right|$ , we have the inequalities

$$\left| c_k^{(n)}(t) - c_k^{(n-1)}(t) \right| \leq \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} t C \max_{1 \leq j \leq m} \left| c_j^{(n-1)}(t) - c_j^{(n-2)}(t) \right|, \\ (k = 1, 2, \dots, m)$$

where  $C$  does not depend on  $k$ . We note, if inequalities

$$\frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} t C \leq 1, (k = 1, 2, \dots, m) \quad (11)$$

hold, it follows the convergence of the sequence  $\left\{ c_k^{(n)}(t) \right\}_{n \geq 1}$  for all  $k$ . The proof of the Lemma 4 is complete. Inequality (11) holds for large values of  $k$ , since Lemma 2 holds. Thus, for all  $k$  there exist limits  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)}(t) = c_k(t)$ , which are solutions of the system (10). It is convenient to denote the above set with two subscripts by  $\{c_{1m}(t), \dots, c_{mm}(t)\}$ .

**Lemma 5** *The sequences  $\{c_{1m}(t), \dots, c_{mm}(t)\}_{m \geq 1}$ ,  $\{\dot{c}_{1m}(t), \dots, \dot{c}_{mm}(t)\}_{m \geq 1}$ , and  $\{\ddot{c}_{1m}(t), \dots, \ddot{c}_{mm}(t)\}_{m \geq 1}$  are all Cauchy sequences for fixed  $t \in [0, T]$ , if  $d_k \rightarrow 0$  and  $h_k \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ .*

**Proof.** Together with the sequence  $\{c_{km}(t)\}_{k=1}^m$ , we consider the sequence of functions  $\{c_{k,m+p}(t)\}_{k=1}^{m+p}$  for arbitrary  $p \geq 1$ , that satisfies the integral equations system

$$c_{k,m+p}(t) = d_k \cos \sqrt{\tilde{\lambda}_k} t + \frac{h_k}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k} t + \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \int_0^t \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k}(t - \tau) \int_0^L e^{-\alpha \sum_{j=1}^{m+p} c_{j,m+p}(\tau) y_j(x)} y_k(x) dx d\tau. \\ (k = m + 1, \dots, m + p) \quad (12)$$

We take, that the sequences  $d_k \rightarrow 0$  and  $h_k \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ . Eigenvalues  $\tilde{\lambda}_k \rightarrow \infty$  by Lemma 2. Therefore, (12) implies that  $c_{k,m+p} \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow \infty$ ,  $k \geq m$  and for all  $t \in [0, T]$ .

Let  $p \geq 1$ . Now we show that the differences  $c_{km}(t) - c_{k,m+p}(t)$  for fixed  $t$  approach zero as  $m \rightarrow \infty$ . Systems (10) and (12) imply that the differences  $c_{km}(t) - c_{k,m+p}(t)$  satisfy the following equations

$$c_{k,m+p}(t) - c_{km}(t) = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \int_0^t \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k}(t - \tau) \int_0^L \left[ e^{-\alpha \sum_{j=1}^{m+p} c_{j,m+p}(\tau) y_j(x)} - e^{-\alpha \sum_{j=1}^m c_{jm}(\tau) y_j(x)} \right] y_k(x) dx d\tau. \quad (13)$$

$$(k = 1, 2, \dots, m)$$

Further, we transform (13)

$$c_{k,m+p}(t) - c_{km}(t) = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \int_0^t \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k}(t - \tau) d\tau \int_0^L \left[ e^{-\alpha \sum_{j=1}^{m+p} (c_{j,m+p}(\tau) - c_{jm}(\tau)) y_j(x)} - 1 \right] \times e^{-\alpha \sum_{j=1}^m c_{jm}(\tau) y_j(x)} (1 + \bar{o}(1)) y_k(x) dx. \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (14)$$

If we introduce the notation  $\delta_m(t) = c_{km}(t) - c_{k,m+p}(t)$ , then (14) can be rewritten in the following form

$$\delta_m(t) = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\lambda}_k}} \int_0^t \sin \sqrt{\tilde{\lambda}_k}(t - \tau) d\tau \int_0^L \left[ e^{-\alpha \sum_{j=1}^{m+p} \delta_m(\tau) y_j(x)} - 1 \right] \times e^{-\alpha \sum_{j=1}^m c_{jm}(\tau) y_j(x)} (1 + \bar{o}(1)) y_k(x) dx. \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (15)$$

Thus, we have obtained the nonlinear integral equation (15). Since, the right hand side of (15) is infinitesimal quantity, then it has only solution  $\delta_m(t)$  that approaches zero as  $m \rightarrow \infty$ . So the proof of Lemma 5 is complete.

By using

$$\{c_{1m}(t), \dots, c_{mm}(t)\},$$

we construct the sequence of functions in  $(x, t)$

$$v_m(x, t) = \sum_{k=1}^m c_{km}(t) y_k(x). \quad (16)$$

**Lemma 6** *The sequences of functions  $\{v_m(x, t)\}_{m \geq 1}$ ,  $\{\dot{v}_m(x, t)\}_{m \geq 1}$  and  $\{\ddot{v}_m(x, t)\}_{m \geq 1}$  are Cauchy sequence in max-norm of  $C(\bar{G}, R)$  with respect to  $x$  for all fixed  $t \in [0, T]$ .*

**Proof.** By (15), we have

$$|v_{m+p}(x, t) - v_m(x, t)| \leq \sum_{k=1}^m |c_{k,m+p}(t) - c_{km}(t)| |y_k(x)| + \sum_{k=m+1}^{m+p} |c_{k,m+p}(t)| |y_k(x)| \rightarrow 0$$

as  $m \rightarrow \infty$ ,  $k \geq m$  and for all fixed  $t \in [0, T]$ . Hence

$$\max_{x \in [0, L]} |v_{m+p}(x, t) - v_m(x, t)| \leq \quad (17)$$

$$\max_{x \in [0, L]} \sum_{k=1}^m |c_{k,m+p}(t) - c_{km}(t)| |y_k(x)| + \max_{x \in [0, L]} \sum_{k=m+1}^{m+p} |c_{k,m+p}(t)| |y_k(x)| \rightarrow 0,$$

By arguing as in (17), we obtain

$$\max_{x \in [0, L]} \left| v'_{m+p}(x, t) - v'_m(x, t) \right| \leq \quad (18)$$

$$\max_{x \in [0, L]} \sum_{k=1}^m |c_{k,m+p}(t) - c_{km}(t)| |y'_k(x)| + \max_{x \in [0, L]} \sum_{k=m+1}^{m+p} |c_{k,m+p}(t)| |y'_k(x)| \rightarrow 0,$$

$$\max_{x \in [0, L]} \left| v_{m+p}''(x, t) - v_m''(x, t) \right| \leq \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \max_{x \in [0, L]} \sum_{k=1}^m |c_{k, m+p}(t) - c_{km}(t)| |y_k''(x)| + \\ & \max_{x \in [0, L]} \sum_{k=m+1}^{m+p} |c_{k, m+p}(t)| |y_k''(x)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\max_{x \in [0, L]} \left| v_{m+p}'''(x, t) - v_m'''(x, t) \right| \leq \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \max_{x \in [0, L]} \sum_{k=1}^m |c_{k, m+p}(t) - c_{km}(t)| |y_k'''(x)| + \\ & \max_{x \in [0, L]} \sum_{k=m+1}^{m+p} |c_{k, m+p}(t)| |y_k'''(x)| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

as  $m \rightarrow \infty$ ,  $k \geq m$  and for all fixed  $t \in [0, T]$ .

By combining (17)- (20), we have the uniformly convergence of the sequence  $v_m(x, t)_{m=1}^{\infty}$  with respect to  $x$  in the norm of the space  $C^{(4)}[0, L]$  for all fixed  $t \in [0, T]$ , i.e.

$$\|v_{m+p}(x, t) - v_m(x, t)\|_{C^{(4)}[0, L]} = \sum_{k=0}^4 \max_{x \in [0, L]} \left| v_{m+p}^{(k)}(x, t) - v_m^{(k)}(x, t) \right| \rightarrow 0$$

as  $m \rightarrow \infty$ ,  $k \geq m$  and for all fixed  $t \in [0, T]$ . The proof of Lemma 6 is complete. Similarly, we can show that  $\{\dot{v}_m(x, t)\}_{m \geq 1}$  and  $\{\ddot{v}_m(x, t)\}_{m \geq 1}$  also satisfy estimates like (17)- (20) and therefore are also Cauchy-sequences in the norm of  $C(\bar{G}, R)$  for each  $t \in [0, T]$ .

### 3.5 Proof of Theorem 4

We will search for a solution  $v(x, t)$  of the problem (1), (2), and (3) as a limit in the norm  $C(\bar{G}, R)$  of the sequence  $\{v_m(x, t)\}_{m=1}^{\infty}$ , i.e.

$$\|v_m(x, t) - v(x, t)\|_{C(\bar{G}, R)} \rightarrow 0 \text{ as } m \rightarrow \infty.$$

Usually  $v_m(x, t)$  can be found as the following linear combination (16) by some system of functions  $\{y_k(x)\}$ , and besides the coefficients  $c_{km}(t)$  may vary together with numbers  $m$ .

We note that the set of functions  $\{c_{1m}(t), \dots, c_{mm}(t)\}$  is the solution of the Cauchy problem (8)- (9), where the set of numbers  $d_1, \dots, d_m$  and  $h_1, \dots, h_m$  are the first  $m$  Fourier coefficients of functions  $v_0(x, t)$  and  $v_1(x, t)$ , respectively, by system  $\{y_k(x)\}_{k \geq 1}$ .

Further, by Lemmas 3, 4, 5 and 6, the sequences of functions  $\{v_m(x, t)\}_{m \geq 1}$ ,  $\{\dot{v}_m(x, t)\}_{m \geq 1}$ , and  $\{\ddot{v}_m(x, t)\}_{m \geq 1}$  are all Cauchy sequences in max-norm with respect to  $x$  in  $C_0^4(\bar{G}, \mathbf{R})$  and for all fixed  $t \in [0, T]$ . Thus, the proof of Theorem 4 is complete.

## 4 Results and discussions

We prove existence and uniqueness of a weak solution to this semi-linear hyperbolic problem in certain function spaces by using the standard energy estimates and a fixed point argument (see, e.g., (Evans, 2010) for the notations and argument). We construct a sequence of functions by using systems of ODEs, the Galerkin approximation method, and the eigenfunctions of the corresponding 4th order eigenvalue problem. We demonstrate that the sequence of solutions to the ODE systems converges to the unique solution and that the weak solution is also a

classical solution. Our results validates the well-posedness of the hyperbolic problem and provide an explicit numerical procedure to compute a sequence of functions converging to the solution. In the following sections of this paper, the density of the beam is denoted by  $\rho$ , the Young's modulus of the beam is  $E$ , the constant cross-sectional area is  $A$ , and the area moment of inertia is  $I$ , all of which are assumed to be positive constants. To our knowledge, this problem and our results have not been available in literature and therefore our results are novel in this regard, although some numerical results are reported in (Rjeily, 2012) for the corresponding steady state problem which determines the deflection of the beam subject to such force and similar boundary conditions.

## 5 Summary

We have proved the well-posedness of a semi-linear hyperbolic problem which is a model for the the dynamic behavior of a cantilever Euler beam subject to a nonlinear swelling load with fixed-free ends. For smooth initial conditions and smooth force  $g$ , we also show existence of classical solutions by using explicit construction of a sequence of functions corresponding to a sequence of nonlinear DOEs convergent to the solution. Our proof also provides explicit algorithms for computing solutions to the sequence of approximating ODE problems. The novelty here is the consideration of the nonlinear effect of the swelling force acting on the lateral side of the Euler beam.

## Acknowledgments

This work was supported by the projects grant of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project theme «Identification of the boundary conditions of differential operators», 2018-2020).

## References

- [1] Akhiezer, N.I., and Glazman, I.M. *Theory of linear operators in Hilbert space*. New York: Dover, 1993.
- [2] C ea, J. *Lectures on Optimization: Theory and Algorithms* Tata Institute of Fundamental Research. 1978.
- [3] Collatz, L. *Eigenwertaufgaben mit technischen anwendungen*. Leipzig: Geest and Portig K, 1963.
- [4] Evans, L.C. *Partial Differential Equations* 2nd Ed.: AMS, 2010.
- [5] Grob, H. "Schwelldrucim Belchentunnel." Proceedings of the International Symposium on Underground Openings, Lucerne, Switzerland, 1972.
- [6] Gysel, M. "A Contribution to Design of a Tunnel Lining in Swelling Rock." *Rock Mechanics* 10(1977):55-16.
- [7] Gysel, M. "Design of Tunnels in Swelling Rock." *Rock Mechanics and Rock Engineering* 20(1978):219-23.
- [8] Gyulov, T. "Solvability of Some Nonlinear Fourth Order Boundary Value Problems." PhD diss., Central European University, 2009.
- [9] Illeperuma, W.R.K., et al. "Force and stroke of a hydrogel actuator." *The Royal Society of Chemistry-Soft Matter* 9(2013):8504-7.
- [10] Kierzenka, Jacek, and Shampine, Lawrence F. "A BVP Solver based on Residual Control and the MATLAB PSE." *ACM TOMS* 27(2001):299-17.

- 
- [11] Kantorovich, L.N., and Akilov, G.P. *Functional analysis in normed spaces*. New York: Pergamon Press Ltd, 1964.
- [12] Kufner, A., and Fučík, S. *Nonlinear Differential Equations*. New York:Elsevier, 1980.
- [13] Lou, Y., et al. "Swellable elastomers under constraint." *Journal of Applied Physics* 112 (2012):1-6. doi.org/10.1063/1.4745878
- [14] Mansour, E.M.S. "Swell pressures and retaining wall design in expansive soils." *MS diss., University of Dayton, 2011*.
- [15] Mesri, G., Pakbaz, M.C., and Cepeda-Diaz, A.F. "Meaning, measurement and field application of swelling pressure of clay shales." *Geotechnique* 44(1994):129-16.
- [16] Naimark, M.A. *Lineinye differentsialnye operatory*. [Linear differential operators] Moskow: Nauka, 1969. (in Russian)
- [17] Rjeily, Y.E.A., and Khouri, M.F. "Longitudinal Stress Analysis of Buried Pipes under Expansive Soils." *International Journal of Science and Research (IJSR)* 3(2012):2592-7.
- [18] Rynne, B.P. "The Fucik Spectrum of General Sturm-Liouville Problems." *Journal of Differential Equations* 161(2000):87-22.
- [19] Schädlich, B., Marcher, T., and Schweiger, H.F. "Application of a constitutive model for swelling rock to Tunneling." *Geotechnical Engineering Journal of the SEAGS and AGSSEA* 43(2012).
- [20] Shampine, L.F., Gladwell, I., and Thompson, S. *Solving ODEs with MATLAB*. Cambridge University Press, 2003:1-7.
- [21] Smirnov, V.I. *Kurs vysshei matematiki, T.II. [Course of higher mathematics, V.II.] Leningrad: Gos.izdat., 1950. (in Russian)*
- [22] Terzaghi, K., et al. *Soil Mechanics in Engineering Practice*. Wiley, 1996.
- [23] Thomas, M., Puppala, A., and Hoyos, L. "Influence of Swell Pressure From Expansive Fill on Retaining Wall Stability." *Contemporary Topics in Ground Modification, Problem Soils and Geo-Support* 2009:590-7.

МРНТИ 27.29.17, 27.29.23

### Несобственные интегралы в теории глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем

Айсағалиев С.А., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, +77272211573,  
E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Айсағалиева С.С., Научно-исследовательский институт математики и механики  
КазНУ имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан,  
+77273773223, E-mail: a\_sofiya@mail.ru

Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику многомерных фазовых систем со счетным положением равновесия с периодическими нелинейными функциями из заданного множества. Такая неопределенность правой части дифференциального уравнения порождает неединственность решения, что приводит к исследованию свойств решений уравнений с дифференциальными включениями. Предлагается совершенно новый подход к исследованию свойств решения динамических систем со счетным положением равновесия при неполной информации о нелинейностях. Путем неособого преобразования исходная система приводится к специальному виду, состоящему из двух частей. Первая часть дифференциальных уравнений разрешима относительно компонент периодической функции, а вторая часть не содержит нелинейные функции. Исследованы свойства решений, получены оценки на решения исходной системы и преобразованной системы, доказана их ограниченность. Получены тождества относительно компонент нелинейной функции и установлена их связь с фазовыми переменными. Исследованы свойства квадратичных форм относительно фазовых переменных и производных. Получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы для двух случаев: когда значения интегралов от компонент нелинейной функции в периоде равны нулю; когда значения интегралов в периоде отличны от нуля. Эти результаты могут быть использованы для получения условий глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем.

**Ключевые слова:** Неособое преобразование, свойства решений, несобственные интегралы, динамическая система, счетное положение равновесия.

### Көпөлшемді фазалық жүйелердің глобалді асимптотикалық орнықтылық теориясындағы меншіксіз интегралдар

Айсағалиев С.Ә., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қаласы,  
Қазақстан Республикасы, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz  
Айсағалиева С.С., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және механика  
ғызыми-зерттеу институты, Алматы қаласы, Қазақстан Республикасы,  
+77273773223, E-mail: a\_sofiya@mail.ru

Берілген жиында сызықтық емес периодты функциялары бар тепе-теңдік жағдайы ақырлы көп өлшемді фазалық жүйелер динамикасын сипаттайтын жай дифференциалдық теңдеулер класы қарастырылады. Дифференциалдық теңдеудің оң жақ бөлігіндегі мұндай анықталмағандық шешімнің жалғыз еместігін тудырады, ал бұл дифференциалдық қосындылары бар теңдеулердің шешімдерінің қасиеттерін зерттеуге әкеледі. Сызықсыздық туралы толық емес ақпаратында тепе-теңдік жағдайы ақырлы динамикалық жүйелерді шешу қасиеттерін зерттеуде жаңа әдіс ұсынылады. Ерекше емес түрлендіру арқылы бастапқы жүйе екі бөліктен тұратын арнайы түрге келтіріледі. Дифференциалдық теңдеулердің бірінші бөлігі периодты функцияның компоненттеріне қатысты шешіледі, ал екінші бөлігінде сызықсыз функциялар жоқ. Шешімнің қасиеттері зерттеліп, бастапқы жүйе және түрленген жүйенің шешімдеріне баға беріліп, олардың шектелгендігі дәлелденген. Сызықты емес функцияның компоненттеріне қатысты теңдіктер алынған және олардың фазалық айнымалымен байланысы орнатылған. Фазалық айнымалы және туындыларға қатысты квадраттық формалардың қасиеттері зерттелінген. Сызықтық емес функцияның компоненттерінің интегралдарының мәндері периодта нөлге тең және интегралдардың мәндері периодта нөлден өзгеше болған екі жағдайлары үшін жүйе шешімінің бойында меншіксіз интегралдардың бағалары алынған. Бұл нәтижелер көп өлшемді фазалық жүйелердің глобальді асимптоталық тұрақтылығы шарттарын алу үшін пайдаланылуы мүмкін.

**Түйін сөздер:** Ерекше емес түрлендіру, шешімнің қасиеттері, меншіксіз интегралдар, динамикалық жүйелер, тепе-теңдіктің ақырлы жағдайы.

### Improper integrals for stability theory of multidimensional phase systems

Aisagaliev S.A., Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Kazakhstan,  
+77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Aisagalieva S.S., Research Institute of Mathematics and Mechanics of al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, +77273773223, E-mail: a\_sofiya@mail.ru

A class of ordinary differential equations describing the dynamics of multidimensional phase systems with a countable equilibrium position with periodic nonlinear functions from a given set is considered. Such uncertainty of right side of the differential equation gives rise to the nonuniqueness of the solution, which leads to the study of the properties of solutions of equations with differential inclusions. A completely new approach to the study of the properties of the solution of dynamical systems with a countable equilibrium position with incomplete information on nonlinearities is proposed. By a nonsingular transformation, the original system is reduced to a special kind, consisting of two parts. The first part of the differential equations is solvable with respect to the components of the periodic function and the second part does not contain nonlinear functions. The properties of solutions are studied, estimates for the solutions of the original system and the transformed system are obtained and their boundedness is proved. Identities with respect to the components of the nonlinear function are obtained and their relation to the phase variables is established. The properties of quadratic forms with respect to phase variables and derivatives are studied. The estimates of improper integrals along the solution of the system are obtained for two cases: when the values of the integrals of the components of the nonlinear function in the period are zero; When the values of the integrals in the period are different from zero. These results can be used to obtain conditions for global asymptotic stability of multidimensional phase systems.

**Key words:** nonsingular transformation, properties of solutions, improper integrals, dynamical system, countable equilibrium position.

## 1 Введение

Рассмотрим динамическую систему с цилиндрическим фазовым пространством описываемую уравнением следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = x + R\varphi(x), \quad x(0) = x_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad t \in I = [0, \infty), \quad (1)$$

где  $A, B, C, R$  – постоянные матрицы порядков  $n \times n, n \times m, m \times n, m \times m$  соответственно, матрица  $A$  – гурвицева, т.е.  $Re\lambda_j(A) < 0, j = \overline{1, n}, \lambda_j(A) j = \overline{1, n}$  – собственные значения матрицы  $A, |x_0| < \infty, |\sigma_0| < \infty, \varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)), \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ .

Функция

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C^1(R^m, R^m) / \mu_{1i} \leq \frac{d\varphi_i(\sigma_i)}{d\sigma_i} \leq \mu_{2i} \quad (2) \\ \varphi_i(\sigma_i) = \varphi_i(\sigma_i + \Delta_i), \quad \forall \sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m}\},$$

где  $\Delta_i$  – период функции  $\varphi_i(\sigma_i), \mu_{2i}, i = \overline{1, m}$  – заданные числа,  $|\mu_1| < \infty, |\mu_2| < \infty, \mu_1 = (\mu_{11}, \dots, \mu_{1m}), \mu_2 = (\mu_{21}, \dots, \mu_{2m})$ .

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений.  $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0, Cx_* + R\varphi(\sigma_*) = 0$ .

Поскольку  $x_* = -A^{-1}B\varphi(\sigma_*), (R - CA^{-1}B)\varphi(\sigma_*) = 0$ , то при  $R - CA^{-1}B$  – неособая матрица порядка  $m \times m$  система (1), (2) имеет стационарное множество.

$$\Lambda = \{(x_*, \sigma_*) \in R^{n+m} / x_* = 0, \varphi(\sigma_*) = 0\}.$$

Так как  $\varphi(\sigma_*) = \varphi(\sigma_* + k\Delta) = 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , то положение равновесия системы (1), (2) является счетным множеством,  $\sigma_* = (\sigma_{1*}, \dots, \sigma_{m*}), \Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_m)$ .

**Определение 1** Стационарное множество  $\Lambda$  системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво, если для любой функции  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$  и любого начального состояния  $(x_0, \sigma_0) \in R^{n+m}, |x_0| < \infty, |\sigma_0| < \infty$  решение системы  $x(t) = x(t; 0, x_0, \sigma_0, \varphi), \sigma(t) = \sigma(t; 0, x_0, \sigma_0, \varphi), t \in I$  обладает свойством  $x(t) \rightarrow x_* = 0, \sigma(t) \rightarrow \sigma_*$  при  $t \rightarrow \infty$ , где  $\varphi(\sigma_*) = 0$ .

**Определение 2** Условием глобальной асимптотической устойчивости системы (1), (2) называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы  $(A, B, C, R, \mu_1, \mu_2)$ , при выполнении которых множество  $\Lambda$  глобально асимптотически устойчиво.

Необходимо исследовать в отдельности два случая:

1.

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta_i} \varphi_i(\xi_i) d\xi_i = 0, \quad \forall \sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m};$$

2.

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta_i} \varphi_i(\xi_i) d\xi_i \neq 0, \quad \forall \sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m}.$$

Ставятся следующие задачи:

**Задача 1** Найти оценки несобственных интегралов, вдоль решения системы (1), (2), для случаев 1, 2.



**Задача 2** Найти новое эффективное условие глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества  $\Lambda$  системы (1), (2) для случая, когда

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta_i} \varphi_i(\xi_i) d\xi_i = 0, \quad \forall \sigma_i, \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m};$$

на основе оценки несобственных интегралов для случая 1.

**Задача 3** Найти новое эффективное условие глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества  $\Lambda$  системы (1), (2) для случая, когда

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta_i} \varphi_i(\xi_i) d\xi_i \neq 0, \quad \forall \sigma_i, \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m};$$

на основе оценки несобственных интегралов для случая 2.

## 2 Обзор литературы

Первой работой, посвященной качественно-численным методам исследования фазовых систем, была статья Ф. Трикоми (Triomi, 1933 : 3-10). Применение метода точечных отображений к фазовым системам рассмотрено в работах А.А. Андропова и его последователей (Андронов, 1959), (Барбашин, 1969). Следующим этапом развития качественно-численных методов было применение периодических функций Ляпунова к исследованию фазовых систем. Основы теории периодических функций Ляпунова приведены в работах (Бакаев, 1959 : 105-110), (Бакаев, 1965 : 35-46). Методы построения различных периодических функций Ляпунова, обеспечивающих устойчивость в большинстве фазовых систем, можно найти в (Андронов, 1959). Приближенные нелокальные методы исследования фазовых систем изложены в (Фазовая синхронизация, 1975).

Оригинальным подходом к исследованию фазовых систем являются частотные условия асимптотической устойчивости, основанные на процедуре Бакаева-Гужа. Такой подход впервые предложен в работе Г.А. Леонова (Леонов, 1975 : 7-15). В последующих работах Леонова и его учеников (Леонов, 1976а : 10-15), (Леонов, 1976б : 10-17), (Леонов, 1978 : 115-124) исследованы ограниченности решения фазовых систем, асимптотические свойства решений интегро-дифференциальных уравнений с периодическими нелинейностями, а также устойчивость и колебания фазовых систем. Библиографический обзор научной литературы по фазовым системам можно найти в монографиях (Применение метода функции Ляпунова в энергетике, 1975), (Айсагалиев, 2005).

## 3 Материал и методы

Предлагается новый метод исследования глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем со счетным положением равновесия, на основе оценки

несобственных интегралов вдоль решения системы для двух случаев. В данной статье приведены результаты фундаментальных исследований по следующим разделам: неособое преобразование, свойства решений системы (1), (2), оценка несобственных интегралов вдоль решения системы (1), (2). Эти результаты позволяют сформулировать условия глобальной асимптотической устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы.

### 3.1 Неособое преобразование

Цель неособого преобразования-приведения уравнения движения (1) к специальному виду, для использования свойства нелинейностей из (2) и получения оценки несобственных интегралов.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) относительно фазовых переменных  $x = x(t)$ ,  $\sigma = \sigma(t)$ ,  $t \in I$ . Представим матрицу  $B$  в виде  $B = \|B_1, \dots, B_m\|$ , где  $B_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  векторы столбцы  $n \times 1$ . Пусть матрица  $\theta = \|\theta_1, \dots, \theta_m\|$ , где  $\theta_i \in R^n$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Матрицы  $B, \Theta$  порядков  $n \times m$ .

**Лемма 1** Пусть векторы  $\theta_i \in R^n$ ,  $i = \overline{1, m}$  такие, что:

$$\theta_i^* B_i = 1, \quad \theta_i^* B_j = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad i \neq j, \quad (3)$$

где  $B_i \neq B_j$ ,  $i \neq j$ ,  $(*)$  – знак транспонирования. Тогда вдоль решения первого уравнения из (1) верно тождество

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* A x(t) + \varphi_i(\sigma_i(t)), \quad t \in [0, \infty), \quad i = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Если, кроме того, ранг  $B^* = m$  и определитель Грама

$$\Gamma(\theta_1, \dots, \theta_m) = \begin{vmatrix} \langle \theta_1, \theta_1 \rangle & \langle \theta_2, \theta_2 \rangle & \dots & \langle \theta_1, \theta_m \rangle \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \langle \theta_m, \theta_1 \rangle & \langle \theta_m, \theta_2 \rangle & \dots & \langle \theta_m, \theta_m \rangle \end{vmatrix} \neq 0, \quad (5)$$

то векторы  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  удовлетворяющие условиям (3), (4) существуют и они линейно независимы, где  $\langle \theta_i, \theta_j \rangle$  – скалярные произведения векторов  $\theta_i, \theta_j$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\theta_i^* = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{in})$ ,  $i = \overline{1, m}$ , то умножая слева тождество  $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(\sigma(t))$ ,  $t \in I$  на  $\theta_i^*$  имеем

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* A x(t) + \theta_i^* B \varphi(\sigma(t)), \quad t \in I, \quad i = \overline{1, m},$$

где  $\theta_i^* B = (\theta_i^* B_1, \dots, \theta_i^* B_m)$ . Отсюда с учетом (3), получим (4). Заметим, что соотношение (3) запишется в виде линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned} \theta_{i1} B_{11} + \theta_{i2} B_{12} + \dots + \theta_{in} B_{1n} &= 0, \\ \dots & \\ \theta_{i1} B_{i1} + \theta_{i2} B_{i2} + \dots + \theta_{in} B_{in} &= 1 \\ \dots & \\ \theta_{i1} B_{m1} + \theta_{i2} B_{m2} + \dots + \theta_{in} B_{mn} &= 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Если ранг  $B^* = m$ , то данная система уравнений имеет решение,  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Из условия (5) следует, что векторы  $\theta_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  линейно независимы. Лемма доказана.





Отсюда с учетом того, что матрица  $A$  – гурвицева и  $\|e^{At}\| \leq c(\varepsilon)e^{(a+\varepsilon)t}$ ,  $t \in I$ ,  $\varepsilon > 0$  – сколь угодно малое число,  $a = \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$ ,  $|\varphi(\sigma(t))| \leq \bar{\varphi}$ ,  $t \in I$ , получим

$$|x(t)| \leq c(\varepsilon)|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + c(\varepsilon)|x_0|e^{(a+\varepsilon)t}\|B\|\bar{\varphi} \left[ -\frac{1}{a+\varepsilon}e^{-(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon} \right] \leq c_0,$$

где  $c_0 = \text{const}$ ,  $0 < c_0 < \infty$ ,  $0 < c(\varepsilon) < \infty$ . Итак,  $|x(t)| \leq c_0$ ,  $\forall t, t \in I$ ,  $\forall \varphi, \varphi \in \Phi_0$ . Так как  $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$ , то  $|\dot{x}(t)| \leq \|B\| |\varphi(\sigma(t))| \leq \|A\|c_0 + \|B\|\bar{\varphi} = c_1$ . Следовательно,  $|\dot{x}(t)| \leq c_1$ ,  $\forall t, t \in I$ ,  $\forall \varphi, \varphi \in \Phi_0$ . Из  $|x(t)| \leq c_0$ ,  $|\dot{x}(t)| \leq c_1$ ,  $\forall t, t \in I$  следует оценка (14) и равномерная непрерывность функции  $x(t)$ ,  $t \in I$ . По условию теоремы выполнены условия лемм 1-3, следовательно, матрицы  $\bar{A}$ ,  $A$  подобны т.е.  $\lambda_j(A) = \lambda_j(\bar{A})$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $y_i = \theta_i^* x$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $y_{m+i} = \theta_{0i}^* x$ ,  $i = \overline{1, n-m}$ ,  $y = Kx = P^*x$ . Тогда  $|y(t)| \leq \|P^*\| |x(t)| \leq \|P^*\|c_0 = c_2$ ,  $\forall t, t \in I$ ,  $|\dot{y}(t)| \leq \|P^*\| |\dot{x}(t)| \leq \|P^*\|c_1 = c_3$ ,  $\forall t, t \in I$ . Таким образом, доказаны оценки (15).

Наконец из (13) следует, что  $|\dot{\sigma}(t)| \leq \|\bar{c}\| |y(t)| + \|R\| |\varphi(\sigma(t))| \leq \|\bar{c}\|c_2 + \|R\|\bar{\varphi} = c_4$ ,  $\forall t, t \in I$ ,  $\forall \varphi, \varphi \in \Phi_0$ . Следовательно, верна оценка (10). Из ограниченности производных  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $\dot{\sigma}$ ,  $t \in I$ . Теорема доказана.

Следует отметить, что: 1. Из оценки  $|x(t)| \leq c_0$ ,  $\forall t, t \in I$  имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = |x(\omega)| \leq c(\varepsilon)|x_0| - \frac{1}{a}\|B\|\bar{\varphi} = \bar{c}_0 \leq c_0$  в силу несправедливости  $|x(t)|$ ,  $t \in I$ ,  $a < 0$ ; 2.  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = |y(\omega)| = \|K\|c_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{\sigma}(t)| = |\dot{\sigma}(\infty)| \leq c_4$ .

**Лемма 4** Пусть выполнены условия лемм 1-3. Тогда вдоль решения системы (13) верны тождества

$$\varphi(\sigma(t)) = H_0 \dot{y}(t) - \bar{A}_n y(t), \quad t \in I, \quad (17)$$

$$H_1 \dot{y}(t) = \bar{A}_{12} y(t), \quad t \in I, \quad (18)$$

$$\dot{\sigma}(t) = (\bar{C} - R\bar{A}_H) y(t) + RH_0 \dot{y}(t), \quad t \in I, \quad (19)$$

где

$$H_0 = (I_m, O_{m, n-m}), \quad H_1 = (O_{n-m, m}, I_{n-m}), \quad \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \end{pmatrix} = I_n, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} \\ \bar{A}_{12} \end{pmatrix},$$

$$\bar{A}_{11} = \begin{pmatrix} C_{11} \dots C_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ C_{m1} \dots C_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} d_{11} \dots d_{1n} \\ \dots \dots \dots \\ d_{m1} \dots d_{mn} \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_{12} = \begin{pmatrix} C_{m+1,1} \dots C_{m+1,n} \\ \dots \dots \dots \\ C_{n1} \dots C_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Поскольку выполнены условия лемм 1-3, то верно соотношение (11). Заметим, что

$$H_0 \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_m \end{pmatrix}, \quad H_1 \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_{m+1} \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из (1) следует, что

$$\varphi_1(\sigma_1) = \dot{y}_1 - c_{11}y_1 - \dots - c_{1n}y_n, \dots, \varphi_m(\sigma_m) = \dot{y}_m - c_{m1}y_1 - \dots - c_{mn}y_n,$$

$$\dot{\sigma} = \bar{c}yR\varphi(\sigma), \quad H_1 \dot{y} = \bar{A}_{12}y,$$

где  $\varphi_i(\sigma_i) = \varphi_i(\sigma_i(t))$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $y_i = y_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\dot{y}_i = \dot{y}_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $t \in I$ . Отсюда следуют тождества (17) - (19). Лемма доказана.

**Лемма 5** Пусть выполнены условия лемм 1-4. Тогда для любых матриц  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N = N^*$  порядков  $n \times n$ ,  $n \times n$ ,  $(n-m) \times (n-m)$  вдоль решения уравнения (13) верны тождества

$$\dot{y}^*(t)\Lambda\ddot{y}(t) = \frac{d}{dt}[\dot{y}^*(t)\Lambda\dot{y}(t)] - \dot{y}^*(t)\Lambda^*\ddot{y}(t), \quad t \in I, \quad (20)$$

$$y^*(t)M\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}[y^*(t)My(t)] - y^*(t)M^*\dot{y}(t), \quad t \in I, \quad (21)$$

$$y^*(t)H_1^*NH_1\dot{y}(t) = y^*(t)H_1^*N\bar{A}_{12}y(t), \quad t \in I. \quad (22)$$

**Доказательство.** Тождество (20) непосредственно следует из равенства  $\frac{d}{dt}[\dot{y}^*(t)\Lambda\dot{y}(t)] = \ddot{y}^*(t)\Lambda\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda\ddot{y}(t)$ ,  $t \in I$ , а тождество (21) из равенства  $\frac{d}{dt}[y^*(t)My(t)] = \dot{y}^*(t)M^*y(t) + y^*(t)M\dot{y}(t)$ ,  $t \in I$ . Как следует из формулы (18) для любой симметричной матрицы  $N = N^*$  порядка  $(n-m) \times (n-m)$  верно тождество (22). Лемма доказана.

### 3.3 Несобственные интегралы

На основе неособого преобразования и используя свойства решений системы (1), (2) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (13), в отдельности для двух случаев:

$$\text{а) } \int_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i = 0, \quad i \in \overline{1, m}; \quad \text{б) } \int_{\sigma_i}^{\sigma_i+\Delta_i} \varphi_i(\xi_i)d\xi_i \neq 0, \quad i \in \overline{1, m};$$

где  $\sigma_i \in R^1$ ,  $\Delta_i$  – период функции  $\varphi_i(\sigma_i)$ .

**Теорема 2** Пусть выполнены условия лемм 1-5 и теоремы 1, матрица  $A$  – гурвицева, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ . Тогда для любой диагональной матрицы  $\tau_1 = \text{diag}(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m}) > 0$  порядка  $m \times m$ , вдоль решения системы (13) несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I_{10} = & \int_0^\infty [-y^*(t)\Lambda_1\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda_2\ddot{y} + y^*(t)\Lambda_3\dot{y}(t) + \dot{y}^*(t)\Lambda_4\dot{y}(t) - \\ & - \dot{y}^*(t)\Lambda_5\ddot{y}(t) - y^*(t)\Lambda_6y(t)]dt \leq \int_0^\infty \frac{d}{dt}[\dot{y}^*(t)\Lambda_2\dot{y}(t) + \\ & + y^*(t)\Lambda_3y(t)]dt < \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = & (\bar{C} - R\bar{A}_{11})^*(\mu_1\tau_1 + \tau_1\mu_2)H_0, \quad \Lambda_2 = \bar{A}_{11}^*\tau_1H_0 + H_0^*R^*\mu_1\tau_1H_0 + \\ & + H_0^*R^*\tau_1\mu_2H_0, \quad \Lambda_3 = (\bar{C} - R\bar{A}_{11})^*\mu_1\tau_1A_{11} - 2(\bar{C} - R\bar{A}_{11})^*\mu_1\tau_1\mu_2RH_0 - \\ & - (\bar{C} - R\bar{A}_{11})^*\tau_1\mu_2\bar{A}_{11}, \quad \Lambda_4 = -H_0^*R^*\mu_1\tau_1\bar{A}_{11} - \bar{A}_{11}^*\tau_1\bar{A}_{11} - H_0^*R^*\mu_1\tau_1\mu_2RH_0 - \\ & - H_0^*R^*\tau_1\mu_2\bar{A}_{11}, \quad \Lambda_5 = -H_0^*\tau_1H_0, \quad \Lambda_6 = -(\bar{C} - R\bar{A}_{11})\mu_1\tau_1\mu_2(\bar{C} - R\bar{A}_{11}), \\ & \mu_1 = \text{diag}(\mu_{11}, \dots, \mu_{1m}), \quad \mu_2 = \text{diag}(\mu_{21}, \dots, \mu_{2m}), \quad \|\mu_1\| < \infty, \quad \|\mu_2\| < \infty. \end{aligned} \quad (24)$$

**Доказательство.** Из включения  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$  следует, что

$$\left(\mu_{1i} - \frac{\dot{\varphi}_i}{\dot{\sigma}_i}\right) \left(\frac{\dot{\varphi}_i}{\dot{\sigma}_i} - \mu_{2i}\right) \geq 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t) = \frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt}, \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}(t), \quad t \in I, \quad (25)$$

где

$$\frac{d\varphi(\sigma(t))}{d\sigma} = \frac{\frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt}}{\frac{d\sigma}{dt}} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{\sigma}(t)}, \quad t \in I.$$

Умножая тождество (25) на  $\dot{\sigma}^2(t)$ , получим

$$(\mu_{1i}\dot{\sigma}_i - \dot{\varphi})(\dot{\varphi}_i - \mu_{2i}\dot{\sigma}_i) \geq 0, \quad \forall t, \quad t \in I.$$

Тогда для любой величины  $\tau_{1i} > 0$  верно неравенство

$$(\mu_{1i}\dot{\sigma}_i - \dot{\varphi}_i)\tau_{1i}(\dot{\varphi}_i - \mu_{2i}\dot{\sigma}_i) \geq 0, \quad \forall t, \quad t \in I. \quad (26)$$

Из (26) следует, что

$$(\mu_1\dot{\sigma} - \dot{\varphi}) : * \tau_1 (\dot{\varphi} - \mu_2\dot{\sigma}) \geq 0, \quad \forall t, \quad t \in I, \quad (27)$$

где  $\mu_1 = \text{diag}(\mu_{11}, \dots, \mu_{1m})$ ,  $\tau_1 = \text{diag}(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m}) > 0$ ,  $\mu_2 = \text{diag}(\mu_{21}, \dots, \mu_{2n})$ .

Тогда несобственный интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} (\mu_1\dot{\sigma} - \dot{\varphi})^* \tau_1 (\dot{\varphi} - \mu_2\dot{\sigma}) dt = \int_0^{\infty} [\dot{\sigma}^* \mu_1^* \tau_1 \dot{\varphi} - \dot{\varphi}^* \tau_1 \dot{\varphi} - \\ - \dot{\sigma}^* \mu_1^* \tau_1 \mu_2 \dot{\sigma} + \dot{\varphi}^* \tau_1 \mu_2 \dot{\sigma}] dt \geq 0,$$

где  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t) - H_0 \ddot{y}(t) - \bar{A}_{11} \dot{y}$ ,  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(t) = (\bar{C} - R\bar{A}_{11})y(t) + RH_0 \dot{y}(t)$ ,  $t \in I$  в силу тождеств (17), (18) соответственно,  $\mu_1^* = \mu_1$ ,  $\mu_2^* = \mu_2$ . Отсюда в силу того, что:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^* \mu_1 \tau_1 \dot{\varphi} &= y^* (\bar{C} - R\bar{A}_{11})^* \mu_1 \tau_1 H_0 \ddot{y} + \dot{y}^* H_0^* R^* \mu_1 \tau_1 H_0 \dot{y} - \\ &\quad - y^* (\bar{C} - R\bar{A}_{11})^* \mu_1 \tau_1 \bar{A}_{11} \dot{y} - \dot{y}^* H_0^* R^* \mu_1 \tau_1 \bar{A}_{11} \dot{y}, \\ -\dot{\varphi}^* \tau_1 \dot{\varphi} &= -\dot{y}^* H_0^* \tau_1 H_0 \ddot{y} + 2\dot{y}^* \bar{A}_{11}^* \tau_1 H_0 \dot{y} - \dot{y}^* \bar{A}_{11}^* \tau_1 \bar{A}_{11} \dot{y}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^* \mu_1 \tau_1 \mu_2 \dot{\varphi} &= y^* (\bar{C} - R\bar{A}_{11})^* \mu_1 \tau_1 \mu_2 (\bar{C} - R\bar{A}_{11})y - \dot{y}^* H_0^* R^* \mu_1 \tau_1 \mu_2 (\bar{C} - R\bar{A}_{11})y - \\ &\quad - y^* (\bar{C} - R\bar{A}_{11})^* \mu_1 \tau_1 \mu_2 RH_0 \dot{y} - \dot{y}^* H_0^* R^* \mu_1 \tau_1 \mu_2 RH_0 \dot{y}, \\ \dot{\varphi}^* \tau_1 \mu_2 \dot{\varphi} &= y^* (\bar{C} - R\bar{A}_{11})^* \tau_1 \mu_2 H_0 \ddot{y} + \dot{y}^* H_0^* R^* \tau_1 \mu_2 H_0 \dot{y} - \\ &\quad - y^* (\bar{C} - R\bar{A}_{11})^* \tau_1 \mu_2 \bar{A}_{11} \dot{y} - \dot{y}^* H_0^* R^* \tau_1 \mu_2 \bar{A}_{11} \dot{y}, \end{aligned}$$

имеем

$$I_1 = \int_0^{\infty} [y^* \Lambda_1 \ddot{y} + \dot{y}^* \Lambda_2 \ddot{y} + y^* \Lambda_3 \dot{y} + \dot{y}^* \Lambda_4 \dot{y} + \dot{y}^* \Lambda_5 \dot{y} + y^* \Lambda_6 y] dt \geq 0. \quad (28)$$

Как следует из формул (20), (21) верны соотношения

$$\dot{y}^* \Lambda_2 \ddot{y} = \frac{d}{dt} [\dot{y}^* \Lambda_2 \dot{y}] - \dot{y}^* \Lambda_2 \ddot{y}, \quad y^* \Lambda_3 \dot{y} = \frac{d}{dt} [y^* \Lambda_3 y] - y^* \Lambda_3 \dot{y}. \quad (29)$$

Из (28) с учетом (29), получим

$$I_1 = \int_0^{\infty} [y^* \Lambda_1 \ddot{y} - \dot{y}^* \Lambda_2 \ddot{y} - y^* \Lambda_3 \dot{y} + \dot{y}^* \Lambda_4 \dot{y} + \ddot{y}^* \Lambda_5 \dot{y} + y^* \Lambda_6 y] dt + \\ + \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [\dot{y}^* \Lambda_2 \dot{y} + y^* \Lambda_3 y] dt \geq 0. \quad (30)$$

Из (30) следует оценка (23), где

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [\dot{y}^*(t) \Lambda_2 \dot{y}(t) + y^*(t) \Lambda_3 y(t)] dt = \dot{y}^*(\infty) \Lambda_2 \dot{y}(\infty) + y^*(\infty) \Lambda_3 y(\infty) - \\ - \dot{y}^*(0) \Lambda_2 \dot{y}(0) - y^*(0) \Lambda_3 y(0) < \infty,$$

в силу оценки (15). Теорема доказана.

**Теорема 3** Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любых вектор-строк  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in R^n$ ,  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in R^n$  вдоль решения системы (13) несобственный интеграл

$$I_{20} = \int_0^{\infty} [-\ddot{y}^*(t) \alpha \ddot{y}(t) - \dot{y}^*(t) \beta^* \dot{y}(t) - y^*(t) \gamma^* \gamma y(t) + 2\dot{y}^*(t) \alpha^* \beta \ddot{y}(t) - \\ - 2y^*(t) \alpha^* \gamma \dot{y}(t) + 2y^*(t) \beta^* \gamma \dot{y}(t)] dt \leq \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [2\dot{y}^*(t) \beta^* \alpha \dot{y}(t) + 2y^*(t) \gamma^* \beta y(t)] dt < \infty, \quad (31)$$

где

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [2\dot{y}^*(t) \beta^* \alpha \dot{y}(t) + 2y^*(t) \gamma^* \beta y(t)] dt = 2\dot{y}^*(\infty) \beta^* \alpha \dot{y}(\infty) + \\ + 2y^*(\infty) \gamma^* \beta y(\infty) - 2\dot{y}^*(0) \beta^* \alpha \dot{y}(0) - 2y^*(0) \gamma^* \beta y(0) < \infty.$$

**Доказательство.** Несобственный интеграл

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\alpha \ddot{y}(t) + \beta \dot{y}(t) + \gamma y(t)]^* [\alpha \ddot{y}(t) + \beta \dot{y}(t) + \gamma y(t)] dt = \\ = \int_0^{\infty} [\ddot{y}^* \alpha^* \alpha \ddot{y} + \dot{y}^* \beta^* \beta \dot{y} + y^* \gamma^* \gamma y + 2\dot{y}^* \beta^* \alpha \dot{y} + 2y^* \gamma^* \alpha \ddot{y} + 2y^* \gamma^* \beta y] dt =$$



$$= \int_0^\infty \{ \ddot{y} \alpha^* \alpha \dot{y} + \dot{y}^* \beta^* \beta \dot{y} + y^* \gamma^* \gamma y + \frac{d}{dt} [2t^* \beta^* \alpha y] - \\ - 2\dot{y}^* \alpha^* \beta \dot{y} + 2y^* \gamma^* \alpha \dot{y} + \frac{d}{dt} [2y^* \gamma^* \beta y] - 2y^* \beta^* \gamma y^* \} dt \geq 0.$$

Далее, как в доказательстве теоремы 2, можно показать, что  $I_{20} < \infty$ . Теорема доказана.

Заметим, что оценки несобственных интегралов  $I_{10}, I_{20}$  определяемых неравенствами (23), (31) соответственно, верны как для случая а), так и для случая б) периодических нелинейностей  $\varphi_i(\sigma_i), i = \overline{1, m}$  со свойствами указанными выше.

Рассмотрим случай, когда

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta_i} \varphi_i(\xi_i) d\xi_i = 0, \quad \forall \sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m}. \tag{32}$$

**Теорема 4** Пусть выполнены условия теоремы 2, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$  удовлетворяет условию (32), где  $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m))$ . Тогда для любой диагональной матрицы  $\tau_2 = \text{diag}(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m})$  вдоль решения системы (13) несобственный интеграл

$$I_{30} = \int_0^\infty [-y^*(t)T_1^* \dot{y}(t) + y^*(t)T_2 y(t) + \dot{y}^*(t)T_3 \dot{y}(t)] dt = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(\Delta)} \varphi^*(\sigma) \tau_2 d\sigma - \\ - \int_0^\infty \frac{d}{dt} [y^*(t)T_1 y(t)] dt < \infty, \tag{33}$$

где  $T_1 = -\bar{A}_{11}^* \tau_2 R H_0 + (\bar{C} - R \bar{A}_{11})^* \tau_2 H_0, T_2 = -\bar{A}_{11}^* \tau_2 (\bar{C} - R \bar{A}_{11}), T_3 = H_0^* \tau_2 R H_0,$   
 $\int_{\sigma(0)}^{\sigma(\Delta)} \varphi^*(\sigma) \tau_2 d\sigma = \sum_{i=1}^m \int_{\sigma(0)}^{\sigma(\Delta)} \varphi_i(\sigma_i) \tau_{2i} d\sigma_i.$

**Доказательство.** Заметим, что

$$\int_0^\infty \varphi_i(\sigma_i) \tau_{2i} \dot{\sigma}_i(t) dt = \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i) \tau_{2i} d\sigma_i = \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(0) \pm \Delta_i} \varphi_i(\sigma_i) \tau_{2i} d\sigma_i + \\ + \int_{\sigma_i(0) \pm 2\Delta_i}^{\sigma_i(0) \pm \Delta_i} \varphi_i(\sigma_i) d\sigma_i + \dots + \int_{\sigma_i(0) \pm k\Delta_i}^{\sigma_i(0) \pm (k+1)\Delta_i} \varphi_i(\sigma_i) d\sigma_i + \int_{\sigma_i(0) \pm (k+1)\Delta_i}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i) d\sigma_i = \\ = \int_{\sigma_i(0) \pm (k+1)\Delta_i}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i) d\sigma_i < \infty, \tag{34}$$

где величины

$$\int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(0) \pm \Delta_i} \varphi_i(\sigma_i) \tau_{2i} d\sigma_i = 0, \dots, \int_{\sigma_i(0) \pm k\Delta_i}^{\sigma_i(0) \pm (k+1)\Delta_i} \varphi_i(\sigma_i) d\sigma_i = 0,$$

для любых  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\Delta_i$  – период функции  $\varphi_i(\sigma_i)$ . Иными словами, для любых  $\sigma_i(\infty)$  найдется такое натуральное число  $k$ , где длина отрезка  $[\sigma_i(0) \pm (k+1)\Delta_i, \sigma_i(\infty)]$  меньше чем  $\Delta_i$ .

Несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\infty} \varphi^*(\sigma(t)) \tau_2 \dot{\sigma}(t) dt = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^m \varphi_i(\sigma_i(t)) \tau_{2i} \dot{\sigma}_i(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} [H_0 \dot{y}(t) - \bar{A}_{11} y(t)]^* \tau_2 [(\bar{C} - R \bar{A}_{11}) y(t) + R H_0 \dot{y}(t)] dt = \\ &= \int_0^{\infty} [y^*(t) T_1 \dot{y}(t) + y^*(t) T_2 y(t) + \dot{y}^*(t) T_3 \dot{y}(t)] dt = \\ &= \int_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi^*(\sigma) \tau_2 d\sigma < \infty \end{aligned} \quad (35)$$

в силу неравенства (34), где  $\varphi(\sigma(t)) = H_0 \dot{y}(t) - \bar{A}_{11} y(t)$ ,  $\dot{y} = (\bar{C} - R \bar{A}_{11}) y(t) + R H_0 \dot{y}(t)$ ,  $t \in I$ .

Из (35) с учетом того, что  $y^*(t) T_1 \dot{y}(t) = \frac{d}{dt} (y^* T_1 y) - y^* T_1^* \dot{y}$ , получим оценку (33). Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta_i} \varphi_i(\xi_i) d\xi_i = \bar{\alpha}_\varepsilon \neq 0, \quad \forall \sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad i = \overline{1, m}. \quad (36)$$

Определим величины  $\nu_i, \bar{\beta}_i$  так, чтобы  $\bar{\beta}_i = \int_{\sigma_i}^{\sigma_i + \Delta_i} |\varphi_i(\xi_i)| d\xi_i$ ,  $\nu_i = \frac{\bar{\alpha}_i}{\bar{\beta}_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

**Теорема 5** Пусть выполнены условия теоремы 2, функция  $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$  удовлетворяет условию (36), величины  $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i$  такие, что  $\bar{\alpha}_i - \nu_i \bar{\beta}_i = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тогда для любых диагональных матриц  $\tau_3 = \text{diag}(\tau_{31}, \dots, \tau_{3m})$ ,  $\tau_4 = \text{diag}(\tau_{41}, \dots, \tau_{4m}) > 0$ ,  $\tau_5 = \text{diag}(\tau_{51}, \dots, \tau_{5m}) > 0$  таких, что  $4\tau_4 \tau_5 - (\nu \tau_5)(\nu \tau_5) > 0$ ,  $\nu = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_m)$ , вдоль решения системы (13) несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I_{40} &= \int_0^{\infty} [-y^*(t) \Gamma_1^* \dot{y}(t) + y^*(t) \Gamma_2 y(t) + \dot{y}^*(t) \Gamma_3 \dot{y}(t)] dt \leq \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \Phi_i(\sigma_i) \tau_{3i} d\sigma_i - \\ &\quad - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [y^*(t) \Gamma_1 y(t)] dt < \infty, \end{aligned} \quad (37)$$

где  $\Phi_i(\sigma_i) = \varphi_i(\sigma_i) - \nu_i |\varphi_i(\sigma_i)|$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $\Gamma_1 = N_1 - Q_2^* - Q_3 + M_1$ ,  $\Gamma_2 = N_2 - Q_1 - M_2$ ,  $\Gamma_3 = N_3 - Q_4 - M_0$ .

Здесь матрицы  $N_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ,  $Q_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ,  $M_i$ ,  $i = \overline{0, 2}$  определяются равенствами:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\overline{A}_{11}^* \tau_3 R H_0 + (\overline{C} - R \overline{A}_{11})^* \tau_3 H_0, & N_2 &= -\overline{A}_{11}^* \tau_3 (\overline{C} - R \overline{A}_{11}), & N_3 &= H_0^* \tau_3 R H_0, \\ Q_1 &= (\overline{C} - R \overline{A}_{11})^* \tau_5 (\overline{C} - R \overline{A}_{11}), & Q_2 &= H_0^* R^* \tau_5 (\overline{C} - R \overline{A}_{11}), & Q_3 &= (\overline{C} - R \overline{A}_{11})^* \tau_5 R H_0, \\ Q_4 &= H_0^* R^* \tau_5 R H_0, & M_0 &= H_0^* \tau_4 H_0, & M_1 &= 2 \overline{A}_{11}^* \tau_4 H_0, & M_2 &= \overline{A}_{11}^* \tau_4 \overline{A}_{11}. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Заметим, что функция  $\Phi_i(\sigma_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$  обладает свойством

$$\int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \Phi_i(\xi_i) d\xi_i = \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\xi_i) d\xi_i - \nu_i \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} |\varphi_i(\xi_i)| d\xi_i = \overline{\alpha}_i - \nu_i \overline{\beta}_i = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \Phi_i(\sigma_i) \tau_{3i} d\sigma_i = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} \Phi_i(\sigma_i(t)) \tau_{3i} \dot{\sigma}_i(t) dt < \infty \quad (38)$$

для любых чисел  $\tau_{3i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Данное неравенство следует из (14) после замены  $\varphi_i(\sigma_i)$  на  $\Phi_i(\sigma_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} S_i(t) &= \varphi_i(\sigma_i(t)) \tau_{3i} \dot{\sigma}_i(t) - \tau_{4i} \varphi_i^2(\sigma_i) - \tau_{5i} \dot{\sigma}_i^2(t) - \Phi_i(\sigma_i) \tau_{3i} \dot{\sigma}_i = \\ &= -\tau_{4i} \varphi_i^2(\sigma_i) - \tau_{5i} \dot{\sigma}_i^2 + \nu_i |\varphi_i(\sigma_i)| \tau_{3i} \dot{\sigma}_i = - \left[ \sqrt{\tau_{5i} \dot{\sigma}_i} - \frac{\nu_i \tau_{3i}}{2 \sqrt{\tau_{5i}}} |\varphi_i(\sigma_i)| \right]^2 + \\ &\quad + \left( \frac{\nu_i \tau_{3i}^2}{4 \sqrt{\tau_{5i}}} - \tau_{4i} \right) \varphi_i^2(\sigma_i) \leq 0, \quad \forall t, \quad t \in I, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

в силу того, что  $4 \tau_{4i} \tau_{5i} - \nu_i^2 \tau_{3i}^2 > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Отсюда следует, что

$$\varphi_i(\sigma_i(t)) \tau_{3i} \dot{\sigma}_i(t) - \tau_{4i} \varphi_i^2(\sigma_i) - \tau_{5i} \dot{\sigma}_i^2(t) \leq \Phi_i(\sigma_i) \tau_{3i} \dot{\sigma}_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (39)$$

Суммируя по  $i$  в пределах от 1 до  $m$  из (39), получим

$$\varphi^*(\sigma(t)) \tau_3 \dot{\sigma}(t) - \varphi^*(\sigma(t)) \tau_4 \varphi(\sigma(t)) - \dot{\sigma}^*(t) \tau_5 \dot{\sigma}(t) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(\sigma_i) \tau_{3i} \dot{\sigma}_i, \quad \sigma_i = \sigma_i(t), \quad t \in I. \quad (40)$$

Интегрируя по  $t$  в пределах от 0 до  $\infty$  из (40), получим

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^{\infty} [\varphi^*(\sigma(t)) \tau_3 \dot{\sigma}(t) - \varphi^*(\sigma(t)) \tau_4 \varphi(\sigma(t)) - \dot{\sigma}^*(t) \tau_5 \dot{\sigma}(t)] dt \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^m \Phi_i(\sigma_i(t)) \tau_{3i} \dot{\sigma}_i(t) dt = \sum_{i=1}^m \int_0^{\infty} \Phi_i(\sigma_i(t)) \tau_{3i} \dot{\sigma}_i(t) dt < \infty, \end{aligned} \quad (41)$$

в силу неравенства (38). Из неравенств  $4\tau_{4i}\tau_{5i} - \nu_i^*\tau_{3i}^2 > 0$ ,  $i = \overline{1, m}$  следует, что  $4\tau_4\tau_5 - (\nu\tau_3)(\nu\tau_3) > 0$ . Так как верны тождества

$$\begin{aligned}\varphi^*(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t) &= y^*(t)N_1\dot{y}(t) + y^*(t)N_2y(t) + \dot{y}^*(t)N_3\dot{y}(t), \quad t \in I, \\ -\dot{\sigma}^*(t)\tau_5\dot{\sigma}(t) &= -y^*(t)Q_1\dot{y}(t) - y^*(t)Q_2y(t) - \dot{y}^*(t)Q_3\dot{y}(t) - \dot{y}^*Q_4\dot{y}(t), \quad t \in I, \\ -\varphi^*(\sigma(t))\tau_4\varphi(\sigma(t)) &= -y^*(t)M_0\dot{y}(t) + y^*(t)M_1y(t) - \dot{y}^*(t)M_2\dot{y}(t), \quad t \in I,\end{aligned}$$

то неравенство (41) запишется так

$$\begin{aligned}I_4 &= \int_0^\infty y^*(t)\Gamma_1\dot{y}(t) + y^*(t)\Gamma_2y(t) + \dot{y}^*(t)\Gamma_3\dot{y}(t) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_0^\infty \Phi_i(\sigma_i(t))\tau_{3i}\dot{\sigma}_i(t) dt < \infty.\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом того, что  $y^*(t)\Gamma_1\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}[y^*(t)\Gamma_1y(t)] - y^*(t)\Gamma_1\dot{y}(t)$ ,  $t \in I$  получим оценку (37). Теорема доказана.

#### 4 Результаты и обсуждение

Динамическая система с цилиндрическим фазовым пространством со счетным положением равновесия путем неособого преобразования приведена к специальному виду, состоящему из двух частей. Первая часть дифференциальных уравнений разрешима относительно компонентов периодической функции, а вторая часть не содержит нелинейные функций.

Исследованы свойства решений фазовой системы, получены оценки на решения исходной системы и преобразованной системы, доказана их ограниченность.

Получены тождества относительно компонентов периодической нелинейной функции и установлена из связь с фазовыми переменными. Исследованы свойства квадратичных форм относительно фазовых переменных и их производных.

На основе неособого преобразования и свойства решений получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы для двух случаев: 1) когда значения интегралов от компонентов нелинейной функции в природе равны нулю; 2) когда значения интегралов отличны от нуля.

Результаты фундаментальных исследований многомерных фазовых систем сформулированы в виде лемм и теорем со строгим доказательством. Эти результаты могут быть использованы для получения условий глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем.

#### Список литературы

- [1] *Triomi F.* Integrazione di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica // Annali della Roma scuola Normale Superiore de Pisa Scienza Physiche Matematiche // Vol 2, No 2, 1933. – P. 3-10.

- [2] Айсағалиев С.А., Иманкул Т.Ш. Теория фазовых систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2005. – 272 с.
- [3] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959. – 600 с.
- [4] Бакаев Ю.Н. Некоторые вопросы нелинейной теории фазовых систем. – М.: Труды ВИЛ им. Жуковского, 1959, вып. 800. – С. 105-110.
- [5] Бакаев Ю.Н., Гуж А.А. Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Доплера // Радиотехника и электроника, 1965. – Т. 10, № 1. – С. 35-46.
- [6] Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическими фазовым пространством. – М.: Наука, 1969. – 305 с.
- [7] Леонов Г.А. Устойчивость и колебания фазовых систем // Сибирский матем. журнал, 1975. – № 5. – С. 7-15.
- [8] Леонов Г.А. Об ограниченности решений фазовых систем // Вестник ЛГУ, 1976, № 1, – С 10-15.
- [9] Леонов Г.А. Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сибирский математический журнал, 1976, № 1. – С. 10-17.
- [10] Леонов Г.А., Смирнова В.Б. Асимптотика решений системы интегро-дифференциальных уравнений с периодическими нелинейными функциями // Сибирский матем. журнал, 1978, № 4. – С. 115-124.
- [11] Применение метода функций Ляпунова в энергетике. – Под ред. Тагирова М.А. – Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1975. – 301 с.
- [12] Фазовая синхронизация. – Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. – М.: Связь, 1975. – 401 с.

## References

- [1] Aisagaliev S. A., Imankul T., Sh. *Teoriya fazovyih sistem* [Theory of phase systems] (Kazakh universiteti, 2005), 272.
- [2] Andronov A. A., Vitt A. Haykin S. E. *Teoriya kolebaniya* [Theory of oscillation], (M.: Fizmatgiz, 1959) : 600.
- [3] Bakaev Yu.N. *Nekotoryie voprosyi nelineynoy teorii fazovyih sistem* [Some questions of the nonlinear theory of phase systems], (M.: Trudy VIL im. Zhukovskogo, 1959) : 105–110.
- [4] Bakaev Yu. N., Guzh A. A. *Optimalnyiy priem signalov chastotnoy modulyatsii v usloviyah effekta Dopplera* [An optimal reception of frequency modulation signals under the conditions of Doppler effect], *Radiotekhnika i elektronika*, T. 10, No 1 (1965) : 36–46.
- [5] Barbashin E. A., Tabueva V. A. *Dinamicheskie sistemyi s tsilindricheskimi fazovym prostranstvom* [Dynamic systems with cylindrical phase space], (M.: Nauka, 1969) : 305.
- [6] *Fazovaya sinhronizatsiya* [Phase synchronization], *Pod red. V.V. Shahgilyana i L.N. Belyustinoi*, (M.: Svyaz, 1975) : 401.
- [7] Leonov G. A. «Ustoychivost i kolebaniya fazovyih sistem» [Stability and oscillations of phase systems], *Sibirskiy matem. zhurnal*, No 5 (1975) : 7–15.
- [8] Leonov G. A. *Ob ogranichennosti resheniy fazovyih sistem* [Stability and oscillations of phase system], *Vestnik LGU*, No 1 (1976) : 10–15.
- [9] Leonov G. A. «Ob odnom klasse dinamicheskikh sistem s tsilindricheskimi fazovym prostranstvom» [On a class of dynamical systems with a cylindrical phase space], *Sibirskiy matem. zhurnal*, No 1 (1976) : 10–17.
- [10] Leonov G. A., Smirnova V. B., «Asimptotika resheniy sistem integro-differentsialnykh uravneniy s periodicheskimi nelineynymi funktsiyami» [Asymptotics of solutions of a system of integro-differential equations with periodic nonlinear functions], *Sibirskiy matem. zhurnal*, No 4 (1978) : 115–124.
- [11] *Primenenie metoda funktsiy Lyapunova v energetike* [Application of the Lyapunov function method in the engineering], *Pod red. Tagirova M.A.*, (Novosibirsk: Nauka, Sib. otdelenie, 1975) : 301.
- [12] Triomi F. «Integrazione di unione differenziale presentatasi in electrotechnica», *Annali della Roma scuola Normale Superiore de Pisa Scienza Physiche Matematiche*, Vol 2, No 2 (1933) : 3–10.

МРНТИ 27.17.23; 27.17.21

### Квазимногообразия коммутативных колец

Башеева А.О., Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,  
г. Астана, Республика Казахстан, +77075542275, E-mail: basheeva@mail.ru

Работа посвящена вопросам неразрешимости квазиэквациональных теорий и проблеме конечной аксиоматизируемости. В 1966 году Тарский озвучил следующую проблему: Существует ли алгоритм, определяющий является ли эквациональная теория конечного множества конечных алгебр конечно аксиоматизируемой? В 1986 году Мальцевым был задан следующий вопрос: Существует ли конечно базлируемые полугруппы, группы и кольца с неразрешимой эквациональной теорией? Нуракунов А.М. (Nurakunov, 2012) доказал, что есть континуум квазимногообразий унарных с неразрешимой квазиэквациональной теорией, для которых проблема вхождения для конечных унарных неразрешима. В работе (Basheeva, 2017) получены результаты для графов, дифференциальных группоидов и точечных абелевых групп. В данной работе мы доказываем аналогичные результаты для коммутативных колец с единицей. Мы доказываем, что квазимногообразия коммутативных колец с единицей содержат континуум подквазимногообразий с неразрешимой квазиэквациональной теорией, для которых проблема вхождения для конечных колец также неразрешима. Кроме того, мы доказываем здесь, что в многообразии коммутативных колец с единицей существует континуум подквазимногообразий с  $\omega$ -независимым базисом квазитожеств, которые, однако, не имеют независимого базиса квазитожеств. Кроме того, пересечение этих квазимногообразий имеет независимый базис квазитожеств.

**Ключевые слова:** квазиэквациональная теория, неразрешимая теория, квазитожество, квазимногообразие, базис квазитожеств, независимый базис,  $\omega$ -независимый базис, рекурсивный независимый базис, коммутативное кольцо с единицей.

### Коммутативті сақиналар квазикөпбейелер

Башеева А.О., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,  
Астана қ., Қазақстан Республикасы, +77075542275, Электрондық пошта: basheeva@mail.ru

Бұл жұмыс шешілмейтіндік квазиэквационалдық теория және түпкілікті аксиоматизациялану проблемасы сұрақтарына арналған. 1966 жылы Тарский келесі мәселені көтерген: Ақырлы алгебралардың ақырлы жиынының эквационалдық теориясы ақырлы аксиомаланатындығын анықтайтын алгоритм бар ма? 1986 жылы Мальцевтің келесі сұрағы қойылған болатын: шешілмейтіндік квазиэквационалдық теориясы бар ақырлы базисті жартылай группалар, группалар және сақиналар бар ма? Нуракунов А. М. (Nurakunov, 2012) шешілмейтіндік квазиэквационалдық теориясы бар түпкілікті тиісті болу мәселесі шешілмейтін унарлар квазикөпбейелер континуумы бар екендігін дәлелдеді. (Basheeva, 2017) жұмысында графтар, дифференциалдық группоидтар және нүктелі абельдік группалар үшін нәтижелер алынған. Осы жұмыста біз бұл нәтижелерді бірлігі бар коммутативті сақиналар үшін дәлелдейміз. Және бірлігі бар коммутативті сақиналар квазикөпбейелері үшін квазикөпбейелер торының шешілмейтіндік квазиэквационалдық теориясы бар және түпкілікті тиісті болу мәселесі де шешілмейтін ішкі квазикөпбейелер континуумы бар болатындығын дәлелдейміз. Бұл жерде біз бірлігі бар коммутативті сақиналар квазикөпбейелердің  $\omega$ -тәуеліз базис квазитенбетендіктері бар, бірақ тәуеліз базис квазитенбетендіктері жоқ, ал олардың қилысуында тәуеліз базис квазитенбетендіктері бар екендігін де дәлелдейміз.

**Түйін сөздер:** квазиэквационалдық теория, шешіліссіздік теория, квазитенбетендіктер, квазикөпбейелер, квазитенбетендіктердің базистері, тәуелсіз базистер квазитенбетендіктерінің,  $\omega$ -тәуелсіз базистер квазитенбетендіктері, бірлігі бар коммутативтік сақина.

### Quasivarieties of commutative rings

Basheyeva A.O., the L.N. Gumilev Eurasian National University,  
Astana, Kazakhstan, +77075542275, E-mail: basheeva@mail.ru

The work is devoted to the problem of undecidability of quasi-equational theories and to the problem of finite axiomatizability. In 1966, Tarsky posed the following problem: Is there an algorithm deciding if the equational theory of a finite set of finite structures is finitely axiomatizable? In 1986, Maltsev asked the following question: Are there finitely based semigroups, groups, and rings with the undecidable equational theory? Nurakunov A.M. (Nurakunov, 2012) established the existence of continuum many quasivarieties of unars, for which the quasi-equational theory is undecidable and the finite membership problem is also undecidable. In the paper (Basheyeva, 2017), some results in this direction are obtained for graphs, differential groupoids, and pointed Abelian groups. In the present paper, we prove analogous results for the variety of commutative rings with unit. We prove also that the quasivariety of commutative rings with unit contains continuum many of subquasivarieties with the undecidable quasi-equational theory for which the finite membership problem is also undecidable. Apart from that, we prove here that the quasivariety of commutative rings with unit contains continuum many subquasivarieties which have an  $\omega$ -independent quasi-equational basis but does not have an independent quasi-equational basis; moreover, the intersection of those does have an independent basis.

**Key words:** quasi-equational theory, undecidable theory, quasi-identity, quasivariety, quasi-equational basis, independent quasi-equational bases, recursive independent quasi-equational basis, commutative ring with unit.

## 1 Введение

Как один из интересных направлений в теории многообразий и квазимногообразий можно отметить вопрос изучения базисов тождеств и базисов квазитожеств в разных классах алгебр. Изучая квазиэквациональную теорию в определенных классах алгебр необходимо определить конечность базисов квазитожеств. Поиск решений вопроса конечной базизируемости находился и до сих пор находится под влиянием проблемы Альфреда Тарского (Tarski, 1966: 275–288). Проблема Тарского была решена отрицательно в 1993 году Маккензи (McKenzie, 1996: 49–104), что на самом деле сделало проблему конечной базизируемости более интересной и перспективной для исследований. Если бы проблема Тарского имела бы позитивное решение, то статус проблемы конечной аксиоматизируемости был бы совершенно иным. Возможно она бы существовала, однако, основным направлением исследований было бы улучшение известных алгоритмов и классификация их сложности. Проблема Тарского для квазиэквациональных теорий до сих пор не решена. В конце 90-х, ряд исследователей показали, что мощный метод Маккензи, используемый для решения проблемы Тарского, нельзя просто перенести на квазиэквациональные теории. Заметим, что интенсивное исследование конечных базисов тождеств началось с работ Бьярни Йонссона. В конце 60-х Б. Йонссон (Jónsson, 1967: 110–121), (Jónsson, 1968: 187–196) связал теорию решеток с теоретико-модельными аспектами универсальной алгебры. Первый, кто показал, как использовать результаты Б. Йонссона для получения результатов по проблеме конечной аксиоматизируемости, был Кирби Бэйкер (Baker, 1977: 207–243). Который доказал, что конечно порожденное конгруэнц-дистрибутивное многообразие конечно аксиоматизируемо. Правильнее будет сказать, что именно работы Б. Йонссона, результат К. Бэйкера, проблема Тарского и решение этой проблемы Р. Маккензи определили современное направление исследований конечных базисов тождеств и

конечных базисов квазитождеств.

Настоящая работа посвящена вопросам конечной вложимости и вопросам конечной базисуемости квазимногообразий коммутативных колец с единицей. Объектом исследования является квазимногообразие коммутативных колец с единицей, а предметом исследования являются неразрешимость квазиэвациональной теории и независимые базисы квазитождеств. Основным результатом является построение континуума квазимногообразий коммутативных колец с единицей, для которых проблема вхождения для конечных систем и квазиэвациональная теория не разрешимы. А также в данной работе доказано существование континуума подквазимногообразий квазимногообразия коммутативных колец с единицей с  $\omega$ -независимым базисом квазитождеств, которые не имеют независимого базиса квазитождеств, но пересечение которых, однако, имеет рекурсивный независимый базис квазитождеств. Отметим, что теорема 1 была упомянута в работе (Bashyeyeva, 2017: 252–263) без доказательства. Доказательство этой теоремы принадлежит автору настоящей работы. Отметим также, что первое утверждение теоремы 3 также следует из результатов работы (Kravchenko, 2017c: 1330-1337).

## 2 Обзор литературы

В работе (Birkhoff, 1935: 433–454) получена одна из первых теорем о конечной базисуемости в универсальной алгебре. Затем в работе (Neumann, 1937) была предложена проблема конечной базисуемости для групп. Первый нетривиальный класс групп, для которых был найден утвердительный ответ, был классом нильпотентных групп (Lyndon, 1952: 579–583). Проблема конечной базисуемости для колец была предложена (Specht, 1950: 557-589). Результаты конечной базисуемости для коммутативных колец известны из работы (Cohen, 1967: 267–273). То, что тождества, выполняющиеся на конечных кольцах, имеют конечный базис, было установлено (Kruse, 1973: 298–318) и независимо (Львов, 1973: 267–298, 667–668, 735). Кроме того, если  $R$  является кольцом с нильпотентным идеалом  $N$ , таким что  $R/N$  конечно, то тождества  $R$  имеют конечный базис. Это было доказано в (Kruse, 1973: 298–318).

Одним из первых А. Тарский (Tarski, 1966: 275–288) построил пример многообразия универсальных алгебр, не имеющих независимого базиса квазитождеств. Вопрос о существовании независимого базиса квазитождеств для алгебраических систем без конечного базиса квазитождеств изучался А.И. Мальцевым (Maltsev 1967: 1005–1014). Позднее В.А. Горбунов (Gorbunov, 1977: 340–369) привел пример квазимногообразия с двумя унарными операциями и константой без независимого базиса квазитождеств, который тем не менее имеет  $\omega$ -независимый базис квазитождеств. Им же в работе (Gorbunov, 1999: 331) был построен пример конечной унарной алгебры, которая не имеет как независимого, так и  $\omega$ -независимого базиса квазитождеств.

Одни из первых результатов, устанавливающих существование многообразий универсальных алгебр с неразрешимой эвациональной теорией получены в работах Тарского и Чена (Chin, 1951: 341–384), (Tarski, 1953: 188–189), (Tarski A, 1987). Нуракунов (Nurakupov, 2012: 1–17) доказал, что существует континуум многообразий унаров с неразрешимой квазиэвациональной теорией, у которой проблема вхождения для конечных унаров также неразрешима. В работе (Клейман, 1982: 62–108.)



найжены конечно базлируемые многообразия с неразрешимой эквациональной теорией относительно групп, а относительно полугрупп в трудах (Albert, 1992: 179–192), (Murskii, 1968: 663–670).

При исследовании квазиэквациональной теории в некоторых классах алгебраических систем большую роль играет конечность базисов квазитождеств. На сегодняшний день можно найти множество интересных работ о независимых базисах квазитождеств по различным классам алгебраических систем. Так А.Н. Федоров (Fedorov, 1986: 590–597) установил, что свободная 2-нильпотентная группа произвольного ранга  $n \geq 2$  не имеет независимого базиса квазитождеств относительно класса групп без кручения. Н.Я. Медведев (Medvedev, 1985: 111–117) доказал существование континуума квазимногообразий разрешимых групп, не имеющих независимого базиса квазитождеств относительно класса групп без кручения. Интересный результат был получен В.И. Тумановым (Tumanov, 1984: 811–815), где установлено, что любую конечную решетку можно изоморфно вложить в конечную решетку без независимого базиса квазитождеств. Существование континуума квазимногообразий унарных без независимого базиса квазитождеств доказал Карташов (Kartashov, 1980: 173–193), аналогичный результат для конечных псевдо-булевых и топобулевых алгебр получил Тропин (Tropin, 1988: 79–99), для ориентированных графов — Сизый (Sizyi, 1994: 783–794), для алгебр с двумя унарными операциями в сигнатуре — Кравченко (Kravchenko, 2016: 388–394), в случае дифференциальных группоидов и точечных абелевых групп (Basheyeva, 2017: 252–263), в случае неориентированных графов см. (Kravchenko, 2017b: 80–89), для антимногообразий унарных (Kartashova, 2011: 521–532), для многообразия точечных абелевых групп и для квазимногообразий ориентированных графов, содержащих недвудольные графы, в работе (Kravchenko, 2017a). На сегодняшний день в работе (Kravchenko, 2017c: 1330–1337) было найдено общее и достаточное условие для существования континуума квазимногообразий с  $\omega$ -независимым, но без независимого базиса квазитождеств. Здесь мы показываем существование континуума квазимногообразий коммутативных колец с единицей с  $\omega$ -независимым базисом квазитождеств, но без независимого базиса квазитождеств, пересечение которых имеет рекурсивный независимый базис квазитождеств. А также, что есть континуум квазимногообразий коммутативных колец с единицей с неразрешимой квазиэквациональной теорией, для которых проблема вхождения для конечных систем также неразрешима.

### 3 Материал и методы

Напомним некоторые основные определения и общепринятые обозначения из теории квазимногообразий. Все определения, не вошедшие сюда, можно найти в монографии В.А. Горбунова (Gorbunov, 1998), а так же смотрите (Semenova, 2012: 889–905), (Schwidersky, 2014: 1099–1126).

Пусть  $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n, \dots\}$  — множество простых чисел, упорядоченное по возрастанию, а  $\mathcal{P}_{fin}(X)$  — множество конечных подмножеств множества  $X$ . Множество натуральных чисел мы обозначаем через  $\omega$ . Для любого непустого конечного множества  $F \subseteq \omega$  полагаем  $[F] = \prod_{i \in F} p_i$ . Пусть также  $[\emptyset] = 1$ .

Квазитождествами называются предложения вида

$$\forall \bar{x} \psi_1(\bar{x}) \& \dots \& \psi_k(\bar{x}) \rightarrow \psi_0(\bar{x}),$$

где  $\psi_i(\bar{x})$ -атомарные формулы и  $i \leq k$ .

Пусть  $\mathbf{K}_0$ -класс алгебраических систем сигнатуры  $\sigma$ . Класс  $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}_0$  является  $\mathbf{K}_0$ -квазимногообразием, если

$$\mathbf{K} = \{\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0 / \mathcal{A} \models \Psi\}$$

для некоторого множества квазитождеств  $\Psi$  сигнатуры  $\sigma$ .

В этом случае мы будем говорить, что  $\Psi$  является базисом квазитождеств класса  $\mathbf{K}$  относительно  $\mathbf{K}_0$ . Базис  $\Psi$  для  $\mathbf{K}$  относительно  $\mathbf{K}_0$  называется независимым, если для любого  $\psi \in \Psi$  множество  $\Psi \setminus \psi$  уже не является базисом для  $\mathbf{K}$  относительно  $\mathbf{K}_0$ . Базис квазитождеств  $\Psi$  класса  $\mathbf{K}$  относительно  $\mathbf{K}_0$  называется  $\omega$ -независимым, если найдется разбиение  $\Psi = \bigcup_{n \in \omega} \Psi_n$ , где для любого  $n < \omega$  множество  $\bigcup_{m \neq n} \Psi_m$  уже не является базисом для  $\mathbf{K}$  относительно  $\mathbf{K}_0$ .

**Предложение 1** (Gorbunov, 1998: 319, предложение 6.3.1) Пусть  $\mathbf{K}$  — произвольное квазимногообразие,  $\mathbf{K}_0$  — его собственное подквазимногообразие. Если  $\mathbf{K}_0$  имеет бесконечный независимый базис квазитождеств относительно  $\mathbf{K}$ , тогда для любого квазимногообразия  $\mathbf{K}_1 \in \text{Lq}(\mathbf{K})$ , содержащего  $\mathbf{K}_0$  и конечно аксиоматизируемого относительно  $\mathbf{K}$ , число покрытий  $\mathbf{K}_0$  в  $\text{Lq}(\mathbf{K}_1)$  бесконечно.

Вспомним некоторые определения и утверждения, которые нам будут необходимы при доказательстве основных результатов, касающихся коммутативных колец с единицей.

**Определение 1** Кольцом называется система  $(R, +, \cdot)$  с двумя бинарными алгебраическими операциями, удовлетворяющая следующим аксиомам:

$$(P1) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \text{ для любых } a, b, c \in R$$

$$(P2) \quad \text{Существует элемент } 0 \in R \text{ такой, что } 0 + a = a + 0 = a \text{ для любого } a \in R.$$

$$(P3) \quad \text{Для любого } a \in R \text{ существует элемент } -a \in R \text{ такой, что } -a + a = a + (-a) = 0.$$

$$(P4) \quad a + b = b + a \text{ для любых } a, b \in R.$$

$$(P5) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ и } a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ для любых } a, b, c \in R.$$

Кольцо  $(R, +, \cdot)$  называется коммутативным кольцом, если оно удовлетворяет дополнительному условию  $a \cdot b = b \cdot a$  для любого  $a, b \in R$ . Пусть  $\mathbf{R}$  обозначает многообразие коммутативных колец с единицей. Для любого  $x \in R \in \mathcal{R}$  пусть

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= 0, \\ 1 \cdot x &= x, \\ n \cdot x &= \underbrace{(x + \dots + x)}_n \end{aligned}$$

Далее через  $\mathcal{R}_n$  будем обозначать цикл длины  $n$ , то есть коммутативное кольцо с единицей от одного порождающего  $x$  с определяющим соотношением  $nx = 0$ .

**Предложение 2** Пусть  $\mathbf{C} = \{C_n | n < \omega\}$  вычислимый класс конечных систем конечной сигнатуры, удовлетворяющая следующим условиям:

(E<sub>0</sub>)  $C_n$  нетривиальная система для любого  $n < \omega$

(E<sub>1</sub>) если  $k < \omega$  и  $n, n_0, \dots, n_k < \omega$ , то  $C_n \in \mathbf{SP}(C_{n_0}, \dots, C_{n_k})$  тогда и только тогда, когда  $n \in \{n_0, \dots, n_k\}$ .

Тогда существует континуум квазимногообразий  $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Q}(\mathbf{C})$ , для которых проблема вхождения для конечных систем неразрешима.

**Доказательство.** Пусть  $N \subseteq \omega$  произвольное множество. Полагаем

$$\mathbf{K}_N = \{C_i | i \in N\}, \quad \mathbf{R}_N = \mathbf{Q}(\mathbf{K}_N).$$

Пусть  $(\mathbf{R}_N)_{fin}$  обозначает класс конечных систем из  $\mathbf{R}_N$ .

**Утверждение 1**  $\mathbf{R}_N \cap \mathbf{C} = \mathbf{K}_N$ .

**Доказательство утверждения 1.** Очевидно, что  $\mathbf{K}_N \subseteq \mathbf{R}_N \cap \mathbf{C}$ . Наоборот пусть  $C_n \in \mathbf{R}_N \cap \mathbf{C}$  для некоторого целого  $n < \omega$ . Тогда  $C_n \in \mathbf{L}_s\mathbf{P}_s(\mathbf{K}_N)$ . Так как  $C_n$  конечная система, то она  $l$ -проективна, т.е.  $C_n \in \mathbf{SP}(\mathbf{K}_N)$ . Опять, так как  $C_n$  конечна, существуют целые числа  $n_0, \dots, n_k \in N$  такие, что  $C_n \in \mathbf{SP}(C_{n_0}, \dots, C_{n_k})$ . Более того по нашим предположениям о классе  $\mathbf{C}$  получаем, что  $n \in \{n_0, \dots, n_k\} \subseteq N$ ; это означает, что  $C_n \in \mathbf{K}_N$ . Утверждение 1 доказано.

Из утверждения 1 следует

**Утверждение 2** Если  $\mathbf{R}_{N_0} = \mathbf{R}_{N_1}$ , то  $N_0 = N_1$ .

**Утверждение 3** Если множество  $(\mathbf{R}_N)_{fin}$  вычислимо, то множество  $N$  также вычислимо.

**Доказательство утверждения 3.** Если  $(\mathbf{R}_N)_{fin}$  вычислимое множество, то множество  $N' = \{n < \omega | C_n \in \mathbf{R}_N\}$  вычислимо по нашему предположению. По утверждению 2,  $N = N'$ , это означает, что множество  $N$  так же вычислимо. Утверждение 3 доказано.

## 4 Основные результаты

### 4.1 Проблема вхождения для конечных алгебр

**Лемма 1** Пусть  $n > 0, k > 1, k_1 > 1, \dots, k_n > 1$  целые числа такие, что множество  $\{k_1, \dots, k_n\}$  минимально относительно свойства  $\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \dots, \mathcal{R}_{k_n})$ . Тогда  $k = [k_1, \dots, k_n]$ . С другой стороны, если  $k = [k_1, \dots, k_n]$ , то  $\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \dots, \mathcal{R}_{k_n})$ .

**Доказательство леммы 1.** Если  $\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \dots, \mathcal{R}_{k_n})$ , то легко увидеть, что  $\mathcal{R}_k$  вложено в  $\mathcal{R}_{k_1} \times \dots \times \mathcal{R}_{k_n}$ ; Пусть  $\psi$  есть соответствующее вложение.

$$\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \dots, \mathcal{R}_{k_n}) = \mathbf{L}_s\mathbf{P}_s(\mathcal{R}_{k_1}, \dots, \mathcal{R}_{k_n}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathbf{A}).$$

Система  $\mathcal{R}_k$   $l$ -проективна в  $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$ , и соответственно

$$\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \dots, \mathcal{R}_{k_n}).$$

Теперь так как  $\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \dots, \mathcal{R}_{k_n})$ . В силу минимальности множества  $\{k_1, \dots, k_n\}$  получаем, что для любого  $i \leq n$  существует нетривиальный гомоморфизм из  $\mathcal{R}_k$  в  $\mathcal{R}_{k_i}$ . Поскольку  $\mathcal{R}_{k_i}$  не содержит нетривиальных подколец, заключаем, что  $k_i$  делит  $k$ , поэтому  $k = [k_1, \dots, k_n]$  делит  $k$ . Тот факт, что  $\mathcal{R}_k \in \mathbf{SP}(\mathcal{R}_{k_1}, \dots, \mathcal{R}_{k_n})$ , доказывает равенство  $k = [k_1, \dots, k_n]$ . Лемма 1 доказана.

**Теорема 1** *Существует континуальное множество квазимногообразий  $\mathbf{K}$  коммутативных колец с единицей таких, что проблема вхождения для конечных колец в  $\mathbf{K}$  и квазиэквациональная теория  $\mathbf{K}$  неразрешимы.*

**Доказательство.** Для некоторого положительного  $n < \omega$  пусть  $\psi_n$  обозначает следующие квазитождество:

$$\forall x p_n \cdot x = 0 \rightarrow x = 0.$$

Полагаем также

$$\mathbf{K} = \{\mathcal{R}_{p_i} | i < \omega\}.$$

Из леммы 1 следует, что класс  $\mathbf{K}$  удовлетворяет условиям  $(E_0)$ - $(E_1)$ . Пусть также

$$\Psi = \{\psi_n | 1 < n < \omega\},$$

$$\mathbf{K}_N = \{\mathcal{R}_{p_i} | i \in N\},$$

$$\mathbf{R}_N = \mathbf{Q}(\mathbf{K}_N).$$

Пусть  $Th_q(\mathbf{R}_N)$  обозначает квазиэквациональную теорию  $\mathbf{R}_N$ ; тогда  $Th_q(\mathbf{R}_N) = Th_q(\mathbf{K}_N)$ . Из предложения 2 следует, что для квазимногообразия  $\mathbf{R}_N$  проблема вхождения для конечных систем неразрешима, если множество  $N$  не является вычислимым.

**Утверждение 4** *Для  $n < \omega$  имеет место включение  $\psi_n \in Th_q(\mathbf{R}_N)$  тогда и только тогда, когда  $n \in N$ .*

**Доказательство утверждения 4.** Пусть  $n < \omega$ . Если  $n \in N$ , то  $\mathcal{R}_{p_n} \in \mathbf{K}_N \subseteq \mathbf{R}_N$  и  $\mathcal{R}_{p_n} \models \psi_n$ , откуда  $\psi_n \in Th_q(\mathbf{R}_N)$ . Предположим теперь, что  $n \notin N$ . В этом случае  $p_i$  не делит  $p_n$  для любого  $i \in N$ . Это означает, что посылка  $\psi_n$  ложно в любом кольце  $\mathcal{R}_i \in \mathbf{K}_N$  при любом означивании переменных. Но тогда  $\mathcal{R}_i \not\models \psi_n$ . Следовательно, в этом случае  $\mathbf{K}_N \not\models \psi_n$ . Утверждение 4 доказано.

**Утверждение 5** *Если  $Th_q(\mathbf{R}_N)$  разрешима, тогда  $N$  вычислимо.*

**Доказательство утверждения 5.** Если квазиэквациональная теория  $Th_q(\mathbf{R}_N)$  разрешима, то множество  $\{n < \omega | \psi_n \in Th_q(\mathbf{R}_N)\}$  вычислимо. По утверждению дополнение  $N$  вычислимо, откуда следует, что само  $N$  тоже вычислимо. Утверждение 5 доказано.

Замечание о том, что существует континуум невычислимых множеств, имеющих невычислимые дополнения, завершает доказательство теоремы 1.

#### 4.2 Независимые базисы квазитождеств

Пусть  $I \subseteq P$ . Через  $\psi_F^I$  обозначим квазитождество следующего вида:

$$\forall x [F] \cdot x = 0 \rightarrow [F \cap I] \cdot x = 0$$

Пусть  $\Phi_I = \{\psi_F^I | F \in P_{fin}(P)\}$ , а  $\mathbf{R}_I$  - квазимногообразиие, определенное в  $\mathbf{R}$  множеством квазитождеств  $\Phi_I$ .

**Лемма 2** Для любого  $F \in P_{fin}(P)$ ,  $\mathcal{R}_n \in \mathbf{R}_I$  тогда и только тогда, когда  $F \subseteq I$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{R}_{[F]} \in \mathbf{R}_I$ . Тогда  $\mathcal{R}_{[F]} \models \psi_F^I$ , следовательно, если в  $\mathcal{R}_{[F]}$  истинно  $[F] \cdot x = 0$ , то  $[F \cap I] \cdot x = 0$ . Это возможно только когда  $[F]$  делит  $[F \cap I]$ , т.е.  $F \subseteq F \cap I \subseteq I$ . Обратное очевидно.

Пусть множества  $I \subseteq P$  и  $P \setminus I$  бесконечны. Через  $\psi_F^p$ , где  $F \in P_{fin}(P)$  и  $p \notin F$  обозначим квазитождество:

$$\forall x [F \cup \{p\}] \cdot x = 0 \rightarrow [F] \cdot x = 0,$$

Пусть  $\Psi_p = \{\psi_F^p | F \in P_{fin}(P), p \notin F\}$  и  $\Psi_I = \bigcup_{p \in P \setminus I} \Psi_p$  и пусть  $\mathbf{R}'_I$  обозначает квазимногообразиие, определенное в  $\mathbf{R}$  множеством квазитождеств  $\Psi_I$ .

**Теорема 2** Для любого бесконечного собственного подмножества  $I \subseteq P$  квазимногообразиие  $\mathbf{R}_I$  не имеет независимого базиса квазитождеств.

**Доказательство.** По предложению 1 достаточно показать, что для  $\mathbf{R}_I$  не существует покрытий в решетке подквазимногообразиий  $\mathbf{R}$ . Допустим в  $\mathbf{R}_I$  существует покрытие  $\mathbf{B}$  и пусть  $\mathcal{R} \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{R}_I$ . Это значит, что существует квазитождество  $\psi_F^p$ , лежащее в  $\Psi_I$ , которое ложно в  $\mathcal{R}$ , то есть,  $\mathcal{R} \models \neg \psi_F^p$ . Следовательно, существует элемент  $x \in \mathcal{R}$  такой, что  $[F \cup \{p\}] \cdot x = 0$ , но  $[F] \cdot x \neq 0$ . Согласно лемме 2 получим, что существует цикл  $\mathcal{R}_r \leq \mathcal{R}$ , причем  $r$  делит  $[F \cup \{p\}]$ , но  $r$  не делит  $[F]$ , где  $F \neq \emptyset$ . Пусть  $\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cap \text{Mod}(\psi_F^p)$ . Получаем  $\mathbf{R}_I \models \psi_F^p$  и  $\mathcal{R}_r \models \neg \psi_F^p$ . Таким образом,  $\mathbf{R}_I \subseteq \mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$ . Поскольку квазимногообразиие  $\mathbf{B}$  покрывает  $\mathbf{R}_I$  в решетке квазимногообразиий  $Lq(\mathbf{R})$ , имеем равенство  $\mathbf{R}_I = \mathbf{B}'$ . Выберем простое число  $j \in P \setminus I$  такое, что  $r$  не делится на  $j$ . Следовательно  $\mathcal{R}_j \in \mathbf{R}_I$  и  $\mathcal{R}_{rj} \leq \mathcal{R}_r \times \mathcal{R}_j$ . Откуда получаем, что  $\mathcal{R}_{rj} \in \mathbf{B}$ .  $\mathcal{R}_{rj} \models \psi_F^p$ , так как  $rj$  не делит  $[F \cup \{p\}]$ . Таким образом,  $\mathcal{R}_{rj} \in \mathbf{B}' = \mathbf{R}_I$ . Приходим к противоречию, поскольку  $j \notin I$ . Следовательно  $\mathbf{R}_I$  не имеет покрытий в решетке  $Lq(\mathbf{R})$ , что и было нашей целью.

**Теорема 3** Существует континуум квазимногообразиий коммутативных колец с единицей без независимого базиса квазитождеств, которые имеют  $\omega$ -независимый базис квазитождеств.

**Доказательство.** Сначала убедимся, что  $\mathbf{R}'_I$  — необходимые квазимногообразиия. Проверим, что  $\mathbf{R}_I = \mathbf{R}'_I$  для произвольного множества  $I \subseteq P$ , такого что оба множества  $I \subseteq P$  и  $P \setminus I$  бесконечны. Допустим, что  $\mathcal{R} \in \mathbf{R}_I$ , следовательно  $\mathcal{R} \models \Phi_I$ . Если для некоторого элемента  $a \in R$  выполняется равенство  $[F \cup \{p\}] \cdot a = 0$ , то  $(F \cup \{p\}) \cap I = F \cap I \subseteq F$ , так как  $p \notin I$ . А это значит, что число  $m = [(F \cup \{p\}) \cap I]$  делит число  $[F]$ . Откуда получаем равенство  $0 = [F] \cdot a$ , что является заключением квазитождества  $\psi_F^p$  после подстановки элемента  $a$ . Получаем, что  $\mathcal{R} \models \Psi_I$ , следовательно  $\mathcal{R} \in \mathbf{R}'_I$ .

Пусть теперь  $\mathcal{R} \in \mathbf{R}'_I$ , то есть  $\mathcal{R} \models \Psi_I$ . Рассмотрим квазитождество  $\psi^I_F$ . Пусть для некоторого элемента  $a \in R$  выполняется равенство  $[F \cup \{p\}] \cdot a = 0$ . Тогда если  $F \subseteq I$ , то  $F \cap I = F$  и, следовательно, выполняется равенство  $[F] \cdot a = 0$ . Иначе получаем неравенство  $F \setminus I \neq \emptyset$ . Пусть  $F \setminus I = \{p_0, \dots, p_k\}$ . Полагаем

$$R_0 = F, \quad R_{i+1} = R_i \setminus \{p_i\}, \text{ где } 0 \leq i \leq k,$$

тогда  $R_{k+1} = F \cap I$ . Выполнение равенства  $([F]) \cdot a = 0$  влечет выполнения послылки квазитождества  $\psi^{p_0}_{R_0}$  в  $\mathcal{R}$  на элементе  $a$ . Так как  $p_i \notin I$ , то  $\psi^{p_i}_{R_i} \in \Psi_I$ , для  $0 \leq i \leq k$ . Отметим, что заключение квазитождества  $\psi^{p_i}_{R_i}$  совпадает с послылкой квазитождества  $\psi^{p_{i+1}}_{R_{i+1}}$ . Получаем таким образом, что  $[R_{k+1}] \cdot a = 0$  в  $\mathcal{R}$ . Следовательно,  $\mathcal{R} \models \Phi_I$ , откуда  $\mathcal{R} \in \mathbf{R}_I$ .

В силу теоремы 2 существует континуум квазимногообразий вида  $\mathbf{R}'_I$  без независимого базиса квазитождеств. Докажем, что для этих квазимногообразий множество квазитождеств  $\Psi_I = \bigcup_{p \in P \setminus I} \Psi_p$  является  $\omega$ -независимым базисом.

Для этого установим, что для любого элемента  $p \in P \setminus I$  на кольце  $\mathcal{R}_p$  выполняются все квазитождества из  $\Psi_I \setminus \Psi_p$ . Допустим, что  $q \in P \setminus I$ ,  $q \neq p$ ,  $F \in \mathcal{P}_{fin}(P)$ , где  $q \notin F$ . Если в кольце  $\mathcal{R}_p$  на некотором ненулевом элементе истинна послылка квазитождества  $\psi^q_F$ , тогда она истинна на любом ненулевом элементе, поэтому существует гомоморфизм из  $\mathcal{R}_{[F \cup \{q\}]}$  на  $\mathcal{R}_p$ . По лемме 1 из [10], получаем, что число  $[F \cup \{q\}]$  делится на  $p$ . Так как  $p \neq q$ , имеем  $p \in F$ , то есть простое число  $p$  делит  $[F]$ . Следовательно, в  $\mathcal{R}_p$  выполняется и заключение квазитождества  $\psi^q_F$ . Так как  $\mathcal{R}_p$  очевидным образом не удовлетворяет квазитождеству  $\psi^p_\emptyset \in \Psi_p$ , базис  $\Psi_I$  является искомым  $\omega$ -независимым базисом. Теорема доказана.

Рассмотрим квазимногообразии  $\mathbf{R}' = \bigcap_{I \subseteq P, |I|=\omega} \mathbf{R}_I$ . Базис этого квазимногообразия состоит из квазитождеств  $\psi^I_F$ , где  $I$  пробегает множество всех бесконечных собственных подмножеств множества  $P$  простых чисел, а  $F$  пробегает множество всех конечных подмножеств множества  $P$ . Легко видеть, что  $\mathbf{R}'$  состоит из тех коммутативных колец с единицей, в которые не вложимо ни одно из колец  $\mathcal{R}_{[F]}$ , где  $\emptyset \neq F \in \mathcal{P}_{fin}(\omega)$ , в качестве подкольца. Другими словами, имеет место такая лемма.

**Лемма 3**  $\mathbf{R}' = \bigcap \{\mathbf{R}'_I \mid I \subseteq P, |I| = |P \setminus I| = \omega\}$ . Более того,  $\mathcal{R} \in \mathbf{R}'$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{R}$  не содержит конечных циклов  $\mathcal{R}_{[F]}$ , где  $F \neq \emptyset$ , в качестве подсистем.

Поэтому по теореме 3 и лемме 2 базисом квазитождеств для  $\mathbf{R}'$  относительно  $\mathbf{R}$  является множество  $\bigcup_I \Psi_I$ . Но этот базис не является независимым. Тем не менее, как показывает следующая теорема, оказывается возможным найти независимый базис квазитождеств для  $\mathbf{R}'$  относительно  $\mathbf{R}$ .

**Теорема 4** Квазимногообразии  $\mathbf{R}'$  имеет бесконечный рекурсивный независимый базис квазитождеств относительно  $\mathbf{R}$ .

**Доказательство.** Введем следующие обозначения. Полагаем  $F_{-1} = \emptyset$ . Кроме того, пусть  $F_n = \{p_k \in P \mid k \leq n\}$  для произвольного  $n \in \omega$ . Для всякого  $n \in \omega$  обозначим через  $\xi_n$  такое квазитождество:

$$[F_n] \cdot x = 0 \rightarrow [F_{n-1}] \cdot x = 0.$$

Покажем, что  $\Sigma = \{\xi_n | n \in \omega\}$  является независимым базисом квазитождеств для квазимногообразия  $\mathbf{R}'$  относительно  $\mathbf{R}$ . По лемме 3 для любой системы  $\mathcal{R} \notin \mathbf{R}'$  существует непустое конечное множество  $F \subseteq P$ , такое что  $\mathcal{R}_{[F]}$  вложима в  $\mathcal{R}$ . Рассмотрим максимальное  $n \in \omega$  такое, что  $p_n \in F$ . Тогда  $F \subseteq F_n$ ,  $F \not\subseteq F_{n-1}$ , и кольцо  $\mathcal{R}_{[F]}$  (а, следовательно, и кольцо  $\mathcal{R}$ ), очевидно, не удовлетворяет квазитождеству  $\xi_n$ . С другой стороны, если  $n \in \omega$  и посылка квазитождества  $\xi_n$  выполняется в коммутативном кольце с единицей  $\mathcal{R} \in \mathbf{R}'$  при некотором означивании переменных, тогда существует гомоморфизм из  $\mathcal{R}_{[F_n]}$  в  $\mathcal{R}$ . Если образ этого гомоморфизма тривиален, то и заключение квазитождества  $\xi_n$  выполняется в  $\mathcal{R}$  при том же означивании переменных. В противном случае цикл  $\mathcal{R}_G$ , где  $\emptyset \neq G \subseteq F_n$  вложим в  $\mathcal{R}$ . По лемме 3 это невозможно, поэтому  $\mathcal{R}$  удовлетворяет квазитождеству  $\xi_n$ . Следовательно множество  $\Sigma$  является базисом квазитождеств для  $\mathbf{R}'$ . Так как множество  $\{([F_n], [F_{n-1}]) | n \geq 0\}$  вычислимо, то этот базис рекурсивный.

Теперь докажем, что базис  $\Sigma$  независимый в  $\mathbf{R}$ . Поэтому покажем, что для любого  $n \in \omega$  цикл  $\mathcal{R}_{[F_n]}$  выполняется во всех квазитождествах  $\xi_m$ , где  $m \neq n$ . Если  $m < n$ , то посылка квазитождества  $\xi_m$  выполняется на некотором элементе  $a \in R_{[F_n]}$  тогда и только тогда, когда подсистема в  $\mathcal{R}_{[F_n]}$ , порожденная этим элементом, тривиальна. В этом случае, заключение  $\xi_m$  также выполняется на  $a$ . Если же  $m > n$  тогда  $F_n \subseteq F_{m-1}$ . Поэтому заключение квазитождества  $\xi_m$  выполняется для любого элемента  $a \in R$ . Таким образом, если  $m \neq n$ , тогда  $\mathcal{R}_{[F_n]} \models \xi_m$ , так как  $\mathcal{R}_{[F_n]}$  не содержит циклов длины меньше чем  $[F_n]$ , то  $\mathcal{R}_{[F_n]} \not\models \xi_n$ . Это и является требуемым заключением.

## 5 Заключение

В настоящей работе продолжается изучение вопросов неразрешимости квазиэквиациональных теорий и проблема независимой аксиоматизируемости. Основным результатом является доказательство того факта, что квазимногообразия коммутативных колец с единицей содержит континуум подквазимногообразий с неразрешимой квазиэквиациональной теорией, для которых проблема вхождения для конечных систем также неразрешима. Кроме того, строится континуум подквазимногообразий коммутативных колец с единицей, без независимого базиса квазитождеств, но имеющих  $\omega$ -независимый базис квазитождеств; пересечение этих квазимногообразий, однако, имеет рекурсивный независимый базис квазитождеств. Этот результат расширяет и дополняет другие результаты, полученные ранее в этом направлении как автором этой статьи, так и другими авторами.

## 6 Благодарности

Автор выражает искреннюю признательность своим научным консультантам А.М. Нуракунову и М.В. Швидефски за постановку задач и всестороннюю поддержку, а также А.В. Кравченко за внимание к работе.

## Список литературы

- [1] Albert D., Baldinger R., Rhodes J. Undecidability of the identity problem for finite semigroups // J. Symbolic Logic. — 1992. — vol. 57, № 1. — P. 179–192.
- [2] Baker K. A. Finite equational bases for finite algebras in congruence-distributive equational classes // Advances in Math. — 1977. — vol. 24. — P. 207–243.
- [3] Basheyeva A., Nurakunov A., Schwidefsky M., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. III //Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — vol. 14. — P. 252–263.
- [4] Birkhoff G., On the structure of abstract algebras // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1935. — vol. 31. — P. 433–454.
- [5] Gorbunov V.A. Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability //Algebra and Logic — 1977. — vol. 16, no. 5. — P. 340–369.
- [6] Gorbunov V.A. Algebraic Theory of Quasivarieties.— New York:Plenum, 1998. — p. 331
- [7] Cohen D. E. On the laws of a metabelian variety //J. Alg. —1967.— vol. 5. — P. 267–273.
- [8] Chin L.H., Tarski A. Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras //University of California Publications in Mathematics — 1951 — vol. 9— P. 341-384.
- [9] Jónsson B. Algebras whose congruence lattices are distributive. // Mathematica Scandinavica — 1967. — vol. 21 — P. 110–121.
- [10] Jónsson B. Equational classes of lattices. // Mathematica Scandinavica — 1968. — vol. 22 — P. 187–196.
- [11] Kartashov V.K. Quasivarieties of unary algebras with a finite number of cycles //Algebra and Logic — 1980. — vol. 19 — P. 106–120.
- [12] Kartashova, A.V. Antivarieties of unars //Algebra and Logic —2011. — vol. 50. — P. 357–364
- [13] Kravchenko A.V. Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II //Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — vol. 13. — P. 388–394.
- [14] Kravchenko A.V., Nurakunov A.M., Schwidefsky M.V. Complexity of quasivariety lattices. I. Covers and independent axiomatizability // manuscript, 2017.
- [15] Kravchenko A.V., Aleksandr Y. Quasivarieties of graphs and independent axiomatizability //Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — vol. 20. — P. 80–89
- [16] Kravchenko A.V., Nurakunov A.M., Schwidefsky M.V. On quasi-equational bases for differential groupoids and unary algebras //Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — vol. 14. — P. 1330–1337
- [17] Kruse, R. L. Identities satisfied by a finite ring //Journal of Algebra. — 1973. — vol. 26. — P. 298–318.
- [18] Lyndon R. C. Two notes on nilpotent groups //Proc. Amer. LV Tcztk. Sot. — 1952. —vol. 3. №14, 579-583.
- [19] L'vov, I.V. Varieties of associative rings, I, II //Algebra i Logika — 1973. — vol. 12, 267–298, 667–668, 735.
- [20] Maltsev A.I. Universally axiomatizable subclasses of locally finite classes of models //Siberian Math. J. — 1967.— vol.8, no. 5. — P.764–770.
- [21] Medvedev N.Y. Quasivarieties of  $l$ -groups and groups. //Siberian Math. J. — 1985.— vol.26, no. 5. — P.717–723.
- [22] McKenzie R. Tarski's finite basis problem is undecidable //International Journal of Algebra and Computation. V. —1996.— vol. 6.— P. 49-104.
- [23] Murski V.L. Examples of varieties of semigroups //Algebra and logica. 1968.— vol. 3.— P. 423–427.
- [24] Neuman H. Varieties of Groups, Springer-Verlag, Ergeb. d. Math. B. 37, New York, Berlin, 1967.
- [25] Nurakunov A.M. Unreasonable lattices of quasivarieties //International Journal of Algebra and Computation. V. — 2012. — vol. 22.— P. 1-17.



- [26] Nurakunov A.M. Quasi-identities of relatively distributive and relatively cocontinuous quasivarieties of algebras. — Darmstadt: Arbeitstangung Allgemeine Algebra, 1995.
- [27] Semenova M.V., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses //Siberian Math. J., — 2012 —vol. 53. — P. 889–905.
- [28] Sizyi S.V. Quasivarieties of graphs //Siberian Math. J. — 1994. vol. 35. — P. 783–794.
- [29] Specht W., Gesetze in Ringen. I. //Math. Z. —1950. — vol. 52. — P. 557–589.
- [30] Schwidefsky M., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses, II //Internat. J. Algebra Comput., —2014.—vol. 24, 1099–1126.
- [31] Tarski A. Equational logic and equational theories of algebras //Contrib. Math. Logic — 1966. — vol. 8, — P. 275–288.
- [32] Tarski A. Some methodological results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. — 1953. — vol. 18. — P. 188–189.
- [33] Tarski A., Givant S. A Formalization of set theory without variables // AMS: Colloquium publications, Providence, Rhode Island. vol. 41 — 1987.
- [34] Tropin M.P. Finite pseudo-Boolean and topological algebras not having an independent basis of quasiidentities //Algebra and Logic, — 1988. — vol. 27, No.1, — P. 79–99.
- [35] Tumanov V.I. Finite lattice with independent quasi-equational bases //Math. notes, —1984. — vol. 36, No.5, — P. 811–815.
- [36] Fedorov A.N. Quasi-identities of a free 2-nilpotent group //Math. notes, —1986. — vol. 40, No.5 , — P. 837–841.
- [37] Клейман Ю.Г. О тождествах в группах // Тр. Моск. матем. о-ва. — 1982. — Т. 44. — С. 62–108.
- [38] Мальцев А.И. О включении ассоциативных систем в группы //Мат. сборник — 1939. Т. 6, 2. — С. 187–189.
- [39] Мальцев А.И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики //Труды конгресса математиков, Москва (1966), М.Мир, — 1968. — С. 217–231.

## References

- [1] Albert, D. Polimeni, and Baldinger R., and Rhodes John. "Undecidability of the identity problem for finite semigroups."J. Symbolic Logic. 57 (1992): 179–192.
- [2] Baker, Kirby. "Finite equational bases for finite algebras in congruence-distributive equational classes."Advances in Math. 24 (1977): 207–243.
- [3] Basheyeva, Ainur, and Nurakunov Anvar, and Schwidefsky Marina, and Zamojska-Dzienio Anna. "Lattices of subclasses. III."Siberian Electronic Mathematical Reports. 14 (2017): 252–263.
- [4] Birkhoff, Garret. "On the structure of abstract algebras."Proc. Cambridge Philos. Soc. 31 (1935): 433 – 454.
- [5] Gorbunov, Viktor. "Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability."Algebra and Logic. 16 (1977): 340–369.
- [6] Gorbunov, Viktor. Algebraic Theory of Quasivarieties. New York: Plenum, 1998.
- [7] Cohen, Daniel. "On the laws of a metabelian variety."J. Alg. 5 (1967): 267–273.
- [8] Chin, Luogeng Hua, and Tarski Alfred. "Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras."University of California Publications in Mathematics 9 (1951): 341–384.
- [9] Jónsson, Bjarni. "Algebras whose congruence lattices are distributive."Mathematica Scandinavica 21 (1967): 110–121.
- [10] Jónsson, Bjarni. "Equational classes of lattices."Mathematica Scandinavica 22 (1968): 187–196.
- [11] Kartashov, Vladimir. "Quasivarieties of unary algebras with a finite number of cycles."Algebra and Logic. 19 (1980): 106–120.
- [12] Kartashova, Anna. "Antivarieties of unars."Algebra and Logic. 50 (2011): 357–364

- [13] Kravchenko, Aleksandr. "Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II." *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 13 (2016): 388–394.
- [14] Kravchenko, Aleksandr, and Anvar Nurakunov, and Marina Schwidefsky. "Complexity of quasivariety lattices. I. Covers and independent axiomatizability." *manuscript*, 2017.
- [15] Kravchenko, Aleksandr, and Anvar Nurakunov, and Marina Schwidefsky. "On quasi-equational bases for differential groupoids and unary algebras." *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 14 (2017): 1330–1337
- [16] Kravchenko, Aleksandr, and Andrei Yakovlev. "Quasivarieties of graphs and independent axiomatizability." *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 20 (2017): 80–89
- [17] Kruse, Robert. "Identities satisfied by a finite ring." *Journal of Algebra*. 26 (1973): 298–318.
- [18] Lyndon, Rodger. "Two notes on nilpotent groups." *Proc. Amer. LV Tcztk. Sot.* 3 (1952): 579–583.
- [19] L'vov, I.V. "Varieties of associative rings, I, II" *Algebra and logika* 12 (1973): 267–298, 667–668, 735.
- [20] Maltsev, Anatolij. "Universally axiomatizable subclasses of locally finite classes of models." *Siberian Math. J.* 8 (1967): 764–770.
- [21] Medvedev N.Y. "Quasivarieties of  $l$ -groups and groups". *Siberian Math. J.* 26 (1985): 717–723.
- [22] McKenzie, Ralf. "Tarski's finite basis problem is undecidable." *International Journal of Algebra and Computation*. V. 6 (1996): 49–104.
- [23] Murskii, Vadim. "Examples of varieties of semigroups". *Algebra and logika*. 3 (1968): 423–427.
- [24] Neumann, Bernhard. *Varieties of Groups*. Berlin, Springer-Verlag, *Ergeb. d. Math. B.* 37, 1967.
- [25] Nurakunov, Anvar. "Unreasonable lattices of quasivarieties." *International Journal of Algebra and Computation*. V. 22 (2012): 1–17.
- [26] Nurakunov, Anvar. *Quasi-identities of relatively distributive and relatively cocontinuous quasivarieties of algebras*. Darmstadt: Arbeitstangung Allgemeine Algebra, 1995.
- [27] Semenova, Marina, Anna Zamojska-Dzienio. "Lattices of subclasses" *Siberian Math. J.*, 53 (2012): 889–905.
- [28] Szyi, Sergei. "Quasivarieties of graphs." *Siberian Math. J.* 35 (1994): 783–794.
- [29] Specht, Wilhelm. "Gesetze in Ringen. I." *Math. Z.* 52 (1950): 557–589.
- [30] Schwidefsky, Marina, Anna Zamojska-Dzienio. "Lattices of subclasses, II" *Internat. J. Algebra Comput.*, 24 (2014): 1099–1126.
- [31] Tarski, Alfred. "Equational logic and equational theories of algebras." *Contrib. Math. Logic*. 8 (1966): 275–288.
- [32] Tarski, Alfred. "Some methodological results concerning the calculus of relations." *J. Symbolic Logic*. 18 (1953): 188–189.
- [33] Tarski, Alfred., Givant S. *A Formalization of set theory without variables* AMS: Colloquium publications, Providence, Rhode Island. 41 (1987).
- [34] Tropin, Mihail. "Finite pseudo-Boolean and topological algebras not having an independent basis of quasiidentities." *Algebra and Logic*. 27 (1988): 79–99.
- [35] Tumanov, Vladimir. "Finite lattice with independent quasi-equational bases" *Math. notes*, 36 (1984): 811–815.
- [36] Fedorov, Aleksandr. "Quasi-identities of a free 2-nilpotent group" *Math. notes*, 40 (1986): 837–841.
- [37] Kleiman, Y. (1982) O tojdestvax v gruppax [On identities in groups]. *Tr. Mosk. Mat. obs. - Proseeding of Moskow mathematical society* vol.44, pp. 62–108.
- [38] Maltsev, A. (1939) O vkluchenii assosiativnykh sistem v gruppy [On including of associative systems in groups]. *Mat. sbornik - Math. collection*, vol. 6, no. 2, pp.187–189.
- [39] Maltsev, A. (1966) O nekotorykh pogranychnikh voprosakh algebrы i matematicheskoi logiki [Some boundary questions of algebra and Mathematical logic]. *Trudy kongressa matematikov - Proseeding of mathematic congress (Moskva, 1966)*, M.: Mir, pp.217–231.

МРНТИ 27.29.19

## Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде

Кангужин Б.Е., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, +77081001131, E-mail: kanguzhin53@gmail.com

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Задачи для дифференциальных операторов на графах в настоящее время активно изучаются математиками и имеют приложения в квантовой механике, органической химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания. В данной статье выведена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Значительную трудность представляет построение функции Грина на геометрических графах при значениях независимых переменных близких к вершинам графа. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Предлагается конструктивная схема построения функции Грина краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. Доказывается существование разложения произвольной функции, заданного на графе, по собственным функциям. Вопросы из спектральной теории, как построение функции Грина и разложение по собственным функциям для моделей из соединенных стержней пока еще мало изучены. Спектральный анализ дифференциальных операторов на геометрических графах является основным математическим аппаратом при решении современных проблем квантовой механики.

**Ключевые слова:** ориентированный граф, вершины графа, условия Кирхгофа, колебания упругих сетей, функция Грина задачи Дирихле, разложение по собственным функциям.

### Граф-жұлдызда берілген дифференциалдық операторға қойылған Дирихле есебінің Грин функциясы

Кангужин Б.Е., әл-Фараби Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77081001131, E-mail: kanguzhin53@gmail.com

Бұл жұмыста стержендік құрылымды тербелмелі жүйелердің моделі болып табылатын екінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесі зерттеледі. Графтағы дифференциалдық операторларға қойылған есептерді қазіргі уақытта математиктер белсеніп зерттеуде және кванттық механика, органикалық химия, нанотехнология, толқындар теориясы мен ғылымның басқа да салаларында қолданыс табады. Бұл мақалада жұлдызды графта анықталған дифференциалдық оператор үшін Дирихле есебінің Грин функциясы қортылып алынды. Геометриялық графтарда графтың төбелеріне жақын орналасқан тәуелсіз айнымалылардың мәндері үшін Грин функциясын тұрғызу айтарлықтай қиындық туғызады. Біз ішкі төбелерінде жапсырушы стандартты шарттарды және шекаралық төбелерінде Дирихле шекаралық шарттарын пайдаландық. Штурм-Лиувилль теңдеуі үшін шекаралық есептің Грин функциясын тұрғызудың конструктивті схемасы ұсынылады. Графта анықталған кез-келген функцияны меншікті функциялары бойынша жіктеуге болатыны дәлелденеді. Біріктірілген стерженьдердің модельдері үшін спектрлік теорияның Грин функциясын тұрғызу және меншікті функциялары бойынша жіктеу сияқты сұраулары әлі толық зерттелмеген. Геометриялық графтардағы дифференциалдық операторлардың спектрлік талдауы қазіргі заманғы кванттық механиканың мәселелерін шешудегі негізгі математикалық аппарат болып табылады.

**Түйін сөздер:** бағытталған граф, графтың төбелері, Кирхгоф шарты, серпімді желілердің тербелістері, Дирихле есебінің Грин функциясы, меншікті функциялар бойынша жіктеу.

### Green's function of the Dirichlet problem for the differential operator on a star-shaped graph

Kanguzhin B.E., al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, +77081001131, E-mail: kanguzhin53@gmail.com

Differential operators on graphs often arise in mathematics and different fields of science such as mechanics, physics, organic chemistry, nanotechnology. In this paper we deduced the Green function of the Dirichlet problem for a differential operator on a star-shaped graph. We study the differential operator with standard matching conditions in the internal vertices and the Dirichlet boundary conditions at boundary vertices. In this paper, we investigate a system of second-order differential equations, which is a model of vibrational systems with a rod structure. Problems for differential operators on graphs are now actively studied by mathematicians and have applications in quantum mechanics, organic chemistry, nanotechnology, waveguide theory and other fields of natural science. In this paper we derive the Green function of the Dirichlet problem for a differential operator on a starlike graph. A significant difficulty is the construction of the Green's function on geometric graphs for values of independent variables close to the vertices of the graph. We used standard gluing conditions in internal vertices and Dirichlet boundary conditions at boundary vertices. A constructive scheme for constructing the Green's function of the boundary value problem for the Sturm-Liouville equation is proposed. The existence of a decomposition of an arbitrary function defined on a graph with respect to eigenfunctions is proved. Questions from the spectral theory, like the construction of the Green's function and the expansion in eigenfunctions for models from connected rods, have so far been little studied. Spectral analysis of differential operators on geometric graphs is the basic mathematical apparatus in solving modern problems of quantum mechanics.

**Key words:** oriented graph, vertices of graph, Kifchhoff condition, vibrations of elastic networks, Green's function of Dirichlet problem, extension by eigenfunctions.

## 1 Введение

В работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Первые работы по дифференциальным операторам на многообразиях типа графа появились совсем недавно, около 30 лет назад (Герасименко, 1988), (Покорный, 1987), (Покорный, 1988). Задачи для дифференциальных операторов на графах в настоящее время активно изучаются математиками и имеют приложения в квантовой механике, органической химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания (см. (Герасименко, 1988), (Покорный, 1987), (Покорный, 1988), (Покорный, 1996), (Покорный, 2004), (Покорный, 2005)). В данной статье выведена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Используются стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Вопросы из спектральной теории, как построение функций Грина и разложение по собственным функциям для моделей из соединенных стержней пока еще мало изучены.

## 2 Обзор литературы

Отметим новые результаты в области спектральной теории задачи Штурма-Лиувилля для дифференциальных операторов на сетевых многообразиях (Герасименко, 1988), (Покорный, 2004), (Покорный, 2005). Только недавно начали интенсивно изучаться обратные задачи (Jorge, 2012), (Kurasov, 2002), (Юрко, 2006), (Astudillo, 2015), (Post, 2012), векторные задачи (Покорный, 2005) на геометрических графах. В основном во всех упомянутых работах структурные особенности графа на узлах не учитывались.

### 3 Материалы и методы

Более подробно остановимся на результатах, касающиеся функции Грина для дифференциальных операторов второго порядка на многообразиях типа сети. Доказывается существование разложения произвольной функции, заданного на графе, по собственным функциям. В данной работе для полного описания и решения задачи Дирихле для дифференциального оператора второго порядка на графе-звезде использован синтетический подход.

#### 3.1 Определение дифференциального оператора на графе-звезде

Пусть задан граф-звезда  $\mathfrak{S} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ , где  $\mathcal{V}$  множество вершин графа,  $\mathcal{E}$  - множество его дуг (Nagay, 1969). Ориентированный граф считается звездой, если к одной общей вершине, называемой внутренней, примыкают все остальные дуги. Вершины, у которых отсутствуют входящие дуги назовем граничными вершинами. Сначала, от 1 до  $m$  пронумеруем граничные вершины. Присвоим внутренней вершине номер 0. Дугу, оканчивающуюся на вершине  $j$ , обозначим через  $e_j$ . Введем параметризацию таким образом, длину каждой дуги считаем равной  $\pi$ ,  $0 \leq x_j \leq \pi$ , где  $x_j \in e_j \in \mathcal{E}$ , внутренней вершине соответствует  $x_j = 0$ , внешним  $x_j = \pi$ . Функцию  $y(x)$  определенную на дуге  $e_j$  обозначим через  $y_j(x_j)$ ,  $x_j \in e_j$ .

В дальнейшем полезно ввести пространство

$$L_2(\mathfrak{S}) \doteq \prod_{e \in \mathcal{E}} L_2(e)$$

с элементами

$$\vec{Y}(\vec{X}) \doteq [y_e(x_e), e \in \mathcal{E}]^T$$

(где  $\vec{X} = (x_e, e \in \mathcal{E})$  и  $\prod_{e \in \mathcal{E}}$  - декартово произведение подпространств) и с конечной нормой

$$\|\vec{Y}\|_{L_2(\mathfrak{S})} = \sqrt{\sum_{e \in \mathcal{E}} \int_e |y_e(x_e)|^2 dx_e}.$$

Точно также стандартным образом вводится пространство

$$W_2^2(\mathfrak{S}) \doteq \prod_{e \in \mathcal{E}} W_2^2(e).$$

Введем множество функций  $D(\Lambda) \subset W_2^2(\mathfrak{S})$ , элементы которых в каждой внутренней вершине удовлетворяют условиям Кирхгофа (Афанасьева, 2010)

$$\begin{cases} y_1(\pi) = y_j(\pi), & j = 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^m y'_j(\pi) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В электрических сетях они выражают закон Кирхгофа, при колебаниях упругих сетей - баланс напряжений и т.д.

В пространстве  $L_2(\mathfrak{S})$  рассмотрим дифференциальный оператор  $\Lambda$ , задаваемый линейными дифференциальными выражениями

$$-y''_j(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) = \lambda^2 y_j(x_j) + f_j(x_j), \quad e_j \in \mathcal{E}, \quad 0 < x_j < \pi, \quad (2)$$

$$j = 1, \dots, m.$$

с областью определения  $D(\Lambda)$ . При этом  $\{q_j(x_j), 0 < x_j < \pi\}$  - набор вещественных непрерывных функций, обычно называют потенциалами,  $\lambda$  - спектральный параметр,  $\{f_j(x_j), 0 < x_j < \pi\}$  - плотность распределения внешней силы.

В данной работе конструктивно строится функция Грина задачи (1), (2) с условиями Дирихле в граничных вершинах

$$y_j(0) = \dots = y_m(0) = 0. \quad (3)$$

### 3.2 Построение функции Грина задачи Дирихле

В настоящем пункте изучается вопрос о существовании функции Грина для задачи Дирихле

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) + F(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (4)$$

$$u(0) = 0, u(\pi) = 0. \quad (5)$$

Под функцией Грина мы понимаем матричную функцию двух переменных  $G(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$ , при каждой  $\vec{F}(\cdot)$  непрерывной на графе  $\mathfrak{S}$  и заданную формулой

$$u(\vec{x}, \lambda) = \int_{\mathfrak{S}} G(\vec{x}, t, \lambda) \vec{F}(t) dt.$$

**Лемма 1** Решение задачи (4), (5) может быть представлено в виде

$$u(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s_\pi(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \int_x^\pi \frac{s_\pi(t, \lambda) s_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt, \quad (6)$$

где  $D(t, \lambda) = -s'_\pi(t, \lambda) s_0(t, \lambda) + s_\pi(t, \lambda) s'_0(t, \lambda)$  и функций  $s_0(x, \lambda)$  и  $s_\pi(x, \lambda)$  являются линейно независимыми решениями однородной задачи Коши

$$-s''_0(x) + q(x)s_0(x) = \lambda s_0(x), \quad 0 < x < \pi, \quad s_0(0, \lambda) = 0, s'_0(0, \lambda) = 1,$$

$$-s''_\pi(x) + q(x)s_\pi(x) = \lambda s_\pi(x), \quad 0 < x < \pi, \quad s_\pi(\pi, \lambda) = 0, s'_\pi(\pi, \lambda) = 1.$$

**Proof.** Покажем, что правая часть выражения (6) является решением задачи (4), (5). Сначала вычислим первую производную

$$u'(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s'_\pi(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \int_x^\pi \frac{s_\pi(t, \lambda) s'_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \\ + \frac{s_0(x, \lambda) s_\pi(x, \lambda)}{D(x, \lambda)} \vec{F}(x) - \frac{s_0(x, \lambda) s_\pi(x, \lambda)}{D(x, \lambda)} \vec{F}(x),$$

отсюда следует

$$u'(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda) s'_\pi(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \int_x^\pi \frac{s_\pi(t, \lambda) s'_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt.$$

Теперь вычислим вторую производную

$$u''(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda)s''_{\pi}(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \int_x^{\pi} \frac{s_{\pi}(t, \lambda)s''_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \\ + \frac{s_0(x, \lambda)s'_{\pi}(x, \lambda)}{D(x, \lambda)} \vec{F}(x) - \frac{s_0(x, \lambda)s'_{\pi}(x, \lambda)}{D(x, \lambda)} \vec{F}(x)$$

или

$$u''(x, \lambda) = \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda)s''_{\pi}(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \int_x^{\pi} \frac{s_{\pi}(t, \lambda)s''_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt - \vec{F}(x).$$

Так как  $s''_0(x, \lambda) = (q(x) - \lambda)s_0(x, \lambda)$ ,  $s''_{\pi}(x, \lambda) = (q(x) - \lambda)s_{\pi}(x, \lambda)$ , тогда с учетом (6), получим

$$u''(x, \lambda) = (q(x) - \lambda) \left( \int_0^x \frac{s_0(t, \lambda)s_{\pi}(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt + \int_x^{\pi} \frac{s_{\pi}(t, \lambda)s_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt \right) - \\ - \vec{F}(x) = (q(x) - \lambda)u(x, \lambda) - \vec{F}(x),$$

отсюда следует соотношение (4).

Теперь проверим выполнение граничных условий (5). Значение  $x = 0$  подставляя в (6), получим

$$u(0, \lambda) = \int_0^{\pi} \frac{s_{\pi}(t, \lambda)s_0(0, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt = 0,$$

так как  $s_0(0, \lambda) = 0$ . Значение  $x = \pi$  подставляя в (6), получим

$$u(\pi, \lambda) = \int_0^{\pi} \frac{s_0(t, \lambda)s_{\pi}(\pi, \lambda)}{D(t, \lambda)} \vec{F}(t) dt = 0,$$

так как  $s_{\pi}(\pi, \lambda) = 0$ . Лемма 1 доказана. Из Леммы 1 следует следующая теорема.

**Теорема 1** Функция Грина задачи Дирихле (4), (5) имеет представление

$$G_D(\vec{x}, \vec{t}, \lambda) = \begin{cases} \frac{s_0(t, \lambda)s_{\pi}(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} & \text{for } 0 < t < x, \\ \frac{s_{\pi}(t, \lambda)s_0(x, \lambda)}{D(t, \lambda)} & \text{for } x < t < \pi, \end{cases}$$

где  $D(t, \lambda) = -s'_{\pi}(t, \lambda)s_0(t, \lambda) + s_{\pi}(t, \lambda)s'_0(t, \lambda)$ ,  $s_0(x, \lambda)$  и  $s_{\pi}(x, \lambda)$  из Леммы 1.

Отсюда следует

$$D(t, \lambda) = \begin{vmatrix} s_{\pi}(t, \lambda) & s_0(t, \lambda) \\ s'_{\pi}(t, \lambda) & s'_0(t, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Следовательно  $\frac{d}{dt}D(t) = 0$ . Тогда

$$D(t, \lambda) = D(0, \lambda) = \begin{vmatrix} s_{\pi}(0, \lambda) & s_0(0, \lambda) \\ s'_{\pi}(0, \lambda) & s'_0(0, \lambda) \end{vmatrix} = s_{\pi}(0, \lambda) = -s_0(\pi, \lambda).$$

### 3.3 Функция Грина задачи (1), (2), (3)

В данном пункте вычислим решение  $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots, y_m(x_m), 0 < x_j < \pi, j = 1, \dots, m$  задачи (1), (2), (3) для любой правой части  $f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_m(x_m)$  уравнения (2).

Сначала рассмотрим частный случай, когда  $f_1(x_1) \neq 0$  и  $f_2(x_2) = \dots = f_m(x_m) = 0$ . По набору функций  $f_1(x_1), f_2(x_2) \equiv 0, \dots, f_m(x_m) \equiv 0$  находим решение  $y_1(x_1), y_2(x_2), \dots, y_m(x_m)$ . Пусть  $e_j$  —  $j$ -ая дуга графа  $\mathfrak{S}$ . На дугах  $e_j$  вводим функций  $s_{0j}(x_j, \lambda), s_{\pi j}(x_j, \lambda)$ , которые являются линейно независимыми решениями однородной задачи Коши

$$\begin{aligned} -y_j''(x_j) + q_j(x_j)y_j(x_j) &= \lambda y_j(x_j), \\ s_{0j}(0) = 0, s'_{0j}(0) &= 1, \\ s_{\pi j}(\pi) = 0, s'_{\pi j}(\pi) &= 1. \end{aligned}$$

Вводим решение задачи (1), (2), (3) в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(x_2, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda), \\ \dots \dots \dots \\ y_m(x_m, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda), \\ y_1(x_1, \lambda) = B_1 s_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) + \\ \quad + \int_0^{x_1} \frac{s_{01}(t, \lambda) s_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \int_{x_1}^{\pi} \frac{s_{\pi 1}(t, \lambda) s_{01}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt, \end{array} \right. \quad (7)$$

где  $D_1(t, \lambda) = s'_{01}(t, \lambda) s_{\pi 1}(t, \lambda) - s'_{\pi 1}(t, \lambda) s_{01}(t, \lambda)$ . Покажем, что функций заданные системой (7) удовлетворяют уравнениям (2), граничным условиям (3) и условиям

$$y_1(\pi) = y_j(\pi), \quad j = 2, \dots, m. \quad (8)$$

Сначала проверим выполнения граничных условий (3). Значения  $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_m = 0$  подставляя в (7), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(0, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) = 0, \\ \dots \dots \dots \\ y_m(0, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(0, \lambda) = 0, \\ y_1(0, \lambda) = B_1 s_{01}(0, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(0, \lambda) + \int_0^{\pi} \frac{s_{\pi 1}(t, \lambda) s_{01}(0, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt = 0, \end{array} \right.$$

так как  $s_{02}(0, \lambda) = 0, s_{0m}(0, \lambda) = 0$  и  $s_{01}(0, \lambda) = 0$ .

Теперь проверим выполнения условия (8). Значения  $x_1 = \pi, x_2 = \pi, \dots, x_m = \pi$



подставляя в (7), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(\pi, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda), \\ \dots \dots \dots \\ y_m(\pi, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda), \\ y_1(\pi, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) + \\ \quad + \int_0^\pi \frac{s_{01}(t, \lambda) s_{\pi 1}(\pi, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda), \end{array} \right. \quad (9)$$

так как  $s_{\pi 1}(\pi, \lambda) = 0$ . Отсюда следует соотношение (8).

Теперь проверим выполнения уравнения (2). Сначала вычислим первую производную выражения (7).

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_2(x_2, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s'_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda), \\ \dots \dots \dots \\ y'_m(x_m, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s'_{0m}(x_m, \lambda), \\ y'_1(x_1, \lambda) = B_1 s'_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) + \\ \quad + \int_0^{x_1} \frac{s_{01}(t, \lambda) s'_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \int_{x_1}^\pi \frac{s_{\pi 1}(t, \lambda) s'_{01}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt. \end{array} \right.$$

Теперь вычислим вторую производную выражения (7).

$$\left\{ \begin{array}{l} y''_2(x_2, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s''_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda), \\ \dots \dots \dots \\ y''_m(x_m, \lambda) = B_1 s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s''_{0m}(x_m, \lambda), \\ y''_1(x_1, \lambda) = B_1 s''_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) + \int_0^{x_1} \frac{s_{01}(t, \lambda) S''_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \\ \quad + \int_{x_1}^\pi \frac{s_{\pi 1}(t, \lambda) s''_{01}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \frac{s_{01}(x_1, \lambda) s'_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(x_1, \lambda)} f_1(x_1) - \\ \quad - \frac{s_{\pi 1}(x_1, \lambda) s'_{01}(x_1, \lambda)}{D_1(x_1, \lambda)} f_1(x_1) = B_1 s''_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) + \\ \quad + \int_0^{x_1} \frac{s_{01}(t, \lambda) s''_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \int_{x_1}^\pi \frac{s_{\pi 1}(t, \lambda) s''_{01}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt - f_1(x_1). \end{array} \right.$$

Так как  $s''_{0j}(x_j, \lambda) = (q_j(x_j) - \lambda) s_{0j}(x_j, \lambda)$ ,  $s''_{\pi j}(x_j, \lambda) = (q_j(x_j) - \lambda) s_{\pi j}(x_j, \lambda)$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,

тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2''(x_2, \lambda) = (q_2(x_2) - \lambda)B_1s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) = \\ \quad = (q_2(x_2) - \lambda)y_2(x_2, \lambda), \\ \dots \dots \dots \\ y_m''(x_m, \lambda) = (q_m(x_m) - \lambda)B_1s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda) = \\ \quad = (q_m(x_m) - \lambda)y_m(x_m, \lambda), \\ y_1''(x_1, \lambda) = (q_1(x_1) - \lambda)B_1s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) + \\ \quad + (q_1(x_1) - \lambda) \left[ \int_0^{x_1} \frac{s_{01}(t, \lambda)S_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \right. \\ \quad \left. + \int_{x_1}^{\pi} \frac{s_{\pi 1}(t, \lambda)s_{01}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt \right] - \\ \quad - f_1(x_1) = (q_1(x_1) - \lambda)y_1(x_1, \lambda) - f_1(x_1). \end{array} \right.$$

Отсюда следует соотношение (2).

**Теорема 2** Если  $f_1(x_1) \neq 0$  и  $f_2(x_2) \equiv 0, \dots, f_m(x_m) \equiv 0$ , то решение задачи Дирихле (1), (2), (3) может быть записано в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(x_1, \lambda) = - \frac{s_{01}(x_1, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^{\pi} \frac{s_{01}(t, \lambda)s_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \\ \quad + \int_0^{\pi} \frac{s_{01}(t, \lambda)s_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \int_{x_1}^{\pi} \frac{s_{\pi 1}(t, \lambda)s_{01}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt, \\ y_2(x_2, \lambda) = - \frac{s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^{x_1} \frac{s_{01}(t, \lambda)s_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt, \\ \dots \dots \dots \\ y_m(x_m, \lambda) = - \frac{s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^{\pi} \frac{s_{01}(t, \lambda)s_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt, \end{array} \right.$$

где  $\Delta(\lambda) = \sum_{j=1}^m s_{01}(\pi, \lambda) \dots s_{0j-1}(\pi, \lambda) s'_{0j}(\pi, \lambda) s_{0j+1}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda)$ .

**Proof.** Согласно соотношениям (7), второе соотношение условия (1) примет следующий вид

$$B_1 \sum_{j=1}^m s_{01}(\pi, \lambda) \dots s_{0j-1}(\pi, \lambda) s'_{0j}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) = - \int_0^{\pi} \frac{s_{01}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt. \quad (10)$$

Рассмотрим сокращенную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(x_2, \lambda) = B_1s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda), \\ - \int_0^{\pi} \frac{S_{01}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt = \\ \quad = B_1 \sum_{j=1}^m s_{01}(\pi, \lambda) \dots s_{0j-1}(\pi, \lambda) s'_{0j}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda). \end{array} \right. \quad (11)$$

Отсюда следует

$$y_2(x_2, \lambda) = -\frac{s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \frac{s_{01}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt.$$

Аналогичным способом из уравнения (10) и (7) получим

$$y_m(x_m, \lambda) = -\frac{s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \frac{s_{01}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt.$$

Рассмотрим сокращенную систему

$$\begin{cases} y_1(x_1, \lambda) = B_1 s_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) + \\ \quad + \int_0^{x_1} \frac{s_{01}(t, \lambda) s_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \int_{x_1}^\pi \frac{s_{\pi 1}(t, \lambda) s_{01}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt, \\ B_1 \Delta(\lambda) = - \int_0^\pi \frac{s_{01}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt. \end{cases} \quad (12)$$

Запишем систему решений в виде

$$\begin{cases} y_1(x_1, \lambda) = -\frac{s_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \frac{s_{01}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \\ \quad + \int_0^{x_1} \frac{s_{01}(t, \lambda) s_{\pi 1}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \int_{x_1}^\pi \frac{s_{\pi 1}(t, \lambda) s_{01}(x_1, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt, \\ y_2(x_2, \lambda) = -\frac{s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \frac{s_{01}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt, \\ \dots \dots \dots \\ y_m(x_m, \lambda) = -\frac{s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \frac{s_{01}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt. \end{cases} \quad (13)$$

Отсюда следует, что для произвольного  $f_1$  и для  $f_2 \equiv f_3 \equiv \dots f_k \equiv 0$  решение задачи (1), (2), (3) задается формулой (13).

**Теорема 3** Для произвольных  $f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)$  функция Грина задачи Дирихле (1), (2) и (3) имеет представление

$$G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, t, \lambda) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{bmatrix} s_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ \vdots \\ s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} s_{01}(t, \lambda) & & & s_{0m}(t, \lambda) \\ & \dots & & \\ & & & D_m(t, \lambda) \end{bmatrix} + \\ + \text{diag} \{G_{D1}(x_1, t, \lambda), G_{D2}(x_2, t, \lambda), \dots, G_{Dm}(x_m, t, \lambda)\},$$

здесь

$$G_{Dj}(x_j, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{s_{0j}(t, \lambda)s_{\pi j}(x_j, \lambda)}{D_j(t, \lambda)} & \text{when } 0 < t < x_j, \\ \frac{s_{\pi j}(t, \lambda)s_{0j}(x_j, \lambda)}{D_j(t, \lambda)} & \text{when } x_j < t < \pi, \quad j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

**Proof.** Соотношение (13) запишем в матричном виде

$$\vec{Y}_1(\vec{X}) = \begin{bmatrix} y_1^{(1)}(x_1, \lambda) \\ y_2^{(1)}(x_2, \lambda) \\ \dots \\ y_m^{(1)}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \begin{bmatrix} s_{01}(x_1, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ \vdots \\ s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} \times \\ \times \frac{s_{01}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) dt + \int_0^\pi \begin{bmatrix} G_{D1}(x_1, t, \lambda) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} f_1(t) dt,$$

если  $f_2(x_2) \equiv \dots \equiv f_m(x_m) \equiv 0$ .

Проводя аналогичные рассуждения вычислим решение  $\vec{Y}_2(\vec{X})$  задачи (1), (2), (3) для произвольного  $f_2 \neq 0$  и для  $f_1 \equiv f_3 \equiv \dots \equiv f_m \equiv 0$

$$\vec{Y}_2(\vec{X}) = \begin{bmatrix} y_1^{(2)}(x_1, \lambda) \\ y_2^{(2)}(x_2, \lambda) \\ \dots \\ y_m^{(2)}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \begin{bmatrix} s_{01}(x_1, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ \vdots \\ s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} \times \\ \times \frac{s_{02}(t, \lambda)}{D_2(t, \lambda)} f_2(t) dt + \int_0^\pi \begin{bmatrix} 0 \\ G_{D2}(x_2, t, \lambda) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} f_2(t) dt$$

и т.д. решение  $\vec{Y}_m(\vec{X})$  для произвольного  $f_m \neq 0$  и для  $f_1 \equiv f_2 \equiv \dots \equiv f_{m-1} \equiv 0$

$$\vec{Y}_m(\vec{X}) = \begin{bmatrix} y_1^{(m)}(x_1, \lambda) \\ y_2^{(m)}(x_2, \lambda) \\ \dots \\ y_m^{(m)}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \begin{bmatrix} s_{01}(x_1, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ \vdots \\ s_{01}(\pi, \lambda)s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} \times \\ \times \frac{s_{0m}(t, \lambda)}{D_m(t, \lambda)} f_m(t) dt + \int_0^\pi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ G_{Dm}(x_m, t, \lambda) \end{bmatrix} f_m(t) dt.$$

Тогда для произвольных  $f_1(x_1), \dots, f_m(x_m)$  решение задачи (1), (2), (3) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \vec{Y}(\vec{X}) &= \vec{Y}_1(\vec{X}) + \vec{Y}_2(\vec{X}) + \dots + \vec{Y}_m(\vec{X}) = \\ &= -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \begin{bmatrix} s_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(x_2, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ \vdots \\ s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} \times \\ &\times \left[ \frac{s_{01}(t, \lambda)}{D_1(t, \lambda)} f_1(t) + \dots + \frac{s_{0m}(t, \lambda)}{D_m(t, \lambda)} f_m(t) \right] dt + \\ &+ \int_0^\pi \text{diag} \{ G_{D1}(x_1, t, \lambda), G_{D2}(x_2, t, \lambda), \dots, G_{Dm}(x_m, t, \lambda) \} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_m(t) \end{bmatrix} dt. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Следствие 1** Функция Грина задачи Дирихле (1), (2), (3) имеет представление

$$\begin{aligned} G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) &= \text{diag} \{ G_{D1}(x_1, t_1, \lambda), \dots, G_{Dm}(x_m, t_m, \lambda) \} + \\ &+ \frac{s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \dots s_{0m}(\pi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \begin{bmatrix} \frac{s_{01}(x_1, \lambda)}{s_{01}(\pi, \lambda)} \\ \vdots \\ \frac{s_{0m}(x_m, \lambda)}{s_{0m}(\pi, \lambda)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s_{01}(t_1, \lambda)}{s_{01}(\pi, \lambda)}, \dots, \frac{s_{0m}(t_m, \lambda)}{s_{0m}(\pi, \lambda)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь  $s_{aj}(x_j, \lambda)$  линейно независимые решения однородного уравнения

$$-y_j''(x_j) + q_j(x) y_j(x_j) = \lambda y_j(x_j), \quad x_j \in (0, \pi), \quad j = \overline{1, m} \tag{14}$$

с условиями Коши при  $x_j = 0$  и  $x_j = \pi$

$$s_{0j}(0, \lambda) = 0, \quad s'_{0j}(0, \lambda) = 1, \tag{15}$$

$$s_{\pi j}(\pi, \lambda) = 0, \quad s'_{\pi j}(\pi, \lambda) = 1. \tag{16}$$

Заметим, что

$$\Delta(\lambda) = \frac{d}{dt} (s_{01}(t, \lambda) \dots s_{0m}(t, \lambda)) |_{t=\pi}.$$

### 3.4 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле

В настоящем пункте изучается вопрос о разложении в ряд Фурье функции Грина задачи (1), (2), (3) по собственным функциям соответствующей спектральной задачи.

**Теорема 4 (Наймарк, 1969:90)** *Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в ряд Фурье по собственным функциям этого оператора.*

Докажем следующий промежуточный результат.

**Лемма 2** Оператор, соответствующий краевой задаче (1), (2), (3) является самосопряженным, т.е. функция Грина  $G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$  есть симметризируемое ядро в пространстве  $L_2(\mathfrak{S})$

$$G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = G_{\mathfrak{S}}^T(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda). \quad (17)$$

**Proof.** Преобразуем функцию Грина задачи (1), (2), (3) в представлении из следствия 1 следующим образом

$$G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = \text{diag}\{G_{D1}(x_1, t_1, \lambda), \dots, G_{Dm}(x_m, t_m, \lambda)\} + \\ + \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{bmatrix} s_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \cdots s_{0m}(\pi, \lambda) \\ \vdots \\ s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \cdots s_{0m}(x_m, \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s_{01}(t_1, \lambda)}{s_{01}(\pi, \lambda)}, \dots, \frac{s_{0m}(t_m, \lambda)}{s_{0m}(\pi, \lambda)} \end{bmatrix}.$$

Отсюда имеем

$$G_{\mathfrak{S}}^T(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = \text{diag}\{G_{D1}(x_1, t_1, \lambda), \dots, G_{Dm}(x_m, t_m, \lambda)\} + \\ + \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{bmatrix} \frac{s_{01}(t_1, \lambda)}{s_{01}(\pi, \lambda)} \\ \vdots \\ \frac{s_{0m}(t_m, \lambda)}{s_{0m}(\pi, \lambda)} \end{bmatrix} [s_{01}(x_1, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \cdots s_{0m}(\pi, \lambda), \dots, s_{01}(\pi, \lambda) s_{02}(\pi, \lambda) \cdots s_{0m}(x_m, \lambda)].$$

Рассмотрим элементы матрицы  $G_{\mathfrak{S}}^T$  с номером  $(k, j)$

$$\frac{s_{0k}(t_k, \lambda)}{s_{0k}(\pi, \lambda)} s_{01}(\pi, \lambda) \cdots s_{0j-1}(\pi, \lambda) s_{0j}(x_j, \lambda) s_{0j+1}(\pi, \lambda) \cdots s_{0m}(\pi, \lambda) \quad (18)$$

и сравним его с элементом матрицы  $G_{\mathfrak{S}}$  с номером  $(k, j)$

$$s_{01}(\pi, \lambda) \cdots s_{0k-1}(\pi, \lambda) s_{0k}(x_k, \lambda) s_{0k+1}(\pi, \lambda) \cdots s_{0m}(\pi, \lambda) \frac{s_{0j}(t_j, \lambda)}{s_{0j}(\pi, \lambda)}. \quad (19)$$

Если в выражении (18) переменную  $t_k$  заменить на  $x_k$  и переменную  $x_j$  заменить на  $t_j$ , то выражение (18) совпадает со значением (19). Таким образом доказано, что

$$G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = G_{\mathfrak{S}}^T(t_1, t_2, \dots, t_m, x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda).$$

Лемма доказана.

Таким образом, если функция Грина  $G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$  является эрмитовым (т.е. симметризируемым) ядром, то на основании теоремы Гильберта-Шмидта из теории интегральных уравнений (Петровский, 1948) произвольную функцию можно разложить в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра  $G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$ .

Пусть  $q_1(x) \equiv \dots \equiv q_m(x) \equiv q(x)$ ,  $0 < x < \pi$ . Тогда  $s_{a1}(x, \lambda) \equiv \dots \equiv s_{a1}(x, \lambda) \equiv s_a(x, \lambda)$  при  $0 \leq a \leq \pi$  имеем

$$G_{D,j}(x_j, t_j, \lambda) = \begin{cases} \frac{s_0(t_j, \lambda) s_{\pi}(x_j, \lambda)}{-s_0(\pi, \lambda)} & \text{for } t_j \leq x_j, \\ \frac{s_{\pi}(t_j, \lambda) s_0(x_j, \lambda)}{-s_0(\pi, \lambda)} & \text{for } x_j < t_j, \quad j = 1, \dots, m, \end{cases}$$

где

$$\Delta(\lambda) = \frac{d}{dt} (s_{01}(t, \lambda))^m = m s_0^{m-1}(\pi, \lambda) s_0'(\pi, \lambda). \tag{20}$$

Покажем, что функция Грина задачи (1), (2), (3) является самосопряженной. Тогда функция Грина рассматриваемой задачи имеет представление

$$G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = \text{diag}\{G_{D1}(x_1, t_1, \lambda), \dots, G_{Dm}(x_m, t_m, \lambda)\} + \tag{21}$$

$$+ \frac{1}{m s_0'(\pi, \lambda) s_0(\pi, \lambda)} \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda) \end{bmatrix} [s_0(t_1, \lambda), \dots, s_0(t_m, \lambda)].$$

Пусть  $\lambda_0$  является нулем функции  $s_0(\pi, \lambda)$  кратности  $k_0$ , то есть

$$s_0(\pi, \lambda_0) = \dots = \frac{d^{k_0-1}}{d\lambda_0^{k_0-1}} s_0(\pi, \lambda_0) = 0, \quad \frac{d^{k_0}}{d\lambda_0^{k_0}} s_0(\pi, \lambda_0) \neq 0.$$

Ясно, что  $s_0'(\pi, \lambda_0) \neq 0$ .

Вычислим вычет матрицы

$$\text{res}_{\lambda_0} G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda) = \text{res}_{\lambda_0} \text{diag}\{G_{D1}(x_1, t_1, \lambda), \dots, G_{Dm}(x_m, t_m, \lambda)\} + \tag{22}$$

$$+ \frac{1}{m} \text{res}_{\lambda_0} \frac{1}{s_0'(\pi, \lambda) s_0(\pi, \lambda)} \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda) \end{bmatrix} [s_0(t_1, \lambda), \dots, s_0(t_m, \lambda)].$$

Для вычисления вычета матрицы  $G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda)$  в точке  $\lambda_0$  применяем формулу

$$\text{res}_{\lambda_0} G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) = \frac{1}{(k_0 - 1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{d^{k_0-1}}{d\lambda_0^{k_0-1}} [(\lambda - \lambda_0)^{k_0} G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)].$$

Таким образом, надо вычислить  $(k_0 - 1)$ -ый коэффициент Тейлора функций  $(\lambda - \lambda_0)^{k_0} G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$  при разложении её в окрестности точки  $\lambda = \lambda_0$ . С учетом формулы представления (21) матрицы  $G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$ , для нахождения вычета матрицы  $\text{res}_{\lambda_0} G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$  в точке  $\lambda = \lambda_0$  сначала нам необходимо вычислить вычеты  $\text{res}_{\lambda_0} G_{Dj}(x_j, t_j, \lambda)$  и  $\text{res}_{\lambda_0} \frac{s_0(t_j, \lambda) s_0(x_j, \lambda)}{s_0'(\pi, \lambda) s_0(\pi, \lambda)}$ . Здесь  $\text{res}_{\lambda_0} G_{Dj}(x_j, t_j, \lambda) = \frac{s_0(t_j, \lambda) s_{\pi}(x_j, \lambda)}{-s_0(\pi, \lambda)}$  при  $t_j \leq x_j$ .

С учетом формулы (22) для матрицы  $G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$ , находим сначала коэффициент Тейлора произведения функций  $(\lambda - \lambda_0)^{k_0} \frac{s_0(t_j, \lambda) s_{\pi}(x_j, \lambda)}{-s_0(\pi, \lambda)}$  при разложении её в окрестности точки  $\lambda = \lambda_0$  при  $t_j \leq x_j$ . Поэтому разложим каждую функцию произведения  $(\lambda - \lambda_0)^{k_0} \frac{s_0(t_j, \lambda) s_{\pi}(x_j, \lambda)}{-s_0(\pi, \lambda)}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $\lambda = \lambda_0$  при  $t_j \leq x_j$

$$s_0(t_j, \lambda) = s_0(t_j, \lambda_0) + \frac{1}{1!} \frac{ds_0(t_j, \lambda_0)}{d\lambda} (\lambda - \lambda_0) + \dots + \frac{1}{k!} \frac{d^k s_0(t_j, \lambda_0)}{d\lambda^k} (\lambda - \lambda_0)^k + \dots \tag{23}$$

и

$$s_\pi(x_j, \lambda) = s_\pi(x_j, \lambda_0) + \frac{1}{1!} \frac{ds_\pi(x_j, \lambda_0)}{d\lambda} (\lambda - \lambda_0) + \dots + \frac{1}{k!} \frac{d^k s_\pi(x_j, \lambda_0)}{d\lambda^k} (\lambda - \lambda_0)^k + \dots \quad (24)$$

Так как  $\lambda_0$  является нулем функции  $s_0(\pi, \lambda)$  кратности  $k_0$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{s_0(\pi, \lambda)} &= \frac{1}{\frac{1}{k_0!} \frac{d^{k_0}}{d\lambda^{k_0}} s_0(\pi, \lambda)|_{\lambda=\lambda_0} + \frac{1}{(k_0+1)!} \frac{d^{k_0+1}}{d\lambda^{k_0+1}} s_0(\pi, \lambda)|_{\lambda=\lambda_0} + \dots} \\ &= \left( \frac{1}{k_0!} \frac{d^{k_0}}{d\lambda^{k_0}} s_0(\pi, \lambda)|_{\lambda=\lambda_0} + \frac{1}{(k_0+1)!} \frac{d^{k_0+1}}{d\lambda^{k_0+1}} s_0(\pi, \lambda)|_{\lambda=\lambda_0} + \dots \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{k_0!} \frac{d^{k_0}}{d\lambda^{k_0}} s_0(\pi, \lambda)|_{\lambda=\lambda_0}} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j^{(0)} (\lambda - \lambda_0)^j \right)^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$c_j^{(0)} = \frac{\frac{1}{(k_0+1)!} \frac{d^{k_0+1}}{d\lambda^{k_0+1}} s_0(\pi, \lambda)|_{\lambda=\lambda_0}}{\frac{1}{k_0!} \frac{d^{k_0}}{d\lambda^{k_0}} s_0(\pi, \lambda)|_{\lambda=\lambda_0}}.$$

Применяя известную формулу суммы  $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$  для последнего выражения получим

$$\frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{s_0(\pi, \lambda)} = \frac{1}{\frac{1}{k_0!} \frac{d^{k_0}}{d\lambda^{k_0}} s_0(\pi, \lambda)|_{\lambda=\lambda_0}} \left( 1 + \alpha_1^{(0)} (\lambda - \lambda_0) + \alpha_2^{(0)} (\lambda - \lambda_0)^2 + \dots \right),$$

где  $\alpha_1^{(0)} = -c_1^{(0)}$ ,  $\alpha_2^{(0)} = -c_2^{(0)} + (c_1^{(0)})^2$ , и т.д.

Таким образом, получили разложение в ряд Тейлора функции

$$\frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{s_0(\pi, \lambda)} = \beta_0 + \beta_1 (\lambda - \lambda_0) + \beta_2 (\lambda - \lambda_0)^2 + \dots, \quad (25)$$

где

$$\beta_j = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\lambda^j} \left[ \frac{(\lambda - \lambda_0)^{k_0}}{s_0(\pi, \lambda)} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

Тогда находим вычет произведения

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\lambda_0} \left( \frac{s_0(t_j, \lambda) s_\pi(x_j, \lambda)}{-s_0(\pi, \lambda)} \right) &= \\ &= \frac{1}{(k_0 - 1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{d^{(k_0-1)}}{d\lambda^{(k_0-1)}} \left[ \frac{(\lambda - \lambda_0)^{k_0} s_0(t_j, \lambda) s_\pi(x_j, \lambda)}{-s_0(\pi, \lambda)} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя в последнее выражение формулы разложения (23), (24), (25) и после несложных вычислений, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{\lambda_0} \left( \frac{s_0(t_j, \lambda) s_\pi(x_j, \lambda)}{-s_0(\pi, \lambda)} \right) &= \sum_{i_1=0}^{k_0-1} \frac{1}{i_1!} \frac{d^{i_1}}{d\lambda^{i_1}} s_\pi(x_j, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \times \\ &\times \sum_{i_2=0}^{k_0-1-i_1} \frac{1}{i_2!} \frac{d^{i_2}}{d\lambda^{i_2}} s_0(t_j, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \sum_{i_3=0}^{k_0-1-i_1-i_2} \frac{1}{i_3!} \frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_3}} \left[ \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{s_0(\pi, \lambda)} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^{i_3}. \end{aligned} \quad (26)$$



Теперь запишем выражение для вычета

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}_{\lambda_0} \left( \frac{s_0(t_r, \lambda) s_0(x_p, \lambda)}{m s'_0(\pi, \lambda) s_0(\pi, \lambda)} \right) &= \tag{27} \\
 &= \frac{1}{m} \frac{1}{(k_0 - 1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{d^{(k_0-1)}}{d\lambda^{(k_0-1)}} \left[ \frac{(\lambda - \lambda_0)^{k_0} s_0(t_r, \lambda) s_0(x_p, \lambda)}{s'_0(\pi, \lambda) s_0(\pi, \lambda)} \right] = \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{i_1=0}^{k_0-1} \frac{1}{i_1!} \frac{d^{i_1}}{d\lambda^{i_1}} s_0(x_p, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \sum_{i_2=0}^{k_0-1-i_1} \frac{1}{i_2!} \frac{d^{i_2}}{d\lambda^{i_2}} s_0(t_r, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \times \\
 &\times \sum_{i_3=0}^{k_0-1-i_1-i_2} \frac{1}{i_3!} \frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_3}} \left[ \frac{1}{s'_0(\pi, \lambda)} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0} \sum_{i_4=0}^{k_0-1-i_1-i_2} \frac{1}{i_4!} \frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_4}} \left[ \frac{(\lambda - \lambda_0)^{k_0}}{s_0(\pi, \lambda)} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^{i_4}.
 \end{aligned}$$

Тогда получим формулу вычисления вычета матрицы  $G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda)$  в точке  $\lambda = \lambda_0$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}_{\lambda_0} G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda) &= \tag{28} \\
 &= \sum_{i_1=0}^{k_0-1} \frac{1}{i_1!} \frac{d^{i_1}}{d\lambda^{i_1}} s_{\pi}(x_j, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \sum_{i_2=0}^{k_0-1-i_1} \frac{1}{i_2!} \frac{d^{i_2}}{d\lambda^{i_2}} s_0(t_j, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \times \\
 &\quad \times \sum_{i_3=0}^{k_0-1-i_1-i_2} \frac{1}{i_3!} \frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_3}} \left[ \frac{(\lambda - \lambda_0)^k}{s_0(\pi, \lambda)} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^{i_3} + \\
 &+ \frac{1}{m} \frac{1}{(k_0 - 1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{d^{(k_0-1)}}{d\lambda^{(k_0-1)}} \left[ \frac{(\lambda - \lambda_0)^{k_0} s_0(t_r, \lambda) s_0(x_p, \lambda)}{s'_0(\pi, \lambda) s_0(\pi, \lambda)} \right] + \\
 &+ \frac{1}{m} \sum_{i_1=0}^{k_0-1} \frac{1}{i_1!} \frac{d^{i_1}}{d\lambda^{i_1}} s_0(x_p, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \sum_{i_2=0}^{k_0-1-i_1} \frac{1}{i_2!} \frac{d^{i_2}}{d\lambda^{i_2}} s_0(t_r, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \times \\
 &\times \sum_{i_3=0}^{k_0-1-i_1-i_2} \frac{1}{i_3!} \frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_3}} \left[ \frac{1}{s'_0(\pi, \lambda)} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0} \sum_{i_4=0}^{k_0-1-i_1-i_2} \frac{1}{i_4!} \frac{d^{i_3}}{d\lambda^{i_4}} \left[ \frac{(\lambda - \lambda_0)^{k_0}}{s_0(\pi, \lambda)} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^{i_4}.
 \end{aligned}$$

В случае  $k_0 = 1$  приведенная формула становится простой. К примеру, при  $t_j \leq x_j$  имеем

$$\begin{aligned}
 \operatorname{res}_{\lambda_0} G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda) &= \operatorname{diag} \left\{ \frac{s_0(t_1, \lambda_0) s_{\pi}(x_1, \lambda_0)}{-\frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)}, \dots, \frac{s_0(t_m, \lambda_0) s_{\pi}(x_m, \lambda_0)}{-\frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \right\} + \\
 &+ \frac{1}{m} \frac{1}{s'_0(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} [s_0(t_1, \lambda_0), \dots, s_0(t_m, \lambda_0)].
 \end{aligned}$$

Здесь функций  $\begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix}$  назовем основными функциями, соответствующие собственным значениям  $\lambda_0$ . Основные функций не являются собственными функциями,

так как для них нарушается второе соотношение условия (1). Действительно,  $s'_0(\pi, \lambda_0) + \dots + s'_0(\pi, \lambda_0) \neq 0$ .

До этого мы рассматривали нули функции  $s_0(\pi, \lambda)$ . Теперь рассмотрим полюсы функции  $G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$ . Пусть  $\lambda_1$  является нулем функции  $s'_0(\pi, \lambda)$  кратности  $k_1$ , то есть

$$s'_0(\pi, \lambda_1) = \dots = \frac{d^{k_1-1}}{d\lambda_1^{k_1-1}} s'_0(\pi, \lambda_1) = 0, \quad \frac{d^{k_1}}{d\lambda_1^{k_1}} s'_0(\pi, \lambda_1) \neq 0.$$

Ясно, что  $s_0(\pi, \lambda_0) \neq 0$ . Полюса функции  $G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)$  являются нулями функции  $s'_0(\pi, \lambda)$ .

Применяя аналогичные рассуждения при вычислении вычета функций  $G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda)$  в точке  $\lambda_0$ , вычислим вычет функций  $G_{\mathfrak{S}}(x_1, x_2, \dots, x_m, t_1, t_2, \dots, t_m, \lambda)$  в точке  $\lambda_1$ . Для этого применяем формулы (28). Очевидно, что

$$\text{res}_{\lambda_1} \text{diag}\{G_{D1}(x_1, t_1, \lambda), \dots, G_{Dm}(x_m, t_m, \lambda)\} = 0.$$

Остается вычислить вычеты в нулях функции  $s'_0(\pi, \lambda)$

$$\text{res}_{\lambda_1} G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda) = \frac{1}{m s_0(\pi, \lambda_1) \frac{d}{d\lambda_1} s'_0(\pi, \lambda_1)} \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_1) \end{bmatrix} [s_0(t_1, \lambda_1), \dots, s_0(t_m, \lambda_1)].$$

Здесь функций  $\begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_1) \end{bmatrix}$  являются собственными функциями, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1$ . Действительно, для них выполняется второе соотношение условия (1).

Следовательно, по теоремам 1 и 2 (Наймарк, 1969:92) следует разложение функции Грина

$$G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}) = \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{\text{res}_{\lambda_0} G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)}{\lambda_0} + \sum_{\lambda_1: s'_0(\pi, \lambda_1)=0} \frac{\text{res}_{\lambda_1} G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}, \lambda)}{\lambda_1}.$$

Здесь первое суммирование производится по всем  $\lambda_0$ , которые подчинены условию  $s_0(\pi, \lambda_0) = 0$ . Аналогичный смысл имеет вторая сумма.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 3** Если все собственные значения оператора  $\Lambda$ , порожденного условиями Кирхгофа (1) и краевыми условиями (3), суть простые нули функции  $s_0(\pi, \lambda)s'_0(\pi, \lambda)$ ,

то для функции Грина имеет место разложение

$$\begin{aligned}
 G_{\mathfrak{S}}(\vec{x}, \vec{t}) &= \\
 &= \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{\lambda_0} \text{diag} \left\{ \frac{s_0(t_1, \lambda_0) s_{\pi}(x_1, \lambda_0)}{-\frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)}, \dots, \frac{s_0(t_m, \lambda_0) s_{\pi}(x_m, \lambda_0)}{-\frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \right\} + \\
 &+ \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{\lambda_0 m s_0'(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} [s_0(t_1, \lambda_0), \dots, s_0(t_m, \lambda_0)] + \\
 &+ \sum_{\lambda_1: s_0'(\pi, \lambda_1)=0} \frac{1}{\lambda_1 m s_0(\pi, \lambda_1) \frac{d}{d\lambda_1} s_0'(\pi, \lambda_1)} \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_1) \end{bmatrix} [s_0(t_1, \lambda_1), \dots, s_0(t_m, \lambda_1)].
 \end{aligned}$$

**Теорема 5** Пусть  $\Lambda$  оператор, порожденный условиями Курцгофа (1) и краевыми условиями (3), все собственные значения которого суть простые нули функции  $s_0(\pi, \lambda) s_0'(\pi, \lambda)$ . Тогда всякая вектор-функция  $\vec{F}(\vec{X})$  из области определения  $L_2(\mathfrak{S})$  оператора  $\Lambda$  разлагается в ряд

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(\vec{X}) &= \tag{29} \\
 &= - \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{s_0'(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \begin{bmatrix} \int_0^{\pi} f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ \int_0^{\pi} f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} + \\
 &+ \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{m s_0'(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \left[ \int_0^{\pi} f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 + \right. \\
 &\dots + \left. \int_0^{\pi} f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right] \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} + \\
 &+ \sum_{\lambda_1: s_0'(\pi, \lambda_1)=0} \frac{1}{m s_0(\pi, \lambda_1) \frac{d}{d\lambda_1} s_0'(\pi, \lambda_1)} \left[ \int_0^{\pi} f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_1) dt_1 + \right. \\
 &\dots + \left. \int_0^{\pi} f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_1) dt_m \right] \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_1) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix}$  - основные функции, соответствующие собственным значениям  $\lambda_0$ ,  $\frac{1}{m s_0'(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \left[ \int_0^{\pi} f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 + \dots + \int_0^{\pi} f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right]$  - коэффициенты Фурье разложения по основным функциям, соответствующие собственным значениям  $\lambda_0$ ,  $\begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_1) \end{bmatrix}$  -

собственные функции, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1$ ,  $\frac{1}{\lambda_1 m s'_0(\pi, \lambda_1) \frac{d}{d\lambda_1} s_0(\pi, \lambda_1)} \left[ \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_1) dt_1 + \dots + \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_1) dt_m \right]$  – коэффициенты Фурье разложения по собственным функциям, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1$ .

Приведенное в теореме 1 разложение мы назовем вычетным разложением. Однако обычно используется спектральное разложение, то есть разложение по собственным функциям. Покажем как из вычетного разложения получить спектральное разложение.

### 3.5 Спектральное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле

$\lambda_1$  – собственное число оператора  $\Lambda$ , а  $\lambda_0$  не является таковым. Как  $\lambda_0$  превратить в собственное число оператора  $\Lambda$ ?

Сначала покажем, что

$$s_\pi(0, \lambda_0) = 0. \quad (30)$$

Нам известно из (15) и (16), что  $s_0(0, \lambda_0) = 0$  и  $s_0(\pi, \lambda_0) = 0$ . Это означает, что  $\lambda = \lambda_0$  является собственным значением задачи Дирихле. Задачу Дирихле можно получить и так  $s_\pi(\pi, \lambda) = 0$  и  $s_\pi(0, \lambda) = 0$  для любого  $\lambda$ . Отсюда следует (30).

Разложение (29) представим в виде суммы

$$\vec{F}(\vec{X}) = \vec{F}_1(\vec{X}) + \vec{F}_2(\vec{X}), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(\vec{X}) = & \quad (32) \\ = - & \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{s'_0(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \begin{bmatrix} \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} + \\ + & \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{m s'_0(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \left[ \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 + \right. \\ & \left. \dots + \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right] \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} - \end{aligned}$$

разложение по основным функциям и

$$\begin{aligned} \vec{F}_2(\vec{X}) = & \quad (33) \\ + & \sum_{\lambda_1: s'_0(\pi, \lambda_1)=0} \frac{1}{m s_0(\pi, \lambda_1) \frac{d}{d\lambda_1} s'_0(\pi, \lambda_1)} \left[ \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_1) dt_1 + \right. \\ & \left. \dots + \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_1) dt_m \right] \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_1) \end{bmatrix} - \end{aligned}$$

разложение по собственным функциям.

Теперь преобразуем (32) следующим образом

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(\vec{X}) &= \\ &= \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{ms'_0(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \left[ \begin{array}{c} -ms_0(x_1, \lambda_0) \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 \\ -ms_0(x_2, \lambda_0) \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2, \lambda_0) dt_2 \\ \vdots \\ -ms_0(x_m, \lambda_0) \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \end{array} \right] + \\ &+ \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{ms'_0(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \times \\ &\times \left[ \begin{array}{c} s_0(x_1, \lambda_0) \left( \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 + \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2, \lambda_0) dt_2 + \dots + \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right) \\ s_0(x_2, \lambda_0) \left( \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 + \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2, \lambda_0) dt_2 + \dots + \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \left( \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 + \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2, \lambda_0) dt_2 + \dots + \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Складывая две суммы, получаем

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(\vec{X}) &= \\ &= \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{ms'_0(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \times \\ &\times \left[ \begin{array}{c} s_0(x_1, \lambda_0) \left[ (1-m) \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 + \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2, \lambda_0) dt_2 + \dots \right. \\ s_0(x_2, \lambda_0) \left[ \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 + (1-m) \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2, \lambda_0) dt_2 + \dots \right. \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \left[ \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 + \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2, \lambda_0) dt_2 + \dots \right. \\ \dots + \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \left. \right] \\ \dots + \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \left. \right] \\ \vdots \\ \dots + (1-m) \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \left. \right] \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Последнее выражение запишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(\vec{X}) &= \tag{34} \\ &= \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{ms'_0(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \times \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} (1-m)s_0(x_1, \lambda_0) \\ s_0(x_2, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 + \\ &+ \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ (1-m)s_0(x_2, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2, \lambda_0) dt_2 + \dots + \\ &+ \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ s_0(x_2, \lambda_0) \\ \vdots \\ (1-m)s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Для краткости вводим следующие обозначения

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} (1-m)s_0^1 \\ s_0^2 \\ \vdots \\ s_0^m \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} s_0^1 \\ (1-m)s_0^2 \\ \vdots \\ s_0^m \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_m = \begin{bmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \\ \vdots \\ (1-m)s_0^m \end{bmatrix}, \tag{35}$$

где  $s_0^1 = s_0(x_1, \lambda_0)$ ,  $s_0^2 = s_0(x_2, \lambda_0)$ ,  $\dots$ ,  $s_0^m = s_0(x_m, \lambda_0)$ .

Так как

$$\begin{vmatrix} (1-m)s_0^1 & s_0^1 & \dots & s_0^1 \\ s_0^2 & (1-m)s_0^2 & \dots & s_0^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_0^m & s_0^m & \dots & (1-m)s_0^m \end{vmatrix} = 0,$$

то система векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$  является линейно зависимой. Но векторы  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{m-1}$  образуют линейно независимую систему. Легко проверить, что вектор-функций  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{m-1}$  удовлетворяют условиям (1) и (3). Отсюда следует, что они являются собственными функциями оператора  $\Lambda$ . А вектор-функция  $\vec{e}_m$  выражается через них

$$-\vec{e}_m = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dots + \vec{e}_{m-1},$$

или

$$-\begin{bmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \\ \vdots \\ (1-m)s_0^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-m)s_0^1 \\ s_0^2 \\ \vdots \\ s_0^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_0^1 \\ (1-m)s_0^2 \\ \vdots \\ s_0^m \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} s_0^1 \\ s_0^2 \\ \vdots \\ (1-m)s_0^{m-1} \\ s_0^m \end{bmatrix}. \tag{36}$$

С учетом (36), разложение (37) можно записать через собственные функций

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(\vec{X}) &= \tag{37} \\ &= \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{m s'_0(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \times \\ &\times \left\{ \begin{bmatrix} (1-m)s_0(x_1, \lambda_0) \\ s_0(x_2, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} \left( \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 - \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right) + \right. \\ &+ \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ (1-m)s_0(x_2, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} \left( \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2, \lambda_0) dt_2 - \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right) + \dots + \\ &\left. + \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ (1-m)s_0(x_{m-1}, \lambda_0) \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} \left( \int_0^\pi f_{m-1}(t_{m-1}) s_0(t_{m-1}, \lambda_0) dt_{m-1} - \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right) \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказана теорема в которой представлено спектральное разложение произвольной вектор-функций из области определения дифференциального оператора заданного на графе-звезде с условиями Кирхгофа во внутренней вершине и с условиями Дирихле на вершинах графа.

**Теорема 6** Пусть  $\Lambda$  оператор, порожденный условиями Кирхгофа (1) и краевыми условиями (3), все собственные значения которого суть простые нули функции  $s_0(\pi, \lambda) s'_0(\pi, \lambda)$ . Тогда всякая вектор-функция  $\vec{F}(\vec{X})$  из области определения  $L_2(\mathfrak{G})$  оператора  $\Lambda$  разлагается в ряд по собственным функциям оператора  $\Lambda$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{X}) &= \tag{38} \\ &= \sum_{\lambda_0: s_0(\pi, \lambda_0)=0} \frac{1}{m s'_0(\pi, \lambda_0) \frac{d}{d\lambda_0} s_0(\pi, \lambda_0)} \times \\ &\times \left\{ \begin{bmatrix} (1-m)s_0(x_1, \lambda_0) \\ s_0(x_2, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} \left( \int_0^\pi f_1(t_1) s_0(t_1, \lambda_0) dt_1 - \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right) + \right. \\ &+ \begin{bmatrix} s_0(x_1, \lambda_0) \\ (1-m)s_0(x_2, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{bmatrix} \left( \int_0^\pi f_2(t_2) s_0(t_2, \lambda_0) dt_2 - \int_0^\pi f_m(t_m) s_0(t_m, \lambda_0) dt_m \right) + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \begin{array}{c} s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ (1-m)s_0(x_{m-1}, \lambda_0) \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{array} \right] \left( \int_0^\pi f_{m-1}(t_{m-1})s_0(t_{m-1}, \lambda_0)dt_{m-1} - \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m, \lambda_0)dt_m \right) \Bigg\} + \\
& + \sum_{\lambda_1: s'_0(\pi, \lambda_1)=0} \frac{1}{ms_0(\pi, \lambda_1) \frac{d}{d\lambda_1} s'_0(\pi, \lambda_1)} \left[ \int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1, \lambda_1)dt_1 + \right. \\
& \quad \left. \dots + \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m, \lambda_1)dt_m \right] \left[ \begin{array}{c} s_0(x_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_1) \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Здесь

$$\left[ \begin{array}{c} (1-m)s_0(x_1, \lambda_0) \\ s_0(x_2, \lambda_0) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{array} \right], \dots, \left[ \begin{array}{c} s_0(x_1, \lambda_0) \\ \vdots \\ (1-m)s_0(x_{m-1}, \lambda_0) \\ s_0(x_m, \lambda_0) \end{array} \right]$$

- собственные функции, соответствующие собственным значениям  $\lambda_0$ ,

$(\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1, \lambda_0)dt_1 - \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m, \lambda_0)dt_m), \dots, (\int_0^\pi f_{m-1}(t_{m-1})s_0(t_{m-1}, \lambda_0)dt_{m-1} - \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m, \lambda_0)dt_m)$  коэффициенты Фурье разложения по собственным функциям, соответствующие собственным значениям

$\lambda_0$ ,  $\left[ \begin{array}{c} s_0(x_1, \lambda_1) \\ \vdots \\ s_0(x_m, \lambda_1) \end{array} \right]$  - собственные функции, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1$ ,

$\frac{1}{ms_0(\pi, \lambda_1) \frac{d}{d\lambda_1} s'_0(\pi, \lambda_1)} [\int_0^\pi f_1(t_1)s_0(t_1, \lambda_1)dt_1 + \dots + \int_0^\pi f_m(t_m)s_0(t_m, \lambda_1)dt_m]$  - коэффициенты Фурье разложения по собственным функциям, соответствующие собственным значениям  $\lambda_1$ .

#### 4 Результаты и обсуждение

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. В данной статье выведена функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Значительную трудность представляет построение функции Грина на геометрических графах при значениях независимых переменных близких к вершинам графа. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Предлагается конструктивная схема построения функции Грина краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. Доказывается самосопряженность дифференциального оператора, порожденного краевой задачей для уравнения Штурма-Лиувилля на графе-звезде. А также проводится спектральный анализ дифференциального оператора на графе. Установлено существование разложения всякой функций из области определения рассматриваемого дифференциального оператора на графе в ряд Фурье по собственным функциям данной краевой задачи.



## 5 Заключение

На плоском графе, состоящем из нескольких дуг с одним общим концом строится функция Грина краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля. Задача является моделью колебаний простой системы из нескольких стержней с примыкающим концом. В работе выведена формула функции Грина задачи Дирихле для уравнения второго порядка на ориентированном графе. Доказывается существование разложения произвольной функции, заданного на графе, по собственным функциям. Вопросы из спектральной теории, как построение функции Грина и разложение по собственным функциям для моделей из соединенных стержней пока еще мало изучены. Спектральный анализ дифференциальных операторов на геометрических графах является основным математическим аппаратом при решении современных проблем квантовой механики.

## Благодарность

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК (проект на тему «Конечномерные возмущения фредгольмовых операторов и их спектральный анализ», 2018-2020 гг.).

## Список литературы

- [1] *Афанасьева Н.А. и Булот Л.П.* Электротехника и электроника. Учебное пособие. - СПб.: СПбГУН и П.Т. -2010.-181 с.
- [2] *Astudillo M. Kurasov P. and Usman M.* RT -symmetric laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness// Adv. Math. Phys. -2015.
- [3] *Герасименко Н. И. и Павлов Б. С.* Задача рассеяния на некомпактных графах // Теор. мат.физ. -1988. Т.74, №3. -С.345-359.
- [4] *Carlson R.* Inverse eigenvalue problems on directed graphs // Trans. Amer. Math. Soc. -1999. -Vol.351. -P.101-121.
- [5] *F. Harary* Graph theory // Addison-Wesley Publishing Company. -1969.-274 p.
- [6] *Jorge M. Ramirez.* Green's Functions for Sturm-Liouville Problems on Directed Tree Graphs// Revista Colombiana de Matematicas. -2012. -Vol.46. -P.15-25.
- [7] *Kurasov P. and Stenberg F.* On the inverse scattering problem on branching graphs // J. Phys. A. Math. Gen. -2002. -Vol.20. -P.647-672.
- [8] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы // М: Наука. -1969. -526 с.
- [9] *Петровский И.Г.* Лекций по теории интегральных уравнений// М:ОГИЗ.-1948.-121 с.
- [10] *Покорный Ю.В.* О спектре некоторых задач на графах // Успехи мат. науки. -1987. -Т.42, № 4. -С.128-129
- [11] *Покорный Ю.В. и Пенкин О.М.* О краевой задаче на графе // Дифференциальные уравнения. -1988. -Т.24. -С.701-703
- [12] *Покорный Ю.В., Приядиев В.Л. и Аль-Обейд А.* Об осцилляционных свойствах спектра краевой задачи на графе // Матем. заметки. -1996. -Т.60, №3. -С.468-469.
- [13] *Покорный Ю.В. и Приядиев В.Л.* Некоторые проблемы качественной теории Штурма-Лиувилля на пространственных сетях // Успехи мат. науки. -2004. -Т.59, №6. -С.115-150.

- [14] *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Приядиев В.Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. -М:ФИЗМАТЛИТ. 2005. -272 с.
- [15] *Post O.* Spectral Analysis on Graph-Like Spaces // Springer Science and Business Media. -2012. -Vol. 2039.
- [16] *Юрко В.А.* О восстановлении операторов Штурма-Лиувилля на графах // Мат. заметки. -2006. -Т.79, №4. -С.619-630.

## References

- [1] Afanasieva, N.A., and Bulot, L.P. *Elektrotehnika i elektronika* [Electrothechnics and electronics]. Sankt-Peterburg: SPbGUN and P.T., 2010. (in Russian)
- [2] Astudillo, M., Kurasov, P. and Usman, M. "RT -symmetric laplace operators on star graphs: Real spectrum and selfadjointness." *Adv. Math. Phys.* 2015.
- [3] *Gerasimenko, N.I., and Pavlov, B.S.* "Zadacha rasseiania na nekompaktnykh graphakh." [Scattering problem on a noncompact graphs] *Teor. mat.phys.* 47(1988):345-14. (in Russian)
- [4] *Carlson, R.* "Inverse eigenvalue problems on directed graphs." *Trans. Amer. Math. Soc.* 351(1999):101-20.
- [5] Harary, F. *Graph theory.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [6] Jorge, M., Ramirez. "Green's Functions for Sturm-Liouville Problems on Directed Tree Graphs." *Revista Colombiana de Matematicas* 46(2012):15-10.
- [7] *Kurasov, P., and Stenberg, F.* "On the inverse scattering problem on branching graphs." *J. Phys. A. Math. Gen.* 20(2002):647-25.
- [8] Naimark, M.A. *Lineinye differentsialnye operatory.* [Linear differential operators] Moskow: Nauka, 1969. (in Russian)
- [9] Petrovskii, I.G. *Лекций по теории интегральных уравнений* [Lectures on the theory of integral equations] Moskow:OGIZ, 1948. (in Russian)
- [10] Pokornyi, Yu.V. "O spektre nekotorykh zadach na graphakh." [On the spectrum of certain problems on graphs] *Uspekhi mat.nauki* (42)1987:128-1. (in Russian)
- [11] Pokornyi, Yu.V., and Penkin, O.M. "O kraevoi zadache na graphe." [On the boundary value problem on graphs] *Differentsialnie uravnenia* 24(1988): 701-3. (in Russian)
- [12] Pokornyi, Yu.V., Priadiev, V.L., and Al-Obeid, A. "Ob ostsiliatsionnykh svoistvakh spektra kraevoi zadachi na graphe." [On the oscillation properties of the spectrum of a boundary value problem on graphs] *Matematicheskie zametki* 60(1996):468-2. (in Russian)
- [13] Pokornyi, Yu.V., and Priadiev, V.L. "Nekotorye problemy kachestvennoi teorii Shturma-liuillia na prostranstvennykh setiakh." [Some problems of the qualitative Sturm-Liouville theory on spatial networks] *Uspekhi mat.nauki* 59(2004):115-35. (in Russian)
- [14] Pokornyi, Yu.V., Penkin, O.M., and Priadiev, V.L. *Differentsialnie uravnenia na geometricheskikh graphakh.* [On the oscillation properties of the spectrum of a boundary value problem on graphs. Differential equations on graphs] Moskow:Phizmatlit, 2005. (in Russian)
- [15] *Post, O.* *Spectral Analysis on Graph-Like Spaces.* Springer Science and Business Media, 2039(2012).
- [16] *Yurko, V.A.* "O vosstanovlenii operatorov Shturma-Liuillia na graphakh." [On the reconstruction of Sturm-Liouville operators on graphs] *Mat. zametki* 79(2006):619-21. (in Russian)

2-бөлім

Раздел 2

Section 2

Механика

Механика

Mechanics

IRSTI 27.31.21, 27.35.33

**Modelling of drill string nonlinear dynamics with a drilling fluid flow**

Askar K. Kudaibergenov, Al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, +77016567555, E-mail: askarkud@gmail.com,

L.A. Khajiyeva, Al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, +77072346500, E-mail: khadle@mail.ru

In this work the development of mathematical models of drill string dynamics under the influence of internal drilling fluid flow, which is of great importance for ensuring fast, cost-effective and safe process of oil and gas well drilling, is conducted. It is a reason for in-depth research of the drilling fluid influence on the motion of drill strings. The modelling is complicated by consideration of geometric nonlinearity, rotation of the drill string and the effect of external force factors. Relations of Novozhilov's nonlinear theory of elasticity form the model framework. Ostrogradsky-Hamilton's variation principle is applied for derivation of the drill string governing equations. It is assumed that the drilling fluid flow moves at constant speed. The obtained nonlinear mathematical models, describing lateral vibrations of the drill string as a compressed rod, generalize well-known linear models taking into account the effect of the drilling fluid. These models will enable to solve a wide range of problems concerning the drilling equipment nonlinear dynamics on a qualitatively new and mathematically valid level.

**Key words:** drill string, mathematical model, geometric nonlinearity, drilling fluid, lateral vibrations.

**Жуатын сұйықтық ағыны есепке алумен бұрғылау бағанасы сызықты емес динамикасын моделдеу**

Құдайбергенов Асқар Қ., Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,  
Қазақстан Республикасы, +77016567555, E-mail: askarkud@gmail.com,

Хаджиева Л.А., Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,  
Қазақстан Республикасы, +77012346500, E-mail: khadle@mail.ru

Осы жұмыста жуатын сұйықтық ішкі ағынының әсерінен бұрғылау бағанасы динамикасының математикалық моделін әзірлеу жүргізіледі. Жуатын сұйықтық тиімді, үнемді және қауіпсіз мұнай және газ ұңғымаларын бұрғылау үдерісін қамтамасыз ету үшін маңызды рөл атқарады. Бұл бұрғылау бағаналарының қозғалысына бұрғылау ерітіндісінің ықпалына байланысты терең зерттеулер жүргізуді қажет етеді. Моделдеу геометриялық сызықты еместікті ескере отыруы, бұрғылау бағанасының айналуы және сыртқы күш факторларының әсерінен қиындатылады. В.В. Новожиловтың сызықты емес серпімділік теориясы математикалық моделдің негізі құрастырады. Бұрғылау бағанасының қозғалыс теңдеулерін шығару үшін Остроградский-Гамильтон вариациялық принципі қолданылады. Жуатын сұйықтық ағыны тұрақты жылдамдықпен қозғалады деп ұйғарылады. Сығылған сырықтың ретінде бұрғылау бағанасының көлденең тербелістер сипаттайтын алынған сызықты емес теңдеулер бұрғылау ерітіндісі әрекетін ескере отырып, бағанасы көлденең тербелістердің белгілі сызықтық моделдерін жинақтап қорытады. Олар сапалы жаңа және математикалық негізделген деңгейде бұрғылау жабдықтары сызықты емес динамикасы есептердің кең классы шешуге мүмкіндік береді.

**Түйін сөздер:** бұрғылау бағанасы, математикалық модель, геометриялық сызықты еместік, көлденең тербелістер.

### Моделирование нелинейной динамики бурильной колонны с учетом потока промывочной жидкости

Кудайбергенов Аскар К., Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77016567555, E-mail: askarkud@gmail.com,

Хаджиева Л.А., Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77012346500, E-mail: khadle@mail.ru

В данной работе проводится разработка математической модели динамики бурильной колонны под влиянием внутреннего потока промывочной жидкости, который играет большую роль в обеспечении эффективного, экономичного и безопасного процесса бурения нефтяных и газовых скважин. Это обуславливает необходимость проведения глубоких исследований по изучению влияния бурового раствора на движение бурильных колонн. Моделирование осложняется учетом геометрической нелинейности, вращением бурильной колонны и действием внешних силовых факторов. Основу математической модели составляют соотношения нелинейной теории упругости В.В. Новожилова. Для вывода уравнений движения бурильной колонны применяется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона. Предполагается, что поток промывочной жидкости движется с постоянной скоростью. Полученные нелинейные уравнения, описывающие поперечные колебания бурильной колонны как сжатого стержня, обобщают известные в литературе линейные модели поперечных колебаний бурильных колонн с учетом действия бурового раствора. Они позволяют решать широкий класс задач нелинейной динамики бурового оборудования на качественно новом и математически обоснованном уровне.

**Ключевые слова:** бурильная колонна, математическая модель, геометрическая нелинейность, промывочная жидкость, поперечные колебания.

## 1 Introduction

In the process of drilling of oil and gas wells by the use of rotary technique, a fluid flow, which is referred to as drilling mud or drilling fluid, is constantly circulating in the borehole. At present, it is considered not only as a means for removing the products of destruction (sludge), but also as one of the main factors ensuring the effectiveness of the entire drilling process.

When drilling, the balance of the rocks that form the walls of the wells is disturbed. The stability of the walls in turn depends on the strength characteristics of the rocks, their changes over time under the influence of various factors. In conditions of violation of the integrity of the rock, the rock pressure plays a substantial role. In the near-well part of the well, it occurs in two directions: in the vertical and horizontal one. The lateral pressure is a consequence of the vertical pressure and causes tangential stresses, the magnitude of which also depends on the pressure of the drilling fluid. They lead to buckling of rocks, narrowing of the wellbore and the occurrence of collapses.

In drilling, the rock pressure always exceeds the hydrostatic pressure of the drilling fluid and results in the destruction of the walls of the well if the rock strength is insufficient or it is weakened by the action of the drilling fluid. The most significant deformation of the rock directly at the walls of the well, where there is no balancing of the lateral pressure by the hydrostatic one and the forces of cohesion of the rock. The main negative effect of the drilling fluid on the strength of rocks is manifested in the physico-chemical change in their structure under the effect of the filtrate. The process is also enhanced by the mechanical action of the drill string on the walls of the wells.

When the drilling mud interacts with the rock, the following types of disturbances in the integrity of the well walls are identified: collapses (screens); swelling; plastic flow (creep);

chemical dissolution; erosion (Oil and Gas Mining. URL: <http://oilloot.ru/78-tekhnika-i-tekhnologii-stroitelstva-skvazhin/167-burovye-promyvochnye-zhidkosti>).

For this reason, studying the composition of drilling fluids, assessing their impact on rocks and the entire drilling process are a relevant problem and require more in-depth studies to prevent mentioned unwanted effects.

## 2 Literature review

A number of studies have been devoted to the problem of drilling of oil and gas wells taking into account the effect of drilling fluid. It is well-known about the works of (Gulyayev et al., 2009: 141-142), (Gulyayev et al., 2011: 760-761), which provide a derivation of linear mathematical models of the drill string lateral vibrations, taking into account the internal flow of the drilling fluid as an added mass. In the work (Ritto et al., 2009), the influence of drilling fluid on the drill string dynamics was studied using direct well flushing when the fluid moves down inside the drill string and then is directed upward in the annulus of the well. The authors used the Timoshenko beam model and the finite element method for system discretization. The impact of the internal and backward external fluid flows on the vibrations of the flexible cantilever pipe, which can be regarded as a drill string, has also been studied (Moditis et al., 2016: 120-138). It was found that the external flow of fluid could cause a loss of stability of the divergence type system. The stability problems of the drill string motion are studied in the work (Liu et al., 2015), where the linear model of coupled longitudinal and transverse vibrations of the "Bottom-hole assembly - upper drill pipe" system was investigated, and (Kudaibergenov et al., 2017: 93-99), in which the study of resonant phenomena and dynamic stability of drill columns was complicated by taking into account geometric nonlinearity. The results of the research showed that the geometric nonlinearity in the models made significant corrections to the results of the dynamic analysis of the drill string stability. The effect of mud properties, flow velocity and angular speed of rotation on the nonlinear behavior of drill strings in an unconventional horizontal well was studied by (Wilson et al., 2016). It was shown that the correct modelling of the fluid forces acting on the drill string allows explaining the process of safe operation of BHAs within resonance frequencies.

As it is known, gas or compressed air is also widely applied as the circulating medium in the rotary method of well drilling. This technology, called gas drilling, allows in a number of cases to increase the rate of drilling and opening of oil bearing horizons, ensure the integrity of rocks (Lian et al., 2015: 1412), reduce drilling costs and increase the life of bits (Meng et al., 2015: 163). However, unlike drilling with fluid, the gas drilling leads to much more serious vibrations of the drill string due to the low damping effect of the gas as drilling mud (Li et al., 2007). At the same time it was found that the correct choice of gas parameters not only preserves the stability of the drilling system, but also enables to reduce the amplitude of lateral vibrations of the drill string (Khajiyeva et al., 2018: 573-578). In addition, it was established that, assuming the smallness of the drill string deformations in the absence of the gas flow and in its presence, instability of the solution for the considered value of the axial load was observed. The refinement of the model by removing restrictions on the magnitude of the deformations led to stabilization of the solution, as well as in the case of nonlinearity taking into account the gas flow. This confirms the fact that nonlinear models give a more

accurate description of the studied processes, whereas linear models in most cases result in a rough approximation.

The aim of this paper is modelling of the nonlinear dynamics of a drill string under the action of an internal incompressible fluid flow. The focus is on the lateral vibrations of the drill string, because they can exhibit their destructive effects leading to the destruction of the borehole walls and their distortion without appearing on the surface (Saldivar et al., 2014). The obtained model generalizes the model of (Liang et al., 2018: 65-69) to the case of geometric nonlinearity and allowance for the effect of external forces.

### 3 Material and methods

#### 3.1 Elastic potentials

For modelling of the drill string nonlinear dynamics allowing for the influence of the drilling fluid flow two right-handed coordinate systems are introduced: a global system  $OX_1X_2X_3$  related to the drill string lateral displacements and the local one  $Ox_1x_2x_3$  to include the drill string rotation. The drill string is considered in the form of an isotropic elastic rod of length  $l$ . The rod is rotated along the  $x_3$ -axis with the angular speed  $\Omega$  and is under the effect of a compressing force  $N(x_3, t)$  and a torque  $M(x_3, t)$ . The direction of the  $X_3$  - and  $x_3$ -axes coincide with that of the rod axis.

Let  $\tilde{U}_0$  be the elastic energy per unit volume of the rod. The condition according to that the elastic energy  $\tilde{U}_0$  represents the stress potential is written as follows (Rabotnov, 1988):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Applying the Legendre transformation, i.e. assuming that  $\Phi = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \tilde{U}_0 = \Phi(\sigma_{ij})$ , we have

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

From the mechanical point, the potential  $\tilde{U}_0$  is the potential energy of elastic strain accumulated in the rod, whereas the quantity  $\Phi$ , referred to as the strain potential, is the additional work. As the linear elastic material is considered in the paper, the potential  $\Phi$  numerically equals  $\tilde{U}_0$  and hence we can write

$$\sigma_{ij} = \frac{d\Phi(\varepsilon_{ij})}{d\varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{d\Phi(\sigma_{ij})}{d\sigma_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

The strain potential can be also rewritten in the form:

$$\Phi = \frac{1}{2} \Phi \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (4)$$

The equations of generalized Hooke's law for a linear elastic homogeneous isotropic solid body in terms of Lamé parameters are given as

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (5)$$

where  $G = \frac{E}{2(1+\lambda)}$  is the shear modulus,  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $E$  Young's modulus,  $\nu$  Poisson's ratio,  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$  the Kronecker delta.

Substituting stress components (5) into expression for the strain potential (4), we have

$$\Phi = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2) + \lambda(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}) + 2G(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{13}^2). \quad (6)$$

### 3.2 General relations underlying the model

The research performed in (Khajiyeva et al., 2018: 573-578) showed the benefit of using nonlinear models instead of linear ones that mostly give a rough approximation of studied processes. Therefore, the modelling of the drill string dynamics under the effect of the drilling fluid flow will be carried out with taking into account geometric nonlinearity.

According to the second system of simplifications of Novozhilov's nonlinear elasticity theory (Novozhilov, 1999), the strain components are given as follows:

$$\varepsilon_{ii} = e_{ii} + \frac{1}{2} (\omega_j^2 + \omega_k^2), \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} - \omega_i\omega_j, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (7)$$

where

$$e_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}, \quad e_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad \omega_i = \frac{(-1)^i}{2} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_j}, \quad (8)$$

$$i, j, k = 1, 2, 3, \quad (i \neq j \neq k, j < k).$$

Here  $e_{ii}$  mean the relative elongations,  $e_{ij}$  shears, and  $\omega_i$  the rotation angles of the rod fibre.

Acceptance of the displacement hypothesis for the case of spatial lateral vibrations (more general form can be found in (Filippov, 1970) and (Bobrovnikskij et al., 1983: 428)) yields

$$\begin{cases} U_1(x_1, x_2, x_3, t) = u_1(x_3, t), \\ U_2(x_1, x_2, x_3, t) = u_2(x_3, t), \\ U_3(x_1, x_2, x_3, t) = -\frac{\partial u_1(x_3, t)}{\partial x_3} - \frac{\partial u_2(x_3, t)}{\partial x_3}. \end{cases} \quad (9)$$

Then the position vector of an arbitrary point  $P(x_3)$  of the rod is defined as

$$\vec{r}(x_3, t) = u_1(x_3, t)\vec{i} + u_2(x_3, t)\vec{j} - \left( \frac{\partial u_1(x_3, t)}{\partial x_3} x_1 + \frac{\partial u_2(x_3, t)}{\partial x_3} x_2 \right) \vec{k}, \quad (10)$$

wherein the unit vectors  $\vec{i} = \vec{i}(t)$ ,  $\vec{j} = \vec{j}(t)$ ,  $\vec{k} = \vec{k}$ .

Given that  $\frac{\partial \vec{i}}{\partial t} = \omega \vec{j}$ ,  $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\omega \vec{i}$ ,  $\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = 0$ , from (10), we can find the velocity of the rod:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Omega u_2 \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} + \Omega u_1 \right) \vec{j} - \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial t} x_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial t} x_2 \right) \vec{k}. \quad (11)$$

The velocity of the drilling fluid, according to (Liang et al., 2018: 67), is expressed as

$$\vec{v}_f = \vec{v} + V_f \vec{\tau}, \quad (12)$$

where

$$\vec{\tau} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_3} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \vec{i} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \vec{j} - \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} x_1 + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} x_2 \right) \vec{k}. \quad (13)$$

Here  $\vec{\tau}$  is the direction vector tangential to the rod axis,  $V_f$  the fluid speed.

On substituting the displacement projections over the corresponding coordinate axes (9) into the strain components (8), we can find new relations for (7), which, using (6), give the expression of the elastic potential  $\Phi$  for the rod spatial lateral vibrations. After that, introducing the following inertial characteristics

$$S_{x_1} = \int_A x_2 dA, \quad S_{x_2} = \int_A x_1 dA, \quad I_{x_1} = \int_A x_2^2 dA, \quad I_{x_1 x_2} = \int_A x_1 x_2 dA, \quad I_{x_2} = \int_A x_1^2 dA, \quad (14)$$

one can determine the expression for the potential energy of the rod deformation.

### 3.3 Ostrogradsky-Hamilton's variation method

For derivation of the governing equations of the drill string dynamics with the drilling fluid flow, Ostrogradsky-Hamilton's variation principle is utilized:

$$\delta = \int_{t_1}^{t_2} (T - U_0 + \Pi) dt = 0, \quad (15)$$

where  $T$  is the kinetic energy of the system,  $U_0$  the potential energy,  $\Pi$  the potential of external forces,  $\delta$  the variation,  $t_1, t_2$  arbitrary time moments.

The potential energy of the rod can be found from the Clapeyron formula:

$$U_0 = \iiint_{V_0} \Phi dV_0 = \int_0^l \int_A \Phi dA dx_3, \quad (16)$$

where  $V_0$  is the rod volume,  $A$  the cross-section area of the rod. Finally, we have

$$\begin{aligned} U_0 = & \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \int_0^l \left[ \frac{A}{2} \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^4 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^4 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right) + \right. \\ & + I_{x_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + I_{x_1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \left. \right] dx_3 + \frac{\lambda A}{4} \int_0^l \left[ \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^4 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right) \right] dx_3 + 2GA \int_0^l \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 dx_3. \end{aligned} \quad (17)$$

It is worth noting that the  $x_3$ -axis coincides with the rod neutral line, and thereby the static moments  $S_{x_1} = S_{x_2} = 0$ . Moreover, due to the fact that the  $x_1$ - and  $x_2$ -axes are the symmetry axes of the rod, the centrifugal moment is also zero, i.e.  $I_{x_1 x_2} = 0$ .



Kinetic energy of the system is given as the sum of those of the rod motion  $T_0$  and the drilling fluid motion  $T_f$  (Liang et al., 2018: 68):

$$T = T_0 + T_f, \quad (18)$$

where

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \int_A (\vec{v}, \vec{v}) dA dx_3, \quad (19)$$

$$T_f = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^l \int_{A_f} (\vec{v}_f, \vec{v}_f) dA_f dx_3. \quad (20)$$

Here  $\rho_f$  the flow density,  $A_f$  the internal cross-section area of the drill string.

Substitution of expressions for the rod and drilling fluid velocities (11)-(12) into (18)-(19) yields

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[ A \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + 2\Omega \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \Omega^2 (u_1^2 + u_2^2) \right) + I_{x_2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial t} \right)^2 + I_{x_1} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial t} \right)^2 \right] dx_3, \quad (21)$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \rho_f \int_0^l \left[ A_f \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + 2\Omega \left( u_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + \Omega^2 (u_1^2 + u_2^2) \right) + 2V_f \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Omega u_2 \right) + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Omega u_1 \right) \right) + V_f^2 \left( \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right) + I_{x_2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial t} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right)^2 + I_{x_1} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial t} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right)^2 \right] dx_3, \quad (22)$$

In the process of drilling the drill string is subject to the action of the axial load  $N(x_3, t)$ , resulting in the rod compression in the axial direction, and the torque  $M(x_3, t)$ , causing the torsion deformation. In order to take into account their influence and the gravitation energy of the drill string and the fluid flow pressure in the model, the potential of external forces  $\Pi$ , consisting of the sum of three external potentials, is introduced:

$$\Pi = \Pi_l + \Pi_t + \Pi_g, \quad (23)$$

where  $\Pi_l$  is the potential allowing for the effect of the axial load,  $\Pi_t$  brings the action of the torque, and  $\Pi_g$  contains the gravitation energy of the system. Their expressions read as follows:

$$\Pi_l = -\frac{1}{2} \int_0^l N(x_3, t) \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + I_{x_2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + I_{x_1} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right] dx_3, \quad (24)$$

$$\Pi_t = \frac{1}{2} \int_0^l M(x_3, t) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) dx_3, \quad (25)$$

$$\Pi_g = \frac{1}{2} (\rho A + \rho_f A_f) g \int_0^l (l - x_3) \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right] dx_3. \quad (26)$$

#### 4 Results and discussion

The nonlinear mathematical model of the drill string lateral vibrations, taking into account the influence of the drilling fluid flow and the external loadings, is finally obtained by substituting (21)-(23) into (13) with turn to Young's modulus and using the integration by parts technique while calculating the variation of the energies and the potential of external forces. It is worth noting that the axial load  $N(x_3, t)$  and the torque  $M(x_3, t)$  are assumed to be distributed along the rod length. Thus, we have the following mathematical model:

$$\begin{aligned} & EI_{x_2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} - \rho I_{x_2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( M(x_3, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( N(x_3, t) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) - \\ & - \frac{EA}{1 - \nu} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^3 - \frac{EA(5 - 6\nu)}{2(1 - \nu)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right) + \\ & + (\rho A + \rho_f A_f) \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - 2\Omega \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Omega^2 u_1 \right) - \rho_f \left( \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^4} + 2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^3 \partial t} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial x_3^2 \partial t^2} \right) + \\ & + \rho_f A_f \left( V_f^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + 2V_f \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial t} - 2V_f \Omega \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) - \\ & - (\rho A + \rho_f A_f) g \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - (l - x_3) \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & EI_{x_1} \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} - \rho I_{x_1} \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( M(x_3, t) \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( N(x_3, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) - \\ & - \frac{EA}{1 - \nu} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^3 - \frac{EA(5 - 6\nu)}{2(1 - \nu)} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \right) + \\ & + (\rho A + \rho_f A_f) \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Omega^2 u_2 \right) - \rho_f \left( \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^4} + 2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^3 \partial t} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial x_3^2 \partial t^2} \right) + \\ & + \rho_f A_f \left( V_f^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + 2V_f \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial t} + 2V_f \Omega \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) - \\ & - (\rho A + \rho_f A_f) g \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - (l - x_3) \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 \right) = 0, \end{aligned}$$

Each of equations of the mathematical model (27) includes terms containing the geometric nonlinearity and the effects of the axial load and the torque. Neglecting these terms, we arrive at the model derived in (Liang et al., 2018: 68-69). Retaining the influence of the external forces and at the same time neglecting the geometric nonlinearity and not considering the energy of gravitation, the model of (Gulyayev et al., 2011: 760-761) can be obtained. As a

result, the derived nonlinear mathematical model of the drill string dynamics is more complete compared to the mentioned linear ones and is more adapted to the real conditions of oil and gas well drilling with the use of the drilling fluid.

## 5 Conclusion

A nonlinear dynamic model of drill string lateral vibrations taking into account the effect of the drilling fluid pressure was developed. Lifting restrictions on magnitudes of the drill string displacements, allowing for the influence of the drilling fluid on the drill string dynamics, and representation of the drill string deformation as spatial that of a rod result in the refinement and generalization of the model. It is verified by the comparison with known linear models of the drill string lateral vibrations.

Presented in this work methodology of development of the drill string motion mathematical model will enable to solve problems of the drilling equipment nonlinear dynamics at qualitatively new and mathematically valid level, and can be applied for dynamic modelling of various rod elements. To further our research, we intend to carry out the numerical analysis of the derived model and generalize it for the case of spatial drill string vibrations of different types.

## 6 Acknowledgements

This work was supported by the grant of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project SF 54/53, 2015-2017).

## References

- [1] *Bobrovnikskij Yu.I., K.I. Mal'tsev.* "Inzhenernye uravneniya kolebaniy sterzhnej [Engineering equations of rod vibrations]." *Acoustic Journal* 29 (4) (1983): 428-434.
- [2] *Dobycha nefi i gaza.* "Burovye promyvochnye zhidkosti." [Oil and Gas Mining. "Drilling Fluids."] Accessed March 23, 2018. <http://oiloot.ru/78-tehnika-i-tehnologii-stroitelstva-skvazhin/167-burovye-promyvochnye-zhidkosti>.
- [3] *Filippov, A.P.* *Kolebaniya deformiruemym system [Oscillations of deformable systems]*. 2nd ed. Moscow: Mashinostroenie, 1970.
- [4] *Gulyayev, V.I., V.V. Gaidaichuk, I.L. Solovjov, I.V. Gorbunovich.* "The Buckling of Elongated Rotating Drill Strings." *Journal of Petroleum Science and Engineering* 67 (2009): 140-148. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2009.05.011>.
- [5] *Gulyayev, V.I., O.I. Borshch.* "Free Vibrations of Drill Strings in Hyper Deep Vertical Bore-Wells." *Journal of Petroleum Science and Engineering* 78 (2011): 759-64. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2011.09.001>.
- [6] *Khajiyeva, Lelya, Askar Kudaibergenov, Askat Kudaibergenov.* "The Effect of Gas and Fluid Flows on Nonlinear Lateral Vibrations of Rotating Drill Strings." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 59 (2018): 565-579. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.12.008>.
- [7] *Kudaibergenov, Askat K., Askar K. Kudaibergenov.* "Modelling of Resonance and Stability of Drill String Nonlinear Dynamics." *International Journal of Mechanics* 11 (2017): 92-100.
- [8] *Lian, Zhanghua, Qiang Zhang, Tiejun Lin, Fuhui Wang.* "Experimental and Numerical Study of Drill String Dynamics in Gas Drilling of Horizontal Wells." *Journal of Natural Gas Science and Engineering* 27 (2015): 1412-1420. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2015.10.005>.
- [9] *Liang, Feng, Xiao-Dong Yang, Wei Zhang, Ying-Jing Qian.* "Dynamical Modeling and Free Vibration Analysis of Spinning Pipes Conveying Fluid with Axial Deployment." *Journal of Sound and Vibration* 417 (2018): 65-79. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.12.005>.

- [10] *Li, Zifeng, Yanshan U., Boyun Guo.* “Analysis of Longitudinal Vibration of Drillstring in Air and Gas Drilling.” Paper presented at the 2007 SPE Rocky Mountain Oil & Gas Technology Symposium, Denver, Colorado, USA, April 16-18, 2007.
- [11] *Liu, Yu, Yi Ji, Andrew J. Dick.* “Analysis of Longitudinal Vibration of Drillstring in Air and Gas Drilling.” Paper presented at the 2007 SPE Rocky Mountain Oil & Gas Technology Symposium, Denver, Colorado, USA, April 16-18, 2007.
- [12] *Meng, Yingfeng, Hongtao Li, Gao Li, Li Zhu, Na Wei, Nan Lin.* “Investigation on Propagation Characteristics of the Pressure Wave in Gas Flow Through Pipes and its Application in Gas Drilling.” *Journal of Natural Gas Science and Engineering* 22 (2015): 163-171. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2014.11.026>.
- [13] *Moditis, Kyriakos, Michael Paidoussis, Joe Ratigan.* “Dynamics of a Partially Confined, Discharging, Cantilever Pipe with Reverse External Flow.” *Journal of Fluids and Structures* 63 (2016): 120-139. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002>.
- [14] *Novozhilov, V.V.* *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity.* New York: Dover Publications, 1999.
- [15] *Rabotnov, Yu.N.* *Mehanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of Deformable Solid Body].* Moscow: Nauka, 1988.
- [16] *Ritto, T.G., R. Sampaio, Christian Soize.* “Drill-String Dynamics Coupled with the Drilling Fluid Dynamics.” Paper presented at the XIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics (DINAME 2009), Angra dos Reis, RJ, Brazil, March 2-6, 2009.
- [17] *Saldívar B., I. Boussaada, H. Mounier, S. Mondie, S.I. Niculescu.* “An Overview on the Modeling of Oilwell Drilling Vibrations.” Paper presented at the 19th IFAC World Congress, Cape Town, South Africa, August 24-29, 2014.
- [18] *Wilson, J.K., S.F. Noynaert.* “A New Damping Model for Nonlinear Drillstring Dynamics: Understanding the Effects of Rotation, Eccentricity, and Confined Fluid Flow and Their Impact on Unconventional Drillstring Design.” Paper presented at the IADC/SPE Drilling Conference and Exhibition, Fort Worth, Texas, USA, March 1-3, 2016.

IRSTI 27.31.21, 27.35.33

## On dynamic stability of drill strings in a supersonic gas flow

Askat K. Kudaibergenov, Al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, +77014998825, E-mail: askhatkud92@gmail.com  
L.A. Khajiyeva, Al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, +77072346500, E-mail: khadle@mail.ru

In this work stability of the drill string nonlinear dynamics, complicated by the effect of an external axial load, initial curvature of the drill string, geometric nonlinearity and the influence of a supersonic gas flow as a circulating medium is studied. The drill string is modelled as a rotating elastic isotropic rod with constant cross-section. Pressure of the gas flow used to clean the borehole from drill cuttings and to transport them from the bottom to the surface is determined by the nonlinear dependences of the piston theory in the third approximation. Utilization of the Galerkin method allows to reduce the drill string mathematical model to an ordinary differential equation for the generalized time function, containing an asymmetric nonlinear characteristic, which is further eliminated by introducing the corresponding substitution. Considering a small perturbation to the system and applying the harmonic balance method, characteristic determinants are constructed. Equations describing boundaries of instability zones of basic resonance, which allow to determine the range of dangerous frequency regimes and to increase safety of the drilling process, are obtained.

**Key words:** drill string, stability, nonlinearity, gas flow.

### Дыбыстан газ ағынында бұрғылау бағанасының динамикалық тұрақтылығы туралы

Құдайбергенов Асқат Қ., Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,  
Қазақстан Республикасы, +77014998825, E-mail: askhatkud92@gmail.com  
Хаджиева Л.А., Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ.,  
Қазақстан Республикасы, +77012346500, E-mail: khadle@mail.ru

Осы жұмыста білікке түсетін сыртқы жүк-салмақтың әрекеті, бұрғылау бағанасының бастапқы қисықтығы, геометриялық сызықты еместік және айналыстағы орта түрінде дыбыстан газ ағынының әсерін ескере отырып бұрғылау бағанасы сызықты емес динамикасының тұрақтылығын зерттеледі. Бұрғылау бағанасы тұрақты көлденең қимасымен айналымы серпімді изотроптық білік түрінде қаралады. Ұңғыманы тазарту және бұрғылау шламын кенжарден жер бетіне тасымалдау үшін қолданылатын газ ағынының қысымы поршенді теорияның үшінші жуықтауда сызықты емес тәуелділіктерінен анықталады. Галеркин әдісін пайдалану уақыттық функцияны жай дифференциалдық теңдеуге ауысуға мүмкіндік береді. Тиісті ауыстыру енгізу жолымен бұл теңдеудің симметриялы емес сызықты емес сипаттамасын шығарылады. Шағын ұйтқу анықталай және гармоникалық баланс әдісі қолданылай, сипаттамалық анықтауыштар құрылады. Қауіпті жиіліктік режим ауқымы анықтауға және бұрғылау үдерісінің қауіпсіздігін көтеруге мүмкіндік беретін негізгі резонанс динамикалық орнықсыздығы аймақтарының шектерін теңдеулер табылады.

**Түйін сөздер:** бұрғылау бағанасы, тұрақтылық, сызықты еместік, газ ағыны.

**О динамической устойчивости бурильных колонн в сверхзвуковом потоке газа**  
Кудайбергенов Асқат К., Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы,  
Республика Казахстан, +77014998825, E-mail: askhatkud92@gmail.com  
Хаджиева Л.А., Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы,  
Республика Казахстан, +77012346500, E-mail: khadle@mail.ru

В работе изучается устойчивость нелинейной динамики бурильной колонны, осложненной действием внешней осевой нагрузки, начальной кривизной колонны, геометрической нелинейностью и влиянием сверхзвукового потока газа как циркулирующей среды. Бурильная колонна моделируется в виде вращающегося упругого изотропного стержня постоянного поперечного сечения. Давление потока газа, который применяется для очистки скважины и переноса бурового шлама с забоя на поверхность, определяется нелинейными зависимостями поршневой теории в третьем приближении. Использование метода Галеркина позволяет перейти к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно обобщенной временной функции, содержащему несимметричную нелинейную характеристику, которую удастся исключить введением соответствующей замены. Задавая системе малое возмущение и применяя метод гармонического баланса, строятся характеристические определители, дающие уравнения границ зон динамической неустойчивости основного резонанса, которые позволят определить диапазон опасных частотных режимов и повысить безопасность процесса бурения скважин.

**Ключевые слова:** бурильная колонна, устойчивость, нелинейность, поток газа.

## 1 Introduction

Active development of oil and gas fields today makes the oil and gas extracting industry one of the largest and dynamically developing industries in the economy of modern Kazakhstan. Speed of driving and fail-safety of works when drilling oil and gas wells depend significantly on quality and modernization of drilling equipment, technological imperfections of drill strings, elaboration of the drilling modes for different types of soil rocks, influences of complicating external loads and factors of the environment, etc.

High-amplitude flexural vibrations, axial displacements and torsional stick-slip motions of drill strings caused by their difficult dynamic behaviour during the drilling process can result in serious technical failures of the drilling equipment (Nandakumar, 2013: 1), (Jansen, 1993). Therefore, there arises a problem of carrying out the dynamic analysis of the drill string stability, which is important for the increase in efficiency of drilling operations, protection of expensive components of the drilling equipment against undesirable vibrations and prevention of collapse of borehole walls while drilling.

Moreover, the drill string dynamics is highly nonlinear by its nature, and it is necessary to consider a system of nonlinear differential equations for its investigation (Al-Hiddabi, 2003: 1-2). It is caused generally by flexibility of drill strings due to their large length and the impact of the axial compressing load that can result in finite deformations of the drill strings (geometric nonlinearity).

This paper aims at dynamic stability of the drill string, modelled in the form of a rotating elastic rod, taking into account a supersonic gas flow circulating from the drill string outer side. A mathematical model studied in (Kudaibergenov, 2017) is complicated, in addition to the variable compressing load, initial curvature of the drill string and nonlinearity of the model, by the nonlinear influence of the gas flow in the third approximation that brings the dynamic analysis of stability of the drill string vibrations closer to real conditions of drilling.

## 2 Literature review

Research of quasistatic stability of a rotating drill string, carried out in (Gulyaev, 2006: 692-697), enabled to find critical rotary speeds of drill strings. The obtained buckling mode shapes, in turn, could be useful to determine points for installing centralizers to avoid contact

with borehole. In (Aarsnes, 2017: 2-3) importance of using the distributed models to analyze stability of the linearized axial-torsional dynamics of drill strings with subsequent determination of the normalized inverse of the system gain margin is shown. Coupled axial-torsional vibrations of a drill string taking into account state-dependent time delay and nonlinearity from dry friction and loss of contact are studied in (Liu, 2014: 1-8). The carried-out stability analysis established that self-excited oscillations of the drill string owing to the delay time effects could arise with high probability.

Amongst axial, lateral and torsional modes of vibration, the lateral mode is said to cause about 75% of drilling failures (Ghasemloonia, 2012: 948). In (Sahebkar, 2011: 743-759) the authors examine a nonlinear model of drill string lateral vibrations, obtained with application of Hamilton's principle, and employ the method of multiple scales to define the steady-state response and instability regions. Research of lateral dynamic behaviour of the drill string in a horizontal borehole taking into account continuous contact with borehole wells revealed that studied vibrations have snaking or whirling nature (Heisig, 2000). Simultaneous appearance of parametric resonance and whirl vibration phenomena, resulting in high-amplitude lateral vibrations of a rotating drill string, within the range of drilling operating conditions is shown in (Christoforou, 1997: 256-259).

Successful application of the Galerkin method to the analysis of drill string dynamics, particularly, to their dynamic stability in vertical holes was indicated in (Vaz, 1995: 437-440). Utilization of the Galerkin technique along with the harmonic balance and pseudo arc-length continuation methods to investigate steady-state frequency responses and stability branches of beam-like structures with polynomial-type nonlinearities were studied in (Bhattiprolu, 2016: 28-37). Such a combination of techniques allowed to quickly determine the harmonics needed for convergence of a periodic solution of the system.

At present gas drilling technology involving air, nitrogen or natural gas as circulating media is widely applied in oil and gas industry (Lian, 2015: 1412). In (Meng, 2014: 163-170) a simple and reliable theoretical model describing the propagation and attenuation of a pressure wave through pipes was created. It was established that static pressure had more influence on the attenuation factor than on wave speed.

At the same time, a large number of works are related to the nonlinear dynamics of cylindrical structures in a supersonic gas flow. Influences of the critical Mach number on the flutter emergence and limit cycle oscillations, existence of bifurcation and chaotic motions of a composite laminated plate under transversal aerodynamic pressure modelled by the first-order piston theory is given in (Chen, 2015: 1-8). The use of the third-order piston theory and shock wave aerodynamics is described in (Librescu, 2002: 802-810), whereas in (Kiiko, 2009: 135) the authors derive an expression for the excess pressure, essentially different from the piston theory formulae, and obtain purely investigated eigenvalue problems.

### 3 Materials and methods

#### 3.1 Mathematical model

Let us consider a nonlinear mathematical model of the drill string lateral vibrations (Kudaibergenov, 2017), based on Novozhilov's nonlinear elasticity theory (Novozhilov, 1999) taking into consideration the plane section hypothesis and obtained with application of Hamil-

ton's variation principle. The Cartesian coordinate system  $Oxyz$  ( $z$ -axis coincides with the drill string axis) is used. Vibrations of the drill string, presented as a rotating elastic isotropic rod with symmetric cross-section, in the  $Oyz$ -plane are studied.

In order to take into account the effect of a supersonic incompressible gas flow on the drill string dynamics relations of the piston theory (Volmir, 1967), connecting the aerodynamic pressure of the flow with speed of sound, are applied. According to them, we have the following:

$$P = P_0 \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{U_n}{C_0} \right)^{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (1)$$

where  $U_n$  is the normal projection of the gas flow speed on the drill string surface;  $C_0$  the sound speed for the unperturbed gas flow;  $P_0$  the pressure of the unperturbed flow;  $\kappa$  the polytropic exponent.

The gas is supposed to move in the upward direction, i.e. in the opposite direction to the drill string motion. Considering the stationary gas flow, when  $U_n = V_g \frac{\partial v}{\partial z}$  (Kudaibergenov, 2018: 570), and expanding (1) into a power series up to third order, we arrive at the following expression for the excessive pressure of the supersonic gas flow:

$$\Delta P = P - P_0 = P_0 \kappa \left( -\bar{M} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\kappa + 1}{4} \bar{M}^2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \frac{\kappa + 1}{12} \bar{M}^3 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^3 \right), \quad (2)$$

The use of nonlinear expression (2), containing the cubic power of  $\bar{M} \frac{\partial v}{\partial z}$  allows to get sufficiently exact values of pressure. At the same time, the process of perturbation distribution in gas can be considered as isentropic (Volmir, 1967).

Hence, the nonlinear mathematical model of plane lateral vibrations of the rotating drill string allowing for the nonlinear effect of the supersonic gas flow is written as follows

$$\begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \rho I_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( N(z, t) \frac{\partial (v + v_0)}{\partial z} \right) - \frac{EA}{1 - \nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^3 \\ - \rho A \omega^2 v + h \Delta P = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\rho$  is the mass density,  $A$  the cross-section area of the rod,  $v(z, t)$  the displacement of the flexural center of the cross-section along the  $y$ -axis owing to bending,  $E$  Young's modulus,  $I_x$  the axial inertia moment,  $v_0(z)$  the initial curvature of the rod,  $\nu$  Poisson's ratio,  $\omega$  the angular speed of rotation of the drill string,  $h$  the drill string wall thickness.

Boundary conditions for the simply supported rod are given by

$$v(z, t) = 0, \quad EI_x \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} \quad (z = 0, z = l). \quad (4)$$

The external loads having generally variable in time nature significantly influence the drill string dynamic stability. Accepting that the harmonic effect corresponds to the loading regime, the variable axial compressive load can be presented as

$$N = N_0 + N_t \cos \tilde{\Omega} t, \quad (5)$$



where  $N_0$  and  $N_t$  are the constant and variable in time components, respectively;  $\tilde{\Omega}$  is the frequency of the external effect.

When investigating natural and resonant oscillations of construction elements with nonlinear and elastic characteristics a sought solution is often approximated by a finite number of normal modes with subsequent reduction of an initial partial differential equation of motion to modal equations of motion, applying the Galerkin method. Studying oscillations of continuous systems with large amplitude such as rods, beams and shells the single-mode method which assumes independence of the modal form of oscillations from the influence of nonlinearity is effectively used (Szemplinska-Stupnicka, 1983).

Using the Galerkin method, consider the general form of the drill string nonlinear vibrations. In the given case, the lateral displacement  $v(z, t)$  and initial curvature  $v_0(z)$  can be approximated by periodic functions of the form:

$$v(z, t) = f(t) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad v_0(z) = f_0(t) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right). \quad (6)$$

On substituting expression (6) into governing equation (3), after integration under meeting the requirement of orthogonality of the substitution result to the basis function  $\sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$  and introducing the dimensionless time  $\tau = \Omega_0 t$ , the problem reduces to the nonlinear ordinary differential equation for the generalized function  $f(\tau)$ :

$$\frac{d^2 f}{d\tau^2} + (1 - 2\beta \cos \Omega\tau) f + \alpha_1 f^2 + \alpha_2 f^3 = F_0 + F_1 \cos \Omega\tau, \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \Omega = \frac{\tilde{\Omega}}{\Omega_0}, \quad \alpha_i = \frac{\tilde{\alpha}_i}{\Omega_0^2}, \quad F_i = \frac{\tilde{F}_i}{\Omega_0^2}, \quad i = 1, 2; \\ \beta_1 &= \frac{1}{2\delta_1} \left( EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - N_0 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \rho A \omega^2 \right), \quad \beta_2 = \frac{N_t \pi^2}{4l\delta_1}, \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{\beta_1}{\delta_1}}, \\ \delta_1 &= \frac{\rho l}{2} \left( A + J \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \right), \quad \tilde{\alpha}_1 = \frac{\bar{M}^2 P_0 \kappa (\kappa + 1) \pi h}{6l\delta_1}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \frac{3EA\pi^4}{8(1-\nu)l^3\delta_1}, \\ \tilde{F}_0 &= f_0 \frac{N_0 \pi^2}{2l\delta_1}, \quad \tilde{F}_1 = f_0 \frac{N_t \pi^2}{2l\delta_1}. \end{aligned}$$

Here  $\Omega_0$  is the frequency of the drill string natural vibrations allowing for the constant component of the axial load,  $\beta$  the excitation coefficient.

It is worth noting that the influence of the supersonic gas flow is taken into account in the term with quadratic nonlinearity, in contrast to the authors' works (Kudaibergenov, 2014: 594), (Kudaibergenov, 2016: 496) where the flow of gas appeared in the term with cubic nonlinearity. Cubic term in equation (7) arises due to nonlinearity of the mathematical model of the drill string.

Moreover, the nonlinear characteristic in equation (7) is asymmetric because of existence of the quadratic term  $\alpha_1 f^2$ . Making the substitution  $f = \hat{f} - \frac{\alpha_1}{3\alpha_2}$  (Hayashi, 1986) we obtain the equation with symmetric nonlinear characteristic:

$$\frac{d^2 \hat{f}}{d\tau^2} + (\gamma - 2\beta \cos \Omega\tau) \hat{f} + \alpha \hat{f}^3 = \hat{F}_0 + \hat{F}_1 \cos \Omega\tau, \quad (8)$$

where

$$\gamma = 1 - \frac{\alpha_1^2}{3\alpha_2}, \quad \alpha = \alpha_2, \quad \hat{F}_0 = F_0 + \frac{\alpha}{3\alpha_2} - \frac{2\alpha_1^3}{27\alpha_2^2}, \quad \hat{F}_1 = F_1 - \frac{2\alpha_1\beta}{3\alpha_2}.$$

### 3.2 Stability analysis

For stability investigation let us suppose that  $\hat{f}_0$  is the periodic solution of equation (7), and introduce a small variation  $\delta f$ :

$$\hat{f} = \hat{f}_0 + \delta f. \quad (9)$$

If the variation  $\delta f$  rises indefinitely at  $\tau \rightarrow \infty$ , then the solution  $\hat{f}_0(\tau)$  is unstable. In the case when  $\delta f$  remains limited at  $\tau \rightarrow \infty$ , the solution  $\hat{f}_0(\tau)$  is stable.

On substituting (9) into equation (8), eliminating  $\hat{f}_0$ , and neglecting the powers of  $\delta f$  higher than one, the following linearized equation in terms of the variation  $\delta f$  is obtained:

$$\frac{d^2\delta f}{d\tau^2} + \left( \gamma - 2\beta \cos \Omega\tau + 3\alpha\hat{f}_0^2 \right) \delta f = 0. \quad (10)$$

Considering the case of basic resonance for the periodic solution  $\hat{f}_0(\tau)$ :

$$\hat{f}_0(\tau) = r_1 \cos(\Omega\tau - \phi_1), \quad (11)$$

where  $r_1$  is the amplitude,  $\phi_1$  the phase of the periodic solution; we arrive at the generalized Hill type equation in variations:

$$\frac{d^2\delta f}{d\tau^2} + \left( \theta_0 + \sum_{n=1}^2 (\theta_{nc} \cos n\Omega\tau + \theta_{ns} \sin n\Omega\tau) \right) \delta f = 0, \quad (12)$$

where

$$\theta_0 = \gamma + \frac{3}{2}\alpha r_1^2, \quad \theta_{1c} = -2\beta, \quad \theta_{1s} = 0, \quad \theta_{2c} = \frac{3}{2}\alpha r_1^2 \cos 2\phi_1, \quad \theta_{2s} = \frac{3}{2}\alpha r_1^2 \sin 2\phi_1.$$

In order to determine zones of instability, the particular solution of equation (12) is given by a spectrum of vibrations (Szemplinska-Stupnicka, 1983: 19):

$$\delta f = e^{\eta\tau} \sum_k \cos(k\Omega\tau - \psi_k), \quad k = 1, 3, 5, \dots, \infty \quad \text{or} \quad k = 0, 2, 4, \dots, \infty, \quad (13)$$

where  $\eta$  is the characteristic exponent that can take a real or imaginary value.

Hence, the behaviour of the quantity  $\delta f$  depends on the behaviour of the function  $e^{\eta\tau}$ , which, in turn, depends on the behaviour of the characteristic exponent  $\eta$ . Thus, if

1) the characteristic exponent has a negative real part, i.e.  $Re(\eta) < 0$ , then the solution  $\delta f \rightarrow 0$  at  $\tau \rightarrow \infty$ , that means the solution is stable;

2)  $Re(\eta) = 0$ , we get the solution on the boundary of stability and instability zones;

3)  $Re(\eta) > 0$ , then the solution  $\delta f$  is unstable since it increases indefinitely at  $\tau \rightarrow \infty$ .

The method of harmonic balance according to which coefficients at the corresponding cosines and sine are equated to zero is applied to find the zones of dynamic instability. At the same time, the order of the corresponding characteristic determinants depends on the number of harmonics retained in solution (13).

### 4 Results and discussion

Transition to the symmetric nonlinear characteristic in equation (8) allows to restrict ourselves by finding the instability zones of the odd order, which involve the terms corresponding to the odd harmonics in expression (13).

Assuming that the frequency of the small perturbation  $\delta f$  coincides with frequency of the periodic solution  $\tilde{f}_0$ , the first instability zone is determined. Then the solution of equation (12) can be written as

$$\delta f = e^{\eta\tau} b_1 \cos(\Omega\tau - \psi_1). \tag{14}$$

On substituting solution (14) into the equation of perturbed state (12) and applying the method of harmonic balance, we get the following characteristic determinant:

$$\Delta(\eta) = \begin{vmatrix} \eta^2 - \Omega^2 + \theta_0 + \frac{\theta_{2c}}{2} & 2\eta\Omega + \frac{\theta_{2s}}{2} \\ -2\eta\Omega + \frac{\theta_{2s}}{2} & \eta^2 - \Omega^2 + \theta_0 - \frac{\theta_{2c}}{2} \end{vmatrix}, \tag{15}$$

that provided  $\Delta(\eta = 0) = 0$ , defines the boundaries of the first instability zone of the basic resonance:

$$(A_0 - \Omega^2)^2 + (B_0 - B_1\Omega^2) r_1^2 + C_0 r_1^4 = 0, \tag{16}$$

where

$$A_0 = \gamma, \quad B_0 = 3\alpha\gamma, \quad B_1 = -3\alpha, \quad C_1 = \frac{27}{16}\alpha^2.$$

Existence of cubic nonlinearity in the model supposes finding the instability zones of higher order. When determining the third zone of instability of the basic resonance the expression for the small variation  $\delta f$  is given by

$$\delta f = e^{\eta\tau} (b_1 \cos(\Omega\tau - \psi_1) + b_3 \cos(3\Omega\tau - \psi_3)). \tag{17}$$

Similarly, on substituting (17) into (12), we apply the method of harmonic balance and take into consideration that the results of substitution have to be satisfied at any nontrivial values of  $b_k, \psi_k, k = 1, 3$ . Assuming that  $b_1 = b_3 = 1$ , we come to the fourth-order characteristic determinant of the form:

$$\Delta(\eta) = \begin{vmatrix} \eta^2 - \Omega^2 + \theta_0 + \frac{\theta_{2c}}{2} & 2\eta\Omega + \frac{\theta_{2s}}{2} & \frac{\theta_{2c}}{2} & \frac{\theta_{2s}}{2} \\ -2\eta\Omega + \frac{\theta_{2s}}{2} & \eta^2 - \Omega^2 + \theta_0 - \frac{\theta_{2c}}{2} & -\frac{\theta_{2s}}{2} & \frac{\theta_{2c}}{2} \\ \frac{\theta_{2c}}{2} & -\frac{\theta_{2s}}{2} & \eta^2 - 9\Omega^2 + \theta_0 & 6\eta\Omega \\ \frac{\theta_{2s}}{2} & \frac{\theta_{2c}}{2} & -6\eta\Omega & \eta^2 - 9\Omega^2 + \theta_0 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Then the boundaries of the third zone of instability can be described by the following equation, satisfying the condition  $\Delta(\eta = 0) = 0$ :

$$(A_0 - A_1\Omega^2 + A_2\Omega^4)^2 + (B_0 + B_1\Omega^2 + B_2\Omega^4 + B_3\Omega^6) r_1^2 + (C_0 + C_1\Omega^2 + C_2\Omega^4) r_1^4 + (D_0 + D_1\Omega^2) r_1^6 + E_0 r_1^8 = 0, \tag{19}$$

where

$$\begin{aligned} A_0 &= \gamma^2, & A_1 &= -10\gamma, & A_2 &= 9, \\ B_0 &= 6\alpha\gamma^3, & B_1 &= -90\alpha\gamma^2, & B_2 &= 354\alpha\gamma, & B_3 &= -270\alpha, \\ C_0 &= \frac{189}{16}\alpha^2\gamma^2, & C_1 &= -\frac{909}{8}\alpha^2\gamma, & C_2 &= \frac{3357}{16}\alpha^2, \\ D_0 &= \frac{135}{16}\alpha^3\gamma, & D_1 &= -\frac{567}{16}\alpha^3, & E_0 &= \frac{405}{256}\alpha^4. \end{aligned}$$

The third zone of instability allows to refine the solution of the problem and to determine the frequencies at which ultra-harmonic resonant oscillations resulting in loss of the drill string stability can arise.

## 5 Conclusion

The dynamic model of the drill string flat bending, developed by the authors, refines the known models and brings them closer to a real physical process. It becomes possible due to introducing to the model of the drill string vibrations their nonlinearity of geometric nature (finiteness of deformations, initial curvature of the drill string), and nonlinearity from pressure of the supersonic gas flow.

In this work, the methodology of the dynamic stability analysis of the systems without imposing limits on the magnitudes of their nonlinearity and nonautonomous terms is proposed. It is based on determining the instability zones of resonant vibrations and finding the corresponding characteristic determinants with application of the harmonic balance method. Completeness of the mathematical model allows to predict the drill string behaviour with high accuracy, eliminating dangerous resonant frequencies from the range of their operating regimes, thereby increasing efficiency and reliability of the drill string operation. Despite the fact that the proposed techniques were used to research stability of the system basic resonance, they can be successfully applied to the analysis of resonances on higher frequencies as well.

In future, the results of the work will be generalized to the case of spatial vibrations of the drill string with conducting their detailed numerical analysis.

## 6 Acknowledgements

This work was supported by the grant of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project SF 54/53, 2015-2017).

## References

- [1] *Aarsnes, U.J.F., N. van de Wouw.* "Axial and Torsional Dynamics of a Distributed Drill String System." Paper presented at ENOC 2017, Budapest, Hungary, June 25-30, 2017.
- [2] *Al-Hiddabi, S.A., B. Samanta, A. Seibi.* "Non-linear Control of Torsional and Bending Vibrations of Oilwell Drillstrings." *Journal of Sound and Vibration* 265 (2003): 401-415. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01456-6](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01456-6).
- [3] *Bhattiprolu, U., A.K. Bajaj, P. Davies.* "Periodic Response Predictions of Beams on Nonlinear and Viscoelastic Unilateral Foundations Using Incremental Harmonic Balance Method." *International Journal of Solids and Structures* 99 (2016): 28-39.

- 
- [4] *Chen, J., Q.S. Li.* "Analysis of Flutter and Nonlinear Dynamics of a Composite Laminated Plate." *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 16 (2016): 1550019-1-20.
- [5] *Christoforou, A.P., A.S. Yigit.* "Dynamic Modeling of Rotating Drillstrings with Borehole Interactions." *Journal of Sound and Vibration* 206(2) (1997): 243-260. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1091>.
- [6] *Ghasemloonia, A., D.G. Rideout, S.D. Butt.* "Coupled Transverse Vibration Modeling of Drillstrings Subjected to Torque and Spatially Varying Axial Load." *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 227(5) (2013): 946-960. <https://doi.org/10.1177/0954406212455126>.
- [7] *Gulyaev, V.I., P.Z. Lugovoi, M.A. Belova, I.L. Solov'ev.* "Stability of the Equilibrium of Rotating Drillstrings." *International Applied Mechanics* 42(6) (2006): 692-698.
- [8] *Hayashi, Ch.* *Nonlinear Oscillations in Physical Systems.* New Jersey: Princeton University Press, 1986.
- [9] *Heisig, G, M. Neubert.* "Lateral Drillstring Vibrations in Extended-Reach Wells." Paper presented at the 2000 IADC/SPE Drilling Conference, New Orleans, Louisiana, February 23-25, 2000.
- [10] *Jansen, J.D.* *Nonlinear Dynamics of Oilwell Drillstrings.* Delft University Press, 1993.
- [11] *Kiiko, I.A., V.V. Pokazeev.* "On the Formulation of the Problem of Strip Oscillations and Stability in Supersonic Gas Flow." *Fluid Dynamics* 44(1) (2009): 135-140.
- [12] *Kudaibergenov, Askat K.* "Ob ustojchivosti nelinejnyh kolebanij buril'nyh kolonn [On Stability of Nonlinear Vibrations of Drill Strings]." Paper presented at X All-Russian Conference on "Nonlinear Vibrations of Mechanical Systems", Nizhny Novgorod, Russia, September 26-29, 2016.
- [13] *Kudaibergenov, Askat K., Askar K. Kudaibergenov, L.A. Khajiyeva.* "On resonance regimes of drill string nonlinear dynamics." Paper presented at International Conference on Mathematical Methods & Computational Techniques in Science & Engineering (MMCTSE 2017), Cambridge, UK, February 24-26, 2017.
- [14] *Khajiyeva, L., Askar Kudaibergenov, Askat Kudaibergenov.* "The effect of gas and fluid flows on nonlinear lateral vibrations of rotating drill strings." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 59 (2018): 565-579. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.12.008>.
- [15] *Kudaibergenov, Askhat, Askar Kudaibergenov, L. Khajiyeva.* "Stability Analysis of Drill Rods as Shells in the Gas Stream." *Journal of Applied Mechanics and Materials* 665 (2014): 593-596.
- [16] *Lian, Zh., Q. Zhang, T. Lin, F. Wang.* "Experimental and Numerical Study of Drill String Dynamics in Gas Drilling of Horizontal Wells." *Journal of Natural Gas Science and Engineering* 27 (2015): 1412-1420. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2015.10.005>.
- [17] *Librescu, L., P. Marzocca.* "Supersonic/Hypersonic Flutter and Postflutter of Geometrically Imperfect Circular Cylindrical Panels." *Journal of Spacecraft and Rockets* 39(5) (2002): 802-812.
- [18] *Liu, X., N. Vljajic, X. Long, G. Meng, B. Balachandran.* "State-Dependent Delay Influenced Drill-String Oscillations and Stability Analysis." *Journal of Vibration and Acoustics – Transactions of the ASME* 136 (2014): 051008-1-9.
- [19] *Novozhilov, V.V.* *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity.* New York: Dover Publications, 1999.
- [20] *Meng, Y., H. Li, G. Li, L. Zhu, N. Wei, N. Lin.* "Investigation on Propagation Characteristics of the Pressure Wave in Gas Flow through Pipes and its Application in Gas Drilling." *Journal of Natural Gas Science and Engineering* 22 (2015): 163-171. <https://doi.org/10.1016/j.jngse.2014.11.026>.
- [21] *Nandakumar, K., M. Wiercigroch.* "Stability Analysis of a State Dependent Delayed, Coupled Two DOF Model of Drill-string Vibration." *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013): 2575-2592. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.12.020>.
- [22] *Sahebkar, S.M., M.R. Ghazavi, S.E. Khadem, M.H. Ghayesh.* "Nonlinear Vibration Analysis of an Axially Moving Drill-string System with Time Dependent Axial Load and Axial Velocity in Inclined Well." *Mechanism and Machine Theory* 46 (2011): 743-760. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2010.12.003>.
- [23] *Szemplinska-Stupnicka, W.* "Higher Harmonic Oscillations in Heteronomous Non-linear Systems with One Degree of Freedom." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 3 (1968): 17-30.
- [24] *Szemplinska-Stupnicka, W.* "Non-Linear Normal Modes" and the Generalized Ritz Method in the Problems of Vibrations of Non-Linear Elastic Continuous Systems." *International Journal of Non-Linear Mechanics* 18(2) (1983): 149-165. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(83\)90042-2](https://doi.org/10.1016/0020-7462(83)90042-2).

- [25] *Vaz, M.A., M.H. Patel.* "Analysis of Drill Strings in Vertical and Deviated Holes Using the Galerkin techniques." *Engineering Structures* 17(6) (1995): 437-442.
- [26] *Volmir A.S.* *Ustojchivost' deformiruemyh sistem* [Stability of Deformable Systems]. Moscow: Nauka, 1967.

3-бөлім

Раздел 3

Section 3

Информатика

Информатика

Computer  
science

IRSTI 50.33.31

### Data processing in electrocardiographs by wavelet transformation for early forecasting of parossysmal arthritis

Abdiakhmetova Z.M., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,  
+77018998833, e-mail: zukhra.abdiakhmetova@gmail.com,  
Nurmakhanova ZH.M., S.D. Asfendiyarov Kazakh National Medical University,  
Almaty, Kazakhstan, +77017393809,  
e-mail: zhanna12932@mail.ru

ECG analysis is widely used to diagnose many heart diseases, which are the leading cause of death in different countries. The quality of the ECG signal can be affected and worsened by various sources, such as the patient's condition, basic walk, electrocardiogram contact, and others. In addition, if the ECG is visually monitored, the probability of human error is high, each 10-result is interpreted with an error (Brikena Xhaja, 2015: 305-312) And also for many ECG images it is simply not possible to conduct a visual analysis of the frequency data of the signal. The morphology of low-amplitude high-frequency signals, the so-called P waves, hides valuable information for early preclinical disease prediction. That is, the need to search for new methods of early preclinical diagnosis is still relevant. Since the majority of clinically useful information in the ECG is found in the intervals and amplitudes determined by its significant points (characteristic peaks and wave boundaries), the development of accurate and reliable methods for automatic ECG delineation is a matter of great importance, especially for the analysis of long records (Juan Pablo Martinez, 2014: 570-581). The problems of retrieving information from the electrophysiological signal that can not be obtained by visual analysis of the recording, as well as the problems of automation of traditional algorithms of medical analysis are relevant in connection with the lack of research in this field. The aim of the research is to search for new areas of application of the wavelet transform method in signal processing. Wavelet transformation, obtained widely in 2000 in the study of signal properties, allows us to "discern" hidden frequency-time signal data with the help of approximating and detailing coefficients. The obtained results show that the proposed algorithm provides real efficiency in the processing of primary signals for the task of isolating the detailing coefficients of the ECG signal. Our study shows that Morlet's wavelet analysis of P intervals, which can be applied easily and inexpensively, can reliably predict the incidence of symptomatic episodes of paroxysmal atrial fibrillation in patients without clinically and echocardiographically expressed heart disease. Wavelet analysis can contribute to our understanding of the electrophysiological mechanisms underlying the generation and recurrence of paroxysmal atrial fibrillation and can identify patients at high risk of increased relapses of paroxysmal atrial fibrillation, thereby creating the prospect of early application of non-invasive and invasive therapeutic strategies to prevent future events of paroxysmal ciliary arrhythmias.

**Key words:** electrocardiogram, wavelet transformation, paroxysmal atrial fibrillation.

### Пароксизмалды аритмияны ерте болжауды зерттеу үшін вейвлет түрлендіру әдісін электрокардиограммалардағы мәліметтерді өңдеуде қолдану

Абдирахметова З.М., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,  
+77018998833, e-mail: zukhra.abdiakhmetova@gmail.com,  
Нурмаханова Ж.М., С.Ж. Асфендияров атындағы Қазақ ұлттық медицина университеті,  
Алматы, Қазақстан, +77017393809, e-mail: zhanna12932@mail.ru

Көптеген елдерде өлмнің басты себебі болып табылатын жүрек ауруларын болжау үшін ЭКГ талдауы кеңінен қолданылады. ЭКГ сигналының сапасы турлі себептерден нашарлауы мүмкін, оған емделушінің күй-жағдайы, ЭКГ электродтарының байланысы сияқты себептер жатады. Одан басқа, егер ЭКГ бейнесі визуалды түрде интерпретацияланатын болса, онда адами қателікке ұрыну ықтималдығы жоғарылай түседі және статистикалық мәліметтер бойынша визуалды талданған ЭКГ бейненің әр оныншысы қате интерпретацияланады (Brikena Xhaja, 2015: 305-312). Сонымен қатар көптеген ЭКГ бейнелер арқылы сигналдың жылжытқы мәліметтері туралы ақпаратты визуалды түрде жүргізуге болмайды. Төмен амплитудалы жоғары жылжытқы сигналдардың морфологиясы көптеген ауруларды алдын ала болжауға қолданылатын құнды мәліметтерге ие. Сондықтан ерте клиникалық болжаудың жаңа әдістерін іздеу қажеттілігі әлі де өзекті мәселе. ЭКГ бейнесіндегі пайдалы ақпараттың көпшілігі маңызды нүктелерімен анықталатын интервалдар мен амплитудаларда орналасқандықтан, ЭКГ-да осы аймақтарды нақты және сенімді бөлетін автоматты әдістерді өңдеу өте маңызды мәселе болып табылады, әсіресе ұзындығы шамалы болатын жазбаларда (Juan Pablo Martinez, 2014: 570-581). Электрофизиологиялық сигналдардан визуалды түрде алуға болмайтын ақпаратты алу мәселелері, сонымен қатар дәстүрлі дәрігерлік талдауды автоматтандыру мәселелері осы облыстағы зерттеулердің аздығынан өзекті болып табылады. Зерттеудің мақсаты сигналдарды өңдеуде вейвлет түрлендіру әдісін қолданудың жаңа бағыттарын іздеу болып табылады. 2000 жылдары сигналдың қасиеттерін зерттеуде кеңінен қолданыла бастаған Wavelet трансформациясы бізге аппроксимация және бөлшектеу коэффициенттері арқылы жасырын жылжытқы сигналдың деректерін «айырып» алуға мүмкіндік береді. Алынған нәтижелер көрсеткендей, ұсынылған алгоритм ЭКГ сигналының егжей-тегжейлі коэффициенттерін оқшаулау мақсаты үшін бастапқы сигналдарды өңдеуде нақты тиімділікті қамтамасыз етеді. Біздің зерттеуіміз көрсеткендей, Морлет вейвлетін қолданумен Р аралықтарын талдауда оңай және арзан түрде қолдануға болатын клиникалық және эхокардиографиялық жүрек ауруымен ауыратын науқастарда пароксизмальды атриальді фибрилляцияның эпизодтарының симптомдық эпидемиясын сенімді болжауға болады. Вейвлет талдауы пароксизмальды атриальді фибрилляцияның генерациясы мен қайталануын негіздейтін электрофизиологиялық механизмдерді тусінуге ықпал ете алады және пароксизмальды атриальді фибрилляцияның қайталануының жоғарылауы жоғары емделушілерді анықтай алады, осылайша, пароксизмалы шырышты болашақ оқиғалардың алдын алу үшін инвазивті емес және инвазивті-терапевтік стратегияларды ертерек қолдану мүмкіндік береді.

**Түйін сөздер:** электрокардиограмма, вейвлеттік түрлендіру, пароксизмалды аритмия.

#### **Обработка данных в электрокардиограммах методом вейвлетного преобразования для исследования раннего прогнозирования пароксизмальной мерцательной аритмии**

Абдирахметова З.М., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан, +77018998833, e-mail: zukhra.abdiakhmetova@gmail.com,  
Нурмаханова Ж.М., Казахский национальный медицинский университет имени С.Ж. Асфендиярова, Алматы, Казахстан, +77017393809, e-mail: zhanna12932@mail.ru

Анализ ЭКГ широко используется для диагностики многих сердечных заболеваний, которые являются основной причиной смертности в разных странах. Качество сигнала ЭКГ может быть затронут и ухудшен различными источниками, такими как состояние пациента, базовое блуждание, контакт электродов ЭКГ и другие. Кроме того, если ЭКГ контролируется визуально, вероятность получения человеческой ошибки высока, каждый 10-результат интерпретируется с ошибкой (Brikena Xhaja, 2015: 305-312). А также по многим ЭКГ снимкам просто не возможно провести визуальный анализ частотных данных сигнала. Морфология низкоамплитудных высокочастотных сигналов, так называемых Р волн, скрывает ценную информацию для раннего доклинического прогнозирования болезней. То есть необходимость поиска новых методов ранней доклинической диагностики все еще актуальна. Поскольку большая часть клинически полезной информации в ЭКГ обнаруживается в интервалах



и амплитудах, определяемых ее значимыми точками (характерные пики и границы волн), разработка точных и надежных методов автоматического разграничения ЭКГ является предметом серьезной важности, особенно для анализа длинных записей (Juan Pablo Martinez, 2014: 570-581). Проблемы извлечения из электрофизиологического сигнала информации, которую невозможно получить при визуальном анализе записи, а также проблемы автоматизации традиционных алгоритмов врачебного анализа являются актуальными в связи с недостатком исследований в данной области. Целью исследования является поиск новых областей применения метода вейвлетного преобразования в обработке сигналов. Получившее широкое распространение в 2000 годах в исследовании свойств сигналов вейвлетное преобразование позволяет с помощью аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов «разглядеть» скрытые частотно-временные данные сигнала. Полученные результаты показывают, что предлагаемый алгоритм обеспечивает реальную эффективность в обработке первичных сигналов для задачи выделения детализирующих коэффициентов ЭКГ сигнала. Наше исследование показывает, что вейвлет-анализ Морлета интервалов P, который применять легко и недорого, может достоверно предсказать частоту симптоматических эпизодов пароксизмальной мерцательной аритмии у пациентов без клинически и эхокардиографически выраженной болезни сердца. Вейвлет анализ может способствовать нашему пониманию электрофизиологических механизмов, лежащих в основе генерации и рецидивов пароксизмальной мерцательной аритмии, и может позволить идентифицировать пациентов с высоким риском увеличения рецидивов пароксизмальной мерцательной аритмии, тем самым создавая перспективу раннего применения неинвазивных и инвазивных терапевтических стратегий для предотвращения будущих событий пароксизмальной мерцательной аритмии.

**Ключевые слова:** электрокардиограмма, вейвлетное преобразование, пароксизмальная мерцательная аритмия.

## 1 Introduction

The quality of the ECG signal can be affected and worsened by other sources, such as the patient's condition, the underlying walk and the patient's weakness. contact of ECG electrodes. In addition, if the ECG is visually monitored, the probability of human error is high, each 10-result is interpreted with an error (Brikena Xhaja, 2015: 305-312). A typical ECG trace of a normal heart rhythm consists of a P-wave, a QRS complex, a T wave, which is shown in Figure 1:

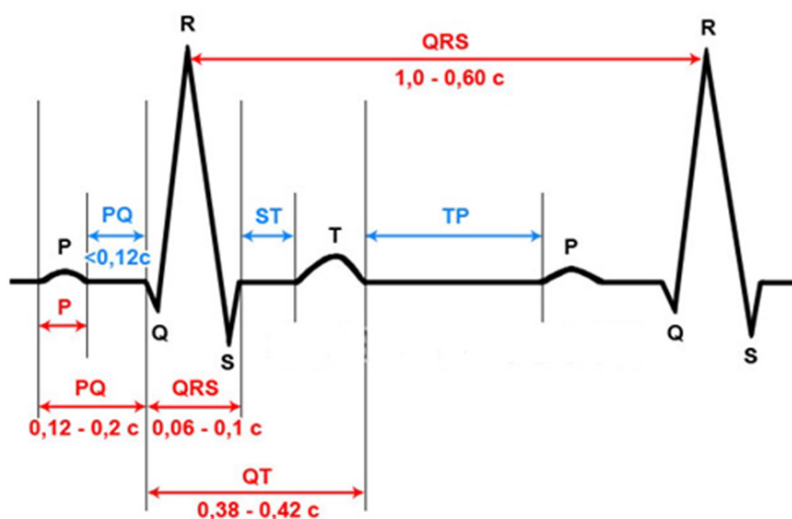


Figure 1 - ECG trace(www.okardio.com)

We can see that the peaks of the QRS complexes are smoothed out, and the P- and T-waves containing the lower frequencies become more noticeable. The determination of the position of the wave P and wave T is complicated because of its small amplitude. At the same time, we can also find that parts on a lower scale make up higher signal frequencies. In this paper, attention is focused on the wave P. The advantage of the wavelet transform lies in its ability to extract the details of the ECG signal with optimal temporal resolutions. Information on the complex P obtained is very useful for ECG classification, analysis, diagnosis, authentication and identification. The main advantage of this kind of detection is a shorter time for a long-term ECG signal (Gautam A., 2012: 632-635). The method based on the wavelet transform can be used to determine the characteristic characteristics of the ECG signal with fairly good accuracy even in the presence of high-frequency and low-frequency noise (P.Sasikala, 2011: 489-493). The presentation of the work done consists of the following sections. The "Literature overview" section contains an overview of related works devoted to the application of wavelet transform methods to extract the detail data contained in the signals. In the section "Materials and methods" the essence of the problem is stated and the general steps of its solution are indicated. And as the specified steps are specified and specified in the form of a new way of data extraction. The "Main results" section describes the results obtained using the proposed method. Conclusions formulate conclusions and provide a plan for future research.

## 2 Literature review

Information hidden in the P interval, which has a low amplitude and a high frequency of distribution, is often equally important for research than high-amplitude bursts and harmonics. The interval P has a duration of 0.11 seconds, a positive value of the amplitude (Chazov M., 2014:1). A specialist in the interpretation of ECG, mainly draws attention to these two parameters, and a deep study of this interval and its morphology often remains without due attention. Ignoring the high frequencies and its content in the P interval may lead to an omission of early preclinical prediction of some kind of heart disease. For this reason, the task of extracting hidden parts is of high relevance, but in the literature it is not given enough attention. In (Grigoriev D.S., 2012:57-61), the morphology of the PQRST complex for deep study of arrhythmia and normal sinusoidal rhythm was also studied using wavelet methods, namely, the Daubechies wavelets. In article (K.Venkata, 2011:60-69), pathologies associated with QRS changes were investigated using a discrete wavelet transform. Further, the works of these authors were concentrated on the interval T and new data were revealed in ECG signals, these data were used for early preclinical detection of some pathologies. For early preclinical detection of cardiac pathology, no study is given for the P interval. Recently, several research algorithms have been developed to detect arrhythmia in ECG signals, some of which use wavelet transformation, fuzzy logic methods, reference vector machines with an approach that demonstrates their advantages and disadvantages. In (Ivanko E.O., 2009: 160-164), a continuous wavelet transform was used to extract traits from the ECG signal to determine late atrial potentials, this algorithm achieves a positive predictability of 98%. Thus, in this review, we examined the 7 most interesting articles of processing ECG data by wavelet transformation methods. All these methods are heuristic, i.e. based on the assumptions regarding the nature of signal distribution in the time domain of the distribu-

tion. A comparative analysis of these statements shows that there are both coincidences of the positions of different authors and serious discrepancies, which indicates that there are unresolved problems in this area.

### 3 Materials and methods

At present, in connection with the increase in the number of patients with paroxysmal atrial fibrillation, there is an urgent need to search for new methods of early preclinical diagnosis. These methods should meet a number of requirements: to have a sufficiently high sensitivity and specificity, the possibility of using in outpatient settings and low time and financial costs in conducting screening studies. The method of the standard ECG and the carrying out of exercise tests have by now reached certain limits of their diagnostic capabilities for the detection of hidden PMA of the heart. In its initial stages, the use of conventional electrocardiography, as a rule, does not reveal abnormalities. At the same time, there is reason to assume that already in this period there are changes in the frequency and temporal characteristics of the electrical potentials of the heart that are not recorded with the help of a conventional electrocardiograph. Fundamentally new possibilities are opened when modern mathematical methods of analysis are applied to the ECG signal, based on signal representations in the form of expansions in some generalized vector spaces. The most famous example of such an expansion is the Fourier transform, realized most often as a Fast Fourier Transform (FFT). Let  $f(x)$  — continuous function of a real variable  $x$ . The Fourier Transform of a function  $f(x)$  is defined by equation:

$$F(U) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux} dx \quad (1)$$

where  $i = \sqrt{-1}$  and  $u$  often called a frequency variable. Summation of sines and cosines may not be so obvious at first glance, but applying Euler's equation, we get:

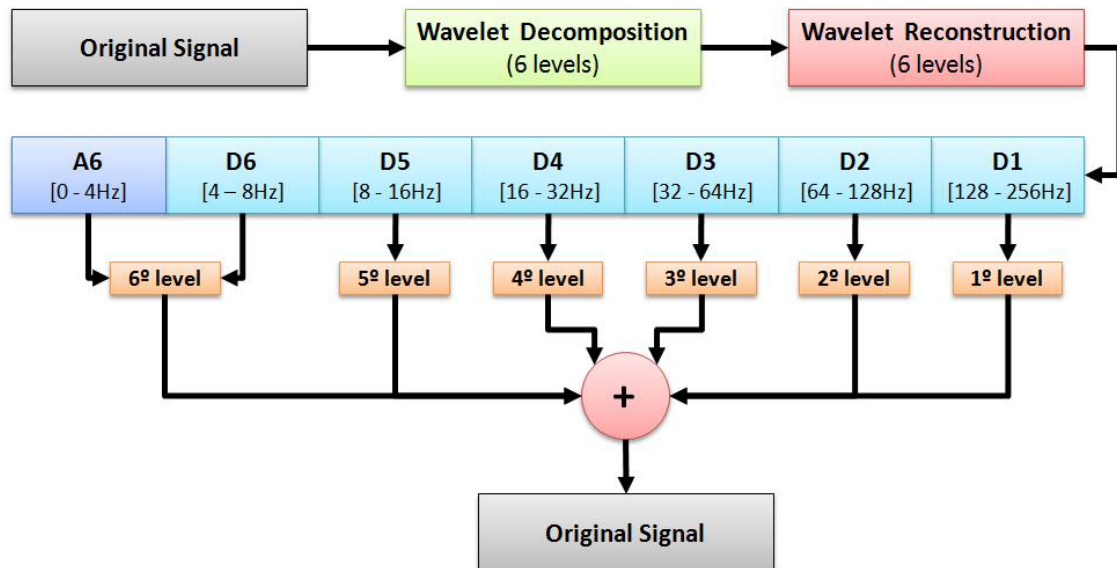
$$F(U) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos 2\pi ux - i \sin 2\pi ux) dx \quad (2)$$

For this  $F(u)$ , we can go back and get  $f(x)$  using the inverse Fourier Transform:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(U)e^{-i2\pi ux} dx \quad (3)$$

The application of a temporary "window" allows estimating the change in the signal spectrum in different phases of a cardiocycle. This method is called Spectral-temporal mapping. This technique has now become quite widespread. At the same time, all the potential capabilities of the CRM method remain unfulfilled in it, primarily due to the natural shortcomings of the standard Fourier analysis. The fact is that the method uses a fixed "window" that can not be adapted to local signal properties. As a result, in the low-frequency part of the spectrum, the frequency resolution is lost, and the frequency resolution is lost in time. To resolve this contradiction in modern mathematics, a number of methods for analyzing non-stationary signals have been developed (this class includes ECG signals). The most famous

was the so-called wavelet transform (Wavelet-transform). It represents the decomposition of a signal over a set of basis functions, which are determined on an interval shorter than the duration of the cardiac signal ([www.okardio.com](http://www.okardio.com)).



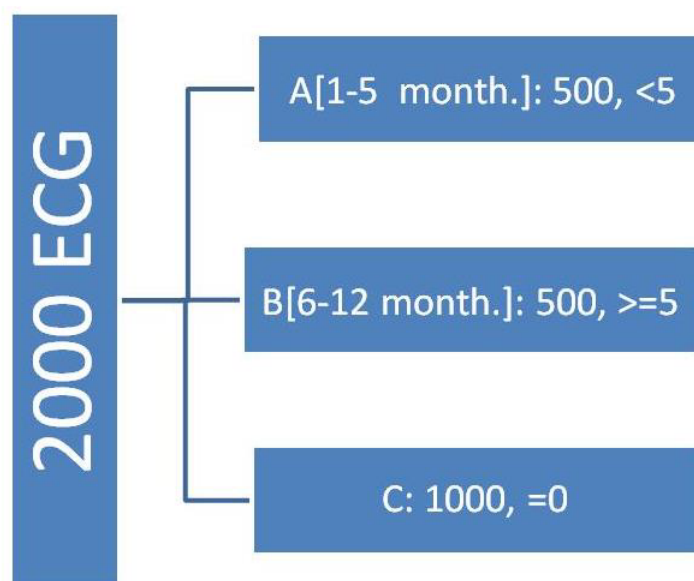
**Figure 2-** 6-leveled wavelet decomposition

In this case, all functions of the set are generated by means of a two-parameter transformation (a shift along the time axis and a scale change) of one initial function, called the "parent" function. They are called wavelets (in translation - short waves or bursts). Large values of the scale parameter correspond to the application of the low-pass filter to the original signal, small values of the high-pass filter. From the Fourier transform, the wavelet transform differs in that the multiplication by the "window" is contained in the very basic function, and the "window" adapts to the signal when the scale is changed (Dobesi I., 2001:464). This module computes a wavelet analysis using different types of wavelets. In STx a scaled wavelet transformation with a bounded integration interval is used:

$$H(a, b) = \frac{1}{aS(a)} \int_{-\alpha}^{\alpha} h(t) W\left(\frac{t-b}{a}, f_0\right) dt \quad (4)$$

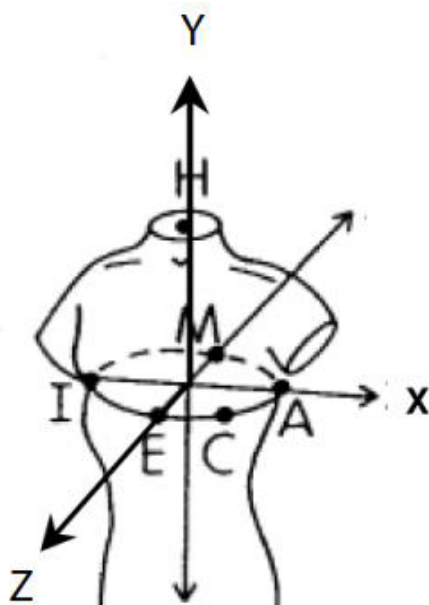
with:

a frequency scaling parameter b time shift parameter S(a) amplitude scaling factor a time window width (input ACUT) f<sub>0</sub> basic frequency of wavelet function (input F<sub>0</sub>) For the study, we used the results of ECG images of 2000 patients who were presented by the Almaty Cardiology Center and were taken from the site (Open MIT ECG Database, 2012) with episodes of symptomatic paroxysmal arrhythmia (PMA) from January 2017 to December 2017 and were taken with Edan SE-3 devices, EXT 01-R-D. Of these, 500 patients had the first episode, and 500 had a relapse of the PMA episode. Patients were observed 12 months and classified into three groups depending on the number of PMA relapses per year: group A - healthy patients without recurrence of PMA, with less than five relapses per year - group B and with more than five relapses per year - group C.



**Figure 3** - Study groups

Although Group B and Group C patients did not differ in time in AF, Group C patients had more PMA episodes in their medical chart, these episodes were longer and the time in the sinus rhythm before the last episode of PMA was larger compared to patients in Group B. All subjects were subjected to ECG analysis, as described below, at the initial and subsequent levels.



**Figure 4** - Leads [12]

The wavelet transform was proposed as an alternative way to analyze non-stationary biomedical signals, which decompose the signal into basic functions. The wavelet method acts as a mathematical microscope, in which we can observe different parts of the signal simply by adjusting the focus (Boytsov S.A., 2001:32-34). The usual application of wavelet

methods for processing medical waves uses a wavelet transformation based on the use of a single wavelet, rather than on the basis of a set constructed from a family of mathematically related wavelets. Again, choosing a wavelet with appropriate morphological characteristics with respect to the physiological signal under consideration is critical to the success of the application. Next, various DWT applications will be presented in cardiac studies with interesting applications such as noise cleaning and compression of medical signals, segmentation of the electrocardiogram (ECG) and the derivation of latent characteristics, heart rate variability analysis and analysis of various cardiac arrhythmias.

#### 4 Main results

The use of the method for the three groups showed the following results: Mean and Max values correspond to the area and maximum peak value of P., respectively. Observations showed that there was no special difference between groups of patients and healthy in the lead X. In lead Y as well, there was no difference between the maximum values of healthy and sick, and the areas were not. In lead Z there were differences between the data of groups A, B and C. As the results of the wavelet transformation showed, the patients of group C had a larger value of P both in area and in the maximum value of peak P. The duration of wave P increased in patients with any number of repetitions disease.

#### 5 Conclusion

The algorithm of processing data based on the wavelet transformation of the signal was presented in the paper. The main idea was to process the data - signals, for its subsequent processing. The obtained results show that the proposed algorithm provides real efficiency in the processing of primary signals for the task of isolating the detailing coefficients of the ECG signal. The development perspective of this approach is the development of software modules that allow you to configure the transformation parameters in the user interface, as well as the improvement of the algorithm itself. The present approach and results can be implemented in the ecg machines to provide an analytical report along with the patient's ECG. Accurate and reliable ECG analysis in the ECG machine is very much in demand today. The efficiency of the developed diagnostic method was proved on the basis of numerical experiments. The next stage in the development of the system will be optimization and testing on longer signals to diagnose a wider range of diseases.

#### References

- [1] *Boytsov S.A., Grishaev S.L., Solntsev V.N., Kudryavtsev Yu.S.* Analysis of signal-averaged ECG (according to wavelet transform data) in healthy and IHD patients //Herald of arrhythmology. - 2001. Vol.23, - P. 32-34.
- [2] *Brikena Xhaja, Eglantina Kalluci, Ligor Nikolla* Wavelet transform applied in ecg signal processing //European Scientific Journal . -2015. -Vol.12, -P.305-312.
- [3] *Chazov M.* 6. Guide to Cardiology in four volumes. "Practice 2014.
- [4] *Dobesi I.* Ten lectures on wavelets. Izhevsk. - 2001. - P.464.
- [5] *Gautam Apoorv, Maninder Kaur* ECG Analysis using Continuous Wavelet Transform (CWT). // IOSR Journal of Engineering. -2012. -Vol.2(4), - P. 632-635.

- 
- [6] *D.S. Grigoriev, V.G. Spitsyn* The application of a neural network and discrete wavelet transform for the analysis and classification of electrocardiograms // Proceedings of Tomsk Polytechnic University. - 2012. Vol.321, - P. 57-61.
- [7] *Ivanko E.O. , Ivanushkina N.G.,Synecop Yu.S.* Multi-level analysis of electrocardiograms for the detection of late atrial potentials //Electronics and communications. - 2009. Vol.2, - P. 160-164.
- [8] *Martinez Juan Pablo , Almeida Rute, Salvador Olmos* A Wavelet-Based ECG Delineator: Evaluation on Standard Databases// IEEE Transactions on biomedical engineering. -2004. -Vol.51, - P. 570-581.
- [9] Open MIT ECG Database 2012. - <http://www.physionet.org/cgi-bin/atm/ATM> (date of the application 14.11.2017).
- [10] *Rob MacLeod, Brian Birchler* ECG Measurement and Analysis //Electronics and communications. - 2014.
- [11] *Sasikala P., R.S.D. WahidaBanu* Extraction of P wave and T wave in Electrocardiogram using Wavelet Transform // International Journal of Computer Science and Information Technologies. - 2011. Vol.2(1), - P. 489-493.
- [12] *K.Venkata Lakshmi Narayana* Wavelet based QRS detection in ECG using MATLAB // Innovative Systems Design and Engineering. - 2011. Vol.2, - P. 60-69.
- [13] [www.okardio.com](http://www.okardio.com).

IRSTI 20.23.17

## Modeling the processing of a large amount of data

Balakayeva G.T., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,  
+77013201802, E-mail: gulnardtso@gmail.com,  
Darkenbayev D.K., Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,  
+77012591891, E-mail: dauren.kadyrovich@gmail.com

The definition of large amounts of data, Big Data, is used to refer to technologies such as storing and analyzing a significant amount of data that requires high speed and real-time decision-making when processing. Typically, when serious analysis is said, especially if the term DataMining is used, that there is a huge amount of data. There are no universal methods of analysis or algorithms suitable for any cases and any volumes of information. Data analysis methods differ significantly in performance, quality of results, usability and data requirements. Optimization can be carried out at various levels: equipment, databases, analytical platform, preparation of source data, specialized algorithms. Big data is a set of technologies that are designed to perform three operations. First, to process large amounts of data compared to "standard" scenarios. Secondly, be able to work with fast incoming data in very large volumes. That is, the data is not just a lot, but they are constantly becoming more and more. Thirdly, they must be able to work with structured and poorly structured data in parallel in different aspects. Large data suggest that the input algorithms receive a stream of not always structured information and that more can be extracted from it than any one idea. The results of the study are used by the authors in modeling large data and developing a web application.

**Key words:** Large amounts of data, data processing, analysis, modeling, methods.

### Үлкен өлшемді деректерді өңдеуді модельдеу

Балакаева Г.Т., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,  
+77013201802, email: gulnardtso@gmail.com,  
Даркенбаев Д.Қ., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,  
+77012591891, email: dauren.kadyrovich@gmail.com

BigData деректерінің үлкен көлемін анықтау жоғары жылдамдықты және нақты уақыттық шешімдер қабылдауды талап ететін деректердің үлкен көлемін сақтау және талдау сияқты технологияларды қолдану үшін пайдаланылады. Әдетте, егер аналитикалық өңдеудің маңыздылығы туралы айтқанда, әсіресе, DataMining термині пайдаланылған болса, ол үлкен деректердің бар екендігін білдіреді. Кез келген жағдайларда және кез келген ақпарат көлеміне сәйкес келетін әмбебап анализ немесе алгоритмдер жоқ. Деректерді талдау әдістері өнімділік, нәтиже сапасы, қол жетімділік және деректер талаптарына айтарлықтай ерекшеленеді. Оңтайландыру түрлі деңгейлерде жүргізілуі мүмкін: жабдықтар, дерекқорлар, аналитикалық платформалар, бастапқы деректерді дайындау, арнайы алгоритмдер. Үлкен деректер – үш операцияны орындауға арналған технологиялар жиынтығы. Біріншіден, "стандартты" сценарийлермен салыстырғанда одан үлкен көлемді деректерді өңдей алады. Екіншіден, жедел түскен үлкен деректермен жұмыс жасай алады, яғни жай ғана көп емес уақыт өткен сайын дерек көлемі көбейе береді. Үшіншіден, олар құрылымдалған және нашар құрылымдалған деректермен әр түрлі аспектілерде параллельді түрде жұмыс жасай алуы қажет. Үлкен өлшемді деректер алгоритмдері әрдайым құрылымдалған ақпарат ағынын ғана ала бермейді, осыдан көп ой түйіндеуге болады. Зерттеу нәтижелерін мақала авторлары үлкен өлшемді деректерді модельдеуде және Веб-қосымша әзірлеуде қолдану үстінде.

**Түйін сөздер:** Үлкен өлшемді деректер, ақпаратты өңдеу, талдау, модельдеу, әдістер.



### Моделирование обработки большого объема данных

Балакаева Г.Т., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан,  
+77013201802, E-mail: gulnardtsa@gmail.com,  
Даркенбаев Д.К., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан,  
+77012591891, E-mail: dauren.kadyrovich@gmail.com

Определение больших объемов данных, BigData, используется для обозначения таких технологий как хранение и анализ значительного объема данных, при обработке которых требуется высокая скорость, и принятие решений в режиме реального времени. Обычно, когда говорят о серьезной аналитической обработке, особенно если используют термин DataMining, подразумевают, что данных огромное количество. Не существует универсальных способов анализа или алгоритмов, пригодных для любых случаев и любых объемов информации. Методы анализа данных существенно отличаются друг от друга по производительности, качеству результатов, удобству применения и требованиям к данным. Оптимизация может производиться на различных уровнях: оборудование, базы данных, аналитическая платформа, подготовка исходных данных, специализированные алгоритмы. Большие данные – это совокупность технологий, которые призваны совершать три операции. Во-первых, обрабатывать большие по сравнению со "стандартными" сценариями объемы данных. Во-вторых, уметь работать с быстро поступающими данными в очень больших объемах. То есть данных не просто много, но их постоянно становится все больше и больше. В-третьих, они должны уметь работать со структурированными и плохо структурированными данными параллельно в разных аспектах. Большие данные предполагают, что на вход алгоритмы получают поток не всегда структурированной информации и что из него можно извлечь больше, чем какую-то одну идею. Результаты исследования используются авторами при моделировании больших данных и разработке веб-приложения.

**Ключевые слова:** Большие объемы данных, обработка данных, анализ, моделирование, методы.

## 1 Introduction

The analysis of a large volume of data requires a special technique, because when technical difficulties arise, it is only necessary to use them with the force of force, i.e., to use powerful equipment.

Of course, we can increase the speed of data processing, especially on modern servers and workstations, with multi-core processors, mass memory and powerful disk arrays. However, there are many other ways to scale-up large-scale data that does not require enormous hardware upgrades and endless hardware updates.

## 2 Review of literature

Consider the possibility of using a database management system. Modern databases cover different mechanisms, which utilizes significantly the speed of analytical processing:

- During the analysis, the most frequently used data can be pre-processed and can be stored in a special table in the form of multidimensional cubes in the database server ready in the upcoming processing.

- Cache tables to basic memory. During the analysis, you can cache the most commonly used data, such as definitions, by using the database resources. Reduces the access of the drive to a smaller number of times (Sosnov, 2002).

- Split tables into sections and table spaces. You can place data on separate discs, indices, and helper tables. This allows the parallel disk to read and write information to the database

management system. In addition, the table can be divided into sections. For example, we can use a logical table with historical data, when we need to divide it into small physical sections, this small part is read and not read all the history data.

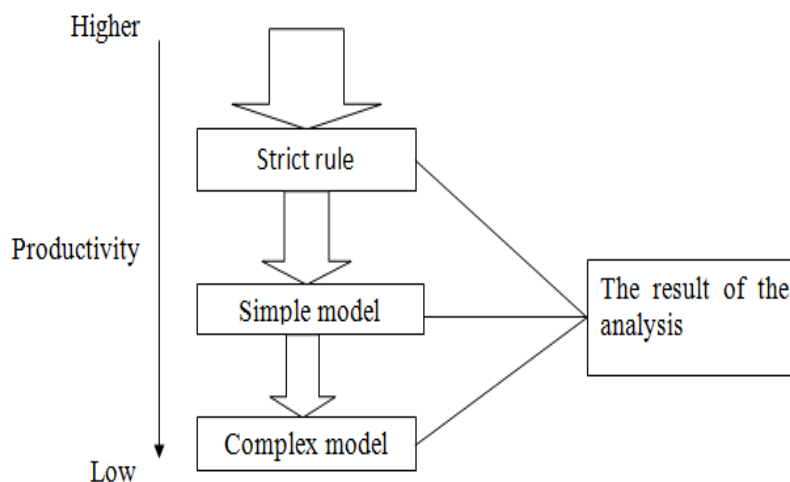
Increasing the speed of searching information from the database in other ways: triggering rational indexing, query scheduling, parallel processing of SQL queries, using clusters, preparing data analyzed using stored procedures, database server triggers, and many of these mechanisms can be used with free databases (Vishnevskii, 2009).

### 3 Methods and models

Integration of data includes the integration of data from different sources and the provision of data to users in a unified form. This process becomes significant both in commercial tasks (when two similar companies need to combine their databases), and in scientific (combining research results from various bioinformation repositories, for example). The role of data integration increases when the volume and need for data sharing increases. Data integration systems can integrate data at the physical, logical and semantic level. Integration of data at the physical level from the theoretical point of view is the simplest task and is reduced to the conversion of data from various sources into the required uniform format for their physical representation. Data integration at the logical level provides the ability to access data contained in various sources in terms of a single global scheme that describes their joint presentation, taking into account the structural and possibly behavioral (using object models) data properties. Semantic data properties are not taken into account in this case. Support for a single presentation of data, taking into account their semantic properties in the context of a single ontology of the subject area, is ensured by the integration of data at the semantic level. The integration process is hindered by heterogeneity of data sources, in accordance with the level of integration. So, at integration on a physical level in data sources various file formats can be used. At the logical level of integration, there may be heterogeneity of the data models used for different sources or different data schemes, although the same data model is used. Some sources can be websites, and others – object databases, etc. When integrating on a semantic level, different ontologies can correspond to different data sources. For example, it is possible that each of the sources represents information resources modeling a fragment of the domain, to which its own conceptual system corresponds, and these fragments intersect.

The ability to increase speeds is not limited to optimize databases, and many things can be done by combining different models. The editing speed depends on the complexity of the mathematical device used. Analysis mechanisms are much simpler, the faster data is analyzed.

The data processing scenario can make the data run by using the sio data model (Glushakov, 2000). Here's a simple idea: no need to waste time on the data that does not require analysis. First of all simple algorithms are used. A part of the data that can be processed by these algorithms and cannot be processed even more complicated, are further analyzed. The rest of the data is replaced by the following processing steps, which are used in the following complex algorithms and chains. The final node of the development scenario uses the most complex algorithms, but the analysis data is several times smaller than the original model. As a result, all data will be diminished according to the total time needed to process.



**Figure 1** – Data processing using multiple templates

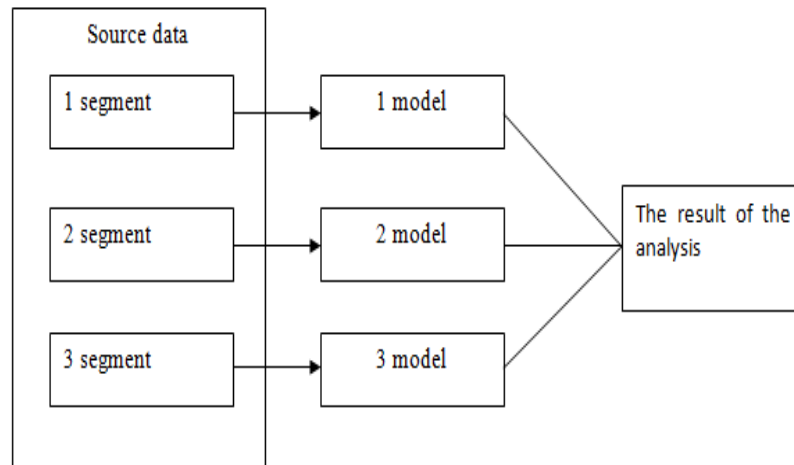
Here's an example of how to use this approach. In solving the demand forecasting problem, it is recommended to conduct an XYZ analysis, which will primarily determine how stable the demand for various goods is. Products of group X are sold regularly, and the use of predictive algorithms allows to obtain high-quality results. Products of Y are sold less often, so use of predictive algorithms gives them a good quality forecast. Z The range of products is very good, so it is not necessary to create these predictive models for them, and the need for them is calculated on the basis of simple formulas, for example, the average monthly sales volume. According to statistics, 70% of the product range is the product group Z. Products of Y are 25% and X-group products are 5%. Using a sophisticated model here is a 30% product only for the goods. Therefore, the use of the above method reduces analysis and prediction time by 5 to 10 times.

### 3.1 Parallel processing

Another effective strategy to process large volumes of data is to divide data into segments and separate segments of each segment and further consolidate the results. In most cases, we can say a few different subgroups of data. Maybe this is a group of consumers that can be a group of goods that can lead to a particular model.

In this case, instead of creating all sophisticated models, there are few simple things to do in each segment (Batini, 1992). This approach allows you to increase the speed of the analysis and reduce the amount of memory. Also, in this case analytical processing can be parallel, which also positively affects the time spent. In addition, models for each segment can create different analyzes.

In addition to speeding, this approach has one more important advantage: several simple models are easy to create and maintain apart from anyone else. The models can be launched in periods and the first results can be obtained shortly.



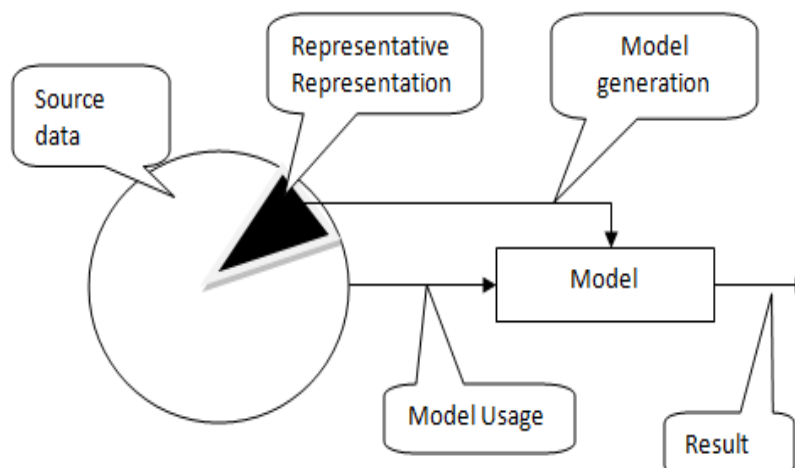
**Figure 2** – Data segmentation and modeling

### 3.2 Representative selection

A representative selection is not all information, but some internal subset modeling can be used with large amounts of data. Properly representative representation contains the information needed to build a qualitative model (Blaha, 1997).

The analytical process is divided into 2 parts: modeling and applying it to new data. Creating a complex model is a resource process. Depending on the algorithms used, data is cached, scanned thousands of times, and auxiliary set of parameters is calculated. Applying the model to new data requires dozens and even hundreds of times less resources.

Thus, the model is designed for a small number of sets and will be applied to all data in the future. The result will be reduced to all data with full processing sequence.



**Figure 3** – Sampling (Blaha, 1997)

There are specific ways to get a representative selection, using analytical techniques we can analyze processing speed without losing quality. For example, sampling (The sampling

approach, which is English translation, means sampling.). There are special ways to increase sampling (see Figure 3).

### 3.3 New types of databases

Database – a set of interrelated data that can be used for a large number of applications, quickly receive and modify the necessary information. Database models are based on a modern approach to information processing. The structure of the database information allows to form logical records of their elements and their interrelations. Interconnections can be: one to one, one to many and many to many. The application of this or that type of interconnection is determined by three models of the database: hierarchical, network, relational. The hierarchical model is represented in the form of a tree-like graph. The advantage of this model is that it allows you to describe the data structure both at a logical and a physical level. Its drawback is a rigid fixed relationship between the elements. In this regard, any changes in relationships require a change in its structure. In addition, the speed of access was achieved due to the loss of information flexibility, i.e. it is impossible to obtain information located on another branch of the communication in one pass through the tree. This model implements the one-to-many type of communication. The network model of the database is represented as a link diagram. In a network model, any kind of relationship between records is allowed; there are no restrictions on the number of feedbacks. The principle of many to many is used. The advantage of this model is the greater information flexibility in comparison with the hierarchical model, but there is a drawback – the rigidity of the structure. If you need a frequent reorganization of the information base, you use the most advanced model of the database – the relational database, in which there are no differences between objects and relationships. The type of connection of such a model is one to one. In this model, the relationships between objects are represented as two-dimensional tables-relations. Since any data structure can be converted into a simple two-dimensional table, and this representation is most convenient for both the user and the machine, the overwhelming majority of modern information systems work precisely with such tables, i.e. with relational databases.

Due to the growing volume of information, hard disk space is difficult to deal with (it is relatively easy to solve some of the difficulties) and it is important to get timely access to the data. Sophisticated caches can be used, but it does not help in the end. You can divide the database into each part and insert each part into our databases. When the database volume increases, the speed of the system decreases dramatically. One way to save time access is to place the database in RAM (Obukhov, 2014). This technique is 100 times faster than a rational method. The in-memory database, the IMDB database, uses the computer's express drive to store data, which means the Quick Storage Device is a place to store data in such systems. Due to the fact that the cost of memory is rising day by day as a place of storage, it is efficient and at speeds of data processing (Frenk, 2014). There are new types of databases that can be self-analyzed to work with large volumes of data. Currently, this statement is used by the general database. Terrada's developers created the first self-analysis database (Boncz, 2005). Also one of the database types is the column data store. In recent years, a number of database systems have been created, including MonetDB (Boncz, 1999), (Stonebraker, 2005) and C-Store (Abadi, 2008), which store data on the column.

## 4 Results and discussion

Analysis of large databases – this is a major scalable report, and in many cases it is not actually solved. Modern databases and analytical platforms offer several ways to handle these issues. If we use them efficiently, you can edit data terabytes that are accurate at speeds. The results of the analytical study are used by the authors in modeling large volumes of data and developing the Web application, and for improving the results of large-scale data processing in the model coordination.

## 5 Conclusion

These methods are only a small part of the methods that allow you to analyze large amounts of data. There are other methods, such as special scalable algorithms, hierarchical models, reading windows, and more application. According to the design of these systems, these systems give a good result in performing some workloads, especially in database applications with many requests, providing the desired results when reading data in a workload (Balakayeva, 2013).

## References

- [1] Abadi J. Daniel, Madden Samuel, Hachem Nabil. ColumnStores vs. RowStores: How Different Are They Really?, *Proceedings of the ACM SIGMOD International Conference on Management of Data, Vancouver, BC, Canada, June 2008*, vol. 3, (2008): 57-61.
- [2] Balakayeva G. and Nurlybayeva K. Simulation of Large Data Processing for Smarter Decision Making. *AWERProcedia Information Technology Computer Science, 3rd World Conference on Information Technology*, vol. 03, (2013): 1253-1257
- [3] Batini C., Ceri S. and Navathe S. Conceptual Database Design: An Entity-Relationship Approach. *Redwood City, CA: Benjamin Cummings*, (1992): 185 p.
- [4] Blaha M. and Premerlani W. Object-oriented modeling and Design for Database Applications. *Prentise Hall*, (1997): 201 p.
- [5] Boncz P., Zukowski M. and Nes N. MonetDB/X100: Hyper-pipelining query execution. *In CIDR*, (2005): 324 p.
- [6] Boncz P. A. and Kersten M. L. MIL primitives for querying a fragmented world. *VLDB Journal*, vol. 8, no 2 (1999): 101-119.
- [7] Frenk B. Ukrashenie bol'shikh dannykh: kak izvlekat' znanie iz massivov informacii s pomosh'iu glubokoi analitiki [Exploitation of most data: how to search for information from mass media analysts with help]. *Moscow*, (2014). 127 p.
- [8] Glushakov S.V. Lomat'ko D.V. Bazy dannykh: uchebnyi kurs [Databases: training course]. *Moscow: OOO "Izdatel'stvo ACT"*, (2000): 504 p.
- [9] Obukhov A. In-Memory. Baza dannykh v operativnoj pamjati [In-Memory. Databases in RAM], (2014): 128 p. <http://ecm-journal.ru/post/In-Memory-Baza-dannykh-v-operativnoj-pamjati.aspx>
- [10] Sosnov A. Osnovy proektirovanie informacionnykh sistem [Basics of projection of information systems]. *Moscow: DMK Press*, (2002): 1020 p.
- [11] Stonebraker M., Abadi D. J., Batkin A., Chen X., Cherniack M., Ferreira M., Lau E., Lin A., Madden S. R., O'Neil E. J., O'Neil P. E., Rasin A., Tran N., and Zdonik S. B. C-Store: A Column-Oriented DBMS. *In VLDB*, (2005): 553-564.
- [12] Vishnevskii A. SQL Server. Effektnaya rabota [SQL Server. Effective work]. *Sankt-Peterburg*, (2009): 541 p.

IRSTI 27.35.45

## Mathematical and numerical modeling of transfer processes in the cleaning of exhaust gases in an automobile neutralizer

Balakayeva G.T., al-Farabi Kazakh National University ,  
Almaty, Kazakhstan, +77013201802, E-mail: balakayeva@mail.ru,  
Akimbay Sh., al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, +77013656467, E-mail: akimbay.sh@gmail.com

Every year, the atmosphere in Kazakhstan is polluted approximately 5-7 million tons of pollutants, about a third of which belong to the vehicle. Also excess pollution of the air basin of the cities of the Republic is caused by pollution of pollutants by metallurgy, oil refining and chemical industry factories, automobile and railway transport. The harmful substances emitted by motor transport adversely affect the air, water reservoirs, soil and the planet's biosphere. At Nowadays car engine consumes about 3 kilogram of atmospheric oxygen when liters of gasoline per 1 kg are burned. Every car delivers 60 m<sup>3</sup> of gas per hour, and the truck produces 120 m<sup>3</sup> of gas. These substances are very dangerous for living organisms and finding solution for the problem of cleaning exhausted gases is very actual.

The purpose of this article is mathematical and numerical modeling on transfer processes in motor-car neutralizer with usage modern programming language and modern computing technologies. The solution of such a problem brings a certain contribution to the protection of the environment from automobile exhaust gases. The task of cleaning at exhaust gases is investigated, that is to say catalytic oxidation of exhausted gases automobile neutralizer . The mathematical model there is a system of differential equations warm and mass transfer including heat generation from the chemical reaction. The equation system is solved through numerical methods and to create and develop an algorithm of computing the task of cleaning exhaust gases in automobile neutralizer.

**Key words:** neutralizer, catalytic neutralizer, iterative numerical method.

### Автомобильді нейтрализаторда пайдаланылған газдарды тазалау кезінде тасымалдау процестерін математикалық және сандық модельдеу

Балакаева Г.Т., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77013201802, E-mail: balakayeva@mail.ru,  
Әкімбаев Ш., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77013656467, E-mail: akimbay.sh@gmail.com

Қазақстанда жыл сайын атмосфераны 5-7 млн. тонна төңірегінде зиянды заттар ластайды, оның үштен бір бөлігі көлікке тиесілі. Республика қалалары әуе бассейнінің тым ластануы - ластаушылардың металлургия, мұнай өңдеу және химия өнеркәсібі кәсіпорындарының, автомобиль және теміржол көлігінің зиянды заттарды шығаруынан туындап отыр. Автомобиль көлігі бөліп шығаратын зиянды заттар ауаға, су қоймаларына, топыраққа түсіп планетамыздың биосферасына кері әсер етеді. Қазіргі кезде автомобиль қозғалтқышында 1 килограм бензин жанғанда 3 килограм атмосфералық оттегі шығындалады. Әрбір автомобиль ауаға сағат сайын 60 м<sup>3</sup> газ, ал жүк машинасы 120 м<sup>3</sup> газ бөліп шығарады. Бұл заттар тірі организмдер үшін өте қауіпті және таусылған газдарды тазарту проблемасын шешу өте өзекті.

Осы мақаланың мақсаты - заманауи программалау тілі мен заманауи есептеу техникасын қолдана отырып, автокөлік құралдарын бейтараптандырудағы көшіру процестеріндегі математикалық және сандық моделдеу. Осындай мәселені шешу қоршаған ортаны автокөлік газдарынан қорғауға белгілі бір үлес қосу болып табылады. Пайдаланылған газдарда тазалау жұмысы зерттелді, яғни автокөлік бейтараптандырғышының пайдаланылған газдарының катализдік тотығуы. Математикалық модельде дифференциалдық теңдеулер жүйесі жылу мен масса алмасу бар, оның ішінде химиялық реакциядан жылу таралады. Теңдеулер жүйесі сандық әдістер арқылы шешіледі және автокөлік бейтараптандырғышында таусылған газдарды тазарту міндетін есептеудің алгоритмі құрылып дамытылады.

**Түйін сөздер:** нейтрализатор, катализдік нейтрализатор, итерация әдісі, қуалау әдісі.

### Математическое и численное моделирование процессов переноса при очистке выхлопных газов в автомобильном нейтрализаторе

Балакаева Г.Т., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, +77013201802, E-mail: balakayeva@mail.ru,  
Акимбай Ш., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, +77013656467, E-mail: akimbay.sh@gmail.com

Ежегодно в Казахстане выделяется в атмосферу около 5-7 миллионов тонн загрязняющих веществ, около трети из которых относятся к транспортному средству. Кроме того, избыточное загрязнение воздушного бассейна городов республики вызвано загрязняющими веществами металлургическими, нефтеперерабатывающими и химическими заводами, автомобильным и железнодорожным транспортом. Вредные вещества, выделяемые автотранспортом, отрицательно влияют на воздух, водохранилища, почву и биосферу планеты. В настоящее время автомобильный двигатель потребляет около 3 килограммов атмосферного кислорода при сжигании литров бензина на 1 кг. Каждый автомобиль доставляет 60 м<sup>3</sup> газа в час, а грузовик производит 120 м<sup>3</sup> газа. Эти вещества очень опасны для живых организмов и решения проблем.

Целью данной статьи является математическое и численное моделирование процессов переноса в нейтрализаторе автомобилей с современным языком программирования и современными вычислительными технологиями. Решение такой проблемы вносит особый вклад в автомобильные выхлопные газы. Задача очистки выхлопных газов состоит в том, чтобы исследовать, то есть каталитическое окисление выхлопных газов в автомобильном нейтрализаторе. Математическая модель представляет собой систему дифференциальных уравнений. Система уравнений решается с помощью вычислительной машины в автомобильном нейтрализаторе.

**Ключевые слова:** нейтрализатор, каталитический нейтрализатор, итерационный метод, метод прогонки.

## 1 Introduction

Automobiles are the main sources which pollutes the atmosphere. Automobile car is in the first location by transportation volume among the all developed countries. However, due to the increased speed and volume of automation, there are number of important issues related to the environment and society's vulnerability to this process. Every year, the atmosphere in Kazakhstan is polluted about 5-7 million tons of pollutants, about a third of which belong to the vehicle. Also excess pollution of the air basin of the cities of the Republic is caused by pollution of pollutants by metallurgy, oil refining and chemical industry factories, automobile and railway transport. The harmful substances emitted by motor transport adversely affect the air, water reservoirs, soil and the planet's biosphere. At the present car engine consumes about 3 kilogram of atmospheric oxygen when liters of gasoline per 1 kg is burned. These substances are very dangerous for living organisms. Most of them are gases, oil products and dust that emit toxic and non-toxic components containing organic and inorganic substances, chlorides, wastes in the use and production of cars. In this way, due to the increase in traffic, in the environment harmful components are constantly accumulating and increasing its impact. Combustion products of automobile oil are collected on the Earth's surface and spread to the whole territory of the community and enter the body of people's respiratory tract. It is a very difficult task to ensure that the toxicity of spent gases is low. To address it, it is necessary to mobilize joint efforts of industrial operation and traffic regulation services.

The initial state of pollution reduction is the technical condition of the engine. The heavily engineered engine consumes less fuel and also reduces the air pollution level. However, focus



should be on proper functioning of the fuel equipment and the connecting system.

## 2 Review of literature

Currently, research and experimental works on the improvement of engines are carried out in the following areas: improvement of the combustion system, change of the fuel cycle in the engine cylinder, installation of additional equipment, reduction of harmful particles in the extracted gases. In this regard, the use of electronic ignition, which is characterized by high stability and high degree of ignition burner, makes significant changes (Yershin, 1997: 5-9).

The most effective way to reduce atmospheric emissions is the creation of closed, non-waste technological cycles, including the circulation of gases. Iodine wasteless, technology; is understood; ideal model, which in most cases can not be fully realized, but with the development of technical progress, it is possible to approach it more and more. Now, a waste-free technological cycle represents a combination of organizational and technical measures, technological processes, equipment, materials that ensure maximum and comprehensive use of raw materials and allow minimizing the negative impact of: waste on the environment. Currently, such events are often associated with enormous technological complexity and high costs, therefore, one of the main directions is the development and implementation of gas purification systems. At the same time, the main task of gas purification is to bring the content of toxic impurities to the maximum permissible concentrations established by sanitary standards, by separating it from gas or turning into a harmless condition of the pollutant.

Methods for reducing the intoxication can be divided into 4 major groups: special regulation and modification of their systems of design, work process, production technology and internal combustion engines; use of another type of fuels or change of physical and chemical properties of fuels and lubricants; purification of exhaust gases from toxic components; replacement of engines with less toxicity.

Bearing in mind the good qualities of all of the above structural changes, it is important to recognize that they do not effectively solve the problem. Therefore, it is very important to use different types of neutralizers to clean the toxicity of the exhaust gases.

Neutralizer is a small reactor for combustion of flammable products to reduce the emissions of extracted gases and to separate nitrogen oxides, nitrogen and oxygen. It is possible to note the thermal, catalytic, liquid, mechanical and compound types of neutralizer. The process of turning into carbon dioxide in the thermoelectric is accompanied by the combustion of unsaturated hydrocarbons and aldehydes in the cylinder. Oxidation reaches 500-6000 °C and double hydrocarbon, while carbon dioxide decreases 2-3 times (Yershin, 1997: 10-11).

## 3 Materials and methods

### 3.1 Mathematical model

There will be considered the system of non-stationary temperature and concentration equations in partial derivatives, that describes the processes of warm and mass transfer in of motor-car neutralizer:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{U}{\varepsilon} \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{U}{\varepsilon} \frac{\partial C}{\partial x} = a \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \rho\beta a C \end{cases} \quad (1)$$

$T$  - temperature,  $C$  - concentration,  $a$  - thermal conductivity coefficient,  $\rho$  - density,  $\varepsilon$  - characteristic of a porous environment.

$$Q = q\rho\beta a C$$

Initial conditions:

$$T|_{t=0} = 0, \quad C|_{t=0} = 1$$

Boundary conditions:

$$T|_{x=0} = 1, \quad C|_{x=0} = 1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} T|_{x=L} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} T|_{x=L} = 0$$

### 3.2 The numerical method of task solution

To solve numerically the equation system by iterative method there is used the explicit scheme (Samarskiy, 1989: 38-47):

$$\begin{aligned} \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + \frac{U}{\varepsilon} \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} &= D \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \rho\beta a C_i^n \\ C^{n+1} = C_i^n + \Delta t &\left( D \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{\Delta x^2} - \rho\beta a C_i^n - \frac{U}{\varepsilon} \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ i &= \overline{1, L-1} \end{aligned}$$

$C_i^n = 1$  - initial condition for concentration.

$C_0^{n+1} = 1$  - the first boundary condition for concentration.

$$\frac{C_L^n - C_{L-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$C_L^n = C_{L-1}^n$  - the second boundary condition for concentration.

$$\begin{aligned} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + \frac{U}{\varepsilon} \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} &= a \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + q\rho\beta a C_i^n \\ T_i^{n+1} = T_i^n + \Delta t &+ \left( a \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{\Delta x^2} + q\rho\beta a C_i^n - \frac{U}{\varepsilon} \frac{T_{i+1}^n - T_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ i &= \overline{1, L-1} \end{aligned}$$

$T_i^n = 1$  - initial condition for temperature.

$T_0^{n+1} = 1$  - the first boundary condition for temperature.

$$\frac{T_L^n - T_{L-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$T_L^n = T_{L-1}^n$  - the second boundary condition for temperature.

#### 4 Results and discussion

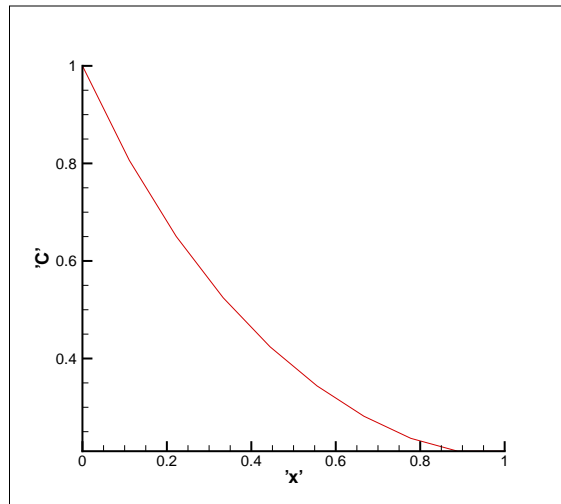


Figure 1 – Concentration profile (explicit scheme, the iterative method)

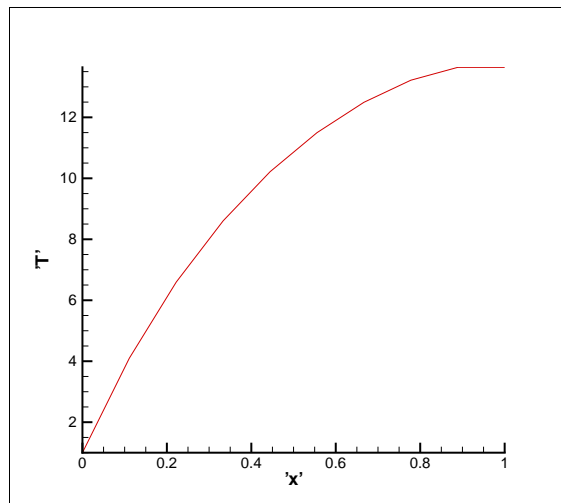
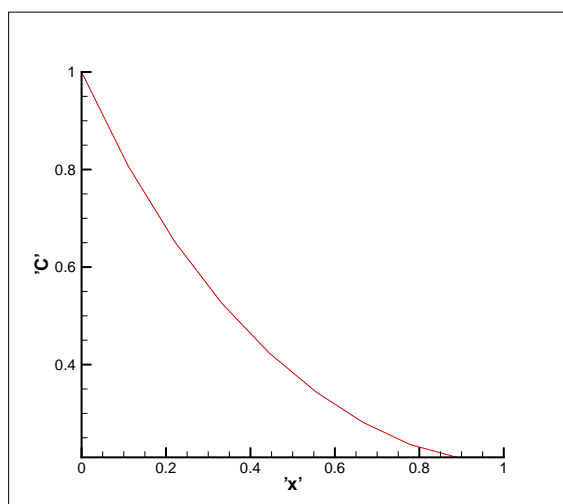
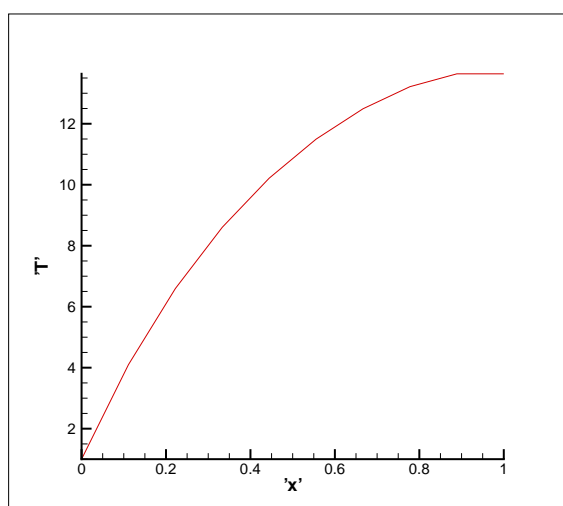


Figure 2 – Temperature profile (explicit scheme, the iterative method)



**Figure 3** – Concentration profile (implicit scheme, the raising method)



**Figure 4** – Temperature profile (implicit scheme, the raising method)

Based on the difference schemes and methods described above, numerical calculation algorithms have been developed:

- according to the explicit scheme
- according to the implicit scheme

Numerical calculation programs are developed in the modern C ++ programming language.

The results of the numerical calculations shown in the figures indicate a good qualitative and quantitative correspondence. Thus, the constructed mathematical and numerical simulation showed the correct results.

## 5 Conclusion

To make the usual human living environment, not to let the negative anthropogenic influence, it is necessary to ensure of normal ecological status in the country And then there is possible to make decision based on regulation of environment's quality.

In this article is to study the mathematical and numerical modeling of car exhausting gas cleaning processes, to create and develop an algorithm of computations, to make program code in the C ++ programming language (Lee, 1999: 168-199).

The result of the work is the program code written in the programming language C ++, most explicitly describing the process of gas purification. All modules are debugged, compiled and implemented in a single environment.

The given numerical solution of equation system was implemented on C++ programming language and the result was taken in TECPLOT graphical editor.

## References

- [1] *Lee P.A. and Phillips C. (1999) The Apprentice C++ Programmer.* New York: International Thompson Computer Press, p. 919.
- [2] *SamarSKIY A.A. and Gulin A.B. (1989) Chislennyye metody [Numerical methods].* Moskow: Nauka, p.429
- [3] "Tecplot guide", <http://jamesettsherman.blogas.lt/tecplot-руководство-61.html>
- [4] *Yershin Sh., Zhabasbayev U. and Balakayeva G. (1997) Teoriya i raschet kataliticheskikh apparatov [Theory and calculation of catalytic devices].* Almaty, p. 227.

IRSTI 81.93.29

## Creating the dataset of keywords for detecting an extremist orientation in web-resources in the Kazakh language

Bolatbek M.A., al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, +77056664007, e-mail: bolatbek.milana@gmail.com  
Mussiraliyeva Sh.Zh., al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, +77059011283, e-mail: mussiraliyevash@gmail.com  
Tukeyev U.A., al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Kazakhstan, +77017106351, e-mail: ualsher.tukeyev@gmail.com

This paper is part of the research on creating semantic analysis models in web resources for defining an extremist orientation in the text. To solve this task a model was created, which consists of five stages: identifying websites of an extremist groups, preparing for data extraction, data extraction, data analysis and classification. This work presents the results of data analysis stage of above mentioned model. The purpose of this study is to identify keywords, often used by extremists, which will later be used to classify texts to "extremist" and "neutral" categories using machine learning methods. There is no such database for the Kazakh language. As the result of this study an experimental corpus and list of keywords in Kazakh language was created. The keywords were added to the database with various morphological variants. The program was built that checks for the presence of extremist keywords in the given input text and displays the words found.

**Key words:** extremist texts, term frequency, text classification, emotional scores.

### Создание базы данных ключевых слов, для определения экстремистской направленности в веб-контенте на казахском языке

Болатбек М.А., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, +77056664007, e-mail: bolatbek.milana@gmail.com  
Мусиралиева Ш.Ж., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, +77059011283, e-mail: mussiraliyevash@gmail.com  
Тукеев У.А., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан +77017106351, e-mail: ualsher.tukeyev@gmail.com

Данная работа является частью исследования создания моделей семантического анализа для определения экстремистской направленности в тексте. Для решения данной задачи была построена модель, которая состоит из пяти этапов: определение веб-сайтов экстремистских групп, подготовка к извлечению данных, извлечение данных, анализ данных и классификация. Данная работа представляет результаты этапа анализа данных указанной модели. Целью исследования является определение ключевых слов, часто используемых экстремистами, которые в дальнейшем будут использоваться для классификации текстов на «экстремистские» и «нейтральные» категорий с использованием методов машинного обучения. Для казахского языка не существует такой базы данных. В результате этого исследования был создан экспериментальный корпус и список ключевых слов на казахском языке. Ключевые слова были добавлены в базу данных с различными морфологическими вариантами. Была разработана программа, которая проверяет входной текст на наличие экстремистских ключевых слов и возвращает найденные слова.

**Ключевые слова:** экстремистские тексты, частота терминов, классификация текста, эмоциональные оценки

### Қазақ тілді веб-контенттегі экстремистік бағытты анықтауға арналған түйінсөздер мәліметтер қорын құру

Болатбек М.А., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77056664007, e-mail: bolatbek.milana@gmail.com

Мусылралиева Ш.Ж., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77059011283, e-mail: mussiraliyevash@gmail.com  
Тукеев У.А., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77017106351, e-mail: ualsher.tukeyev@gmail.com

Бұл жұмыс мәтіндегі экстремистік бағытты анықтау үшін веб-ресурстарды семантикалық талдау үлгілерін құру зерттеуінің бөлімі болып табылады. Аталған есепті шешу үшін бес кезеңнен тұратын үлгі құрылды: экстремистік топтардың веб-сайттарын анықтау, мәліметтерді алуға дайындық жүргізу, мәліметтерді алу, мәліметтерді талдау және жіктеу. Берілген жұмыс жоғарыда аталған үлгінің мәліметтерді талдау кезеңінің нәтижелерін көрсетеді. Жұмыстың мақсаты экстремистер жиі қолданатын және келесі кезеңдерде мәтінді “экстремистік” және “бейтарап” санаттарға машиналық оқыту әдістері көмегімен жіктеуде пайдаланылатын түйінсөздерді анықтау болып табылады. Қазақ тілі үшін мұндай сөздік жоқ. Зерттеу нәтижесі ретінде қазақ тіліндегі эксперименталдық корпус пен мәліметтер қоры құрылды. Түйінсөздер мәліметтер қорына бірнеше морфологиялық нұсқаларымен бірге енгізілді. Кіріс мәтінді экстремистік түйінсөздердің болуына тексеретін және табылған сөздерді қайтаратын бағдарлама құрылды.

**Түйін сөздер:** экстремистік мәтіндер, термин жиілігі, мәтінді жіктеу, эмоциялық ұпайлар

## 1 Introduction

The rapid development of the Internet and information technologies poses new challenges in the field of national security, as in the last decade terrorist organizations are oriented on the Internet space, where today there are up to 10000 extremist electronic platforms (Zhavoronkova, 2015: 30). Extremist organizations use social networks, blogs, forums, etc. for propaganda, attraction of new members, conducting ideological works, collecting money for the implementation of terrorist acts. Unfortunately, in recent years, Kazakhstanis have also joined the ranks of extremist organizations. According to the Foreign Ministry’s reports, to October 2017, about 500 Kazakhstanis left the country and joined the ISIS (Islamic State of Iraq and Syria), this number includes both the militants themselves and their wives and children (Information Portal of Kazakhstan, 2017).

In this regard, it becomes urgent to automatically monitor Internet resources in order to identify text messages of an extremist orientation. This problem can be presented in the form of a binary classification problem in which the texts of messages in social networks, blogs and other resources will play the role of the analyzed objects and solved with the help of machine learning methods (Ananyeva, 2016: 210). Such an approach requires the presence of a labeled corpus of texts (Cohen, 2014: 246-253) (Finlayson, 2014: 896–902) and a predefined set of analyzed characteristics, such as the results of a complete linguistic analysis, list of keywords, etc.

There is no database of extremist keywords for the Kazakh language. This paper is part of the research on creating semantic analysis models in web resources for defining an extremist orientation in the text. To solve this task a model was created, which consists 5 stages: identifying the websites of extremist groups, preparing to data extraction. data extraction, data analysis and data classifying. This work presents the results of data analysis stage of above mentioned model. The purpose of this study is to identify keywords, often used by extremists, which will later be used to classify texts to “extremist” and “neutral” categories using machine learning methods.

## 2 Literature review

Researchers proposed many methods for solving the problem of determining extremist orientation in the texts. Some of mentioned works are listed below.

The research (Scanlon, 2014: 10–25) presents methods for identifying and forecasting the recruitment activities of violent groups within extremist social media websites. Authors used naive Bayes models, logistic regression, classification trees, boosting, and support vector machines (SVM) to classify the forum posts in a 10-fold cross-validation experimental setup. They used data from the western jihadist website Ansar ALJihad Network, where authors employed a bag-of-words feature space by parsing each forum post in the corpus into a term-by-document matrix. This matrix of term frequency (tf) features was created using the RTextTools and tm text mining packages. The number of features was further reduced through stemming using the Porter Stemming Algorithm.

In the work (Enghin, 2015: 17–33) authors made an attempt to automatically detect radical content on Twitter. They used a machine learning approach that classifies a tweet as radical or non-radical. Features are based on the polarity of words, which is determined by using several dictionaries like Dictionary of Affect in Language (DAL) or WordNet which assigns each word a pleasantness score between 1 (negative) and 3 (positive). The experiments were conducted using a tool called Weka which is a suite of machine learning software written in Java. For experiments they used three different classifiers: Support Vector Machine (SVM), Naive Bayes and AdaBoost.

In the work (Johansson, 2016: 374–390) authors discussed the possibility of detecting violent extremism by identifying signs of warning behaviours in written text, such as "leakage", "fixation" and "identification". To detect linguistic markers signalling a leakage, it is proposed that predefined word lists of violent actions are used, and to extend such a predefined list of words using lexical databases such as WordNet. For linguistic markers of fixation, they proposed to simply count the relative frequency of key terms relating to named entities such as persons, organisations, etc. The proposed approach is based on simple lists of keywords, where a keyword can consist not only of single words, but also of multi-word units (e.g., the bigram "Al-Shabab"). The monitoring tool performs a keyword search in the incoming data for occurrences of the keywords included in the markers that already have been described. For each marker, the monitoring tool outputs a list of Uniform Resource Identifiers (URIs) and the frequency of occurrence of the marker in the document. These lists of URIs are then input to an analysis script where it is possible to define how many or which markers that have to be triggered in order for an URI to be shown as potentially interesting to the user of the system.

The work (Azizan, 2017: 691–698) presents the approach to sense user's act leading to terrorism based on the tweets they shared at the Tweeter platform. In this research the data will be collected through Twitter streaming API. The data extracted based on the user criteria, for instance by matching a keyword "terrorist". In the next stage data gathered is cleaned by filtering and removing all tags, hashtags, spelling errors, non-english words. Next, data is tagged with the input and output labels. Then the data is classified into sentiment polarity which are positive, negative and neutral class by using machine learning methods. In mapping sentiwordnet is used. It consists of english words which have been attributed to a positive or negative score. Tweet sentence is compared and calculated the score by referring



to sentiwordnet dictionary. In sentiment classification sentence is categorized into the classes of positive, negative and neutral using Naive bayes algorithm.

In the study (Devyatkin, 2017:188–190) authors analyzed two basic groups of features that distinguish extremist texts, which are lexical features, and psycholinguistic and semantic features. Authors created a text corpus for the research. The corpus includes 493 manually collected texts (650 000 words), 368 of them are extremist texts. In experiments they used three approaches for lexical feature representation: bag of words and collocations, frequency dictionary and word embedding. For creation of word embeddings the fastText was used. Psycholinguistic and semantic features were extracted from Russian text corpus. The values of psycholinguistic features are estimated on the basis of morphology of lexical units of the analyzed texts. Values of semantic features are calculated as frequencies of semantic roles in the corpus. Authors divided dataset into two parts: texts represented using by "bag of words and collocations" model, and texts represented using word embedding, both of them included extremist and neutral texts. Authors trained and tested classifiers using these parts of the dataset. Classification quality was estimated by calculating F1-score during 5-fold cross-validation. For classification authors applied multinomial naive Bayes, logistic regression, linear SVM, random forest, gradient boosting. For this experiment authors used open source library of machine learning methods - Scikit-learn - where all above methods are realized.

The purpose of the study (Targeir, 2013: 1–27) is to explore which words and expressions are typical for extremist forums. Authors analysed vocabularies of forums in English, Norwegian, and German. In this thesis, authors found frequent and characteristic words by means of Global Term Frequency (GTF) and pairs of co-occurring words by means of odds ratio in different extremist forums. They compared normalized GTF (NGTF) of words in two forums to find out where they are used most. Words used in only one of two forums are found as well. They found the GTFs for words written by five of the ten most active authors in each forum, and they found words that one author writes, while the other of ten most active authors does not write.

Authors of the paper (Chen, 2012: 3–105) have developed various multilingual data mining, text mining, and web mining techniques to perform link analysis, content analysis, web metrics analysis, sentiment analysis, authorship analysis, and video analysis in our research. Dark Web Forum Portal system contains three components: data acquisition, data preparation, and system functionality. At the first stage spidering programs are developed to collect the web pages from online forums that contain jihadist-related content identified by domain experts. At the Data Preparation stage forum parsing programs are developed to extract the detailed forum data from the raw HTML web pages and store it in a local database. The Dark Web Forum Portal is implemented using Apache Tomcat, and the database is implemented using Microsoft SQL Server 2008. For forum statistics analysis, Java applet-based charts are created to show the trends based on the numbers of messages produced over time.

### 3 Materials and methods

To solve the problem of detecting extremist orientation in texts a model was constructed, which consists five stages: identifying websites of an extremist groups, preparing for data extraction, data extraction, data analysis and classification. According to this model, the first stage determines the web resources which people often use to exchange extremist messages

using search engines by terrorist vocabulary (group names, leader names, special keywords, etc.). In our case they are social networks like Youtube, vk, blogs, forums and news sites. The second stage is preparing for the extraction of data (registration on forums, select suitable proxy servers). As noted above, there is no database of extremist keywords in the Kazakh language. For this reason, this research firstly needs the corpus of texts written in Kazakh. In order to create the corpus, comments and messages from above mentioned web-resources were downloaded. The words, which in foreign languages, have been translated using the Google Translator (Google Online Translator, 2018). Data downloaded from web resources were collected to a text file. At the moment, there are 150 texts in this file, 80 of them are texts with extremist orientation, the remaining texts refer to the "neutral" category, which contain a comment condemning extremism and news texts.

To determine most frequent words researchers use different methods. For example, the method of Part of Speech Tagging is used in (Scrivens, 2016: 104-107), this method highlights frequently occurring words and divides the text into groups by parts of speech, for example, nouns, verbs, adverbs, etc. This method is convenient to use when researchers focus on certain parts of speech, for example, in the above work, researchers only consider nouns, because according to the results of the study, extremist keywords in English are in most cases are nouns. In our case, this method is not suitable, since visual inspection showed that most keywords in the Kazakh language are divided by parts of speech. For this reason, in this research the TF-IDF method was used. This method is used to evaluate the importance of the word. For finding words that are typical to a document, which in this case corresponds to a forum message, one finds the term frequency (TF) of a term (in the entire document inverse document frequency (IDF). The product of TF and IDF we call TF-IDF (Targeir, 2013: 23).

The term frequency  $tf(t, d)$ , the simplest choice is to use the raw count of a term in a document, i.e. the number of times that term  $t$  occurs in document  $d$ .

The inverse document frequency is a measure of how much information the word provides, that is, whether the term is common or rare across all documents. It is the logarithmically scaled inverse fraction of the documents that contain the word, obtained by dividing the total number of documents by the number of documents containing the term, and then taking the logarithm of that quotient. IDF defines using (1) (Wikipedia, 2017).

$$idf(t, D) = \log \frac{|D|}{|\{d_i \in D | t \in d_i\}|} \quad (1)$$

where  $|D|$  – total number of documents in the corpus;

$|\{d_i \in D | t \in d_i\}|$  – the number of documents where the term  $t$  appears.

Then TF-IDF is calculated as:

$$tf-idf(t, d, D) = tf(t, d) * idf(t, D) \quad (2)$$

Using (2) the values of TF-IDF of keywords were calculated. Results are given in the decreasing order in Table 2. In the stage of analyzing most frequent words, the following interesting facts were revealed:

1. Kazakh letters are often replaced by Cyrillic, for example, "sogys" (соғыс) instead of "sog'ys" (соғыс), "tozak" (тозақ) instead of "tozaq" (тозақ);

2. Using the terms in Arabic written by Cyrillic, for example, kafir (non-believer), muzhahid (participant in jihad), martyr (Muslim who died for religion), hijra (migration from one locality to another);

3. Frequent use of bigrams, for example, hijra қулу (хижра қылу), fard kefair (фард кефайр), daulatul Islam (даулатуль ислам), jihad jasau (жихад жасау), etc .;

4. One word can be written in several variants, for example, jihad (жихад), jihad (жихад), jihat (жихат), djihat (джихат).

Once the keywords have been defined, their basics have been written into the SQLite Expert Personal 3.5.46.2466 database (SQLite Expert Database, 2018), we are interested only in the basics not in the endings, because basics reduce the efficiency of the program (reduces the time for searching for possible word variants), and we will consider different versions of the word with different endings as one word, for example, the words "jihad" (жихад), "jihadtyn'" (жихадтың), "jihadqa" (жихадқа), "jihadtan" (жихадтан), "jihadta" (жихадта) will be considered as the same word. As mentioned above, one word may have several variants of writing, so words were entered into the database with all possible variants. Possible morphological variants of words were determined by studying the content of web forums, blogs.

Next, a program was built that checks for the presence of extremist keywords in the entered text and displays the words found. The program was developed in the integrated development environment Visual C# (Integrated development environment Visual C, 2017). At the first stage, morphological analysis is performed to incoming text, where for each word morphological labels such as base and ending are determined. Since we are no longer interested in endings, we will only consider the basics. Next, a query to the database is made, where each word of the incoming text is searched in the database. If the base is found in the database, it displays as an output text, otherwise it is skipped and the next word is searched.

## 4 Results

Examples of the revealed keywords are presented in Table 1.

**Table 1** – Examples of most frequent used words

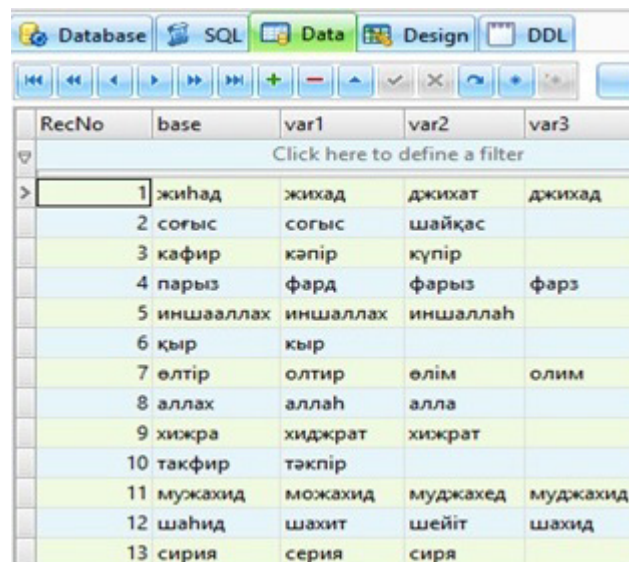
Variant 1	Frequency	Variant 2	Frequency	Variant 3	Frequency
allah (аллах)	21	alla (алла)	24	allah (аллах)	8
jihad (жихад)	29	djihad (джихад)	19	jihad (жихад)	9
sog'ys (соғыс)	13	sogys (соғыс)	6		
ka'pir (кәпір)	4	kafir (кафир)	2		
tozaq (тозақ)	4	tozak (тозак)	2		

F-IDF values of frequent words are given in Table 2. The table of keywords in the database is presented in Figure 1 These words can be used to improve the reliability of determining the extremist orientation in the text. In the future it is planned to assign emotional tones to the revealed words, which will later be used to create algorithms and software for analyzing the tonality of the text (sentiment analysis).

**Table 2**– TF-IDF values of used words

Keyword	TF-IDF value
allah (аллаһ)	25.62
jihad (жихад)	22.62
alla (алла)	19.92
djihad (джихад)	17.1
allah (аллах)	16.72
sog'ys (соғыс)	14.3
jihad (жихад)	11.43
sogys (соғыс)	8.4
ka'pir (кәпір)	7.98
tozaq (тозақ)	6.28
tozak (тозак)	5.88
kafir (кафир)	3.4

For the English language there are such dictionaries as, AFINN, General Inquirer, Senti-WordNet, SentiStrength, WordNet, which are used for sentiment analysis. For example, in this paper, the authors present the development of a bilingual Sentiment Analysis Lexicon (BiSAL) for the cyber security domain, which consists of a Sentiment Lexicon for Sensei (SentiLEN, 279 words) and a Sentiment Lexicon for ARabic (SentiLAR, 1019 words ) that can be used to develop mining and sentiment analysis systems for bilingual textual data from Dark Web forums (Al-Rowaily, 2015: 53-62).



RecNo	base	var1	var2	var3
1	жихад	жихад	джихат	джихад
2	соғыс	соғыс	шайқас	
3	кафир	кәпір	күпір	
4	парыз	фард	фарыз	фарз
5	иншааллах	иншаллах	иншаллах	
6	қыр	қыр		
7	өлтір	олтир	өлім	олим
8	аллах	аллаһ	алла	
9	хижра	хиджрат	хиджрат	
10	такфир	тәкпір		
11	мужахид	можахид	муджахед	муджахид
12	шаһид	шахит	шейіт	шахид
13	сирия	серия	сиря	

**Figure 1** - List of keywords in the database

The program constructed is working effectively, it finds all extremist keywords from database in the given input text. The program is being further development to classify given texts into "extremist" and "neutral" categories.

## 5 Conclusion

During the study, a corpus and key vocabulary were constructed for training and testing machine learning methods to determine the extremist orientation in the Kazakh texts. However, the size of the corpus is now small and work on expanding it is continuing. In the future it is planning to add a sentiment polarities between  $[-1;1]$ , which will be used during sentiment analysis. The next stage of the study is to classify the incoming texts using machine learning methods, such as the Bayesian method, support vector machine (SVM), random forest and logistic regression.

## References

- [1] Al-Rowaily Kh., Abulaish M., Haldar N., Al-Rubaian M., "BiSAL – A bilingual sentiment analysis lexicon to analyze Dark Web forums for cyber security," *Digital Investigation: The International Journal of Digital Forensics & Incident Response archive* 14 (2015): 53–62.
- [2] Ananyeva M. I., Deviatkin D. A., Kobozeva M. V., Smirnov I. V., "Lingvostatisticheskii analiz tekstov ekstremistskoi napravlenosti [Lingua-statistic analysis of extremist texts]" (paper presented at the proceedings of International Conference on Situational Centers and Information-Analytical System 4i Class for Monitoring and Security Tasks, Russia, TsarGrad, November 21-24, 2015-2016).
- [3] Azizan S.A., Aziz I.A., "Terrorism detection based on sentiment analysis using machine learning," *Journal of Engineering and Applied Sciences* 12(3)(2017):691–698.
- [4] Chen Hsinchun, *Dark Web Exploring and Data Mining the Dark Side of the Web*(Springer, 2012), 3–105.
- [5] Cohen K., Johansson F., Kaati L. and Mork, Clausen J., "Detecting Linguistic Markers for Radical Violence in Social Media, Terrorism and Political Violence," *Terrorism and Political Violence* 26(2014): 246–253.
- [6] Devyatkin D.A., Smirnov V., Ananyeva V.I., Kobozeva M.V., "Exploring linguistic features for extremist texts detection (on the material of Russian-speaking illegal texts)" (paper presented at 2017 IEEE International Conference on Intelligence and Security Informatics (ISI), Beijing, China, July 22-24, 2017).
- [7] Enghin Omer, "Using machine learning to identify jihadist messages on Twitter" (Independent thesis, Uppsala University, 2015).
- [8] Finlayson M.A., Halverson J.R., Corman S.R., "The N2 corpus: A semantically annotated collection of Islamist extremist stories" (paper presented at the Proceedings of the Ninth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC'14), Iceland, Reykjavik, May 26-31, 2014).
- [9] "Google Online Translator." Accessed January 12, 2018, <https://translate.google.com/#ru/kk/>.
- [10] Information Portal of Kazakhstan. "Okolo 500 kazakhstanstsev voiuuit v Sirii i Irake na storone IGIL. [About 500 Kazakhstanis are fighting in Syria and Iraq on the side of ISIS]." Accessed February 10, 2018, <http://today.kz/news/mir/2017-10-31/753466-okolo-500-kazahstantsev-voyuyut-v-sirii-i-irake-na-storone-igil/>.
- [11] "Integrated development environment Visual C." Accessed December 17, 2017, <https://www.visualstudio.com>.
- [12] Johansson F., Kaati L., Sahlgren M., "Detecting Linguistic Markers of Violent Extremism in Online Environments," in *Combating Violent Extremism and Radicalization in the Digital Era*, ed. Khader, Majeed (Hershey PA: Information Science Reference, 2016), 374–390.
- [13] Scanlon J.R., "Automatic Detection and Forecasting of Violent Extremist Cyber-Recruitment" (Master thesis, University of Virginia, 2014).
- [14] Scrivens R., Frank R., "Sentiment Based on the classification of radical text on the Web" (paper presented at the Proceedings of 2016 European Intelligence and Security Informatics Conference (EISIC), Uppsala, Sweden, August 17-19, 2016).
- [15] "SQLite Expert Database." Accessed January 15, 2018, [www.sqliteexpert.com](http://www.sqliteexpert.com).
- [16] Targeir A., Perera S., "Mapping Extremist Forums using Text Mining" (Master thesis, University of Agder, 2013).

- [17] Wikipedia. "tf-idf." Accessed November 12, 2017, <https://ru.wikipedia.org/wiki/TF-IDF>.
- [18] Zhavoronkova T.V., "Ispol'zovanie seti Internet terroristicheskimi i ekstremistskimi organizatsiiami [Usage of the Internet by terrorist and extremist organizations]." *Orenburg State University bulletin* 3 (178): 30.

4-бөлім

Раздел 4

Section 4

Қолданылмалы  
математикаПрикладная  
математикаApplied  
Mathematics

МРНТИ 50.07.05; 27.35.14

**Применение параллельных вычислительных технологий для моделирования процесса отрыва течения за обратным уступом в канале с учетом сил плавучести**

Исахов А.А., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан, +77056108050, E-mail: alibek.issakhov@gmail.com  
Абылкасымова А. Б., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан  
Сақыпбекова М., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан

В работе приводятся численные решения двумерного ламинарного течения за обратным уступом в канале с учетом сил плавучести. Для описания данного процесса используется двумерное несжимаемое уравнение Навье-Стокса. Данная система численно решается методом расщепления по физическим параметрам, который аппроксимируется с помощью метода контрольного объема. Полученное уравнение Пуассона, удовлетворяющее дискретному уравнению неразрывности, решается итерационным методом Якоби на каждом шаге по времени. Полученные численные решения ламинарного течения за обратным уступом сравниваются с численными результатами других авторов. Данный численный алгоритм полностью распараллеливается с помощью различных геометрических декомпозиций (1D, 2D и 3D). В работе были сделаны предварительный теоретический анализ эффективности различных методов декомпозиции расчетной области и реальные вычислительные эксперименты для данной задачи, и был определен лучший метод декомпозиции области. В дальнейшем проверенная математическая модель и численный алгоритм с лучшим методом декомпозиции можно будет применить для различных сложных течений с учетом сил плавучести.

**Ключевые слова:** метод декомпозиции области, обратный уступ, метод расщепления по физическим параметрам, разделение и воссоединение потоков, отрывное течение, силы плавучести.

**Параллельді есептеулер технологиясын қолдану арқылы арнадағы артқы бөліктегі ағындарды бөлу процесін ауырлық күштерін ескере отырып процессті модельдеу**

Исахов А.А., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77056108050, Электрондық пошта: alibek.issakhov@gmail.com  
Абылкасымова А. Б., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы  
Сақыпбекова М., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы

Жұмыста арнадағы артқы жағындағы артиллериялық ламинарлы ағынның ауырлық күштерін ескере отырып сандық шешімдері ұсынылған. Бұл процесті сипаттау үшін екі өлшемді сығылмайтын Навье-Стокс теңдеуі қолданылады. Бұл жүйе физикалық параметрлер бойынша ыдырату әдісі бойынша сандық түрде шешіледі, ол ақырлы көлемдік әдісімен аппроксимацияланады. Үздіксіздік дискретті теңдеуін қанағаттандыратын Пуассон теңдеуі әр кезеңде Якоби итеративті әдісімен шешіледі. Алдыңғы қадамдағы ламинарлы ағынның сандық шешімдері басқа авторлардың сандық нәтижелерімен салыстырылады. Бұл сандық алгоритм әртүрлі геометриялық декомпозициялар (1D, 2D және 3D) көмегімен толығымен параллельленеді. Есептік доменді декомпозицияның әртүрлі әдістерінің тиімділігін алдын ала теориялық талдау және осы мәселе бойынша нақты есептеу эксперименттер жасалды және доменнің декомпозицияның ең жақсы әдісі анықталды. Келешекте үздіксіз декомпозиция әдісімен дәлелденген математикалық модель және сандық алгоритм әртүрлі күрделі ағындар үшін ауырлық күштерін ескере отырып қолдануға болады. **Түйін сөздер:** Доменді декомпозиция әдісі, артқа қадам, физикалық параметрлер бойынша бөліну әдісі, ағындарды бөліп алу және қайта қосу, детальды ағыны, ауырлық күші.

### **Application of parallel computing technologies for modeling the flow separation process behind the backward facing step in the channel with the buoyancy forces**

Issakhov A.A., al-Farabi Kazakh National University,

Almaty, Kazakhstan, +77056108050, E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

Abylkassymova A., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

Sakypbekova M., al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

The paper presents numerical solutions of the two-dimensional laminar flow behind the backward facing step in the channel with the buoyancy forces. A two-dimensional incompressible Navier-Stokes equation is used to describe this process. This system is solved numerically by the projection method, which is approximated by the control volume method. The resulting Poisson equation satisfying the discrete equation of continuity is solved by the Jacobi iterative method at each time step. The numerical solutions of the laminar flow behind the backward facing step are compared with the numerical results of other authors. This numerical algorithm is completely parallelized using various geometric decompositions (1D, 2D and 3D). Preliminary theoretical analysis of the various decomposition methods effectiveness of the computational domain and real computational experiments for this problem were made and the best method of domain decomposition was determined. In the future, a proven mathematical model and numerical algorithm with the best decomposition method can be applied for various complex flows with the buoyancy forces.

**Key words:** domain decomposition method, backward facing step, projection method, separation and reunion of flows, separated flow, buoyancy forces.

## **1 Введение**

Во многих течениях, представляющий практический интерес, как разделения течения, из-за внезапного расширения геометрия с последующим повторным присоединением, является обычным явлением. Существование разделения потока и область рециркуляции оказывает значительное влияние на производительность теплопередающих устройств, например, охлаждающее оборудование в электротехнике, охлаждающие каналы лопаток турбин, камеры сгорания и многие другие поверхности теплообменника, которые появляются в оборудовании.

## **2 Обзор литературы**

Много работ посвящены по движению жидкости с разделением и воссоединением потоков без учета сил плавучести. Важность данного процесса говорит о количестве



публикаций, где особое внимание уделялось построению оборудования (Abbott and etc., 1962; Sebanr, 1964; Goldsteinr, 1970) и разработке экспериментальных и теоретических методов для детального изучения течений с областями разделения (Durst and etc., 1971; Gosmana and etc., 1974; Kumara, 1980). Обширный обзор по изотермическим потокам в течениях жидкости даются в работах (Armaly and etc., 1980; Eaton and etc., 1981; Simpson, 1981). Теплообмен в потоках были исследованы многими авторами, как Aung (Aung, 1983; Aung, 1983), Aung и др. (Aung and etc., 1985), Aung и Worku (Aung and etc., 1986), Sparrow и др. (Sparrow and etc., 1984; Sparrow and etc., 1987) и Sparrow и Chuck (Sparrow and Chuck, 1987). Однако опубликованные работы по этой теме не учитывает, силы плавучести на поток течения или характеристики передачи тепла. Эти эффекты становятся значительными в режиме ламинарного течения, где скорость относительно низкие, и когда разность температур относительно высокая. Ngo и Byon (Ngo and etc., 2015) изучали влияние местоположения нагревателя и размера нагревателя в двумерной квадратной полости с использованием метода конечных элементов. Oztop и Abu-Nada (Oztop and etc., 2008) численно исследовали естественную конвекцию в прямоугольных оболочках, частично нагретых от боковой стенки методом конечных объемов. В данной работе рассматривается влияния сил плавучести на поток и теплопередающих характеристик в отдельных потоках. Численные решения для ламинарного смешанного конвективного потока воздуха ( $Pr=0,7$ ) в вертикальном двумерном канале с обратным уступом, обеспечивающие поддержание эффекта плавучести изображено на рисунке 1. Численные результаты представляющий интерес, такие как скорость и распределения температуры, длины повторной привязки и коэффициенты трения представлены с целью иллюстрирующие влияние силы плавучести на эти параметры.

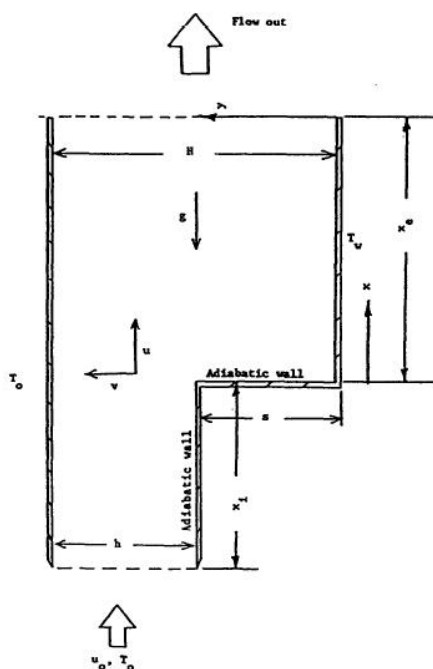


Рисунок 1 – Схематическое представление течения за уступом

### 3 Математическая постановка задачи течения жидкости за уступом с учетом сил плавучести

Рассмотрим двумерный ламинарный конвективный поток в вертикальном канале с внезапным расширением за обратным шагом высоты  $s$ , как показано на рисунке 1. Прямая стенка канала поддерживается при равномерной температуре, равной температуре входного воздуха  $T_0$ . Ступенчатая стенка ниже по этапу нагревается до однородной температуры, которая может быть отрегулирована до любого желаемого значения  $T_w$ . Верхняя часть ступенчатой стенки и обратная сторона устанавливается как адиабатическая поверхность. Впускная длина канала  $x_i$  и выходная нижняя длина канала  $x_e$  имеют соответствующие размеры. Эти длины считаются бесконечными, но область вычисления ограничена длиной  $L_e = x_e + x_i$ . Меньшая секция канала перед выступом имеет высоту  $h$ , а большая секция ниже ступени имеет высоту  $H = h + s$ . Воздух течет вверх по каналу со средней скоростью  $u_0$  и равномерной температурой  $T_0$ . Гравитационное ускорение  $g$  в данной задаче рассматривается, что действует вертикально вниз.

Для описания данной физической задачи используются предположения о постоянных свойствах, и используется приближение Буссинеска. Данная система уравнений в безмерной форме запишется в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr Re} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (4)$$

Безразмерные параметры в приведенных выше уравнениях определяются формулой:

$$U = u/u_0, \quad V = v/u_0, \quad X = x/s, \quad Y = y/s,$$

$$\theta = (T - T_0)/(T_w - T_0), \quad P = p/\rho_0 u_0^2,$$

$$Pr = \nu/\alpha, \quad Re = u_0 s/\nu, \quad Gr = g\beta(T_w - T_0) s^3/\nu^2.$$

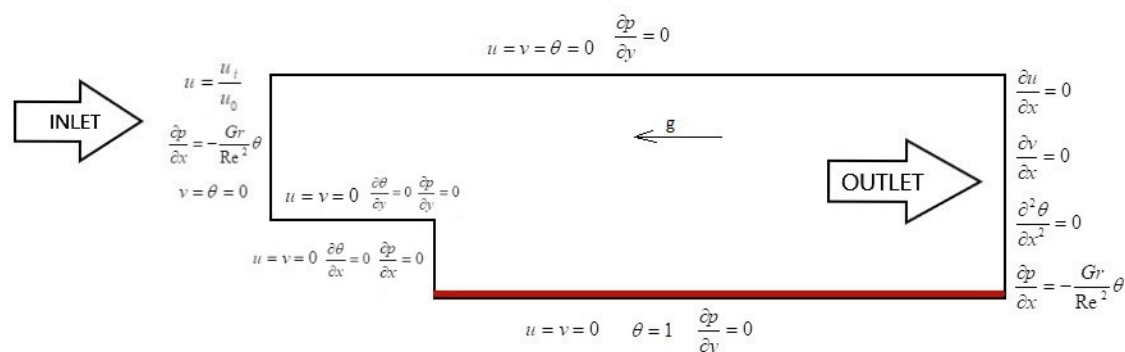


Рисунок 2 – Граничные условия

Температурная диффузия  $\alpha$ , кинематическая вязкость  $\nu$  и коэффициент теплового расширения  $\beta$  оцениваются при температуре пленки  $T_f = (T_0 + T_w)/2$ .

Граничные условия (Рисунок 2):

(а) Входные условия: В точке  $X = -X_i$  и  $1 \leq Y \leq H/s$ :  $U = u_i/u_0$ ,  $V = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{Gr}{Re^2}\theta$ .

где  $u_i$  - локальное распределение скоростей на входе, которое принимается как имеющее параболический профиль и  $u_0$  средняя скорость впуска; то есть  $u_i/u_0$  дается формулой

$$u_i/u_0 = 6[-y^2 + (H + s)y - Hs]/(H - s)^2$$

(b) Выходные условия: В точке  $X = X_e$  и  $0 \leq Y \leq H/s$ :  $\partial U/\partial X = 0$ ,  $\partial^2\theta/\partial X^2 = 0$ ,  $\partial V/\partial X = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{Gr}{Re^2}\theta$ .

(c) на верхней стенке: В точке  $Y = H/s$  и  $-X_i \leq X \leq X_e$ :  $U = 0$ ,  $V = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ .

(d) на стенке верхней ступени: В точке  $Y = 1$  и  $-X_i \leq X < 0$ :  $U = 0$ ,  $V = 0$ ,  $\partial\theta/\partial Y = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ .

(e) на стенке нижней ступени: В точке  $X = 0$  и  $0 \leq Y \leq 1$ :  $U = 0$ ,  $V = 0$ ,  $\partial\theta/\partial X = 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ .

(f) на стенке ниже ступени: В точке  $Y = 0$  и  $0 \leq X \leq X_e$ :  $U = 0$ ,  $V = 0$ ,  $\theta = 1$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ .

Последнее слагаемое в правой части уравнения (2) представляет собой вклад силы плавучести. Длина нисходящего потока, из области вычисления была выбрана равной 70 шагам ( $X_e=70$ ). Верхняя длина расчетной области была выбрана  $x_i$  равной 5 шагам (т.е.  $X_i=5$ ), а профиль скорости на входной области была задана как параболический  $u_i/u_0 = 6[-y^2 + (H + s)y - Hs]/(H - s)^2$ , и его температура была выбрана как равномерная  $T_0$ .

#### 4 Материал и методы

Для численного решения данной системы уравнений используется схема расщепления по физическим параметрам (Chung, 2002; Issakhov, 2015; Issakhov, 2016). Уравнения аппроксимируются методом конечных объемов (Chung, 2002; Issakhov, 2011). На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии, и методом Рунге-Кутты четвертого порядка

вычисляется промежуточное поле скоростей (Issakhov, 2015; Issakhov, 2016). На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Якоби. На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления. На четвертом этапе вычисляются уравнения для температуры методом Рунге-Кутты четвертого порядка (Issakhov, 2015; Issakhov, 2016).

$$I. \quad \int_{\Omega} \frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\Delta t} d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} (\vec{u}^n \vec{u}^* - \frac{1}{Re} \nabla \vec{u}^*) n_i d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{Gr}{Re^2} \theta d\Omega,$$

$$II. \quad \oint_{\partial\Omega} (\nabla p) d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\nabla \vec{u}^*}{\Delta t} d\Omega,$$

$$III. \quad \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\nabla p,$$

$$IV. \quad \int_{\Omega} \frac{\theta^* - \theta^n}{\Delta t} d\Omega = - \oint_{\partial\Omega} (\vec{u}^n \theta^* - \frac{1}{Re Pr} \nabla \theta^*) n_i d\Gamma,$$

## 5 Алгоритм распараллеливания

Для проведения численного моделирования была построена вычислительная сетка с помощью программного комплекса PointWise. Поставленная задача запускалась на программном комплексе ITFS-МКМ с использованием высокопроизводительного кластера. Данный численный алгоритм полностью распараллеливается с помощью различных геометрических декомпозиций (1D, 2D и 3D). Геометрическое разбиение вычислительной сетки выбирается в качестве основного подхода параллелизации. В этом случае есть три различных способа обмена значений сеточной функции на вычислительных узлах одномерной, двумерной и трехмерной сетки. После стадии декомпозиции, когда на отдельных блоках выполняется построение параллельного алгоритма, осуществляется переход к отношениям между блоками, расчеты на которых будут выполняться параллельно на каждом процессоре. Для этой цели численное решение системы уравнения использовались явная схема, так как данная схема очень эффективна распараллеливается. Для того чтобы использовать метод декомпозиций в качестве метода распараллеливания данный алгоритм использует пограничные узлы каждого субдомена, в котором необходимо знать значение функции сетки, граничащей с соседними элементами процессора. Для достижения этой цели

в каждом вычислительном узле в фиктивных точках хранятся значения из соседних вычислительных узлов, и организовывается передача этих граничных значений, необходимых для обеспечения однородности расчетов для явных формул.

Передача данных осуществляется с использованием процедур библиотеки MPI (Karniadakis and etc., 2000). Прodelывая предварительные теоретические анализы эффективности различных методов декомпозиции расчетной области для данной задачи, мы будем оценивать время параллельной программы как время последовательной программы  $T_{calc}$ , разделенной на число используемых процессоров, плюс время передачи  $T_p = T_{calc}/p + T_{com}$ . В то время как передачи для различных способов декомпозиции можно приближенно выразить через объем пропускной способности:

$$T_{com}^{1D} = t_{send} 2N^2 x 2$$

$$T_{com}^{2D} = t_{send} 2N^2 x 4p^{1/2} \quad (5)$$

$$T_{com}^{3D} = t_{send} 2N^2 x 6p^{2/3}$$

где  $N^3$ - число узлов вычислительной сетки,  $p$  - количество процессоров (ядер),  $t_{send}$ - время отправки одного элемента (числа).

Следует отметить, что для различных способов декомпозиции затрата на передачу данных может быть представлена как  $T_{com}^{1D} = t_{send} 2N^2 x k(p)$  в соответствии с формулой (5), где  $k(p)$ - коэффициент пропорциональности, зависящий от метода разложения и количества используемых элементов обработки.

На первом этапе была использована одна общая программа, размер массива от запуска к запуску не изменялся, каждый элемент процессора нумеровался массивом элементов, начиная с нуля. Несмотря на то, что в соответствии с теоретическим анализом 3D декомпозиция является наилучшим вариантом для распараллеливания (Рисунок 3), вычислительные эксперименты показали, что лучшие результаты были достигнуты при использовании 2D декомпозиции, когда число процессов варьируется от 25 до 144 (Рисунок 3).

На основе предварительного теоретического анализа графиков можно отметить следующий характер. Время вычисления без затрат на межпроцессорные связи при различных способах декомпозиции должны быть примерно одинаковыми для одинаковых количеств процессоров и сокращаться на  $T_{calc}/p$ . В действительности, расчетные данные показывают, что при использовании 2D-декомпозиции на различных вычислительных сетках дают минимальную затрату для расчета и графики затрат в зависимости от времени вычисления на нескольких взятых процессорах значительно выше, чем  $T_{calc}/p$ .

Для объяснения этих результатов необходимо обратить внимание на допущения, которые были сделаны в ходе предварительного теоретического анализа эффективности для данной задачи. Во-первых, предполагалось, что независимо от распределения

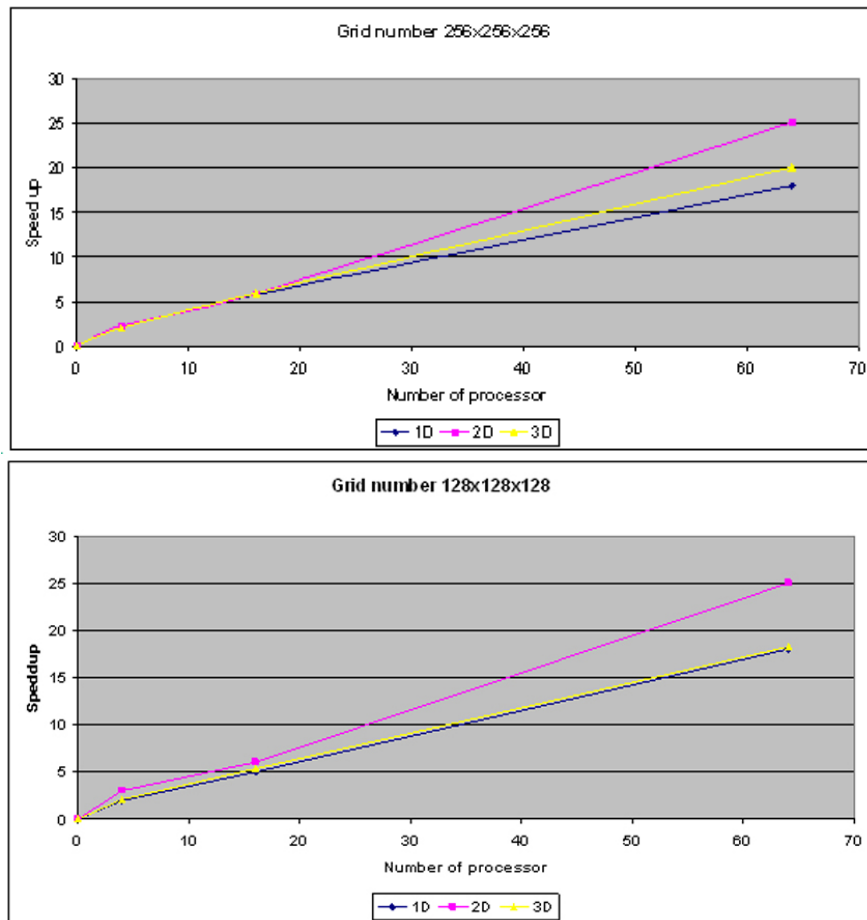


Рисунок 3 – Ускорения для различных способов декомпозиции расчетной области

данных на один процессорный элемент, выполнен тот же объем вычислительной работы, что должно привести к одинаковым затратам времени. Во-вторых, были предположены, что время, затраченное на межпроцессорные отправки любой степени того же объема данных, не зависят от их выбора памяти. Для того, чтобы понять, что происходит в действительности, были проведены следующие наборы тестовых вычислительных расчетов. Для оценки рассматривалась последовательность первого подхода, когда программа выполняется в версии с одним процессором, и, таким образом, имитирует различные способы геометрической декомпозиции данных для того же объема вычислений, выполняемых каждым процессором.

## 6 Результаты и обсуждение

Геометрические параметры указаны на Рисунке 1: длина канала  $L=75$ , высота канала  $H=2$ , высота уступа  $S=1$ . Получены численные результаты были получены для чисел  $Re=50$ ,  $Pr=0.7$  и  $Gr=19.1$  (Lin and etc., 1990).

На Рисунке 4 показаны сравнения продольного профиля скорости с численными данными Лина и др. (Lin and etc., 1990) в точке  $x/x_f = 0.5$ , где  $x_f = 2.91$ . На Рисунке 5

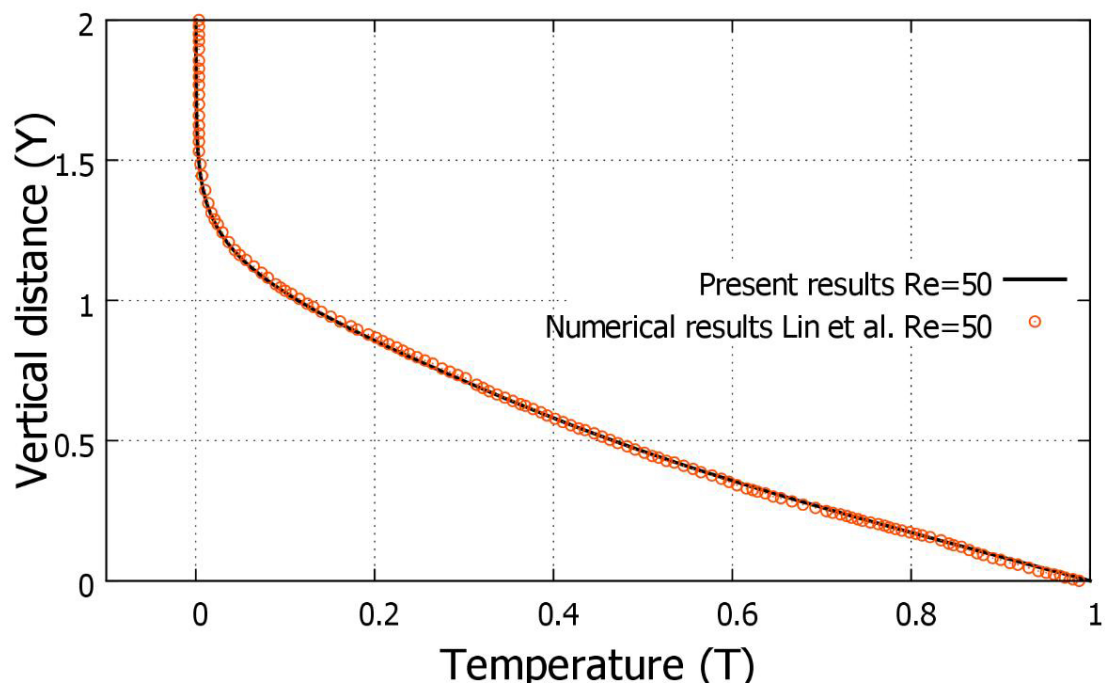


Рисунок 4 – Профиль скоростей с учетом сил плавучести для  $Re=50, \Delta T = 1^\circ C, x/x_f = 0.5$ , где  $x_f = 2.91$

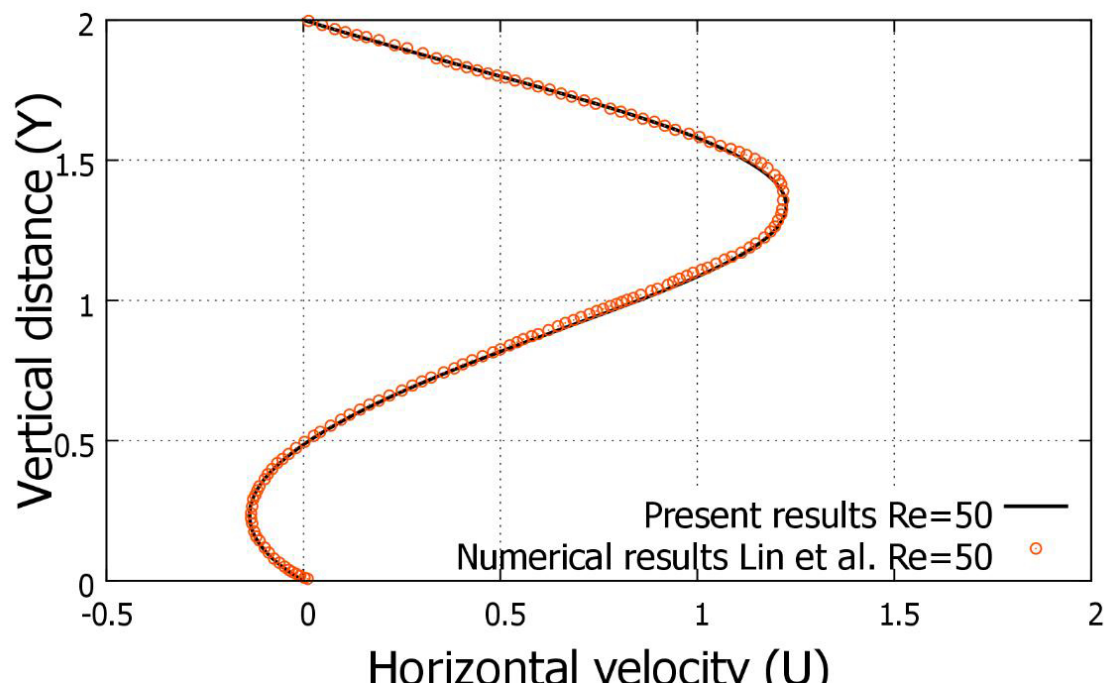
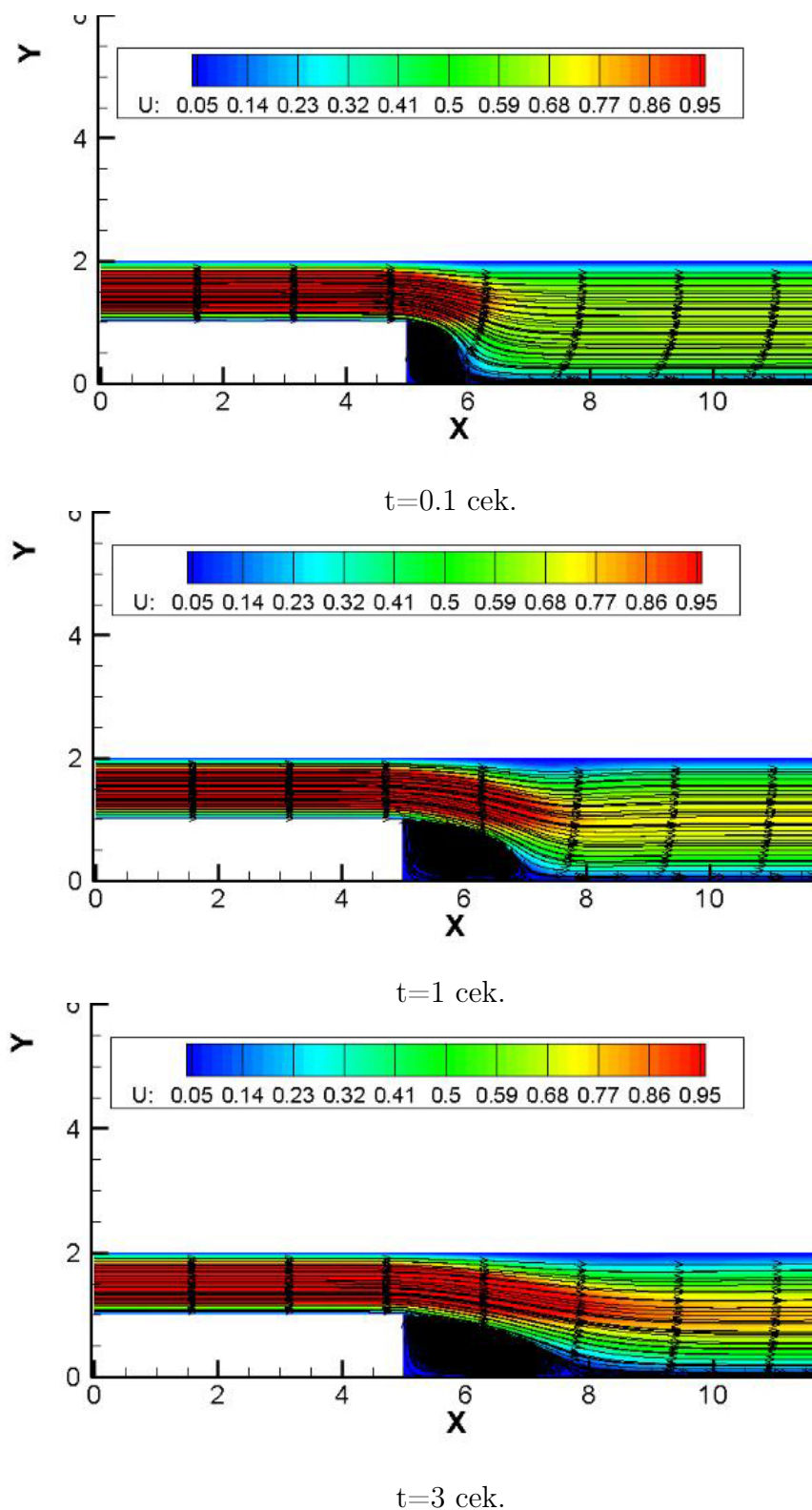
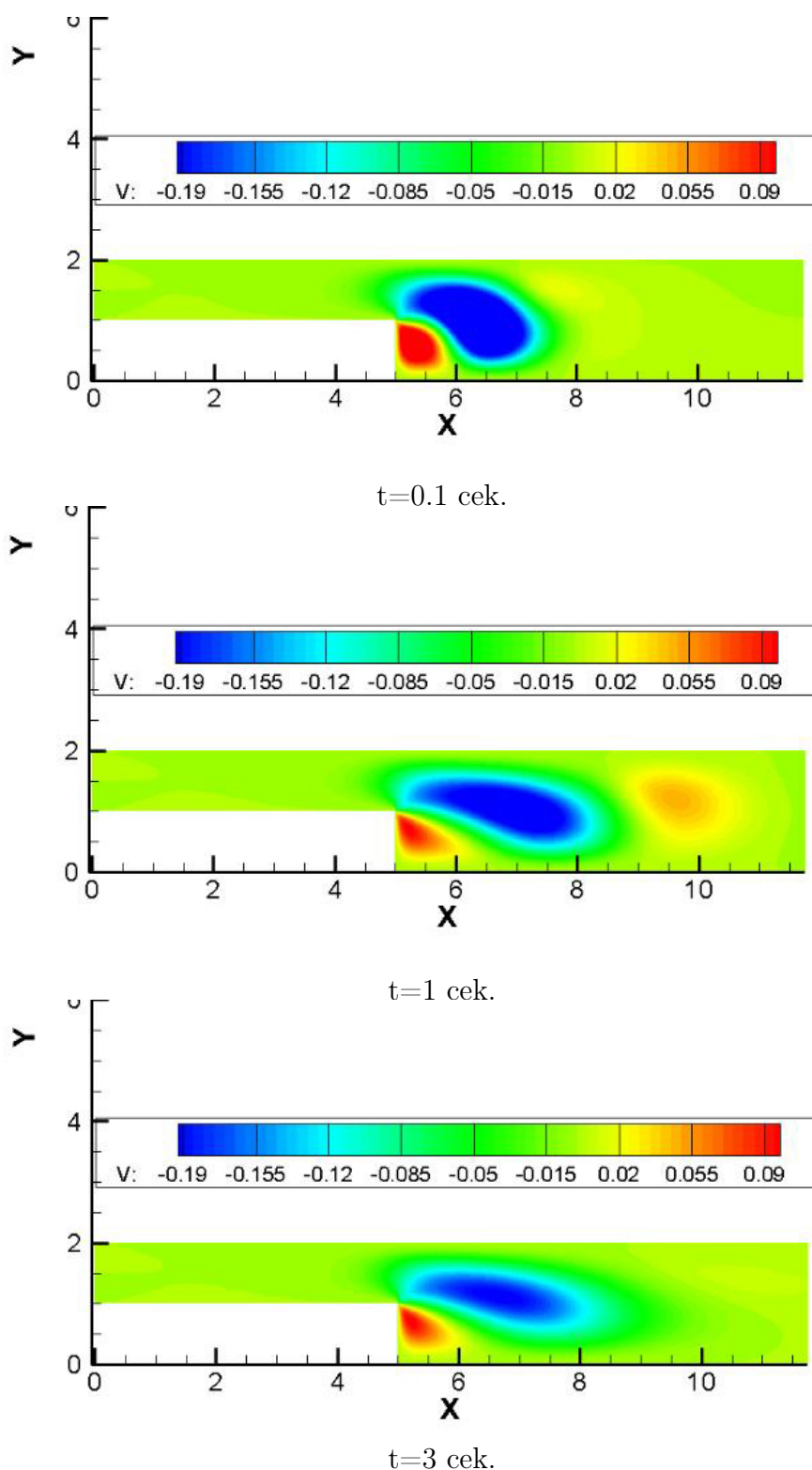


Рисунок 5 – Профиль температуры с учетом сил плавучести для  $Re=50, \Delta T = 1^\circ C, x/x_f = 0.5$ , где  $x_f = 2.91$

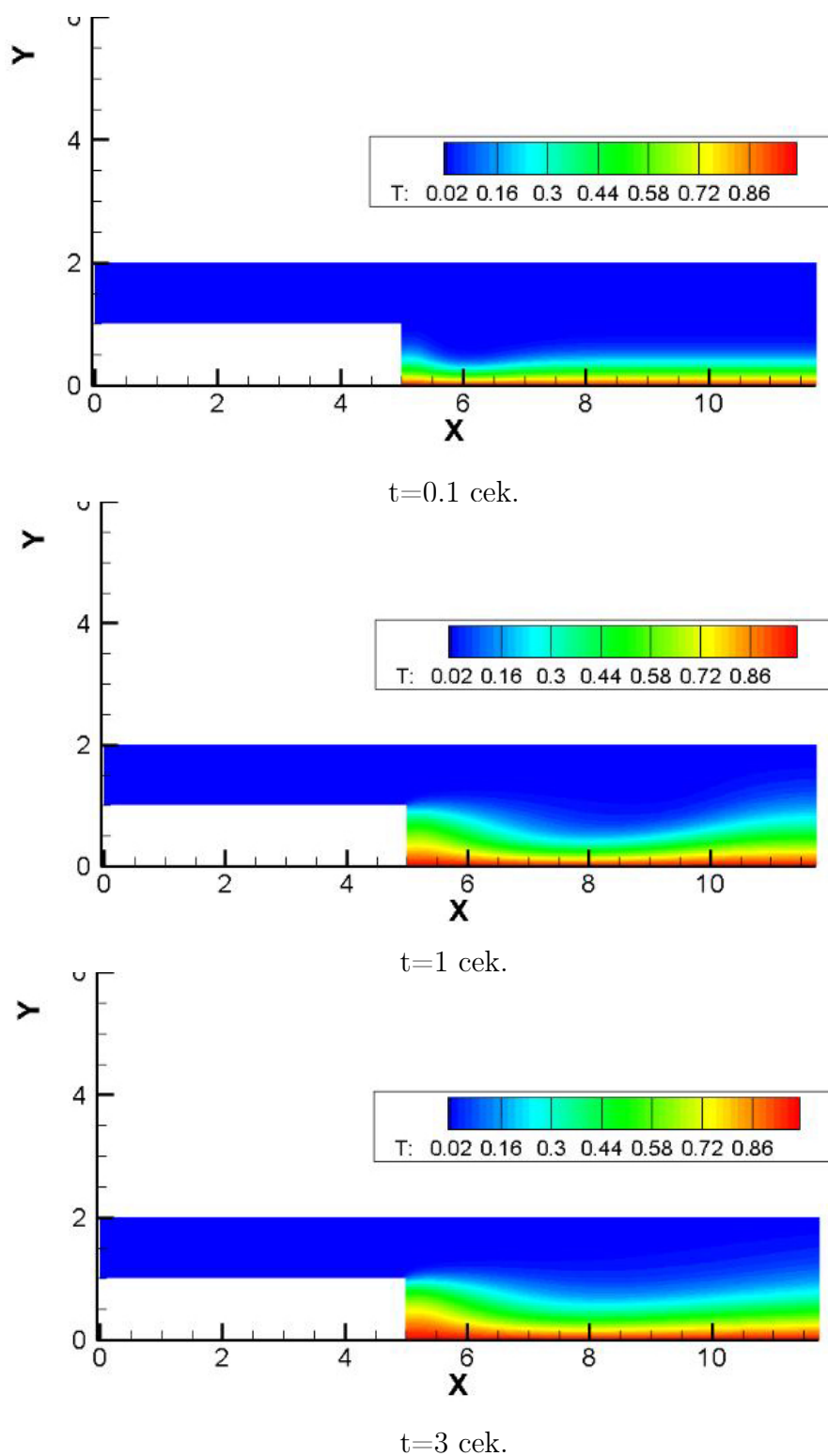


**Рисунок 6** – Контур горизонтальной компоненты скорости с линиями тока для различных временных слоев, при  $Re=50$ ,  $Pr=0.7$  и  $Gr=19.1$





**Рисунок 7** – Контур горизонтальной компоненты скорости с линиями тока для различных временных слоев, при  $Re=50$ ,  $Pr=0.7$  и  $Gr=19.1$



**Рисунок 8** – Контур температуры для различных временных слоев, при  $Re=50$ ,  $Pr=0.7$  и  $Gr=19.1$

показаны сравнения профиля температуры с численными данными Лина и др. (Lin and etc., 1990) в точке  $x/x_f = 0.5$ , где  $x_f = 2.91$ . Из рисунков видно, что используемый в

данной работе математическая модель и численный алгоритм совпадают с численными результатами, полученными Лином и др. (Lin and etc., 1990). На рисунке 6 изображено линии тока и горизонтальный контур скорости для различных временных слоев при безразмерных числах  $Re=50$ ,  $Pr=0.7$  и  $Gr=19.1$ . На рисунке 7 изображено вертикальный контур скорости для различных временных слоев при безразмерных числах  $Re=50$ ,  $Pr=0.7$  и  $Gr=19.1$ . На рисунке 8 изображено контур температуры для различных временных слоев при безразмерных числах  $Re=50$ ,  $Pr=0.7$  и  $Gr=19.1$ . Для более глубокого понимания данного течения из рисунков 6-8 наблюдается развитие течения за уступом по времени: зарождение и процесс развития области воссоединения потоков для различных временных слоев с учетом сил плавучести.

## 7 Заключение

Были выполнены численные исследования ламинарного течения зоной присоединения потоков за уступом с учетом сил плавучести. Это дало более глубокое представление о внутреннем течении за уступом и о процессах воссоединения потоков при влиянии температурных эффектов, что в свою очередь дало представление о дальнейшем появлении вторичных зон. Расстояние от уступа до границы канала взято в 4 раза больше высоты канала, для более детального изучения течений за уступом с учетом сил плавучести (Lin and etc., 1990). Численные данные распределения скорости показали образование первичной зоны воссоединения потоков за уступом. Для решения систему уравнений Навье-Стокса использовалась схема расщепление по физическим параметрам. Из графиков видно, что реализованный численный метод дает маленькую погрешность по сравнению с численными результатами других авторов для безразмерных чисел  $Re=50$ ,  $Pr=0.7$  и  $Gr=19.1$ .

Также в данной работе для получения быстрых численных результатов применен параллельный алгоритм. Данный параллельный алгоритм основывается на одномерной, двухмерной и трехмерной декомпозиции. Результаты параллельной программы тестирования показали, что 3D декомпозиция не является выигрышной во времени по сравнению с 2D декомпозицией, для числа процессоров, не превышающих 250, а 3D декомпозиция имеет более трудоемкую программную реализацию и использование 2D-декомпозиции является достаточным для масштабов поставленной задачи. Нужно также отметить, что постановка граничных условий немаловажный процесс. В дальнейшем данную математическую модель и параллельный численный алгоритм можно применить для различных сложных течений с учетом сил плавучести.

## Список литературы

- [1] Abbott D.E. and Kline S.J. Experimental investigations of subsonic turbulent flow over single and double backward-facing steps // J. Basic Engng. — 1962. — V.84. — P. 317.
- [2] Armaly B. F. and Durst F. Reattachment length and recirculation regions downstream of two dimensional single backward facing step. In Momentum and Heat Transfer Process in Recirculating Flows // ASME HTDVOL. — 1980. — 13, — P. 1-7. ASME, New York.
- [3] Aung W. An experimental study of laminar heat transfer downstream of backsteps // J. Heat Transfer. — 1983. — 105, — P. 823-829.

- [4] Aung W., Separated forced convection, Proc. ASME/JSM Thermal Enana Joint Conf. — 1983. — Vol. 2. — P. 499-515. ASME. New York.
- [5] Aung W., Baron A. and Tsou F. K. Wall independency and effect of initial shear-layer thickness in separated flow and heat transfer // *Int. J. Hear Muss Transfer.* — 1985. — 28, — P. 1757-1771.
- [6] Aung W. and Worku G., Theory of fully developed. combined convection including flow reversal // *J. Hear Transfer.* — 1986. — 108. — P. 485-488.
- [7] Chiang T.P., Tony W.H. and Sheu Fang C.C. Numerical investigation of vortical evolution in backward-facing step expansion flow // *Appl. Math.* — 1999. — V.23. — P. 915-932.
- [8] Chorin A.J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations // *Math. Comp.* — 1968. — 22. — P. 745-762.
- [9] Chung T.J. Computational fluid dynamics. 2002. — 1034 p.
- [10] Durst F. and Whitelawj H. Aerodynamic properties of separated gas flows: existing measurements techniques and new optical geometry for the laser-Doppler anemometer // *Prog. Heat Mass Transfer.* — 1971. — V.4. — P. 311.
- [11] Eaton J. K. and Johnson J. P. A review of research on subsonic turbulent flow reattachment // *AIAA J.* — 1981. — 19. — P. 1093-1100.
- [12] Fletcher C.A.J. Computational techniques for fluid dynamics 2 // Springer-Verlag New York. — 1988. — V.1. — P. 387.
- [13] Goldstein J., Eriksen L., Olson M. and Eckert R.G. Laminar separation, reattachment and transition of flow over a downstream-facing step // *J. Basic Engng.* — 1970. — V.92. — P. 732.
- [14] Gosmana D. and Punw M. Lecture notes for course entitled: 'Calculation of recirculating flow' // *Heat Transfer Rep.* — 1974. — V.74. — P. 2.
- [15] Kumara, Yajnik S. Internal separated flows at large Reynolds number // *J. Fluid Mech.* — 1980. — V.97. — P. 27.
- [16] Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2015. — 16(5). — P. 229-238. doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [17] Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // *Applied Mathematical Modelling.* — 2016. — 40(2). — P. 1082-1096. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.
- [18] Issakhov A. Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2011, — 318(4), — P. 1282-1288. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [19] Karniadakis G. E. and Kirby II R. M. *Parallel Scientific Computing in C++ and MPI: A Seamless Approach to Parallel Algorithms and their Implementation.* Cambridge University Press, 2000. — 630 p.
- [20] Lin J.T., Armaly B.F. and Chen T.S. Mixed convection in buoyancy-assisting, vertical backward-facing step flows // *International Journal of Heat and Mass Transfer.* — 1990. — 33(10). — P. 2121-2132.
- [21] Ngo I. and Byon C. Effects of heater location and heater size on the natural convection heat transfer in a square cavity using finite element method // *J. Mech. Sci. Technol.* — 2015. — 29 (7). — 2995.
- [22] Oztop H. F. and Abu-Nada E. Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids // *Int. J. Heat. Fluid Fl.* — 2008. — 29(5), — P. 1326-1336.
- [23] Sebanr A. Heat transfer to the turbulent separated flows of air downstream of a step in the surface of a plate // *J. Heat Transfer.* — 1964. — V.86. — P. 259.
- [24] Simpson R. L. A review of some phenomena in turbulent flow separation // *J. Fluid Engng.* — 1981. — 103. — P.520-533.
- [25] Sparrow E. M., Chrysler G. M. and Azevedo L. F. Observed flow reversals and measured-predicted Nusselt numbers for natural convection in a one-sided heated vertical channel // *J. Heat Transfer.* — 1984. — 106. — P. 325-332.
- [26] Sparrow E. M., Kang S. S. and Chuck W. Relation between the points of flow reattachment and maximum heat transfer for regions of flow separation // *Int. J. Heat Mass Transfer.* — 1987. — 30, — P. 1237-1246.
- [27] Sparrow E. M. and Chuck W. PC solutions for heat transfer and fluid flow downstream of an abrupt, asymmetric enlargement in a channel // *Numer. Hear Transfer.* — 1987. — 12. — 1940.

## References

- [1] Abbott, D.E. and Kline, S.J. "Experimental investigations of subsonic turbulent flow over single and double backward-facing steps." *J. Basic Engng.* 84 (1962): p. 317.
- [2] Armaly, B. F. and Durst, F. "Reattachment length and recirculation regions downstream of two dimensional single backward facing step In *Momentum and Heat Transfer Process in Recirculating Flows*." ASME HTDVol. 13 (1980): 1-7. ASME, New York.
- [3] Aung, W. "An experimental study of laminar heat transfer downstream of backsteps." *J. Heat Transfer.* 105 (1983): 23-829.
- [4] Aung, W. "Separated forced convection." Proc. ASMEIJSME Thermal Enana Joint Conf. 2(1983): 499-515. ASME. New York.
- [5] Aung, W., Baron, A. and Tsou, F. K. "Wall independency and effect of initial shear-layer thickness in separated flow and heat transfer." *Int. J. Heat Mass Transfer.* 28(1985): 1757-1771.
- [6] Aung, W. and Worku, G. "Theory of fully developed. combined convection including flow reversal." *J. Heat Transfer.* 108 (1986): 485-488.
- [7] Chiang, T.P., Tony, W.H. and Sheu Fang, C.C. "Numerical investigation of vortical evolution in backward-facing step expansion flow." *Appl. Math.* 23(1999): 915-932.
- [8] Chorin, A.J. "Numerical solution of the Navier-Stokes equations." *Math. Comp.* 22 (1968):745-762.
- [9] Chung, T.J. "Computational fluid dynamics." 2002. 1034 p.
- [10] Durst, F. and Whitelaw, H. "Aerodynamic properties of separated gas flows: existing measurements techniques and new optical geometry for the laser-Doppler anemometer." *Prog. Heat Mass Transfer.* 4(1971): 311.
- [11] Eaton, J. K. and Johnson, J. P. "A review of research on subsonic turbulent flow reattachment." *AIAA J.* 19 (1981): 1093-1100.
- [12] Fletcher, C.A.J. "Computational techniques for fluid dynamics 2." Springer-Verlag New York. 1 (1988): 387.
- [13] Goldstein, J., Eriksen, L., Olson, M. and Eckert, R.G. "Laminar separation, reattachment and transition of flow over a downstream-facing step." *J. Basic Engng.* 92 (1970):732.
- [14] Gosmana, D. and Punw, M. "Lecture notes for course entitled: 'Calculation of recirculating flow'." *Heat Transfer Rep.* 74 (1974):2.
- [15] Kumara, Yajnikk S. "Internal separated flows at large Reynolds number." *J. Fluid Mech.* 97 (1980):27.
- [16] Issakhov, A. "Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant." *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 16(5) (2015): 229-238. doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [17] Issakhov, A. "Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities." *Applied Mathematical Modelling.* 40(2) (2016): 1082-1096. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.
- [18] Issakhov, A. "Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method." *J. Phys.: Conf. Ser.* 318(4) (2011): 1282-1288. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [19] Karniadakis, G. E. and Kirby II, R. M. "Parallel Scientific Computing in C++ and MPI: A Seamless Approach to Parallel Algorithms and their Implementation." Cambridge University Press, 2000. 630 p.
- [20] Lin, J.T., Armaly, B.F. and Chen, T.S. "Mixed convection in buoyancy-assisting, vertical backward-facing step flows." *International Journal of Heat and Mass Transfer.* 33(10) (1990): 2121-2132.
- [21] Ngo, I. and Byon, C. "Effects of heater location and heater size on the natural convection heat transfer in a square cavity using finite element method." *J. Mech. Sci. Technol.* 29 (7) (2015): 2995.
- [22] Oztop, H. F. and Abu-Nada, E. "Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids" *Int. J. Heat. Fluid Fl.* 29(5) (2008):1326-1336.

- [23] Sebanr, A. "Heat transfer to the turbulent separated flows of air downstream of a step in the surface of a plate," *J. Heat Transfer*. 86 (1964):259.
- [24] Simpson, R. L. "A review of some phenomena in turbulent flow separation," *J. Fluid Engng.* 103 (1981): 520-533.
- [25] Sparrow, E. M., Chrysler, G. M. and Azevedo, L. F. "Observed flow reversals and measured-predicted Nusselt numbers for natural convection in a one-sided heated vertical channel." *J. Heat Transfer*. 106 (1984): 325-332.
- [26] Sparrow, E. M., Kang, S. S. and Chuck, W. "Relation between the points of flow reattachment and maximum heat transfer for regions of flow separation." *Int. J. Heat Mass Transfer*. 30 (1987): 1237-1246.
- [27] Sparrow, E. M. and Chuck, W. "PC solutions for heat transfer and fluid flow downstream of an abrupt, asymmetric enlargement in a channel," *Numer. Hear Transfer*. 12(1987):1940.

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набранные только в текстовом формате  $\text{\LaTeX}2\epsilon$  на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat.dairbayeva@gmail.com (ответственному секретарю редколлегии, Даирбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы (название вуза, центра без сокращений), рабочий или моб. телефон, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета  $\text{\LaTeX}2\epsilon$  или формат eps [см. п.7]. Указывается код по . В редакцию также представляется отпечаток работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 7 страниц.

Структура статьи.

Первая страница:

- 1) Первая строка - номер МРНТИ, выравнивание - по левому краю, шрифт - полужирный.
- 2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 3) Автор(ы) статьи - с указанием имени и фамилии, ученой степени, ученого звания, занимаемой должности, места работы, город, страна, контактный телефон, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие **ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ** пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.
- 5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.

Последующая страница (новая):

- 6) Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета

исследования в избранном автором аспекте.

7) Материал и Методы - должны состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала - один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

8) В секции обзор литературы - должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

9) В разделе Результаты и Обсуждение - приводится анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) Заключение, выводы - обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50 необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый - в оригинале, второй - романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) – (год в круглых скобках)– название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossiiskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4.(2011): pp. 8-30.

Список литературы представляется в алфавитном порядке, и ТОЛЬКО те работы, которые цитируются в тексте. Стиль оформления списка литературы на русском и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления"(требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления Романизированного списка литературы, а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений - Chicago Style ([www.chicagomanualofstyle.org](http://www.chicagomanualofstyle.org)).

В данном разделе необходимо учесть:

- а) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.
- б) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
- в) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
- г) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.



12) Ссылки на цитируемые работы в тексте даются в скобках, с указанием первого автора работы, год издания: номер страниц(-ы). Например, (Залесский, 1991: 25-27). В случае, наличия в списке литературы нескольких работ одного и того же автора, изданных в один год, то дополнительно к году издания добавляется буква "а" "б" и т.д. Например, (Садуова, 2001а: 15-20), (Садуова, 2001б: 22-29).

6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов  $\LaTeX$  и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате `.eps`, либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов `Maple`, `Mathematica` или с помощью пакета `Latexcad`. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат `.eps` с помощью `Adobe Photoshop` или конвертера `Conversion Artist`. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

**МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ**

**1-бөлім****Раздел 1****Математика****Математика**

*Akhmet M.U., Dauylbayev M.K., Mirzakulova A.E., Atakhan N.*

Singularly perturbed linear oscillator with piecewise-constant argument ..... 3

*Mirzakulova A.E., Dauylbaev M.K., Akhmet M.U., Dzhetspisbaeva A.K.*

The Cauchy problem for singularly perturbed higher-order integro-differential equations ..... 14

*Wei D., Zhapsarbayeva L., Kazbek Zh.*

Mathematical Analysis of the Euler-Bernoulli Beam Subject to Swelling Pressure ..... 25

*Айсагалмиев С.А., Айсагалмиева С.С.*

Несобственные интегралы в теории глобальной асимптотической устойчивости многомерных фазовых систем ..... 38

*Башеева А.О.*

Квазимногообразия коммутативных колец ..... 54

*Кангуржин Б.Е.*

Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде ..... 67

**2-бөлім****Раздел 2****Механика****Механика**

*Askar K. Kudaibergenov, L.A. Khajiyeva*

Modelling of drill string nonlinear dynamics with a drilling fluid flow ..... 91

*Askat K. Kudaibergenov, L.A. Khajiyeva*

On dynamic stability of drill strings in a supersonic gas flow ..... 101

**3-бөлім****Раздел 3****Информатика****Информатика**

*Abdiakhmetova Z.M., Nurmakhanova ZH.M*

Data processing in electrocardiographs by wavelet transformation for early forecasting of parossysmal arthritis ..... 111

*Balakayeva G.T., Darkenbayev D.K.*

Modeling the processing of a large amount of data ..... 120

*Balakayeva G.T., Akimbay Sh.*

Mathematical and numerical modeling of transfer processes in the cleaning of exhaust gases in an automobile neutralizer ..... 127

*Bolatbek M.A., Mussiraliyeva Sh.Zh., Tukeyev U.A.*

Creating the dataset of keywords for detecting an extremist orientation in web-resources in the Kazakh language ..... 134

#### 4-бөлім

#### Колданылмалы математика

*Исахов А.А., Абылкасымова А. Б., Сакыпбекова М.*

Применение параллельных вычислительных технологий для моделирования процесса отрыва течения за обратным уступом в канале с учетом сил плавучести ..... 143

К сведению авторов ..... 159

#### Раздел 4

#### Прикладная математика

## CONTENTS

## Section 1

## Mathematics

<i>Akhmet M.U., Dauylbayev M.K., Mirzakulova A.E., Atakhan N.</i> Singularly perturbed linear oscillator with piecewise-constant argument .....	3
<i>Mirzakulova A.E., Dauylbaev M.K., Akhmet M.U., Dzhetspisbaeva A.K.</i> The Cauchy problem for singularly perturbed higher-order integro-differential equations .....	14
<i>Wei D., Zhapsarbayeva L., Kazbek Zh.</i> Mathematical Analysis of the Euler-Bernoulli Beam Subject to Swelling Pressure .....	25
<i>Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S.</i> Improper integrals for stability theory of multidimensional phase systems .....	38
<i>Basheyeva A.O.</i> Quasivarieties of commutative rings .....	54
<i>Kanguzhin B.E.</i> Green's function of the Dirichlet problem for the differential operator on a star-shaped graph .....	67

## Section 2

## Mechanics

<i>Askar K. Kudaibergenov, L.A. Khajiyeva</i> Modelling of drill string nonlinear dynamics with a drilling fluid flow .....	91
<i>Askat K. Kudaibergenov, L.A. Khajiyeva</i> On dynamic stability of drill strings in a supersonic gas flow .....	101

## Section 3

## Computer science

<i>Abdiakmetova Z.M., Nurmakhanova ZH.M</i> Data processing in electrocardiographs by wavelet transformation for early forecasting of parossysmal arthritis .....	111
<i>Balakayeva G.T., Darkenbayev D.K.</i> Modeling the processing of a large amount of data .....	120
<i>Balakayeva G.T., Akimbay Sh.</i> Mathematical and numerical modeling of transfer processes in the cleaning of exhaust gases in an automobile neutralizer .....	127

---

*Bolatbek M.A., Mussiraliyeva Sh.Zh., Tukeyev U.A.*

Creating the dataset of keywords for detecting an extremist orientation in web-resources in the Kazakh language ..... 134

## Section 4

### Applied Mathematics

*Issakhov A.A., Abylkassymova A., Sakypbekova M.*

Applications of parallel computing technologies for modeling the flow separation process behind the backward facing step in the channel with the buoyancy forces ..... 143

Note by authors ..... 159

**УСПЕЙТЕ ПОДПИСАТЬСЯ НА СВОЙ ЖУРНАЛ**

**АКЦИЯ!!!**

**Каждому подписчику  
ПУБЛИКАЦИЯ СТАТЬИ  
БЕСПЛАТНО!!!**

- Акция действительна при наличии квитанции об оплате годовой подписки.
- Статья должна соответствовать требованиям размещения публикации в журнале.
- Статья печатается в той серии журнала, на которую подписался автор.
- Все нюансы, связанные с публикацией статьи, обсуждаются с ответственным секретарем журнала.

---

Издательский дом  
«Қазақ университеті»  
г. Алматы,  
пр. аль-Фараби, 71  
8 (727) 377 34 11, 221 14 65

АО «КАЗПОЧТА»  
г. Алматы,  
ул. Богенбай батыра, 134  
8 (727 2) 61 61 12

ТОО «Евразия пресс»  
г. Алматы,  
ул. Жибек Жолы, 6/2  
8 (727) 382 25 11

ТОО «Эврика-пресс»  
г. Алматы,  
ул. Кожамкулова, 124, оф. 47  
8 (727) 233 76 19, 233 78 50