

ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ХАБАРШЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№ 4 (96)

Алматы
«Қазақ университеті»
2017

Зарегистрирован в Министерстве информации и коммуникаций Республики Казахстан, свидетельство № 16508-Ж от 04.05.2017 г. (Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.). Язык издания: казахский, русский, английский. Выходит 4 раза в год. Тематическая направленность: теоретическая и прикладная математика, механика, информатика.

Редакционная коллегия

научный редактор – М.А. Бектемесов - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби;
заместитель научного редактора – А.Б. Кыдырбекулы – д. т. н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби;
ответственный секретарь – Г.М. Даирбаева – к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Алексеев А. – асс. профессор, Университет штата Калифорнии в Нортридж, США

Алиев Ф.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Азербайджана, Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан

Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., директор Департамента профессионального и технического образования МОН РК, Казахстан

Ахметов М. – доктор Ph.D., профессор, Средне Восточный Технический Университет, Турция

Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Гасников А.В. – д.ф.-м.н., Московский физико-технический институт, Россия

Джусмадылдаев А.С. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК, Институт математики и математического моделирования, Казахстан

Жайнаков А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН КР, Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Кыргызстан

Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия

Калтаев А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Кангужин Б.Е. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Кудайбергенов К. – д.ф.-м.н., Казахстанский институт менеджмента, экономики и прогнозирования, Казахстан

Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института Аэродинамики, Германия

Мальшикин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия

Мейрманов А.М. – д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, Россия

Милошевич Х. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Приштины, Сербия

Мухамбетжанов С.Т. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Отелбаев М.О. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан

Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания

Рысбайулы Б. – д.ф.-м.н., профессор, Международный университет информационных технологий, Казахстан

Садыбеков М.А. – д.ф.-м.н., член-корр. НАН РК, Институт математики и математического моделирования МОН РК, Казахстан.

Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

Тукеев У.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Умирбаев У.У. – д.ф.-м.н., профессор, член-корр. НАН РК, Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва, Казахстан

Шиничи Накасука – доктор Ph.D., профессор, Университет Токио, Япония

Шокин Ю.И. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия

Юлдашев З.Х. – д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан

Научное издание

Вестник. Серия математика, механика, информатика, № 4(96) 2017.

Редактор – Г.М. Даирбаева. Компьютерная верстка – Б.А. Аетова

ИБ N 11655

Подписано в печать 29.12.2017 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 8,6 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ N 284. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

МРНТИ 27.29.17, 27.29.23

Исследование абсолютной устойчивости многомерных регулируемых систем. Проблема Айзермана

Айсағалиев С.А., Қазақстанның миллиондығы университетінің атындағы аль-Фараби, г. Алматы,

Республика Қазақстан, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Аязбаева А.М., Қазақстанның миллиондығы университетінің атындағы аль-Фараби,

г. Алматы, Республика Қазақстан, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия регулируемых систем со многими нелинейностями. Путем неособого преобразования уравнение движения регулируемой системы приводится к специальному виду, что позволяет представить нелинейности как функции от фазовых переменных. Для систем с ограниченными ресурсами получены оценки фазовых переменных и тождеств вдоль решения системы. Найдены оценки несобственных интегралов и сформулированы условия абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы. Рассматривается возможность существования сектора, где проблема Айзермана имеет решение для регулируемых систем с ограниченными ресурсами. Следует отметить, что частотное условие абсолютной устойчивости В.М. Попова для систем со многими нелинейностями не имеет геометрическую интерпретацию, как в случае одномерных, и их проверка является сложной задачей. Поэтому разработка нового метода исследования абсолютной устойчивости регулируемых систем актуальна. Отличительной особенностью предлагаемого метода исследования абсолютной устойчивости от известных методов состоит в том, что условия абсолютной устойчивости получены без привлечения функции Ляпунова и частотной теоремы В.А. Якубовича.

Ключевые слова: Абсолютная устойчивость, неособое преобразование, свойства решений, несобственные интегралы, проблема Айзермана, секторы абсолютной устойчивости.

Көпөлшемді басқарылатын жүйелердің абсолютті орнықтылығын зерттеу. Айзерман есебі

Айсағалиев С.Ә., аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

Республикасы, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Аязбаева А.М., аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы,

+77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

Көптеген сызықты емес функциялары бар басқарылатын жүйелердің тепе-теңдік жағдайының абсолютті орнықтылығын зерттеудің жаңа әдісі ұсынылады. Ерекше емес түрлендіру жолымен басқарылатын жүйенің қозғалыс теңдеуі сызықты емес функцияларды фазалық айнымалылардан алынған функциялар түрінде сипаттауға мүмкіндік беретін арнайы түрге келтіріледі. Ресурстары шектеулі жүйелер үшін жүйе шешімі бойында теңдіктер мен фазалық айнымалылардың бағасы алынған. Жүйенің конструктивті параметрлері кеңістігінде абсолютті орнықтылықтың шарттары құрылып және меншіксіз интегралдардың бағалары алынған. Ресурстары шектеулі басқарылатын жүйелер үшін Айзерман есебінің шешімі бар болатындай сектордың бар болуының мүмкіндігі қарастырылады. Көптеген сызықты емес функциялары бар жүйелер үшін В.М. Поповтың абсолютті орнықтылығының жиіліктік шарттарының геометриялық интерпретациясы бірөлшемді жағдай үшін де болмайтынын ескерген жөн және оларды тексеру күрделі есеп болып табылады. Сондықтан басқарылатын жүйелердің абсолютті орнықтылығын зерттеудің жаңа әдісін құру актуалды. Абсолютті орнықтылықты зерттеудің ұсынылған әдісінің басқа белгілі әдістерден басты ерекшелігі абсолютті орнықтылық шарттары В.А. Якубовичтің жиіліктік теоремалары мен Ляпунов функциясын қолданбай-ақ алуға болады.

Түйін сөздер: Абсолютті орнықтылық, ерекше емес түрлендіру, шешімдердің қасиеттері, меншіксіз интегралдар, Айзерман есебі, абсолютті орнықтылықтың секторлары.

Investigation on absolute stability of multidimensional regulated systems. Aizerman problem

Aisagaliev S.A., Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan,
+77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Ayazbayeva A.M., Al-Farabi Kazakh National University, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

A new method for investigating on absolute stability of the equilibrium position of regular systems with many nonlinearities is supposed. The motion equation of the regular system is reduced to a special kind by nonsingular transformation which allows to present the nonlinearities as functions of phase variables. Estimations of the phase variables and identities along solution of the system are obtained for systems with limited resources. Estimations of the improper integrals are found and conditions of the absolute stability in the space of constructive parameters of the system are formulated. Possibility of the sector existence is considered, where Aizerman problem has solution for regular systems with limited resources. It should be noted, that frequency condition of the V.M.Popov absolute stability for systems with many nonlinearities has not any geometrical interpretation, as in the one-dimensional case, and its verify is difficult problem. Therefore development of the new method for investigation on absolute stability of regular systems is topical. Distinctive feature of the supposed method of investigation on absolute stability from known methods is that the conditions of the absolute stability are obtained without using Lyapunov function and frequency theorem of V.A. Yakubovich.

Keywords: Absolute stability, nonsingular transformation, properties of the solutions, improper integrals, Aizerman problem, absolute stability sectors.

1 Введение

Рассматривается уравнение движения регулируемых систем следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, \infty), \quad (1)$$

где A, B, S – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы A , $|x_0| < \infty$, $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m))$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$.

Функция

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) \mid 0 \leq \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \leq \mu_{0i}\sigma_i^2, \forall \sigma_i, \sigma_i \in R^1, \varphi(0) = 0, |\varphi(\sigma)| \leq \varphi_*, \forall \sigma, \sigma \in R^m, 0 < \varphi_* < \infty\}, \quad (2)$$

где $\mu_0 = \operatorname{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m}) > 0$ – диагональная матрица порядка $m \times m$, $|\cdot|$ – евклидова норма, $\varphi_* = \operatorname{const} > 0$, $(*)$ – знак транспонирования. Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами и для таких систем вектор функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (2).

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Sx_*$. Если матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ обращается в нуль только при $\sigma = 0$, то система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $x_* = 0$.

Заметим, что положению равновесия соответствует тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2). В статье, исследуется асимптотическая устойчивость в целом невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ при любом $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Полагаем, что при достаточно малой окрестности точки $\sigma = \sigma_* = 0$, функцию $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ можно аппроксимировать линейной функцией $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$, $0 <$

$\mu_i \leq \mu_{0i}$, $i = \overline{1, m}$. Следовательно, при $|\sigma| < \delta$, $\delta > 0$ – достаточно малое число, уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\dot{x} = Ax + B\mu Sx = A_1(\mu)x, \quad x(0) = x_0, \quad |x_0| < \infty, \quad t \in I,$$

где $A_1(\mu) = A + B\mu S$, $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $\overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1, m}$ – предельное значение, μ_i , $i = \overline{1, m}$ определяемое из гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$.

Если матрица $A_1(\mu)$, $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1, m}$ – гурвицева, то существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $|x(t)| < \varepsilon_1$ при $|x_0| < \delta_1$, более того, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Таким образом, когда матрица $A_1(\mu)$, где $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1, m}$ – гурвицева, то тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \rightarrow \infty$.

Определение 1 Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если: 1) матрицы A , $A_1(\mu)$ – гурвицевы, где $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $\mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\mu_0 = \text{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m})$; 2) для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ – решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; 0, x_0, \varphi) = 0$, $|x_0| < \infty$.

Иными словами, тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если оно асимптотически устойчиво в целом для любого $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Определение 2 Условиями абсолютной устойчивости системы (1), (2) называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы (A, B, S, μ_0) , при выполнении которых положение равновесия $x_* = 0$ абсолютно устойчиво.

Задача 1 Найти условие абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Функция $\sigma(t) = Sx(t)$, $t \in I$ является управлением сформированное по принципу обратной связи, а матрица S порядка $m \times n$ называется матрицей обратной связи. Проблема Айзермана состоит в том, что как выбрать матрицу обратной связи S , чтобы из асимптотической устойчивости тривиального решения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ линейной системы $\dot{x} = Ax + B\mu Sx = A_1(\mu)x$ для любого μ , $0 \leq \mu \leq \overline{\mu_0} - \varepsilon$, $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ следует абсолютная устойчивость тривиального решения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2), где $\overline{\mu_0}$ – предельное значение гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$, $\varepsilon_i > 0$ – сколь угодно малые числа.

Определение 3 Будем считать, что в секторе $[0, \mu_0]$ проблема Айзермана имеет решение, если: 1) существует матрица обратной связи S такая, что $\mu_0 = \overline{\mu_0} - \varepsilon$, где $\overline{\mu_0}$ – предельное значение гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число; 2) для любого $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $0 \leq \mu \leq \mu_0 \leq \overline{\mu_0} - \varepsilon$ – решение системы (1) асимптотически устойчиво; 3) для любого $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_0$ тривиальное решение системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Задача 2 Найти сектор $[0, \mu_0]$, где проблема Айзермана имеет решение.

2 Обзор литературы

Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критическом случаях посвящено много работ. Среди них следует отметить монографии (Айзерман, 1963), (Лурье, 1951), (Попов, 1970), (Гелиг, 1978). Существует два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем: метод А.И. Лурье (Лурье, 1951) и метод В.М. Попова (Попов, 1970). Связь между этими методами установлена в работах В.А. Якубовича и его учеников (Гелиг, 1978). Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функции Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей". В конечном счете метод А.И. Лурье приводит к проверке разрешимости матричных неравенств. Естественно, довольно сложно применить такой подход для решения прикладных задач из-за неопределенности выбора произвольных постоянных в условиях абсолютной устойчивости.

Сложность проверки частотных условий, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических условий абсолютной устойчивости путем сведения частотных условий к проверке положительности полиномов на положительной полуоси (Айсагалиев, 1969 : 38-48), (Айсагалиев, 1970 : 83-94).

В 1949 году М.А. Айзерман сформулировал следующую проблему (Айзерман М.А., 1949 : 186-188): пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1) / 0 \leq \varphi(\sigma)\sigma \leq \mu_0\sigma^2, \forall \sigma, \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Айзермана была решена для систем второго порядка И.Г. Малкиным, Н.П. Еругиным, Н.Н. Красовским.

В 1957 году Р.Е. Калманом сформулирована следующая проблема (Kalman, 1957 : 553-556): Пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu x$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1) / 0 \leq \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leq \mu_0, \forall \sigma, \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Калмана имеет положительное решение при $n = 2$.

Остаются открытыми решения проблемы Айзермана и проблемы Калмана для случая $n > 2$. В работе (Брагин, 2011 : 3-36) предложен новый подход к решению указанных проблем в виде вычислительных алгоритмов на основе модифицированного метода гармонической линеаризации.

В работах (Айсагалиев, 1994 : 748-757), (Айсагалиев, 2000), (Айсагалиев, 2012), (Aisagaliev, 2013 : 159-175) приведены результаты новых исследований абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований для систем со многими нелинейностями.

Постановка задачи и оценки несобственных интегралов приведены в (Айсагалиев, 2017 : 3-20). Ниже приведены продолжение исследований из (Айсагалиев, 2017 : 3-20).

3 Материал и методы

Статья посвящена решению актуальных проблем многомерных нелинейных регулируемых систем. Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику нелинейных регулируемых систем, правая часть которых содержит нелинейные функции из заданного множества. Такая неопределенность правой части порождает неединственность решения, что приводит к необходимости исследования групповых свойств решений системы. Одним из таких свойств является абсолютная устойчивость тривиального решения, т.е. свойств, при котором все решения, исходящие из любой начальной точки при любых нелинейных функциях из заданного множества, стремятся с течением времени к положению равновесия.

Предлагается совершенно новый метод исследования абсолютной устойчивости многомерных нелинейных регулируемых систем без привлечения каких-либо функций Ляпунова и частотных теорем, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

3.1 Вспомогательные леммы

Как следует из теоремы 3 приведенной в работе (Айсагалиев, 2017 : 3-20) несобственный интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} \varphi^*(\sigma(t)) \tau_1 \dot{\sigma}(t) dt = \int_0^{\infty} [\dot{Y}_1^*(t) \tau_1 D_1 \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t) L_1 Y_1(t) + \dot{Y}_1^*(t) M Y_2(t) + W_{11}(y(t))] dt = \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i(\sigma_i) \tau_{1i} d\sigma_i = \bar{c}_1 < \infty, \quad (3)$$

где

$$L_i = \tau_1 D_2 C_3 - D_1^* \tau_1 C_1, \quad M_1 = \tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2, \quad \tau_1 = \text{diag}(\tau_1 1, \dots, \tau_{1m}),$$

$$\varphi(\sigma(t)) = \dot{Y}_1(t) - C_1 Y_1(t) - C_2 Y_2(t), \quad \sigma(t) = D_1 Y_1(t) + D_2 Y_2(t),$$

$$\dot{Y}_1(t) = C_1 Y_1(t) + C_2 Y_2(t) + \varphi(\sigma(t)), \quad \dot{Y}_2(t) = C_2 Y_1(t) + C_4 Y_2(t),$$

$$Y_1(t) = (y_1, y_2, \dots, y_m), \quad Y_2(t) = (y_{m+1}(t), \dots, y_n(t)), \quad t \in I = [0, \infty),$$

$$W_{11}(y) = Y_1^*(t) [-C_1^* \tau_1 D_2 C_3] Y_1(t) + Y_1^*(t) [-C_3^* D_2^* \tau_1 C_2 - C_1^* \tau_1 D_2 C_4] Y_2(t) + Y_2^*(t) [-C_3^* \tau_1 D_2 C_4] Y_2(t), \quad t \in I, \quad y = (y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n) = (Y_1(t), Y_2(t)).$$

Лемма 1 Пусть выполнены условия леммы 3 из (Айсагалиев, 2017 : 3-20). Тогда несобственный интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} [\dot{Y}_1^*(t)\tau_1 D_1 \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t)L_1 Y_1(t) + W_1(y(t))]dt + l_1 = \bar{c}_1 < \infty, \quad (4)$$

где

$$l_1 = Y_1^*(t)M_1 Y_2(t) \Big|_0^{\infty}, \quad |l_1| < \infty, \quad (5)$$

$$W_1(y) = W_{11}(y) - Y_1^*(t)M_1[C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)], \quad t \in I. \quad (6)$$

Доказательство. Произведение

$$\dot{Y}_1^*(t)M_1 Y_2(t) = \frac{d}{dt}[Y_1^*(t)M_1 Y_2(t)] - Y_1^*(t)M_1 \dot{Y}_2^*(t), \quad t \in I,$$

где $\dot{Y}_2^*(t) = C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)$, $t \in I$. Теперь несобственный интеграл (3) запишется в виде (4), где

$$l_1 = Y_1^*(t)M_1 Y_2(t) \Big|_0^{\infty}, \quad |l_1| < \infty,$$

в силу ограниченности функции $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, $t \in I$. Лемма доказана.

Как показано в (Айсагалиев, 2017 : 3-20) из теоремы 4 следует, что несобственный интеграл

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\dot{Y}_1^*(t)\tau_2 \mu_0^{-1} \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t)L_2 Y_1(t) + \dot{Y}_1^*(t)M_2 Y_2(t) + W_{21}(y)]dt \leq 0, \quad (7)$$

где $L_2 = -2\tau_2 \mu_0^{-1} C_1 - \tau_2 D_1$, $M_2 = -2\tau_2 \mu_0^{-1} C_2 - \tau_2 D_2$, $W_{21}(y) = W_{21}(Y_1, Y_2) = Y_1^*(C_1^* \tau_2 \mu_0^{-1} \times C_1 + C_1^* \tau_2 D_1)Y_1 + Y_1^*(2C_1^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_2 + D_1^* \tau_2 C_2 + C_1^* \tau_2 D_2)Y_2 + Y_2^*(C_2^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_2 + C_2^* \tau_2 D_2)Y_2$, $Y_1 = Y_1(t)$, $Y_2 = Y_2(t)$, $t \in I$.

Лемма 2 Пусть выполнены условия леммы 4 из (Айсагалиев, 2017 : 3-20). Тогда несобственный интеграл

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\dot{Y}_1^*(t)\tau_2 \mu_0^{-1} \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t)L_2 Y_1(t) + W_2(y(t))]dt + l_2 \leq 0, \quad (8)$$

где

$$l_2 = Y_1^*(t)M_1 Y_2(t) \Big|_0^{\infty}, \quad |l_2| < \infty, \quad (9)$$

$$W_2(y) = W_{21}(y) - Y_1^*(t)M_2[C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)], \quad t \in I. \quad (10)$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 3 Пусть выполнены условия леммы 6 из (Айсагалиев, 2017 : 3-20). Тогда несобственный интеграл

$$\begin{aligned}
 I_3 &= - \int_0^{\infty} [\alpha \dot{Y}_1(t) + \beta Y_1(t) + \gamma Y_2(t)]^* [\alpha \dot{Y}_1(t) + \beta Y_1(t) + \gamma Y_2(t)] dt = \\
 &= \int_0^{\infty} [\dot{Y}_1^*(t)(-\alpha^* \alpha) \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t) L_3^* Y_1(t) + W_3(y(t))] dt + l_3 \leq 0, \quad |l_3| < \infty;
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

где

$$l_3 = Y_1^*(t) M_3 Y_2(t) \Big|_0^{\infty}, \quad |l_3| < \infty, \quad M_3 = -2\alpha^* \gamma,
 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 W_3(y) &= -Y_1^*(t) \beta^* \beta Y_1(t) - 2Y_1^*(t) \beta^* \gamma Y_2(t) - Y_2^*(t) \gamma^* \gamma Y_2(t) - \\
 &Y_1^*(t) (-2\alpha^* \gamma) [C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)], \quad t \in I,
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in R^m, \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in R^m, \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in R^{n-m}, \quad L_3 = -2\alpha^* \beta.$$

Как следует из леммы 7 (см. (Айсагалиев, 2017 : 3-20)) несобственный интеграл

$$I_4 = \int_0^{\infty} W_4(y(t)) dt = \frac{1}{2} Y_2^*(t) \Gamma Y_2(t) \Big|_0^{\infty} < \infty,
 \tag{14}$$

где

$$W_4(y) = Y_2(t) \Gamma C_3 Y_1(t) + Y_2(t) \Gamma C_4 Y_2(t), \quad t \in I,
 \tag{15}$$

$\Gamma = \Gamma^*$ – матрица порядка $(n - m) \times (n - m)$.

3.2 Абсолютная устойчивость

На основе результатов изложенных в (Айсагалиев, 2017 : 3-20) об оценке несобственных интегралов, а также леммы 1 – 3 приведенных выше могут быть сформулированы условия абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Теорема 1 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрицы A , $A + B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \mu_0 < \bar{\mu}_0$ – гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, и пусть, кроме того:

1) диагональные матрицы $\tau_1 = \text{diag}(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m})$, $\tau_2 = \text{diag}(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}) > 0$ порядков $m \times m$, $m \times m$ соответственно, матрица $\Gamma = \Gamma^*$ порядка $(n - m) \times (n - m)$, и векторы $\alpha \in R^m$, $\beta \in R^m$, $\gamma \in R^{n-m}$ такие, что

$$\frac{1}{2} (\tau_1 D_1 + D_1^* \tau_1) + \tau_2 \mu_0^{-1} - \alpha^* \alpha \geq 0, \quad L = L_1 + L_2 + L_3 = L^*;
 \tag{16}$$

2) квадратичная форма $T(y) = \frac{1}{2}[W(y) + W^*(y)] > 0, \forall y, y \in R^n, y \neq 0, T(0) = 0$, где $W(y) = \sum_{i=1}^4 W_i(y)$, $W_i(y), i = \overline{1,4}$ определяются формулами (6), (10), (13), (15).

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Как следует из формул (4), (7), (11), (14) несобственные интегралы $I_1 = \bar{c}_1 < \infty, I_2 \leq 0, I_3 \leq 0, I_4 < \infty$. Тогда несобственный интеграл

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \int_0^{\infty} \{ \dot{Y}_1^*(t) [\frac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^* \tau_1) + \tau_2 \mu_0^{-1} - \alpha^* \alpha] \dot{Y}_1^*(t) + \dot{Y}_1^*(L_1 + L_2 + L_3) Y_1(t) + \sum_{i=1}^4 W_i(y(t)) \} dt + l_1 + l_2 + l_3 \leq \bar{c}_1 + l_4 < \infty, \quad (17)$$

где $|\bar{c}_1| < \infty, l_4 = \frac{1}{2} Y_2^*(t) \Gamma Y_2(t) \Big|_0^{\infty} < \infty, |l_1| < \infty, |l_2| < \infty, |l_3| < \infty$.

Из (17), с учетом (16), получим

$$\int_0^{\infty} [\dot{Y}_1^*(t) L Y_1(t) + \sum_{i=1}^4 W_i(y)] dt \leq \bar{c}_1 + l_4 - l_1 - l_2 - l_3 \leq |\bar{c}_1| + |l_4| + |l_1| + |l_2| + |l_3| < \infty. \quad (18)$$

По условию теоремы матрица $L = L^*$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \dot{Y}_1^*(t) L Y_1(t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} [Y_1^*(t) L Y_1(t)] dt = l_5 = \\ &= \frac{1}{2} Y_1^*(t) L Y_1(t) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} Y_1^*(\infty) L Y_1(\infty) - \frac{1}{2} Y_1^*(0) L Y_1(0) < \infty, \end{aligned}$$

в силу ограниченности функции $Y_1(t), t \in I$. Теперь из (18) следует, что

$$\int_0^{\infty} \left[\sum_{i=1}^4 W_i(y(t)) \right] dt \leq |\bar{c}_1| + |l_1| + |l_2| + |l_3| + |l_4| + |l_5| < \infty. \quad (19)$$

Как следует из формул (6), (10), (18), (15) функция

$$W(y) = \sum_{i=1}^4 W_i(y) = Y_1^* \Lambda_1 Y_1 + Y_1^* \Lambda_2 Y_2 + Y_2^* \Lambda_3 Y_2 = y^* \Lambda y,$$

где

$$\Lambda_1 = -C_1^* \tau_1 D_2 C_3 - M_1 C_3 + C_1^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_1 + C_1^* \tau_2 D_1 - M_2 C_3 - \beta^* \beta + 2\alpha^* \gamma C_3;$$

$$\Lambda_2 = -C_3^* D_2^* \tau_1 C_2 - C_1^* \tau_1 D_2 C_4 - M_1 C_4 + 2C_1^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_2 + \\ + D_1^* \tau_2 C_2 + C_1^* \tau_2 C_2 + C_1^* \tau_2 D_2 - M_2 C_4 - 2\beta^* \gamma + 2\alpha^* \gamma C_4 + C_3^* \Gamma;$$

$$\Lambda_3 = -C_3 \tau_1 D_2 C_4 + C_2^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_2 + C_2^* \tau_2 D_2 - \gamma^* \gamma + \Gamma C_4;$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \frac{1}{2} \Lambda_2 \\ \frac{1}{2} \Lambda_2^* & \Lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда несобственный интеграл (19) запишется в виде

$$\int_0^{\infty} W(y) dt = \int_0^{\infty} y^*(t) \Lambda y(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} [W(y) + W^*(y)] dt = \\ = \int_0^{\infty} T(y(t)) dt = \int_0^{\infty} y^*(t) \left[\frac{1}{2} \Lambda + \frac{1}{2} \Lambda^* \right] y(t) dt < \infty.$$

По условию теоремы $T(y) = y^* \left(\frac{1}{2} \Lambda + \frac{1}{2} \Lambda^* \right) y > 0$, $y \neq 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $T(0) = 0$. Следовательно, выполнены условия теоремы 2 из (Айсагалиев, 2017 : 3-20), где $|y(t)| \leq c_2$, $|\dot{y}_3| \leq c_3$, $\forall t$, $t \in I$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Поскольку $x(t) = K^{-1} y(t)$, $t \in I$, по $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Итак, выполнены все условия приведенные в определении 1 об абсолютной устойчивости тривиального решения системы (1), (2). Теорема доказана.

Теорема 2 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрицы A , $A + B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \mu_0 < \bar{\mu}_0$ – гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, и пусть, кроме того:

- 1) существует матрица $\omega = \omega^* > 0$ порядка $m \times m$, такая, что $\pi - \xi \omega^{-1} \xi^* \geq 0$, где $\pi = \frac{1}{2} (\tau_1 D_1 + D_1^* \tau_1) + \tau_2 \mu_0^{-1} - \alpha^* \alpha$, $\xi = \frac{1}{2} (-L_1 + L_2 + L_3)$;
- 2) квадратичная форма $T_1(y) = T(y) - Y_1^* \omega Y_1 > 0$, $\forall y$, $y \neq 0$, $y \in R^n$, $T_1(0) = 0$, $Y_1 = (y_1, \dots, y_m) \in R^m$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Доказательство. Как следует из формулы (17)

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \int_0^{\infty} [\dot{Y}_1^*(t) \pi \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t) \xi Y_1(t) + Y_1^* \xi^* \dot{Y}_1 + Y_1^* \omega Y_1] dt + \\ + \int_0^{\infty} [T(y) - Y_1^* \omega Y_1] dt + l_1 + l_2 + l_3 \leq \bar{c}_1 + l_4 < \infty,$$

где $Y_1 = Y_1(t)$, $t \in I$, $|l_i| < \infty$, $i = \overline{1, 4}$, $|\bar{c}_1| < \infty$.

Так как

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1^* \pi \dot{Y}_1 + \dot{Y}_1^* \xi Y_1 + Y_1^* \xi^* \dot{Y}_1 + Y_1^* \omega Y_1 = \dot{Y}_1^* [\pi - \xi \omega^{-1} \xi] \dot{Y}_1 + \\ + [Y_1 + \omega^{-1} \xi^* \dot{Y}_1]^* \omega [Y_1 + \omega^{-1} \xi^* \dot{Y}_1] \geq 0, \end{aligned}$$

то

$$\int_0^{\infty} [T(y(t)) - Y_1^*(t) \omega Y_1(t)] dt + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 < \infty.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} T_1(y(t)) dt < \int_0^{\infty} [T(y(t)) - Y_1^*(t) \omega Y_1(t)] dt < \infty. \quad (20)$$

По условию теоремы $T_1(y) > 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $T_1(0) = 0$, следовательно, как следует из (20) $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K^{-1} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Теорема доказана.

3.3 Проблема Айзермана

Возникает вопрос: можно ли выделить класс многомерных нелинейных регулируемых систем, для которого проблема Айзермана имеет решение, не прибегая к проверке условия абсолютной устойчивости из теоремы 1.

Теорема 3 Пусть выполнены условия лемм 1, 3, матрицы A , $A + B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \mu_0 < \bar{\mu}_0$ – гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, и пусть, кроме того:

1) диагональная матрица $\tau_1 = \text{diag}(\tau_1 1, \dots, \tau_1 m)$, матрица $\Gamma - \Gamma^*$ порядка $(n - m) \times (n - m)$ и векторы $\alpha \in R^m$, $\beta \in R^m$, $\gamma \in R^{n-m}$ такие, что

$$\frac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^* \tau_1) - \alpha^* \alpha \geq 0, \quad \bar{L} = L_1 + L_3 = \bar{L}^*; \quad (21)$$

2) квадратичная форма $T_2(y) = \frac{1}{2}[\bar{W}(y) + \bar{W}^*(y)] > 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $y \neq 0$, $T_2(0) = 0$, где $\bar{W}(y) = W_1(y) + W_3(y) + W_4(y)$.

Тогда в секторе $[0, \mu_0]$, $\mu_0 = \bar{\mu}_0 - \varepsilon$, $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, m}$ – сколь угодно малые числа, проблема Айзермана имеет решение.

Доказательство. Как следует из формул (4), (11), (14) несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I_1 + I_3 + I_4 = \int_0^{\infty} [\dot{Y}_1^* [\frac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^* \tau_1) - \alpha^* \alpha] \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t)(L_1 + L_3)Y_1(t) + \\ + W_1(y) + W_3(y) + W_4(y) + l_1 + l_3] dt \leq \bar{c}_1 + l_4 < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (21), имеем

$$\int_0^{\infty} [\dot{Y}_1^*(t) \bar{L} Y_1(t) + \bar{W}(y(t))] dt < \infty. \quad (22)$$

По условию теоремы матрица $\bar{L} = \bar{L}^*$. Следовательно,

$$\int_0^{\infty} \dot{Y}_1^*(t) \bar{L} Y_1(t) dt = l_6 = \frac{1}{2} Y_1^*(t) \bar{L} Y_1(t) \Big|_0^{\infty} < \infty.$$

Теперь соотношение (22) запишется в виде

$$\int_0^{\infty} T_2(y(t)) dt \leq |\bar{c}_1| + |l_4| + |l_1| + |l_3| + |l_6| < \infty.$$

По условию теоремы $T_2(y) > 0$, $y \neq 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $T_2(0) = 0$. Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K^{-1} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Матрица $\mu_0 = \text{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m}) = \bar{\mu}_0 - \varepsilon$ определяется из условия гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$. Теорема доказана.

Теорема 4 Пусть выполнены условия лемм 1, 3, матрицы A , $A + B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \mu_0 < \bar{\mu}_0$ – гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, и пусть, кроме того:

1) существует матрица $\omega_1 = \omega_1^* > 0$ порядка $m \times m$, такая, что $\pi_1 - \xi_1 \omega_1^{-1} \xi^* \geq 0$, где $\pi_1 = \frac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^* \tau_1) - \alpha^* \alpha$, $\xi = \frac{1}{2}(L_1 + L_3)$;

2) квадратичная форма $T_3(y) = T_2(y) - Y_1^* \omega_1 Y_1 > 0$, $\forall y$, $y \in R^n$, $y \neq 0$, $T_3(0) = 0$.

Тогда в секторе $[0, \mu_0]$, $\mu_0 = \bar{\mu}_0 - \varepsilon$, $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_i > 0$, $i = \overline{1, m}$ – сколь угодно малые числа, проблема Айзermana имеет решение.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Заметим, что: 1) матрица $S = DK$, $D = (D_1, D_2)$, следовательно, матрица D является матрицей обратной связи, $D = SK^{-1}$; 2) Если $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\pi = 0$, то условие (21) запишется в виде $\frac{1}{2}(\tau_1 D_1 + D_1^* \tau_1) \geq 0$, $\bar{L} = L_1 = \tau_1 D_2 C_3 - D_1^* \tau_1 C_1 = L_1^*$. Следовательно, путем выбора матрицей обратной связи $D = (D_1, D_2)$ обеспечивается выполнения условия (21); 3) теоремы 3, 4 следуют из теорем 1, 2 при $\tau_2 = 0$.

4 Решение модельной задачи

Уравнения регулируемой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 - \varphi_2(\sigma_2), \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - 1, 03x_2 - 0, 03x_3 - 0, 75\varphi_1(\sigma_1), \\ \dot{x}_3 &= -0, 01x_2 - 1, 01x_3 - 0, 25\varphi_1(\sigma_1) + \varphi_2(\sigma_2), \quad \sigma_1 = x_2 + x_3, \quad \sigma_2 = -x_1 + x_2 - x_3, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) \in \Phi_0 &= \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \varphi_2(\sigma_2)) \in C(R^2, R^2) / 0 \leq \varphi_1(\sigma_1)\sigma_1 \leq \mu_{01}\sigma_1^2, \\ &0 \leq \varphi_2(\sigma_2)\sigma_2 \leq \mu_{02}\sigma_2^2, \quad \sigma_1 \in R^1, \quad \sigma_2 \in R^1, \quad \varphi(0) = 0, \quad |\varphi(\sigma)| \leq \varphi_*, \\ &\forall \sigma, \quad \sigma \in R^2, \quad 0 < \varphi_* < \infty, \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)\}. \end{aligned} \quad (24)$$

В векторной форме уравнение (23) запишется так

$$\dot{x} = Ax + B_1\varphi_1(\sigma_1) + B_2\varphi_2(\sigma_2), \quad \sigma_1 = S_1x, \quad \sigma_2 = S_2x, \quad (25)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1,03 & -0,03 \\ 0 & -0,01 & -1,01 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,75 \\ -0,25 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$S_1 = (0, 1, 1), \quad S_2 = (-1, 1, -1).$$

1. Неособое преобразование. Выберем вектор $\theta_1^* = (\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13})$ так, чтобы $\theta_1^* B_1 = 1$, $\theta_1^* B_2 = 0$. Вектор $\theta_1^* = (1; -5/3; 1)$. Аналогично, определим вектор $\theta_2^* = (\theta_{21}, \theta_{22}, \theta_{23})$ из условия $\theta_2^* B_1 = 0$, $\theta_2^* B_2 = 1$. Вектор $\theta_2^* = (0; -1/3; 1)$. Наконец, вектор $\theta_3^* = (\theta_{31}, \theta_{32}, \theta_{33})$ выберем так, чтобы $\theta_3^* B_1 = 0$, $\theta_3^* B_2 = 0$. Вектор $\theta_3^* = (1; -1/3; 1)$. Определитель

$$\Gamma(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{vmatrix} \langle \theta_1, \theta_1 \rangle & \langle \theta_1, \theta_2 \rangle & \langle \theta_1, \theta_3 \rangle \\ \langle \theta_2, \theta_1 \rangle & \langle \theta_2, \theta_2 \rangle & \langle \theta_2, \theta_3 \rangle \\ \langle \theta_3, \theta_1 \rangle & \langle \theta_3, \theta_2 \rangle & \langle \theta_3, \theta_3 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 43/9 & 14/9 & 23/9 \\ 14/9 & 10/9 & 10/9 \\ 23/9 & 10/9 & 19/9 \end{vmatrix} = \frac{16}{9} > 0.$$

Следовательно, векторы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ линейно независимы.

Так как векторы $\theta_1^* A = (13/3; 8, 12/3, -0,96)$, $\theta_2^* A = (2/3; 1/3, -1)$, $\theta_3^* A = (5/3; 4/3, -1)$, то

$$\theta_1^* A = -\frac{5,37}{3}\theta_1^* - \frac{15,88}{3}\theta_2^* + \frac{18,37}{3}\theta_3^*;$$

$$\theta_1^* Ax = -\frac{5,37}{3}y_1 - \frac{15,88}{3}y_2 + \frac{18,37}{3}y_3;$$

где $y_1 = \theta_1^* x$, $y_2 = \theta_2^* x$, $y_3 = \theta_3^* x$. Следовательно,

$$\dot{y}_1 = -\frac{5,37}{3}y_1 - \frac{15,88}{3}y_2 + \frac{18,37}{3}y_3 + \varphi_1(\sigma_1).$$

Аналогичным путем, находим

$$\theta_2^* A = 0 \cdot \theta_1^* - \frac{5}{3}\theta_2^* + \frac{2}{3}\theta_3^*;$$

$$\theta_2^* Ax = -\frac{5}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \quad \dot{y}_2 = -\frac{5}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \varphi_2(\sigma_2);$$

$$\theta_3^* A = -\frac{3}{4}\theta_1^* - \frac{8}{3}\theta_2^* + \frac{29}{12}\theta_3^*, \quad \theta_3^* Ax = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{8}{3}y_2 + \frac{29}{12}y_3,$$

$$\dot{y}_3 = -\frac{3}{4}y_1 - \frac{8}{3}y_2 + \frac{29}{12}y_3.$$

Так как $S_1 = (0, 1, 1) = -1 \cdot \theta_1^* + 1 \cdot \theta_2^* + 1 \cdot \theta_3^*$, то $\sigma_1 = S_1 x = -y_1 + y_2 + y_3$, $S_2 = (-1, 1, -1) = -\frac{1}{2}\theta_1^* - \frac{1}{2}\theta_3^*$, $\sigma_2 = S_2 x = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3$.

Из вышеизложенного следует, что уравнение (25) с неособым преобразованием приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -1,79y_1 - \frac{15,88}{3}y_2 + \frac{18,37}{3}y_3 + \varphi_1(\sigma_1), \\ \dot{y}_2 &= -\frac{5}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \varphi_2(\sigma_2), \\ \dot{y}_3 &= -\frac{3}{4}y_1 - \frac{8}{3}y_2 + \frac{29}{12}y_3, \\ \sigma_1 &= -y_1 + y_2 + y_3, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3, \end{aligned} \tag{26}$$

где функция $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \varphi_2(\sigma_2))$ удовлетворяет включения (24).

Матрицы

$$R = \|\theta_1, \theta_2, \theta_3\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |R| = -\frac{4}{3} \neq 0.$$

$$K = R^* = \begin{pmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \theta_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5/8 & 1 \\ 0 & -1/3 & 1 \\ 1 & -1/36 & 1 \end{pmatrix}, \quad K^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3/4 & 0 & 3/4 \\ -1/4 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Вводя следующие матрицы и векторы

$$C = \begin{pmatrix} -1,79 & -15,88/3 & 18,37/3 \\ 0 & -5/3 & 2/3 \\ -3/4 & -8/3 & 29/12 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

уравнение (26) запишем в векторной форме

$$\dot{y} = Cy + E\varphi(\sigma), \quad \sigma = Dy, \tag{27}$$

где $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Легко убедиться в том, что $C = KAK^{-1}$, $D = SK^{-1}$, $E = KB$.

2. Свойства решений. Характеристическое уравнение матрицы A равно

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = |\lambda I_3 - A| = \lambda^3 + 1,04\lambda^2 + \lambda + 0,98 = 0.$$

Так как все коэффициенты характеристического полинома больше нуля и $1,04 > 0,98$, то матрица A – гурвицева. Тогда, как следует из теоремы 1 $|x(t)| \leq c_0$, $|\dot{x}(t)| \leq c_1$, $|y(t)| \leq c_2$, $|\dot{y}(t)| \leq c_3$, $|\sigma(t)| \leq c_4$, $|\dot{\sigma}(t)| \leq c_5$, $t \in I$. Из леммы 4 следует, что вдоль решения уравнения (25), (26) когда функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ удовлетворяет условию (24), верны тождества:

$$\varphi_1(\sigma_1(t)) = \dot{y}_1(t) + 1,79y_1(t) + \frac{15,88}{3}y_2(t) - \frac{18,37}{3}y_3(t), \quad t \in I, \tag{28}$$

$$\varphi_2(\sigma_2(t)) = \dot{y}_2(t) + \frac{5}{3}y_2(t) - \frac{2}{3}y_3(t), \tag{29}$$

$$\sigma_1(t) = -y_1(t) + y_2(t) + y_3(t), \quad \sigma_2(t) = -\frac{1}{2}y_1(t) - \frac{1}{2}y_3(t), \quad t \in I, \tag{30}$$

$$\dot{y}_3(t) = -\frac{3}{4}y_1(t) - \frac{8}{3}y_2(t) + \frac{29}{12}y_3(t), \quad t \in I, \tag{31}$$

$$\dot{\sigma}_1(t) = -\dot{y}_1(t) + \dot{y}_2(t) + \dot{y}_3(t), \quad \dot{\sigma}_2(t) = -\frac{1}{2}\dot{y}_1(t) - \frac{1}{2}\dot{y}_3(t), \quad t \in I, \quad (32)$$

Из тождества (31) следует, что

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{y}_1\dot{y}_3 &= -\frac{8}{3}\dot{y}_1y_2 + \frac{29}{12}\left(\frac{3}{4}y_1^2 + \frac{8}{3}y_1y_2 - \frac{29}{12}y_1y_3\right) + \frac{d}{dt}\left[\frac{29}{12}y_1y_3 - \frac{3}{8}y_1^2\right], \\ 2) \quad \dot{y}_2\dot{y}_3 &= \frac{3}{4}\dot{y}_1y_2 + \frac{29}{12}\left(\frac{3}{4}y_1y_2 + \frac{8}{3}y_2^2 - \frac{29}{12}y_2y_3\right) + \frac{d}{dt}\left[-\frac{3}{4}y_1y_2 - \frac{4}{3}y_2^2 + \frac{29}{12}y_2y_3\right], \\ 3) \quad \dot{y}_3\dot{y}_3 &= \frac{9}{16}y_1^2 + 4y_1y_2 + \frac{64}{9}y_2^2 - \frac{29}{16}y_1y_3 - \frac{58}{9}y_2y_3 + \frac{d}{dt}\left[\frac{29}{24}y_3^2\right], \\ 4) \quad y_1\dot{y}_3 &= -\frac{3}{4}y_1^2 - \frac{8}{3}y_1y_2 + \frac{29}{12}y_1y_3, \\ 5) \quad y_2\dot{y}_3 &= -\frac{3}{4}y_1y_2 - \frac{8}{3}y_2^2 + \frac{29}{12}y_2y_3, \\ 6) \quad \int_0^\infty \left[-\frac{3}{4}y_1y_3 - \frac{8}{3}y_2y_3 + \frac{29}{12}y_3^2\right] dt &= \frac{1}{2}y_3^2(t)\Big|_0^\infty, \\ 7) \quad \dot{y}_1y_3 &= \frac{d}{dt}(y_1y_3) - y_1\dot{y}_3; \quad \dot{y}_2y_3 = \frac{d}{dt}(y_2y_3) - y_2\dot{y}_3; \\ 8) \quad y_1\dot{y}_2 &= \frac{d}{dt}(y_1y_2) - \dot{y}_1y_2; \end{aligned}$$

3. Несобственные интегралы. Несобственный интеграл (см. (28) – (32))

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_0^\infty \varphi_1(\sigma_1(t))\tau_{11}\dot{\sigma}_1(t)dt = \int_0^\infty \left(\dot{y}_1 + 1,79y_1 + \frac{15,88}{3}y_2 - \frac{18,37}{3}y_3\right)\tau_{11}(-\dot{y}_1 + \dot{y}_2 + \dot{y}_3)dt = \\ &= \tau_{11} \int_0^\infty \left[-\dot{y}_1^2 + \dot{y}_1\dot{y}_2 - \frac{29,25}{3}\dot{y}_1y_2 + \frac{81}{16}y_1^2 + \frac{339,25}{36}y_1y_2 - \frac{2349}{144}y_1y_3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{274}{9}y_2^2 + \frac{993,25}{36}y_2y_3\right]dt + l_{11} + l_{12} = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi_1(\sigma_1)\tau_{11}d\sigma_1 = \bar{c}_{11} < \infty, \\ &\quad |l_{11}| < \infty, \quad |l_{12}| < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[-\tau_{11}\dot{y}_1^2 + \tau_{11}\dot{y}_1\dot{y}_2 - \frac{29,25}{3}\tau_{11}\dot{y}_1y_2 + \frac{81}{16}\tau_{11}y_1^2 + \frac{339,25}{36}\tau_{11}y_1y_2 - \right. \\ \left. - \frac{2349}{144}\tau_{11}y_1y_3 - \frac{274}{9}\tau_{11}y_2^2 + \frac{339,25}{36}\tau_{11}y_2y_3\right]dt < \infty. \end{aligned} \quad (33)$$

несобственный интеграл

$$I_{12} = \int_0^\infty \varphi_2(\sigma_2)\tau_{12}\dot{\sigma}_2(t)dt = \int_0^\infty \left(\dot{y}_2 + \frac{5}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3\right)\tau_{12}\left(\frac{1}{2}\dot{y}_1 - \frac{1}{2}\dot{y}_3\right)dt =$$

$$= \tau_{12} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \frac{11}{24} \dot{y}_1 y_2 - \frac{1}{4} y_1^2 - \frac{1551}{864} y_1 y_2 + \frac{29}{36} y_1 y_3 - \frac{29}{9} y_2^2 - \frac{841}{288} y_2 y_3 \right) dt +$$

$$+ l_{21} + l_{22} = \int_0^{\infty} \varphi_2(\sigma_2) \tau_{12} d\sigma_2 = \bar{c}_{21} < \infty, \quad |l_{21}| < \infty, \quad |l_{22}| < \infty.$$

Следовательно,

$$\tau_{12} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \frac{11}{24} \dot{y}_1 y_2 - \frac{1}{4} y_1^2 - \frac{1551}{864} \tau_{12} y_1 y_2 + \frac{29}{36} y_1 y_3 - \right. \\ \left. - \frac{29}{9} y_2^2 - \frac{841}{288} y_2 y_3 \right] dt < \infty. \tag{34}$$

Заметим, что $I_1 = I_{11} + I_{12}$, $\tau_1 = \text{diag}(\tau_{11}, \tau_{12})$, $l_1 = l_{11} + l_{21}$, $l_2 = l_{12} + l_{22}$. Суммируя несобственные интегралы (33), (34) получим

$$I_{10} = \int_0^{\infty} \left[-\tau_{11} \dot{y}_1^2 + \left(\tau_{11} + \frac{1}{2} \tau_{12} \right) \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \left(-\frac{29, 25}{3} \tau_{11} + \frac{11}{24} \tau_{12} \right) \dot{y}_1 y_2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{81}{16} \tau_{11} - \frac{1}{4} \tau_{12} \right) y_1^2 + \left(\frac{339, 25}{36} \tau_{11} - \frac{1551}{864} \tau_{12} \right) y_1 y_2 + \right. \\ \left. + \left(-\frac{2349}{144} \tau_{11} + \frac{29}{36} \tau_{12} \right) y_1 y_3 + \left(-\frac{274}{9} \tau_{11} - \frac{29}{9} \tau_{12} \right) y_2^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{993, 25}{36} \tau_{11} - \frac{841}{228} \tau_{12} \right) y_2 y_3 \right] dt < \infty. \tag{35}$$

Несобственный интеграл $I_2 = I_{21} + I_{22}$, где $\tau_2 = \text{diag}(\tau_{21}, \tau_{22}) \geq 0$,

$$I_{21} = \int_0^{\infty} [\varphi_1(\sigma_1(t)) \tau_{21} \mu_{01}^{-1} \varphi_1(\sigma_1(t)) - \varphi_1(\sigma_1(t)) \tau_{21} \sigma_1(t)] dt + l_{31}, \tag{36}$$

$$I_{22} = \int_0^{\infty} [\varphi_2(\sigma_2(t)) \tau_{22} \mu_{02}^{-1} \varphi_2(\sigma_2(t)) - \varphi_2(\sigma_2(t)) \tau_{22} \sigma_2(t)] dt + l_{32}. \tag{37}$$

Из (36) с учетом тождеств (28), (29), получим

$$I_{21} = \int_0^{\infty} \left[\tau_{21} \mu_{01}^{-1} y_1^2 + \left(-\tau_{21} + \frac{31, 76}{3} \tau_{21} \mu_{01}^{-1} \right) \dot{y}_1 y_2 + \left(1, 04 \tau_{21} - 5, 9809 \tau_{21} \mu_{01}^{-1} \right) y_1^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{2, 51}{3} \tau_{21} - \frac{123, 3688}{9} \tau_{21} \mu_{01}^{-1} \right) y_1 y_2 + \left(-\frac{16, 48}{3} \tau_{21} + \frac{69, 0712}{9} \tau_{21} \mu_{01}^{-1} \right) y_1 y_3 + \right. \\ \left. + \left(-\frac{15, 88}{3} \tau_{21} + \frac{252, 1744}{3} \tau_{21} \mu_{01}^{-1} \right) y_2^2 + \left(\frac{2, 49}{3} \tau_{21} - \frac{583, 4312}{9} \tau_{21} \mu_{01}^{-1} \right) y_2 y_3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{18, 37}{3} \tau_{21} + \frac{337, 4569}{9} \tau_{21} \mu_{01}^{-1} \right) y_3^2 \right] dt + l_{31} \leq 0, \quad |l_{31}| < \infty. \tag{38}$$

Из (37) с учетом тождеств (29), (30), имеем

$$I_{22} = \int_0^{\infty} [\tau_{22}\mu_{02}^{-1}\dot{y}_2^2 - \frac{1}{2}\tau_{22}\dot{y}_1y_2 + (-\tau_{22}\mu_{02}^{-1} + \frac{29}{24}\tau_{22})y_1y_2 + (-\frac{1}{3}\tau_{22})y_1y_3 + (-\frac{7}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1} + \frac{4}{3}\tau_{22})y_2^2 + (\tau_{22}\mu_{02}^{-1} - \frac{3}{8}\tau_{22})y_2y_3 + (\frac{4}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1} - \frac{1}{3}\tau_{22})y_3^2]dt + l_{32} \leq 0, \quad |l_{32}| < \infty.$$

Тогда несобственный интеграл

$$I_2 = \int_0^{\infty} [\tau_{21}\mu_{01}^{-1}\dot{y}_1^2 + \tau_{22}\mu_{01}^{-1}\dot{y}_2^2 + (-\tau_{21} + \frac{31,76}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \frac{1}{2}\tau_{22})\dot{y}_1y_2 + (1,04\tau_{21} - 5,9809\tau_{21}\mu_{01}^{-1})y_1^2 + (\frac{2,51}{3}\tau_{21} - \frac{123,3688}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \tau_{22}\mu_{02}^{-1} + \frac{29}{24}\tau_{22})y_1y_2 + (-\frac{16,48}{3}\tau_{21} + \frac{69,0712}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \frac{1}{3}\tau_{22})y_1y_3 + (-\frac{15,88}{3}\tau_{21} + \frac{252,1744}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \frac{7}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1} + \frac{4}{3}\tau_{22})y_2^2 + (\frac{2,49}{3}\tau_{21} - \frac{583,4312}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} + \tau_{22}\mu_{02}^{-1} + \frac{3}{8}\tau_{22})y_2y_3 + (\frac{18,37}{3}\tau_{21} + \frac{337,4569}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} + \frac{4}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1} - \frac{1}{3}\tau_{22})y_3^2]dt + l_3 \leq 0, \quad l_3 = l_{31} + l_{32}, \quad |l_3| < \infty. \quad (39)$$

Несобственный интеграл

$$I_3 = - \int_0^{\infty} [\alpha_1\dot{y}_1 + \alpha_2\dot{y}_2 + \beta_1y_1 + \beta_2y_2 + \gamma_1y_3]^2 dt = \int_0^{\infty} [-\alpha_1^2\dot{y}_1^2 - \alpha_2^2\dot{y}_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\dot{y}_1\dot{y}_2 + (-2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1)\dot{y}_1y_2 - (\beta_1^2 + \frac{3}{2}\alpha_1\gamma_1)y_1^2 - (\beta_2^2 + \frac{16}{3}\alpha_2\gamma_1)y_2^2 - \gamma_1^2y_3^2 - (2\beta_1\beta_2 + \frac{16}{3}\alpha_1\gamma_1 + \frac{3}{2}\alpha_2\gamma_1)y_1y_2 - (2\beta_1\gamma_1 - \frac{29}{6}\alpha_1\gamma_1)y_1y_3 - (2\beta_2\gamma_1 - \frac{29}{6}\alpha_2\gamma_1)y_2y_3]dt + l_4 \leq 0, \quad |l_4| < \infty. \quad (40)$$

Несобственный интеграл

$$I_4 = \Gamma \int_0^{\infty} y_3(t)\dot{y}_3(t)dt = \Gamma \int_0^{\infty} [-\frac{3}{4}y_1y_3 - \frac{8}{3}y_2y_3 + \frac{29}{12}y_3^2]dt = \frac{\Gamma}{2}y_3^2(t) \Big|_0^{\infty} < \infty.$$

4. Абсолютная устойчивость.

Сумма несобственных интегралов (см. (33) – (35), (36) – (38), (39), (40))

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \int_0^{\infty} [(-\tau_{11} + \tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \alpha_1^2)\dot{y}_1^2 + (\tau_{11} + \frac{1}{2}\tau_{12} - 2\alpha_1\alpha_2)\dot{y}_1\dot{y}_2 +$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left(-\frac{29,25}{3}\tau_{11} + \frac{11}{24}\tau_{12} - \tau_{21} + \frac{31,76}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \frac{1}{2}\tau_{22} - 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1\right)y_1y_2 + \\
 &+ (\tau_{22}\mu_{01}^{-1} - \alpha_2^2)y_2^2]dt + \int_0^\infty T(y(t))dt + \sum_{i=1}^4 l_i < \infty,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 T(y) = \frac{1}{2}(W(y) + W^*(y)), \quad W(y) = & \left(\frac{81}{16}\tau_{11} - \frac{1}{4}\tau_{12} + 1,04\tau_{21} - \right. \\
 & - 5,9809\tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \beta_1^2 - \frac{3}{2}\alpha_1\gamma_1)y_1^2 + \left(\frac{339,25}{36}\tau_{11} - \frac{1551}{864}\tau_{12} + \frac{2,51}{3}\tau_{21} - \right. \\
 & - \frac{123,3688}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \tau_{22}\mu_{02}^{-1} + \frac{29}{24}\tau_{22} - 2\beta_1\beta_2 - \frac{16}{3}\alpha_1\gamma_1 - \frac{3}{2})y_1y_2 + \\
 & + \left(-\frac{23,49}{144}\tau_{11} + \frac{29}{24}\tau_{12} - \frac{16,48}{3}\tau_{21} + \frac{69,0712}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \frac{1}{3}\tau_{22} - 2\beta_1\gamma_1 + \right. \\
 & + \frac{29}{6}\alpha_1\gamma_1 - \frac{3}{4}\Gamma)y_1y_3 + \left(-\frac{274}{9}\tau_{11} - \frac{29}{9}\tau_{12} - \frac{15,88}{3}\tau_{11} + \frac{252,1744}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \right. \\
 & - \frac{993,25}{36}\tau_{11} - \frac{841}{288}\tau_{12} + \frac{2,49}{3}\tau_{21} - \\
 & - \frac{583,4312}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} + \tau_{22}\mu_{02}^{-1} - \frac{3}{8}\Gamma - 2\beta_2\gamma_1 + \frac{29}{6}\alpha_2\gamma_1)y_2y_3 + \\
 & + \left(\frac{18,37}{3}\tau_{21} + \frac{337,4569}{9}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} + \frac{4}{9}\tau_{22}\mu_{02}^{-1} - \frac{1}{3}\tau_{22} - \gamma_1^2 + \frac{29}{12}\Gamma)y_3^2.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Условия (16) теоремы 1, когда $L = 0$ запишется так:

$$\begin{aligned}
 & -\tau_{11} + \tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \alpha_1^2 = 0, \quad \tau_{11} + \frac{1}{2}\tau_{12} - 2\alpha_1\alpha_2 = 0, \\
 & -\frac{29,25}{3}\tau_{11} + \frac{11}{24}\tau_{12} - \tau_{21} + \frac{31,76}{3}\tau_{21}\mu_{01}^{-1} - \frac{1}{2}\tau_{22} - 2\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 = 0, \\
 & \tau_{22}\mu_{02}^{-1} - \alpha_2^2 = 0.
 \end{aligned}$$

Тогда сумма

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \int_0^\infty T(y(t))dt + \sum_{i=1}^4 l_i < \infty, \quad |l_i| < \infty, \quad i = \overline{1,4}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty T(y(t))dt = \int_0^\infty \frac{1}{2}[W(y_1, y_2, y_3) + W^*(y_1, y_2, y_3)]dt < \infty.$$

По утверждению теоремы 1 должно быть выполнено неравенство

$$T(y_1, y_2, y_3) > 0, \quad \forall y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, \quad y \neq 0, \quad T(0, 0, 0) = 0.$$

По условию теоремы 1 требуется гурвицевость матрицы $A + B\mu S$, $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}_0$, $\bar{\mu}_0 \geq \mu_0$, где $\mu = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$, $\mu_0 = \text{diag}(\mu_{01}, \mu_{02})$. Матрица $A + B\mu S$ подобна матрице $C + E\mu D$.

В самом деле, $C + E\mu D = KAK^{-1} + KB\mu SK^{-1} = K(A + B\mu S)K^{-1}$. Следовательно, для гурвицевости матрицы $A + B\mu S$ необходимо и достаточно гурвицевость матрицы $C + E\mu D$. Из уравнений (27) при $\varphi_1(\sigma_1) = \mu_1\sigma_1$, $\varphi_2(\sigma_2) = \mu_2\sigma_2$, где $\sigma_1 = -y_1 + y_2 + y_3$, $\sigma_2 = -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3$, получим

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -1,79y_1 - \frac{15,88}{3}y_2 + \frac{18,37}{3}y_3 + \mu_1\sigma_1, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{5}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3 + \mu_2\sigma_2, \\ \dot{y}_3 &= -\frac{3}{4}y_1 - \frac{8}{9}y_2 + \frac{29}{12}y_3.\end{aligned}$$

Тогда матрица

$$C + E\mu D = \begin{pmatrix} -1,79 - \mu_1 & -\frac{15,88}{3} + \mu_1 & \frac{18,37}{3} + \mu_1 \\ 0 & -\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\mu_2 & \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\mu_2 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{8}{9} & \frac{29}{12} \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином матрицы $C + E\mu D$ равен

$$\begin{aligned}|\lambda I_3 - C - E\mu D| &= \lambda^3 + (1,04 + \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2)\lambda^2 + (1 - \frac{4,94}{3}\mu_2)\lambda + \\ &+ (0,98 - 0,5\mu_1 - \frac{1,61}{6}\mu_2 - \frac{4}{3}\mu_1\mu_2).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для гурвицевости матрицы $C + E\mu D$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}\mu_2 < \frac{3}{4,94} = 0,60728\dots; \quad 0,98 - 0,5\mu_1 - \frac{1,61}{6}\mu_2 - \frac{4}{3}\mu_1\mu_2 > 0, \\ (1,04 + \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2)(1 - \frac{4,94}{3}\mu_2) - (0,98 - 0,5\mu_1 - \frac{1,61}{6}\mu_2 - \frac{4}{3}\mu_1\mu_2) > 0.\end{aligned}$$

Тогда предельная матрица $\bar{\mu}_0 = \text{diag}(\bar{\mu}_{01}, \bar{\mu}_{02})$, где $\bar{\mu}_{01} \approx 0,61$, $\bar{\mu}_{02} \approx 0,6$. Следовательно, $\bar{\mu}_{01} \geq \mu_{01}$, $\bar{\mu}_{02} \geq \mu_{02}$.

Таким образом, для абсолютной устойчивости положения равновесия системы (23), (24) достаточно, чтобы квадратичная форма $T(y) = \frac{1}{2}[W(y) + W^*(t)] > 0$, $\forall y$, $y \in R^3$, $y \neq 0$, $T(0) = 0$, $\mu_{01} \leq \bar{\mu}_{01} \approx 0,61$, $\mu_{02} \leq \bar{\mu}_{02} \approx 0,6$, где матрица $W(y) = W(y_1, y_2, y_3)$ определяется по формуле (41).

5 Заключение

Создан конструктивный метод исследования асимптотического свойства решений регулируемых систем описываемых уравнениями с дифференциальными включениями. Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику регулируемых систем, правая часть которых содержит нелинейные функции из

заданного множества. Исследуются два случая задания множеств нелинейных функции: первое, когда $\varphi(\sigma)$ принадлежит сектору $[0, \mu_0]$, второе, когда $\varphi(\sigma)$ находится в секторе $[\varepsilon, r_0]$. В первом случае асимптотикой $\varphi(\sigma)$ является константа $|\varphi(\sigma)| \leq \varphi_0$, $0 < \varphi_0 < \infty$; а во втором случае асимптотикой является линейная функция $\varepsilon\sigma$.

Следует отметить следующие особенности исследуемой задачи:

- начальным состоянием уравнений с дифференциальным включением является любая точка фазового пространства;
- из любой начальной точки исходят бесконечное множество решений соответствующие фиксированным нелинейностям из заданного множества;
- при фиксированной нелинейности обыкновенное дифференциальное уравнение имеет единственное решение исходящее из начальной точки;
- неопределенность правой части уравнения порождает неединственность решения, что приводит к необходимости исследования групповых свойств решений. Одним из таких свойств является абсолютная устойчивость тривиального решения;
- исследуются свойства решений при котором все решения, исходящие из любой точки при любых нелинейных функциях из заданного множества, стремятся с течением времени к положению равновесия;

Предлагается совершенно новый метод исследования абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем без привлечения каких-либо функций Ляпунова и частотных теорем, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения систем.

Список литературы

- [1] Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем // Издательство АН СССР, 1963. С. 240
- [2] Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. С.216
- [3] Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. С. 453
- [4] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.:Наука, 1978. С. 400
- [5] Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1969. №5. С. 38-48.
- [6] Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости системы управления с несколькими нелинейными элементами // АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1970. №12. С. 83-94.
- [7] Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом" динамических систем // УМН, 1949. т. 4. № 4. С. 186-188.
- [8] Kalman R.E. Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME, 1957. v. 79.3. pp. 553-556.
- [9] Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи ЧУА. Известия РАН. Теория и системы управления, 2011. № 4. С. 3-36.
- [10] Айсагалиев С.А. К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения. Минск-Москва. 1994. Т.30. №5. С. 748-757.
- [11] Айсагалиев С.А. Теория регулируемых систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2000. – С. 234
- [12] Айсагалиев С.А. Теория устойчивости динамических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2012. – 216 с.

- [13] *Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N.* Certain problems of Synchronization theory // *Journal Inverse Ill Posed Problems*, 21 (2013), – pp. 159-175.
- [14] *Айсағалиев С. А., Аязбаева А. М.* Несобственные интегралы в теории устойчивости многомерных регулируемых систем // *Вестник КазНУ, сер. мех., мат., инф.* – 2017, № 3(95). – С. 3-20.

References

- [1] Aizerman M. A., Gantmaher F. R. *Absolyutnaya ustoychivost reguliruemyyh sistem* [Absolute stability of regulated systems], (Izdatelstvo AN SSSR, 1963) : 240.
- [2] Lurie A. I. *Nekotorye nelineynyye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya* [Some nonlinear problems of automatic control theory], (M.: Gostehizdat, 1951) : 216.
- [3] Popov V. M. *Giperustoychivost avtomaticheskikh sistem* [Hyper-stability of automatic systems], (M.: Nauka, 1970) : 453.
- [4] Gelig A. H., Leonov G. A., Yakubovich V. A. *Ustoychivost nelineynykh sistem s neodinstvennyim sostoyaniem ravnovesiya* [Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state], (M.: Nauka, 1978) : 400.
- [5] Aisagaliev S. A., «Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti vyinuzhdennykh dvizheniy v nelineynykh sistemah» [On the determination of the domain of absolute stability forced motions in nonlinear systems], *Izv. AN SSSR. Tehnicheskaya kibernetika* (1969) : 38–48.
- [6] Aisagaliev S. A., «Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti sistemy upravleniya s neskol'kimi nelineynymi elementami» [On the determination of the domain of absolute stability of a control system with several nonlinear elements], *AN SSSR. Avtomatika i telemekhanika* (1970) : 83–94.
- [7] Aizerman M. A., «Ob odnoy probleme, kasayusheysya ustoychivosti v "bolshom" dinamicheskikh sistem» [On one problem concerning stability in "large" dynamical systems], *UMN* (1949) : 186–188.
- [8] Kalman R. E., «Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems», *Transactions of ASME* (1957) : 553–556.
- [9] Bragin V. O., Vagaytsev V. I., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., «Algoritmy poiska skrytykh kolebaniy v nelineynykh sistemah. Problemy Aizermana, Kalmana i tsepi ChUA» [Algorithms for searching hidden oscillations in nonlinear systems. The problems of Aizerman, Kalman, and ChUA chain], *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* (2011) : 3–36.
- [10] Aisagaliev S. A., «K teorii absolyutnoy ustoychivosti reguliruemyyh sistem» [For the theory of absolute stability of regulated systems], *Differentsialnyye uravneniya. Minsk-Moskva*, Vol. 30. No 5 (1994) : 748–757.
- [11] Aisagaliev S. A. *Teoriya reguliruemyyh sistem* [Theory of regulated systems] (Kazakh universiteti, 2000), 234.
- [12] Aisagaliev S. A. *Teoriya ustoychivosti dinamicheskikh sistem* [Stability theory of dynamical systems] (Kazakh universiteti, 2012), 216.
- [13] Aisagaliev S. A., Kalimoldayev M. N., «Certain problems of Synchronization theory», *Journal Inverse Ill Posed Problems*, No 21 (2013) : 159–175.
- [14] Aisagaliev S. A., Ayazbayeva A. M., «Nesobstvennyye integraly v teorii ustoychivosti mnogomernyyh reguliruemyyh sistem [Improper integrals for stability theory of multidimensional regulated systems]», *Vestnik KazNU, ser. meh., mat., inf.* (2017) : 3-20.

МРНТИ 27.31.44

Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений

Алдашев С.А., Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273758720, E-mail: aldash@mail.ru

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. В цилиндрической области евклидова пространства для одного класса многомерных эллиптических уравнений рассматривается спектральная задача Дирихле с однородными краевыми условиями. Решение ищется в виде разложения по многомерным сферическим функциям. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Получены условия однозначной разрешимости поставленной задачи, которые существенно зависят от высоты цилиндра.

Ключевые слова: многомерное эллиптическое уравнение, спектральная задача Дирихле, многомерная цилиндрическая область, разрешимость, критерия.

Цилиндрлік облыста бір класс көп өлшемді эллиптикалық теңдеулерге спектрлік Дирихле есебінің бір мәнді шешімділік критериясы

Алдашев С. А., Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Қазақстан Республикасы, Алматы қ. +77273758720, E-mail: aldash@mail.ru

Комплексті айнымалы аналитикалық функциялар теориясының әдісімен жазықтықта эллиптикалық теңдеулерге шеттік есептердің біршешімділігі жақсы қарастырылған. Тәуелсіз айнымалылар екіден көп болғанда, осы мәселелерді зерттегенде көп қиындықтар кездеседі. Көп өлшемді сингулярлық интегралдар теориясы толық емес болғандықтан, белгілі сингулярлық интегралдар әдісін пайдалану күшін жоғалтады. Евклидтік кеңістікте цилиндрлік облыста бір класс көп өлшемді эллиптикалық теңдеулерге бір текті шеттік шарты бар спектрлік Дирихле есебі қарастырылған. Шешімі көп өлшемді сферикалық функциялар жіктеулері түрінде қарастырылады. Шешімі бар және жалғыз екендігі дәлелденген. Қойылған есептің бір мәнді шешімділік шарты алынған. Ол шарт цилиндрдің биіктігіне тікелей байланысты.

Түйін сөздер: көп өлшемді эллиптикалық теңдеу, спектрлік Дирихле есебі, көп өлшемді цилиндрлік облыс, шешімділік, критерия

A criterion for the unique solvability of the spectral Dirichlet problem in a cylindrical domain for a class of multidimensional elliptic equations

Aldashov S.A., Kazakh national pedagogical university after Abay, Almaty, Kazakhstan, +77273758720, email: aldash51@mail.ru

Correctness of boundary problems in the plane for elliptic equations is well analyzed by analytic function theory of complex variable. There appear principal difficulties in similar problems when the number of independent variables is more than two. An attractive and suitable method of singular integral equations is less strong because of lack of any complete theory of multidimensional singular integral equations. In the cylindrical domain of Euclidean space, for a single class of multidimensional elliptic equations, the spectral Dirichlet problem with homogeneous boundary conditions is considered. The solution is sought in the form of an expansion in multidimensional spherical functions. The existence and uniqueness theorems of the solution are proved. Conditions for unique solvability of the problem are obtained, which essentially depend on the height of the cylinder.

Key words: multidimensional elliptic equation, Dirichlet spectral problem, multidimensional cylindrical domain, solvability, criterion.

1 Введение

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного изучены в (Бицадзе,1959),(Бицадзе,1996).

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений (Бицадзе,1981).

В работе получен критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений.

2 Обзор литературы

Однозначная разрешимость классического решения задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений доказаны в (Алдашев,2012а:3-7),(Алдашев,2012б:7-13) а также получен ее явный вид.

Однако, спектральная задача Дирихле в цилиндрической области для многомерных эллиптических уравнений не изучена.

3 Постановка задачи и результат

Пусть Ω_α – цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек (x_1, \dots, x_m, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α обозначим через $\Gamma_\alpha, S_\alpha, S_0$ соответственно.

В области Ω_α рассмотрим многомерные эллиптические уравнения со спектральным действительным параметром γ

$$\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u = \gamma u, \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m, m \geq 2$.

В качестве многомерной спектральной задачи Дирихле рассмотрим следующую задачу

Задача D. Найти решение уравнения (1) в области Ω_α из класса $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_\alpha} = 0, \quad u|_{\Gamma_\alpha} = 0, \quad u|_{S_0} = 0. \quad (2)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат x_1, \dots, x_m, t к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t, r \geq 0, 0 \leq \theta_1 < 2\pi, 0 \leq \theta_i \leq \pi, i = 2, 3, \dots, m-1, \theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1 \leq k \leq k_n, (m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2), W_2^l(S), l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева.

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geq m - 1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (3)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = const.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r, t)$, $a_{in}^k(r, t)$, $\tilde{b}_n^k(r, t)$, $\tilde{c}_n^k(r, t)$, ρ_n^k , обозначим коэффициенты разложения ряда (3), соответственно функций $a_i(r, \theta, t)\rho$, $a_i \frac{x_i}{r} \rho$, $b(r, \theta, t)\rho$, $c(r, \theta, t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \dots, m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H – единичная сфера в E_m .

Пусть $a_i(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t) \in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\overline{\Omega_\alpha})$, $l \geq m + 1$, $i = 1, \dots, m$, $\gamma(x, t) - \gamma \leq 0$, $\forall (x, t) \in \Omega_\alpha$.

Тогда справедлива

Теорема. 1) Если $\gamma \geq -\mu_{s,n}^2$, то задача D имеет только нулевое решение; 2) При $\gamma < -\mu_{s,n}^2$, задача D имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\sin \alpha \sqrt{|\gamma + \mu_{s,n}^2|} \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $\mu_{s,n}$ – нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$, $n = 0, 1, \dots$

Отметим, что при $a_i(x, t) = b(x, t) = c(x, t) = 0$, $i = 1, \dots, m$ эта теорема получена в (Алдашев, 2012:22-26).

4 Доказательство

Единственность решения задачи D следует из принципа экстремума для эллиптических уравнений (Бицадзе, 1966).

Теперь переходим к ее разрешимости. В сферических координатах уравнения (1) имеет вид

$$Lu \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{\delta u}{r^2} + u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) u_{x_i} + b(r, \theta, t) u_t + c(r, \theta, t) u = \gamma u, \quad (5)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно (Михлин, 1962), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n + m - 2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи D будем искать в виде

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

где $\bar{u}_n^k(r, t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставив (6) в (5), умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H для \bar{u}_n^k получим (Бицадзе, 1966), (Бицадзе, 1981).

$$\begin{aligned} \rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 - \gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \right. \\ \left. + \left(\frac{m-1}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{nr}^k + \tilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \left[\tilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_n^k - \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k \right\} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 + \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{(m-1)}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = \gamma \rho_0^1 \bar{u}_0^1, \quad (8)$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k + \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{(m-1)}{r} \rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_1^k = \gamma \rho_1^k \bar{u}_1^k - \frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 \right), \quad n=1, \quad k = \overline{1, k_1}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k + \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = \gamma \rho_n^k \bar{u}_n^k - \frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \right. \\ \left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k - \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1 , а уравнение (10) - от 1 до k_n , а затем сложив полученные выражения вместо с (8), приходим у уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$ – решение системы (8) - (10), то оно является и решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)-(10) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k + \bar{u}_{ntt}^k + \frac{(m-1)}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \gamma \bar{u}_n^k + \bar{f}_n^k(r, t), \quad (11)$$

где $\bar{f}_n^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r, t) \equiv \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2), в силу (6) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, \alpha) = 0, \quad \bar{u}_n^k(1, t) = 0, \quad \bar{u}_n^k(r, 0) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (12)$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{u}_n^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t)$, получим

$$\bar{u}_{nrr}^k + u_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k = \gamma u_n^k + f_n^k(r, t), \quad (13)$$

$$u_n^k(r, \alpha) = 0, \quad u_n^k(1, t) = 0, \quad u_n^k(r, 0) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (14)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, \quad f_n^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r, t).$$

Решение задачи (13), (14) будем искать в виде

$$u_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \quad (15)$$

при этом пусть

$$f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r). \quad (16)$$

Подставляя (15) в (13), (14), с учетом (16), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + (\mu - \gamma) R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \quad (17)$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \quad (18)$$

$$T_{stt} - \mu_{s,n} T_s(t) = a_{ns}^k(t), \quad 0 < t < \alpha, \quad (19)$$

$$T_s(\alpha) = 0, \quad T_s(0) = 0. \quad (20)$$

Ограниченным решением задачи (17), (18) является (Камке, 1965)

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (21)$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \gamma + \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (19) представимо в виде (Камке, 1965)

$$T_{s,n}(t) = \begin{cases} c_{1s} \operatorname{ch} t\sqrt{\mu} + c_{2s} \operatorname{sh} t\sqrt{\mu} + \frac{\operatorname{ch} t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \xi\sqrt{\mu} d\xi - \\ - \frac{\operatorname{sh} t\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \xi\sqrt{\mu} d\xi, \quad \mu > 0, \\ c_{1s} + c_{2s} t - \int_0^t a_{ns}^k(\xi) (t - \xi) d\xi, \quad \mu = 0, \\ c_{1s} \cos t\sqrt{|\mu|} + c_{2s} \sin t\sqrt{|\mu|} + \frac{\cos t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \sin \xi\sqrt{|\mu|} d\xi - \\ - \frac{\sin t\sqrt{|\mu|}}{\sqrt{|\mu|}} \int_0^t a_{ns}^k(\xi) \cos \xi\sqrt{|\mu|} d\xi, \quad \mu < 0, \end{cases} \quad (22)$$

c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив которого условию (20) будем иметь

$$\begin{cases} c_{1s} = 0, \quad c_{2s} \sqrt{\mu} \operatorname{sh} \alpha\sqrt{\mu} = \operatorname{sh} \alpha\sqrt{\mu} \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{ch} \xi\sqrt{\mu} d\xi - \operatorname{ch} \alpha\sqrt{\mu} \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \operatorname{sh} \xi\sqrt{\mu} d\xi, \quad \mu > 0, \\ c_{2s} \alpha = \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) (\alpha - \xi) d\xi, \quad \mu = 0, \\ c_{2s} \sqrt{|\mu|} \sin \sqrt{|\mu|} \alpha = \sin \alpha\sqrt{|\mu|} \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \cos \xi\sqrt{|\mu|} d\xi - \cos \alpha\sqrt{|\mu|} \int_0^{\alpha} a_{ns}^k(\xi) \sin \xi\sqrt{|\mu|} d\xi, \quad \mu < 0. \end{cases} \quad (23)$$

Подставляя (21) в (16) получим

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r). \quad (24)$$

Ряд (24)- разложения в ряд Фурье-Бесселя (Михлин,1962),если

$$a_{ns}^k(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi, t) J_{\nu}(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \quad (25)$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \dots$ – положительные нули функций Бесселя $J_{\nu}(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (21),(22), (23) найдем решение задачи (13), (14)

$$u_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_{\nu}(\mu_{s,n} r), \quad (26)$$

где $a_{ns}^k(t)$ находится из (25).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) ($n = 0$), а затем (9), (12) ($n = 1$) и т.д. найдем последовательно все $u_n^k(r, t)$ из (26), $k = 1, \overline{k_n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Итак, в области Ω_{α} , имеет место

$$\int_H \rho(\theta)(L - \gamma) u dH = 0. \quad (27)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 – плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^{\infty}(H)$ – плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 – плотна в $L_2((0, \alpha))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ – плотна в $L_2(\Omega_{\alpha})$ (Колмогоров,1976).

Отсюда и из (27), следует, что

$$\int_{\Omega_{\alpha}} f(r, \theta, t)(L - \gamma) u d\Omega_{\alpha} = 0$$

и

$$Lu = \gamma u, \quad \forall (r, \theta, t) \in \Omega_{\alpha}.$$

Таким образом, решением задачи D является функция

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} T_{s,n}(t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (28)$$

где $T_{s,n}(t)$ определяется из (22).

Из (4), (23) следует, что $c_{2s} = 0$, при $\mu \geq 0$ и для $\mu < 0$ $c_{2s} = 0$, если выполняется условие (4).

Следовательно, из (22), (26) следует, что

$$T_{s,n}(t) = 0$$

и

$$u_n^k(r, t) = a_{ns}^k(t) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Далее, из (28) в свою очередь получим $u = 0$ в Ω_α .

Пусть теперь условие (4) нарушено, хотя бы для одного $s = l$.

Тогда, если решение задачи D будем искать в виде (6), от приходим к краевой задаче (13), (14).

В силу (22), (23) ее решением является функция

$$u_n^k(r, t) = \sqrt{r} \left[\sin t \sqrt{|\gamma + \mu_{l,n}^2|} + \frac{\cos t \sqrt{|\gamma + \mu_{l,n}^2|}}{\sqrt{|\gamma + \mu_{l,n}^2|}} \int_0^t a_{l,n}(\xi) \sin \xi \sqrt{|\gamma + \mu_{l,n}^2|} d\xi - \right. \\ \left. - \frac{\sin t \sqrt{|\gamma + \mu_{l,n}^2|}}{\sqrt{|\gamma + \mu_{l,n}^2|}} \int_0^t a_{l,n}(\xi) \cos \xi \sqrt{|\gamma + \mu_{l,n}^2|} d\xi \right] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{l,n} r).$$

Следовательно, нетривиальное решение задачи D записывается в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta). \quad (29)$$

Учитывая формулу (Михлин, 1962) $2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$, а также оценки (Тихонов, 1977), (Бицадзе, 1959)

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0, \\ |k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad c_1, c_2 = const, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots,$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция, а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1), как в (Алдашев, 2012а:3-7), (Алдашев, 2012б:7-13), можно показать, что если $p > \frac{3m}{2}$, то функция (29) принадлежит искомому классу $C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Разрешимость задачи D установлено.

Теорема доказано.

5 Заключение

В работе получен критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений.

6 Благодарность

Работа выполнена при поддержке гранта 3492/ГФ4 Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Список литературы

- [1] *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994 - 170 с.
- [2] *Алдашев С.А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения,- 1998, Т. 34, № 1. -С. 64 - 68.
- [3] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. Сер.,Сер.мат., мех., инф., - 2012, Т. 12, Вып. 3. -С. 3 - 7.
- [4] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник НГУ, сер. мат., мех., инф.,- 2012, Т. 12, Вып. 1. -С. 7 - 13.
- [5] *Алдашев С.А.* Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Второй межд. российско-узбекский симп."Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики". Нальчик, НИИ ПМА КВНЦ РАН,2012.-с. 22-26
- [6] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2, М.: Наука, 1974 - 295 с.
- [7] *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа,М.: Изд. АН СССР, 1959 - 164 с.
- [8] *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М.:Наука, 1966-203 с.
- [9] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных, М.: Наука, 1981-448 с.
- [10] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М.: Наука, 1965 - 703 с.
- [11] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1976 - 543 с.
- [12] *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М.: Физматгиз, 1962 - 254 с.
- [13] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики, М.:Наука, 1977 - 659 с.

References

- [1] *Aldashev S.A.* Boundary Value Problems for Many-dimensional Hyperbolic and Hybrid Equations. Almaty: Gylym, 1994. P. 170.
- [2] *Aldashev S.A.* On the Darboux problem for a class of multidimensional hyperbolic equations. Differential'nye uravneniia [Differential Equations], 1998, Vol. 34, No. 1, pp. 64-68
- [3] *Aldashev S.A.* Correctness of the Dirichlet problem in a cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation // Izv. Saratov. un-ta. New Ser., Ser.mat., Fur., Inf., - 2012, Vol.12, Vol. 3.- P. 3 - 7.
- [4] *Aldashev S.A.* Correctness of Dirichlet's Problem in a Cylindric Domain for a Single Class of Many-dimensional Elliptic Equations // Vestnik of NGU. Series Mathematics, Mechanics, Informatics, -2012. Vol. 12, issue 1. P. 7 - 13.
- [5] *Aldashev S.A.* A criterion for the unique solvability of the spectral Dirichlet problem for the multidimensional hyperbolic-parabolic equation // Second Int. Russian-Uzbek symposium "Equations of mixed type, related problems of analysis and informatics". Nalchik, Research Institute of PMA KBSC RAS, 2012.-p. 24-27.
- [6] *Baitman G., Erdei A.* Higher transcendental functions, vol.2, M. : The science, 1974 - 295 p.
- [7] *Bitsadze A.B.* Mixed-type Equations. Moscow: Akad. Nauk USSR, 1959. P. 164.
- [8] *Bitsadze A.B.* Boundary value problems for elliptic equations of the second order Moscow: Nauka. 1966. P. 203.
- [9] *Bitsadze A.B.* Some classes of equations in partial derivatives Moscow: Nauka. 1981. P. 448.
- [10] *Kamke E.* Handbook of Ordinary Differential Equations, Moscow: The science, 1965 - 703 p.
- [11] *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the theory of functions and functional analysis, Moscow: The science, 1976 - 543 p.
- [12] *Mikhlin S.G.* Multidimensional singular integrals and integral equations, M. : Fizmatgiz, 1962 - 254 p.
- [13] *Tikhonov A.N., Samarsky A.A.* Equations of mathematical physics. M., Nauka, 1966, 724 p.

IRSTI 27.31.44

On a boundary value problem for the nonhomogeneous heat equation in an angular domain

Sadybekov M.A., Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
Almaty, Republic of Kazakhstan, E-mail: sadybekov@math.kz
Yergaliyev M.G., Institute of Mathematics and Mathematical Modeling,
Almaty, Republic of Kazakhstan, E-mail: ergaliev.madi@mail.ru

Due to the fact that the results find theoretical and practical applications, great attention is paid to the study of boundary value problems for parabolic equations. Also the relevance of studying such problems is justified by their physical application in the modeling of such processes as the propagation of heat in homogeneous and nonhomogeneous media, the interaction of filtration and channel flows, and other. Therefore, at the present stage of its development, the theory of partial differential equations is one of the important branches of mathematics and is actively developed by various mathematical schools. However, a number of significant problems in the theory of partial differential equations remain, as before, unresolved. In the paper we study a boundary value problem for the nonhomogeneous heat equation in an angular domain. Note that the problem does not have the initial condition. It is caused by the form of the domain. We obtain a boundary condition for the nonhomogeneous heat equation considered in the angular domain. It is proven that the heat potential is a unique classical solution to this problem.

Key words: Heat equation, Green's function, classical solution.

Об одной задаче для неоднородного уравнения теплопроводности в угловой области

Садыбеков М.А., Институт математики и математического моделирования,
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: sadybekov@math.kz
Ергалиев М.Г., Институт математики и математического моделирования,
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: ergaliev.madi@mail.ru

В силу того, что результаты находят теоретические и практические применения исследованию краевых задач для параболических уравнений уделяется огромное внимание. Также актуальность изучения таких задач обоснована их физическим применением в моделировании таких процессов как распространение тепла в однородных и неоднородных средах, взаимодействия фильтрационных и каналовых потоков и другие. Поэтому на сегодняшнем этапе своего развития теория дифференциальных уравнений в частных производных является одним из важных разделов математики и активно разрабатывается различными математическими школами. Однако ряд существенных проблем теории дифференциальных уравнений в частных производных остается по-прежнему не разрешенным. В нашей работе рассматривается граничная задача для неоднородного уравнения теплопроводности в угловой области. Стоит отметить, что поставленная нами граничная задача не имеет начального условия. Это обуславливается формой выбранной области. Нами получено граничное условие для неоднородного уравнения теплопроводности, рассматриваемого в угловой области. Доказан тот факт, что для правой части неоднородного уравнения теплопроводности принадлежащей выбранной нами угловой области, тепловой потенциал является единственным классическим решением данного неоднородного уравнения теплопроводности с найденным граничным условием.

Ключевые слова: Уравнение теплопроводности, функция Грина, классическое решение.

Үшбұрышты облыстағы біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуі үшін қойылған бір есеп туралы

Садыбеков М.А., Математика және математикалық модельдеу институты,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: sadybekov@math.kz
Ергалиев М.Г., Математика және математикалық модельдеу институты,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: ergaliev.madi@mail.ru

Алынған нәтижелер теориялық және практикалық қолданылымға ие болғандықтан параболалық теңдеулерге арналған шекаралық есептерді зерттеуге көп көңіл бөлінуде. Сонымен қатар, осындай есептерді зерттеудің өзектілігі олардың біртекті және біртекті емес ортадағы жылудың таралуы, фильтрациялы және каналды ағындардың өзара әсерлесуі сияқты және т.б. үдерістерді модельдеудегі физикалық қолданылысымен түсіндіріледі. Сондықтан дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясы бүгінгі таңдағы даму деңгейіне байланысты математика ғылымының маңыздыларының бірі болып табылып, әртүрлі математикалық мектептер оны қарқынды дамытуда. Алайда дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының бірқатар мәселелері шешілмеген түрде қалып отыр. Біз жұмысымызда үшбұрышты облыстағы біртекті емес жылутөкізгіштік теңдеуі үшін қойылған шекаралық есебін қарастырамыз. Қойылған шекаралық есептің бастапқы шартының жоқ екендігін айта кеткен жөн. Бұл таңдалған облыстың пішініне байланысты. Үшбұрышты облыста қарастырылған біртекті емес жылутөкізгіштік теңдеуі үшін шекаралық шарт алынды. Жұмысымызда біртекті емес жылутөкізгіштік теңдеуінің оң жағындағы және біз таңдаған үшбұрышты облысына тиісті функциясы үшін жылу потенциалы қойылған біртекті емес жылутөкізгіштік теңдеуі үшін табылған шекаралық шарты бар есептің жалғыз классикалық шешімі болатындығы дәлелденді.

Түйін сөздер: Жылуөткізгіштік теңдеуі, Грин функциясы, классикалық шешім.

1 Introduction

For the first time, the boundary condition of the volume potential for an arbitrary bounded domain $\Omega \subset R^n$ with a sufficiently smooth boundary S was found in the article (Kal'menov, 2009,646-649) by T. Sh. Kal'menov and D. Suragan, i.e., in this article it was proven that for a given $f \in L_2(\Omega)$ the volume potential

$$u(x) = \int_{\Omega} \varepsilon(x, y) f(y) dy$$

is a unique solution to the equation

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega,$$

satisfying the nonlocal boundary condition

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_S \left[\frac{\partial \varepsilon(x, y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS = 0, \quad x \in S,$$

where $\varepsilon(x, y)$ is the fundamental solution of the Laplacian and n is an outer normal. In the case of a two-dimensional disk or a three-dimensional ball, the eigenvalues and eigenfunctions of the volume potential, i.e., the eigenvalues and eigenfunctions of the spectral problem

$$\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Omega,$$

with the nonlocal boundary condition

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_S \left[\frac{\partial \varepsilon(x, y)}{\partial n_y} u(y) - \varepsilon(x, y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} \right] dS = 0, \quad x \in S,$$

are determined in (Kal'menov, 2011, 189). The corresponding problem is also discussed in (Kal'menov, 2011, 188).

2 Literature review

For the bounded simply-connected domain and the polyharmonic equation, the volume potential boundary conditions are obtained in (Kal'menov,2012a,604-608). We refer also to the article (Suragan,2013,141-149), where the same question is studied for the polyparabolic equation in cylindrical domain. To solve the nonhomogeneous Helmholtz equation in a bounded domain with sufficiently smooth boundary, the authors in (Kal'menov,2012b,164-1065) propose new boundary conditions possessing the property to suppress waves reflected from the boundary. It is demonstrated that in a bounded domain this solution coincides with that in an unbounded domain satisfying the Sommerfeld radiation condition. In (Kal'menov,2014,1-6) the authors considered an initial-boundary value problem for the one-dimensional wave equation and proved the uniqueness of the solution and showed that the solution coincides with the wave potential. In (Kal'menov,2013,1024) authors generalized the results of (Kal'menov, 2009,646-649) to the case of a parabolic operator in a noncylindrical domain and studied a nonlocal boundary value problem for a space-multidimensional parabolic equation in this domain. In the article (Kal'menov,2015,1062) authors studied the so-called permeable potential boundary conditions for the Laplace-Beltrami operator defined in a domain Ω on the unit sphere S in R^3 . A model case of the problem of heat diffusion in a homogeneous body with a special initial state was considered in (Kal'menov,2016,126). In that paper we consider volume heat potential in an angular domain. The boundary condition are found for him. Herewith by reason of angular form of the domain the problem does not have initial conditions.

3 Material and methods

To obtain the main results in the work, we use both the previously invented methods for solving boundary value problems for the heat equation, and new methods, which will be described in more detail in the following sections.

4 Results and discussion

Let an angular domain $Q \equiv \{0 < x < t < 1\}$ be given. Consider the boundary problem:

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -\frac{u(t, t)}{2} + \int_0^t \left(\varepsilon_{1\xi}(t, \xi, t-s) \Big|_{\xi=s} - \varepsilon_1(t, s, t-s) \right) u(s, s) ds - \\ - \int_0^t \varepsilon_1(t, s, t-s) u_\xi(\xi, s) \Big|_{\xi=s} ds = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

where

$$\varepsilon_1(x, \xi, t-s) = \varepsilon(x - \xi, t-s) - \varepsilon(x + \xi, t-s),$$

and

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{4t} \right\}$$

is the fundamental solution to the Cauchy problem for the heat equation (Friedman, 1964, 3-347). Note that the problem (1)-(3) does not have the initial condition. It is caused by the form of the domain Q .

THEOREM 1 *The volume heat potential*

$$u(x, t) = \int_0^t ds \int_0^s \varepsilon_1(x, \xi, t-s) f(\xi, s) d\xi \quad (4)$$

is a unique classical solution to the boundary problem (1)-(3).

LEMMA 1 *For all $u \in C^{2,1}(\bar{Q})$, $u|_{x=0} = 0$ we have the following equality*

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int_0^s \varepsilon_1(x, \xi, t-s) (u_s - u_{\xi\xi}) d\xi = u(x, t) + \\ + \int_0^t \varepsilon_{1\xi}(x, \xi, t-s) \Big|_{\xi=s} u(s, s) ds - \int_0^t \varepsilon_1(x, s, t-s) u(s, s) ds - \\ - \int_0^t \varepsilon_1(x, s, t-s) u_\xi(\xi, s) \Big|_{\xi=s} ds, \quad (x, t) \in Q. \end{aligned} \quad (5)$$

PROOF. Since integral at the left side of (5) is an improper integral due to the singularity, we understood it to be as the limit

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} ds \int_0^s \varepsilon_1(x, \xi, t-s) (u_s - u_{\xi\xi}) d\xi.$$

The last integral exists in the usual sense and we can make all actions including integrating by parts, for instance. Then for all $(x, t) \in Q$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int_0^s \varepsilon_1(x, \xi, t-s) (u_s - u_{\xi\xi}) d\xi = \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} \varepsilon_1(x, \xi, \alpha) u(\xi, t-\alpha) d\xi - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} \varepsilon_1(x, \xi, t-\xi) u(\xi, \xi) d\xi - \\ - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} ds \int_0^s \varepsilon_{1s}(x, \xi, t-s) u(\xi, s) d\xi - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} \varepsilon_1(x, s, t-s) \cdot \\ \cdot u_\xi(\xi, s) \Big|_{\xi=s} ds + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} \varepsilon_{1\xi}(x, \xi, t-s) \Big|_{\xi=s} u(s, s) ds + \\ + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} ds \int_0^s \varepsilon_{1\xi\xi}(x, \xi, t-s) u(\xi, s) d\xi. \end{aligned}$$

The properties of the fundamental solution ensure the equality (Friedman, 1964, 3-347)

$$\int_0^t ds \int_0^s \diamond_{\xi, s}^+ \varepsilon_1(x, \xi, t-s) u(\xi, s) d\xi = 0,$$

for $(x, t) \in Q$, where

$$\diamond_{\xi, s}^+ \varepsilon(x, \xi, t - s) = -\frac{\partial \varepsilon(x, \xi, t - s)}{\partial s} - \Delta_{\xi} \varepsilon(x, \xi, t - s) = 0$$

and so

$$\begin{aligned} & \int_0^t ds \int_0^s \varepsilon_1(x, \xi, t - s) (u_s - u_{\xi\xi}) d\xi = \\ & = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} \varepsilon_1(x, \xi, \alpha) u(\xi, t - \alpha) d\xi - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} \varepsilon_1(x, \xi, t - \xi) u(\xi, \xi) d\xi - \\ & \quad - \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} \varepsilon_1(x, s, t - s) u_{\xi}(\xi, s) \Big|_{\xi=s} ds + \\ & \quad + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} \varepsilon_{1\xi}(x, \xi, t - s) \Big|_{\xi=s} u(s, s) ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Since

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{t-\alpha} \varepsilon_1(x, \xi, \alpha) u(\xi, t - \alpha) d\xi = u(x, t)$$

in formula (6) the second integral converges absolutely, the third and fourth integrals are the potentials of a double and a simple layer, respectively, and we have (5) for all $(x, t) \in Q$. The lemma is proved.

PROOF. Proof of the theorem. Let $u(x, t)$ be represented in the form of (4). It's obvious that $u(x, t)$ is a solution to the equation (1) and satisfies the condition (2). Then from (5) we have

$$\begin{aligned} & \int_0^t \varepsilon_{1\xi}(x, \xi, t - s) \Big|_{\xi=s} u(s, s) ds - \int_0^t \varepsilon_1(x, s, t - s) u(s, s) ds - \\ & \quad - \int_0^t \varepsilon_1(x, s, t - s) u_{\xi}(\xi, s) \Big|_{\xi=s} ds = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Passing to the limit as $x \rightarrow t$ and recalling the properties of potentials (see [10]), we arrive at (3). Thus, the volume heat potential (4) meets the boundary condition (3).

Conversely, let us show that the solution to the problem (1)-(3) is unique. Suppose there are two solutions $u_1, u_2 \in C^{2,1}(\overline{Q})$. Let $u = u_1 - u_2$. It is known that u is the solution to the homogeneous equation $u_t - u_{xx} = 0$ and satisfies the condition (2). Then from (5) we infer

$$\begin{aligned} & \frac{u(t, t)}{2} + \int_0^t \varepsilon_{1\xi}(t, \xi, t - s) \Big|_{\xi=s} u(s, s) ds - \\ & - \int_0^t \varepsilon_1(t, s, t - s) u(s, s) ds - \int_0^t \varepsilon_1(t, s, t - s) u_{\xi}(\xi, s) \Big|_{\xi=s} ds = 0. \end{aligned}$$

Hence and from (3), we obtain $u(t, t) = 0, 0 \leq t \leq 1$. Since $u \in C^{2,1}(\overline{Q})$, then by uniqueness of the solution of the problem with the Dirichlet conditions (Amangalieva, 2015, 981-995) $u(x, t) = 0$ in Q . The theorem is proved.

5 Conclusion

In the paper we obtain a boundary condition for the nonhomogeneous heat equation considered in the angular domain. It is proven that the heat potential is a unique classical solution to this problem. The authors express their gratitude to T.Sh. Kalmenov and B.E. Kanguzhin and to all participants of the Citywide Scientific Seminar "Differential Operators and Their Applications" for the beneficial discussion of the results. This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan, (Grant No. 0824/GF4).

References

- [1] M.M. Amangalieva, M.T. Dzhenaliev, M.T. Kosmakova, M.I. Ramazanov, "On one homogeneous problem for the heat equation in an infinite angular domain", *Sib. math. jour.* 56 (6) (2015): 982–995.
- [2] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1964), 262.
- [3] Kal'menov T.Sh., Arepova G.D., "On a heat and mass transfer model for the locally inhomogeneous initial data", *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.* 9 (2) (2016): 124–129.
- [4] Kal'menov T.Sh., Suragan D., "Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation", *Differential Equations.* 48 (4) (2012): 604–608.
- [5] Kal'menov T.Sh., Suragan D., "Transfer of Sommerfeld radiation conditions to the boundary of a bounded domain", *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* 52 (6) (2012): 1063–1068.
- [6] Kal'menov T.Sh., Suragan D., "Initial boundary value problems for the wave equation", *Electronic journal of differential equations.* 2014 (48) (2014): 1–6.
- [7] Kal'menov T.Sh., Suragan D., "On permeable potential boundary conditions for the Laplace-Beltrami operator", *Siberian Mathematical Journal.* 56 (6) (2015): 1060–1064.
- [8] Kal'menov T.Sh., Suragan D., "To spectral problems for the volume potential", *Dokl. Math.* 80 (2) (2009): 646–649.
- [9] *Kal'menov T.Sh., Suragan D., "A boundary condition and spectral problems for the Newton potentials", Oper. Theory, Adv. Appl.* 216 (2011): 187–210.
- [10] Kal'menov T.Sh., Tokmagambetov N., "On a nonlocal boundary value problem for the multidimensional heat equation in a noncylindrical domain " , *Siberian Mathematic Journal.* 54 (6) (2013): 1023–1028.
- [11] Suragan D., Tokmagambetov N., "On transparent boundary conditions for the high-order heat equation" , *Siberian Electronic Math. Reports.* 10 (2013): 141–149.

2-бөлім

Раздел 2

Section 2

Қолданылмалы
математикаПрикладная
математикаApplied
Mathematics

МРНТИ 27.35.21: 27.35.14;

**Численное моделирование уравнений эллиптического типа на
неструктурированных сетках**

Исахов А.А*, Алпар С.Д., Жазылбеков Н.,
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы,
Республика Казахстан, +77056108050,
*E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

В реальности большинство физических процессов описываются уравнениями в частных производных. Одинаково с этим, многие прикладные задачи требуют расчетов в областях, имеющую сложную геометрическую форму. Описание расчетных областей со сложной геометрической формой лучше всего производится на неструктурированной сетке. Важным достоинствам неструктурированной сетки является простота генерации. Для этого большое предпочтение отдается методам, которые могут быть применимы на неструктурированной сетке. Таким методом является метод конечного объема. Одно из преимуществ данного метода является выполнение локальных и глобальных законов сохранения и это очень важно при решении многих прикладных задач. В представленной работе описывается разновидности сеток, их преимущества и недостатки, а также рассматривается метод конечного объема и выбор формы конечного объема, производится дискретизация методом конечного объема уравнения Пуассона на структурной сетке, описываются и выводятся формулы нахождения площадей, объемов и нормалей. Целью данной работы является дальнейшее применение метода конечного объема и получение аппроксимации уравнения Пуассона в двухмерном и трехмерном случае на неструктурированной и гибридной сетке. В итоге приводятся численные результаты для неструктурированной и гибридной сетки, а также полученные данные сравниваются с аналитическими результатами, что показывает хорошее совпадение результатов. Полученные численные значения отражаются в работе в виде графиков.

Ключевые слова: уравнения Пуассона, неструктурированная сетка, гибридная сетка, метод конечного объема.

Құрылымсыз торлардағы эллиптикалық типтегі теңдеулерді сандық модельдеу
Исахов А.А*, Алпар С.Д., Жазылбеков Н., ал-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77056108050,
*E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

Көптеген физикалық процесстер дербес туындылы дифференциалдық теңдеулермен сипатталады. Сонымен қатар, көптеген қолданбалы есептер күрделі геометриялық пішіндегі облыстарда есептеуді қажет етеді. Күрделі геометриялық пішіндегі есептеу облысын сипаттау құрылымсыз торда жүзеге асыру тиімді. Құрылымсыз тордық ең маңызды артықшылық генерацияның қарапайымдылығы. Сондықтан құрылымсыз торда пайдаланылатын әдістерге көп көңіл бөлінеді. Сондай әдістердің бірі ақырлы көлем әдісі болып табылады. Бұл әдістің артықшылықтарының бірі көптеген қолданбалы есептерді шешуде маңызы зор локальды және глобалды сақталу заңдарының орындалуы. Берілген жұмыста торлардың түрлері, олардың артықшылығы мен кемшілігі сипатталады және ақырлы көлем әдісі және ақырлы көлем пішінін таңдау қарастырылады, құрылымды торда Пуассон теңдеулерін дискреттеу ақырлы көлем әдісімен жүзеге асырылады, аудан, көлем және нормаль табу формулалары шығарылады және сипатталады.

Жұмыстың мақсаты құрылымсыз және гибриді торда екі өлшемді және үш өлшемді түрдегі Пуассон теңдеуінің аппроксимациялауда ақырлы көлем әдісін қолдану болып табылады. Соңында құрылымсыз және гибриді торлар үшін сандық нәтижелер келтіріледі, сонымен қатар, алынған деректер аналитикалық нәтижелермен салыстырылады, ол нәтижелердің сәйкестігін көрсетеді. Жұмыста алынған сандық мәндер график түрінде көрсетіледі.

Түйін сөздер: Пуассон теңдеуі, құрылымсыз тор, гибриді тор, ақырлы көлем әдісі.

Numerical modeling of elliptic equations on unstructured grids

Issakhov A.A.*., Alpar S., Zhalylbekov N., al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Republic of Kazakhstan, +77056108050,

*E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

In reality, most of the physical processes are described by partial differential equations. At the same time, many application tasks require calculations in areas with complex geometry. Description of computational areas with complex geometric shape is best performed on unstructured grids. An important advantage of unstructured grid is simplicity of generation. For this purpose a large preference was given for methods that can be applied on unstructured grids. This method is a finite volume method. One of the advantages of this method is performing of local and global conservation laws, and this is very important in solving many applied problems. In the present work the variety of nets with their advantages and disadvantages are described, also the final volume method and choice of the shape of final volume are considered, discretization of the Poisson equation by finite volume method is made on the structural grid, formulas of finding areas, volumes and normal are described and displayed. The aim of this work is the further application of the finite volume method, and obtaining approximation of the Poisson equation in two-dimensional and three-dimensional cases on unstructured and hybrid grid. Finally, numerical results for unstructured and hybrid grids, as well as the data that obtained are compared with the analytical results, which shows good agreement. The numerical values are illustrated in the work in the form of plots.

Key words: Poisson equation, unstructured mesh, hybrid mesh, finite volume method.

1 Введение

При решении прикладных задач гидроаэродинамики одной из проблем является расчетная область. Для описания расчетной области используются различные виды расчетных сеток. Среди расчетных сеток можно выделить два основных класса (Fletcher and etc., 2013: 401), (Chung, 2002: 1012):

1. Структурированные сетки (регулярные сетки).
2. Неструктурированные сетки (нерегулярные сетки)

Структурированные сетки, показанные на рисунке 1, широко применяются в области вычислительной гидроаэродинамики. При создании регулярной сетки, сеточные узлы представляют собой упорядоченную структуру, имеющую ярко выраженные сеточные направления. Основным преимуществом использования структурированной сетки является сохранение канонической структуры соседей для узлов сетки. В двумерном случае ячейками расчетной сетки служат четырехугольники, а в трехмерном случае — шестигранники. Данный вид сеток бывает двух типов: сетки с фиксированным (постоянным) шагом и сетки с переменным шагом, при этом шаг может быть постоянным по одной из осей координат и переменным по другой. Регулярные сетки позволяют использовать различные методы дискретизации, в частности метод конечных разностей и метод конечных объемов (Moukalled and etc., 2015: 791), (Versteeg and etc., 2007: 520).

2 Обзор литературы

При создании регулярных сеток в сложных геометрических областях используют преобразование координат для построения равномерной расчетной сетки, а также её расчетная математическая модель записывается в криволинейных координатах (Pletcher and etc.: 2011: 774), (Issakhov: 2015: 229-238), (Issakhov: 2016: 1082-1096), (Issakhov: 2011: 1282-1288).

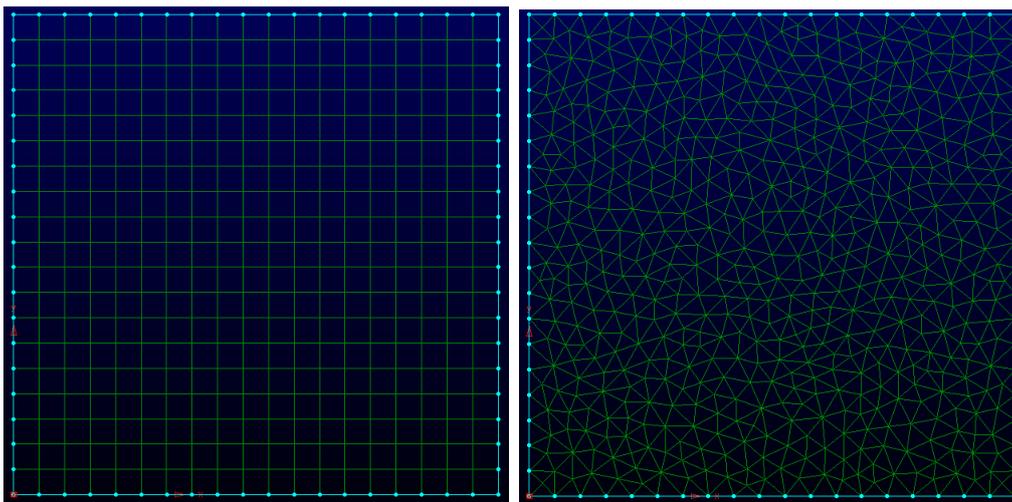


Рисунок 1 – Структурная сетка

Рисунок 2 – Неструктурированная сетка

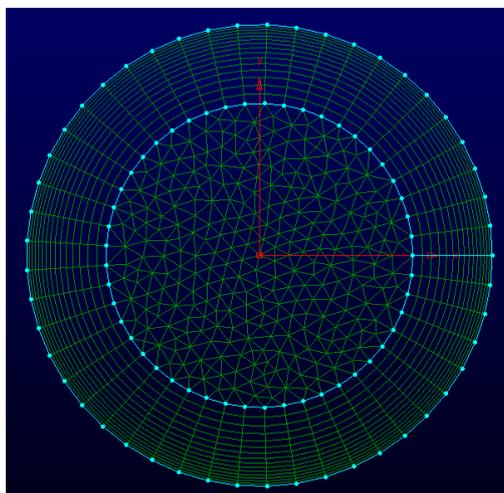


Рисунок 3 – Гибридная сетка

Главной отличительной чертой неструктурированных сеток, показанных на рисунке 2, является хаотичное расположение узлов сетки в расчетной области, и как следствие отсутствуют сеточные направления и невозможно упорядочить узлы сетки. В качестве ячейки сетки рассматриваются многогранники в трехмерном случае или многоугольники в двумерном случае произвольной формы. Как правило, в двумерном случае используются треугольники, в трехмерном случае — тетраэдры. Использование более сложных

геометрических фигур является нерациональным в процессе построения сетки. Нерегулярные сетки позволяют использовать различные методы дискретизации, в частности метод конечных объемов или метод конечных элементов (Ferziger and etc.: 2013: 426), (Peyret, 1983: 358), (Roache, 1972: 434).

Существует множество способов триангуляции расчетной области через заданные точки, но при любом способе триангуляции мы получим одинаковое количество треугольников.

Триангуляция расчетной области производится по определенным критериям. Один из критериев триангуляции заключается в том, чтобы полученные треугольники стремились к равносторонним, то есть углы треугольника не должны быть слишком острыми. Другой из критериев триангуляции состоит в том, чтобы построенные треугольники не сильно отличались по площади с соседними треугольниками (критерий равномерности сетки).

Основным недостатком нерегулярной сетки является необходимость знания данных о структуре сетки, что приводит к большим затратам вычислительных ресурсов (вычислительной памяти).

Положительными свойствами неструктурированных сеток являются:

а) применение данных вычислительных сеток к большому количеству прикладных задач;

б) минимальные затраты времени при построении неструктурированной сетки в отличие от регулярных сеток для сложных геометрических объектов;

в) выполнение сгущения определенных участков вычислительной сетки естественным способом.

Сочетание структурированных и неструктурированных сеток образуют так называемые гибридные сетки (рисунок 3), которые позволяют использовать преимущества определенных сеток и уменьшить недостатки того или иного типа сеток. Гибридные сетки часто используются при решении прикладных задач механики жидкости и газа.

3 Постановка задачи

Для двух вариантов задач численные решения сравниваются с аналитическими решениями. Для проверки численного алгоритма на неструктурированной и гибридной сетке используется уравнение Пуассона, которое имеет аналитическое решение. В данной работе рассматриваются две задачи. В первой задаче рассматривается двухмерное уравнение Пуассона, которое решается на неструктурированной сетке. Во второй задаче рассматривается трехмерное уравнение Пуассона, которое решается на неструктурированной и гибридной вычислительных сетках.

Первая задача (двухмерное уравнение):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3u &= -2 \sin(x + 2y) + 16e^{2x+3y} \\
 u|_{x=0} &= \sin(x + 2y) + e^{2x+3y} \\
 u|_{x=0.25} &= \sin(x + 2y) + e^{2x+3y} \\
 u|_{y=0.5} &= \sin(x + 2y) + e^{2x+3y} \\
 \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} &= 2 \cos(x + 2y) + 3e^{2x+3y}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Это уравнение имеет аналитическое решение такого вида:

$$u = \sin(x + 2y) + e^{2x+3y} \quad (2)$$

Вторая задача (трехмерное уравнение):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 10u &= -4 \cos(3x + y - 2z) + 12e^{x-z} + 10 \\ u|_{x=0} &= \cos(3x + y - 2z) + e^{x-z} + 1 \\ u|_{x=0.25} &= \cos(3x + y - 2z) + e^{x-z} + 1 \\ u|_{y=0} &= \cos(3x + y - 2z) + e^{x-z} + 1 \\ u|_{y=0.5} &= \cos(3x + y - 2z) + e^{x-z} + 1 \\ u|_{z=0} &= \cos(3x + y - 2z) + e^{x-z} + 1 \\ \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0.5} &= 2 \sin(3x + y - 2z) - e^{x-z} \end{aligned} \quad (3)$$

Это уравнение имеет аналитическое решение такого вида:

$$u = \cos(3x + y - 2z) + e^{(x-z)} + 1 \quad (4)$$

4 Материал и методы

Уравнение Пуассона аппроксимируется с помощью метода контрольного объема и численно решается методом Якоби. Для применения аппроксимации методом контрольного объема используется теорема Гаусса-Остроградского с дальнейшей заменой поверхностного интеграла на конечную сумму и имеет такой вид (Mazumder, 2015: 484), (Mazumder, 2015: 484), (Versteeg and etc., 2007: 520), (Chung, 2002: 1012), (Ferziger and etc.: 2013: 426):

$$\int_{V_0} \nabla \cdot (k \nabla \phi) dV = \int_S k \nabla \phi \cdot \bar{n} dA \quad (5)$$

Так как количество граней ограничено, мы можем заменить поверхностный интеграл суммой.

$$\int_S k \nabla \phi \cdot \bar{n} dA \approx \sum_f k_f (\nabla \phi)_f \cdot \bar{n}_f A_f = S_{\phi,0} V_0 \quad (6)$$

Следующая задача состоит в том, чтобы выразить $(\nabla \phi)_f \cdot \bar{n}_f$ через значения ячеек центра. Для этого рассмотрим оператор Набла.

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \bar{k} \right) \quad (7)$$

Выше приведенный оператор Набла можно расписать и по другому базису векторов. То есть для единичного вектора нормали и двух единичных касательных на плоскости, перпендикулярной плоскости вектора нормали.

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\bar{n} + \frac{\partial\phi}{\partial t_1}\bar{t}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial t_2}\bar{t}_2 \right) \quad (8)$$

Подобным образом и для нового базиса:

$$\nabla\phi = [(\nabla\phi) \cdot \bar{n}]\bar{n} + [(\nabla\phi) \cdot \bar{t}_1]\bar{t}_1 + [(\nabla\phi) \cdot \bar{t}_2]\bar{t}_2 \quad (9)$$

Двумерный случай на неструктурированной сетке (рисунок 4).

$$\nabla\phi = [(\nabla\phi) \cdot \bar{n}_f]\bar{n}_f + [(\nabla\phi) \cdot \bar{t}_f]\bar{t}_f \quad (10)$$

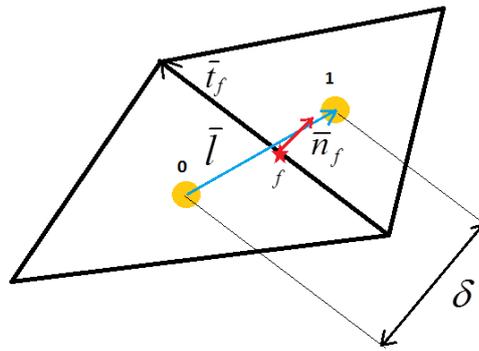


Рисунок 4 – Две соседние ячейки неструктурированной сетки

Рассмотрим вектор \bar{l} , соединяющий два центра соседних ячеек. Выполним скалярное умножение вектора \bar{l} с оператором Набла.

$$(\nabla\phi)_f \cdot \bar{l} = [(\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f]\delta_f + [(\nabla\phi)_f \cdot \bar{t}_f]\bar{t}_f \cdot \bar{l} \quad (11)$$

Чтобы аппроксимировать $(\nabla\phi)_f \cdot \bar{l}$ для центров ячеек, разложим в ряд Тейлора и в ходе нетривиальных действий получаем:

$$\begin{aligned} (\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f &= \frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta_f} - \frac{[(\nabla\phi)_f \cdot \bar{t}_f]\bar{t}_f \cdot \bar{l}}{\delta_f} \\ J_f &= [(\nabla\phi)_f \cdot \bar{t}_f]\bar{t}_f \cdot \bar{l} \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим отдельно J_f .

$$\begin{aligned} (\nabla\phi)_f \cdot \bar{t}_f &= \frac{\phi_a - \phi_b}{|\bar{t}_f|} \\ J_f &= \left(\frac{\phi_a - \phi_b}{|\bar{t}_f|} \right) \bar{t}_f \cdot \bar{l} \end{aligned} \quad (13)$$

В конечно итоге аппроксимация двумерного случая выглядит следующим образом:

$$\sum_f k_f (\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f A_f = \sum_f k_f \left(\frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta_f} - \left[\frac{\phi_a - \phi_b}{\delta_f |\bar{t}_f|} \right] \bar{t}_f \cdot \bar{l}_f \right) A_f = S_{\phi,0} V_0 \quad (14)$$

А для трехмерного случая вернемся к основному уравнению конечного объема.

$$\sum_f k_f (\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f A_f = S_{\phi,0} V_0 \quad (15)$$

Возьмем оператор Набла для нормали и двух ортогональных ему касательных векторов.

$$\nabla\phi = [(\nabla\phi) \cdot \bar{n}] \bar{n} + [(\nabla\phi) \cdot \bar{t}_1] \bar{t}_1 + [(\nabla\phi) \cdot \bar{t}_2] \bar{t}_2 \quad (16)$$

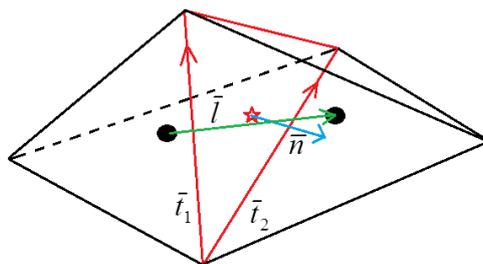


Рисунок 5 – Два соседних тетраэдра

Рассмотрим градиент как показано ниже.

$$(\nabla\phi)_f \cdot \bar{l} = [(\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f] \bar{n}_f \cdot \bar{l} + \left\{ [\bar{n}_f \times (\nabla\phi)_f] \times \bar{n}_f \right\} \cdot \bar{l} \quad (17)$$

Так же как и двумерном случае $(\nabla\phi)_f \cdot \bar{l} \approx \phi_1 - \phi_0$ и $\delta = \bar{n} \cdot \bar{l}$

$$(\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta} - \frac{\left\{ [\bar{n}_f \times (\nabla\phi)_f] \times \bar{n}_f \right\} \cdot \bar{l}}{\delta} = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta} - \frac{J_T}{\delta} \quad (18)$$

Где J_T – тангенциальный поток. Рассмотрим теперь треугольную грань (рисунок 6), на которой мы пытаемся извлечь J_T .

$$(\nabla\phi)_f = \frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 \bar{n}_e \phi_e L_e \quad (19)$$

Подставляем в уравнение тангенциального потока:

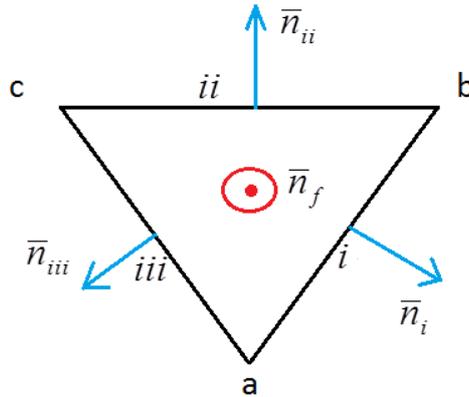


Рисунок 6 – Грань тетраэдра

$$J_T = \left\{ \left[\bar{n}_f \times \frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 \bar{n}_e \phi_e L_e \right] \times \bar{n}_f \right\} \cdot \bar{l} = \left\{ \left[\frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 [(\bar{n}_f \times \bar{n}_e) \times \bar{n}_f] \phi_e L_e \right] \right\} \cdot \bar{l} \quad (20)$$

Используем свойство смешанного произведения векторов:

$$(\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{d} = (\bar{d} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} - (\bar{d} \cdot \bar{c}) \cdot \bar{b} \quad (21)$$

Следовательно:

$$J_T = \left\{ \left[\frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 [(\bar{n}_f \cdot \bar{n}_f) \bar{n}_e - (\bar{n}_f \cdot \bar{n}_e) \bar{n}_f] \phi_e L_e \right] \right\} \cdot \bar{l} = \left\{ \left[\frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 \bar{n}_e \phi_e L_e \right] \right\} \cdot \bar{l} \quad (22)$$

Одной из проблем при расчете J_T является нормаль к стороне грани элемента конечного объема (\bar{n}_e).

$$\bar{n}_e = \bar{t}_e \times \bar{n}_f \quad (23)$$

Подставляем \bar{n}_e в J_T , получим:

$$J_T = \frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 \phi_e ([L_e \bar{t}_e \times \bar{n}_f] \cdot \bar{l}) \quad (24)$$

Произведения длины стороны L_e на единичный вектор \bar{t}_e равняется вектору \bar{T}_e , который описывает всю сторону грани.

$$\bar{T}_e = L_e \bar{t}_e \quad (25)$$

Далее, используем свойство смешанного произведения векторов и применим его для выше указанного уравнения.

$$J_T = \frac{1}{A_f} \sum_{e=1}^3 \phi_e (\bar{T}_e \cdot [\bar{n}_f \times \bar{l}]) \quad (26)$$

Возвращаясь к выражению $(\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f$ подставим найденное J_T :

$$(\nabla\phi)_f \cdot \bar{n}_f = \frac{\phi_1 - \phi_0}{\delta} - \frac{1}{\delta A_f} \left(\sum_{e=1}^3 \phi_e T_e \right) \cdot [\bar{n}_f \times \bar{l}] \quad (27)$$

$$\sum_f k_f \left\{ \frac{\phi_{nb(f)} - \phi_0}{\delta_f} - \frac{1}{\delta_f A_f} \sum_{e=1}^{n_e(f)} \phi_e (\bar{T}_e \cdot [\bar{n}_f \times \bar{l}_f]) \right\} A_f = S_{\phi,0} V_0 \quad (28)$$

В ходе нетривиальных преобразований получаем конечную аппроксимацию наших уравнений Гельмгольца для двумерного и трехмерного случая. Задачи решаем итеративно с помощью метода Якоби.

Конечная дискретная форма метода Якоби при использовании неструктурированной сетки для двухмерного уравнения Пуассона будет выглядеть в таком виде:

$$u_i^{n+1} = \frac{\left(\sum_f \left(\frac{u_{i,nb(f)}^n}{\delta_{i,f}} - \left[\frac{u_{i,a(f)}^n - u_{i,b(f)}^n}{\delta_{i,f} |\bar{l}_{i,f}|} \right] \bar{l}_{i,f} \cdot \bar{l}_{i,f} \right) A_{i,f} \right)}{\left(\sum_f \frac{A_{i,f}}{\delta_{i,f}} - 3V_i \right)} - \frac{(-2 \sin(x+2y) + 16e^{2x+3y}) V_i}{\left(\sum_f \frac{A_{i,f}}{\delta_{i,f}} - 3V_i \right)} \quad (29)$$

Конечная дискретная форма метода Якоби при использовании неструктурированной и гибридной сетки для трехмерного уравнения Пуассона будет выглядеть в таком виде:

$$u_i^{n+1} = \frac{\left(\sum_f \left(\frac{u_{i,nb(f)}^n}{\delta_{i,f}} - \frac{1}{\delta_{i,f} A_{i,f}} \left(\sum_{e=1}^3 u_{i,f,e}^n \bar{l}_{i,f,e} \right) \cdot [\bar{n}_{i,f} \times \bar{l}_{i,f}] \right) A_{i,f} \right)}{\left(\sum_f \frac{A_{i,f}}{\delta_{i,f}} - 10V_i \right)} - \frac{(-4 \cos(3x+y-2z) + 12e^{x-z} + 10) V_i}{\left(\sum_f \frac{A_{i,f}}{\delta_{i,f}} - 10V_i \right)} \quad (30)$$

5 Результаты и обсуждение

В первой задаче для двухмерного уравнения Пуассона используется физическая область размерами $L_x = 0.25$ и $L_y = 0.5$, которая аппроксимируется с помощью треугольников.

Количество физических вычислительных точек 1471, количество ячеек 2764. Как показано на рисунке 7, вычислительная сетка сгущается в точке $(0.25, 0.5)$, так как в данной области используется граничное условие Неймана и для минимизации численной ошибки нужно было сгустить вычислительную сетку в данной точке.

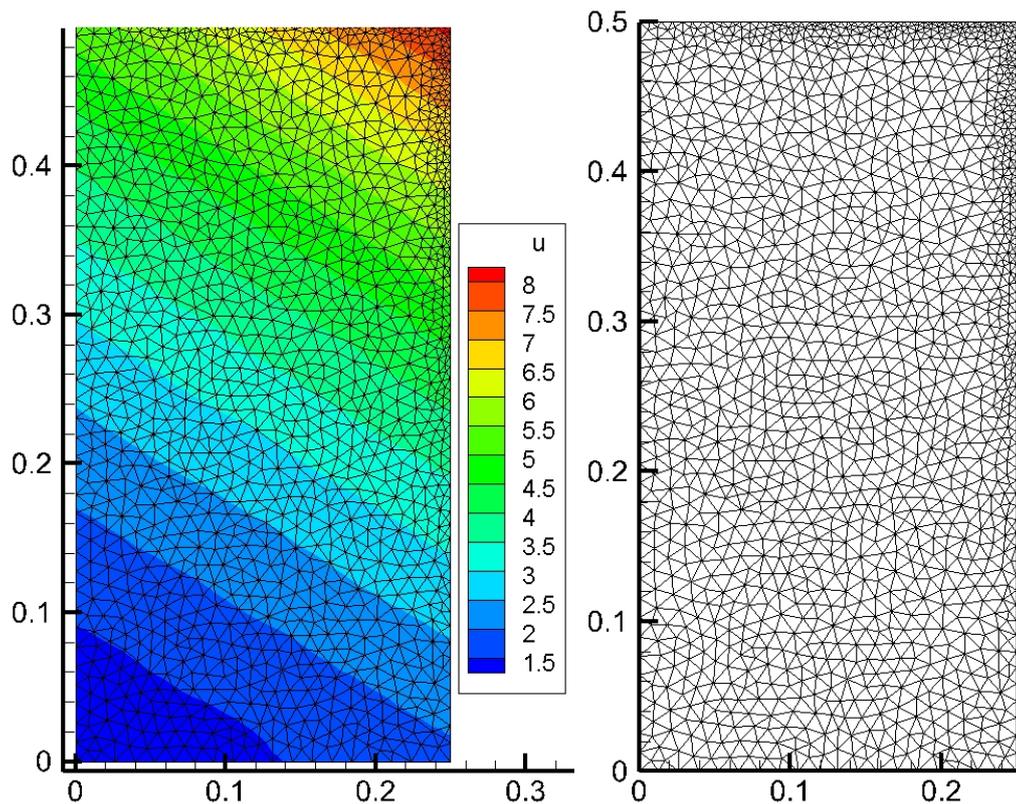


Рисунок 7 – Двумерная сетка с численным решением. Максимальная ошибка равняется 0.0654(0.7%)

Для второй задачи для трехмерного уравнения Пуассона используется физическая область размером $L_x = 0.25$, $L_y = 0.5$, $L_z = 0.5$, которая аппроксимируется с помощью тетраэдров для неструктурированной сетки. Количество узлов 4687, количество ячеек 23084. (рис. 8)

Для уменьшения численной ошибки для неструктурированной сетки используется гибридная сетка. Для гибридной трехмерной задачи использовались условия второй задачи (трехмерное уравнение Пуассона). Для этого вычислительная область делится на два блока неструктурированную и структурную сетки, которая будет состоять из тетраэдров, шестигранников и пирамид. Количество точек 1812, количество ячеек 4380. Сетка сгущается по оси Z к грани, где определено граничное условие Неймана. (рис.9).

Далее показаны плюсы неструктурированной и гибридной сетки на объектах различной формы.

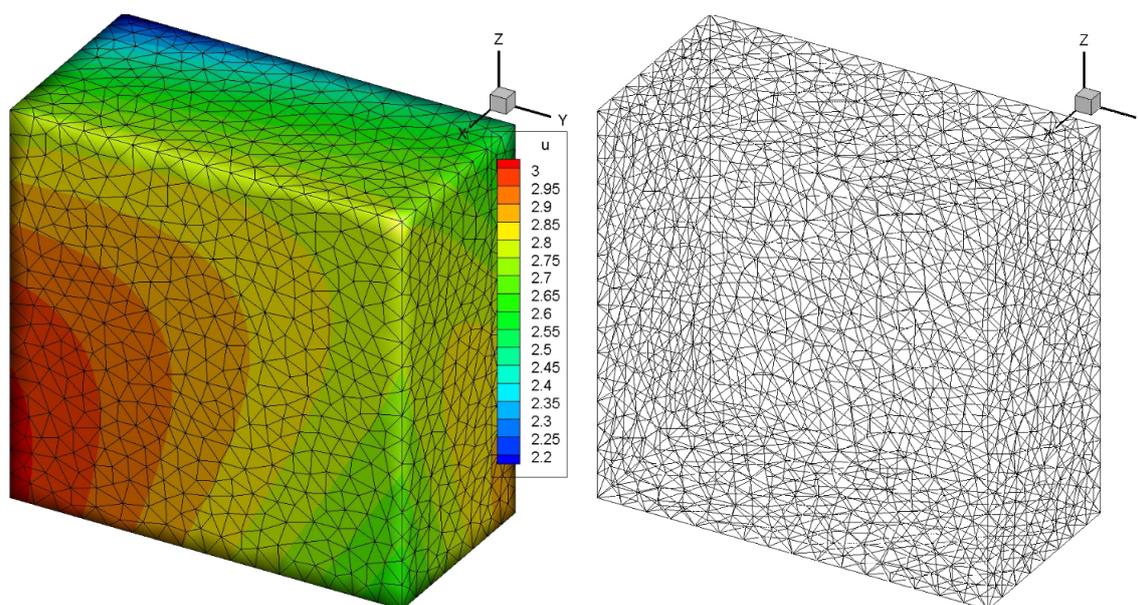


Рисунок 8 – Трехмерная сетка с численным решением. Максимальная ошибка равняется 0.026(0.9%)

6 Заключение

На рисунках 10-11 показаны плюсы неструктурированной сетки на объектах сложной формы.

На рисунках 12-13 отражается преимущество при использовании гибридных сеток на объектах сложной формы.

В процессе выполнения работы на основе численного решения двумерных и трехмерных уравнений Пуассона проведены тестовые расчеты метода конечного объема на неструктурированной сетке. А также проведен анализ решений для трехмерного уравнения Пуассона при использовании гибридной сетки.

При сравнении численных результатов трехмерного уравнения Пуассона для неструктурированной и гибридной сетки, можно отметить что при использовании гибридной сетки численная ошибка уменьшается, а также при этом используется меньше вычислительных ресурсов.

В результате проведенного исследования, по полученным данным можно сказать, что регулярная вычислительная сетка имеет преимущество в точности решения, но благодаря адаптации неструктурированной вычислительной сетки к сложной геометрии можно составлять гибридные сетки, где будут компенсироваться плюсы и минусы структурных и неструктурных сеток.

При этом в работе показывается, что при использовании неструктурированной сетки численная ошибка (0.9%), а при использовании гибридной сетки численная ошибка не превышает (0.4%). Из этого можно сделать вывод, что нужно использовать структурированную сетку в области, где это возможно, а неструктурированную сетку надо использовать, где невозможно использовать структурированную сетку.

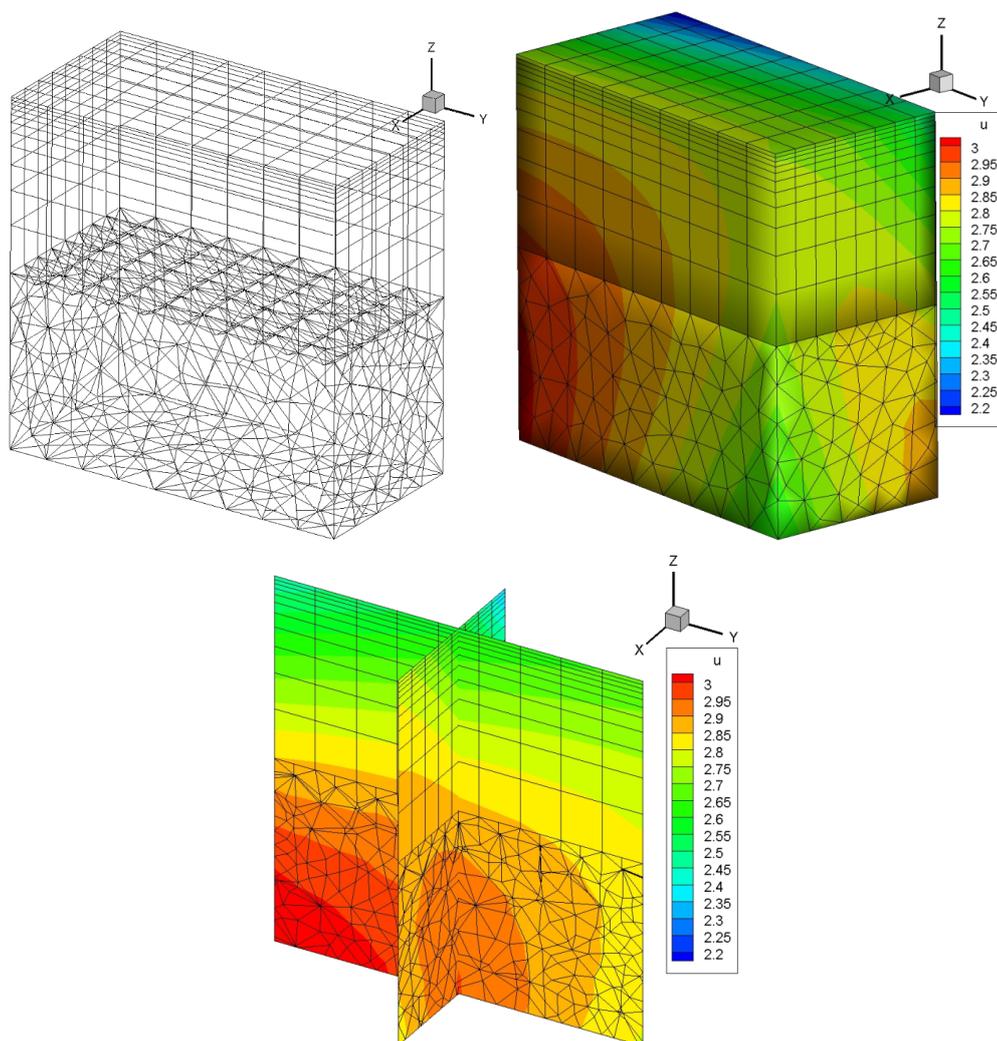


Рисунок 9 – Гибридная сетка с численным решением. Максимальная ошибка равняется 0.0114(0.4%)

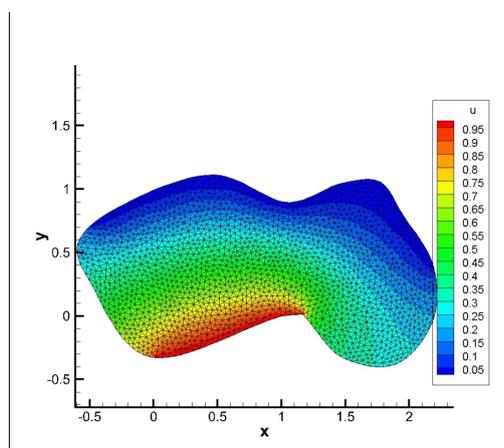


Рисунок 10 – Численное решение уравнение Пуассона на произвольной области

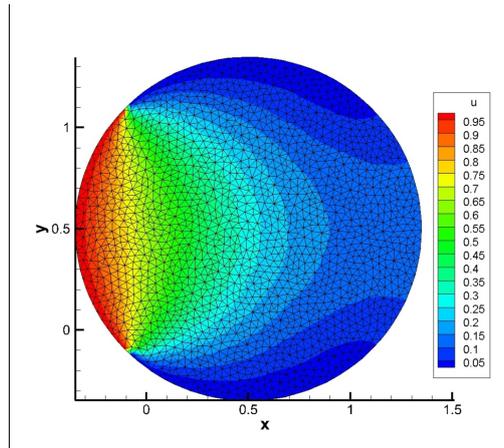


Рисунок 11 – Численное решение уравнение Пуассона на произвольной области

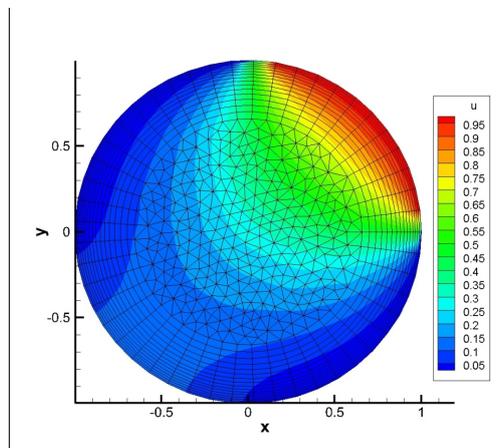


Рисунок 12 – Численное решение уравнение Пуассона на округлой области с помощью гибридной сетки

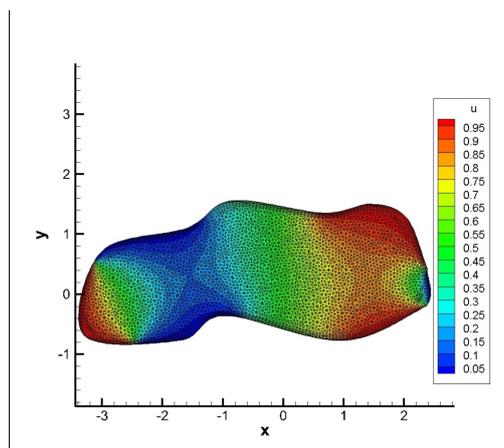


Рисунок 13 – Численное решение уравнение Пуассона на произвольной области с помощью гибридной сетки

7 Примечание

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант No 2017/ГФ4

Список литературы

- [1] Chung T.J., Computational Fluid Dynamics, — Cambridge University Press, 2002, — 1012 p.
- [2] Ferziger J.H., Peric M., Computational Methods for Fluid Dynamics, third edition, Springer, 2013. — 426 p.
- [3] Fletcher C. A.J., Fletcher C. A. Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 1: Fundamental and General Techniques. — Springer. 2013. — 401 p.
- [4] Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2015. —16(5). — P. 229-238. doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [5] Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // Applied Mathematical Modelling, — 2016. — Volume 40. — Issue 2. — P. 1082-1096. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.
- [6] Issakhov A. Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method // J. Phys.: Conf. Ser. — 2011. — 318(4). — P. 1282-1288. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [7] Mazumder S. Numerical methods for partial differential equation: Finite Difference and Finite Volume Methods. — Academic Press, 2015, — 484 p.
- [8] Moukalled F., Mangani L., Darwish M. The finite volume method in computational fluid dynamics. — Springer, 2015, — 791 p.
- [9] Peyret R., Taylor D.Th. Computational Methods for Fluid Flow. — Springer-Verlag, New York:Berlin, 1983, — 358 p.
- [10] Pletcher R. H., Tannehill J. C., Anderson D. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Third Edition (Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences). — CRC Press. 2011. — 774 p.
- [11] Roache P.J. Computational Fluid Dynamics. — Hermosa Publications, Albuquerque, NM, 1972. — 434 p.
- [12] Versteeg H.K., Malalasek W. Introduction to computational fluid dynamics The finite volume method. — Pearson, 2007, — 520 p.

References

- [1] Chung, T.J., "Computational Fluid Dynamics," Cambridge University Press, (2002), 1012 p.
- [2] Ferziger, J.H. and Peric M. "Computational Methods for Fluid Dynamics, third edition," Springer, (2013), 426 p.
- [3] Fletcher, C. A.J. and Fletcher, C. A. "Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 1: Fundamental and General Techniques," Springer. (2013). 401 p.
- [4] Issakhov A. "Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant," International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation 16(5) (2015): 229-238. doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [5] Issakhov A. "Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities," Applied Mathematical Modelling Volume 40, Issue 2 (2016): 1082-1096. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.
- [6] Issakhov A. "Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method," J. Phys.: Conf. Ser. 318(4) (2011): 1282-1288. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [7] Mazumder S. "Numerical methods for partial differential equation: Finite Difference and Finite Volume Methods," Academic Press, (2015). 484 p.

-
- [8] Moukalled F., Mangani L., Darwish M. "The finite volume method in computational fluid dynamics," Springer, (2015). 791 p.
- [9] Peyret R. and Taylor D.Th. "Computational Methods for Fluid Flow," Springer-Verlag, New York:Berlin, (1983). 358 p.
- [10] Pletcher R. H., Tannehill J. C. and Anderson D. "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Third Edition (Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences)," CRC Press. (2011). 774 p.
- [11] Roache P.J. "Computational Fluid Dynamics," Hermosa Publications, Albuquerque, NM, (1972). 434 p.
- [12] Versteeg H.K., Malalasek W. "Introduction to computational fluid dynamics The finite volume method," Pearson, (2007). 520 p.

МРНТИ 27.35.33: 27.35.47; 27.35.51; 87.17.03

Моделирование динамики крупномасштабного облака при мощных взрывах ракетносителя в неоднородной атмосфере

Каржаубаев К.К., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77073569961, E-mail: kairzhan.k@gmail.com
 Жакебаев Д.Б., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77017537477, E-mail: dauren.zhakebayev@gmail.com
 Абдибекова А.У., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77029299933, E-mail: a.aigerim@gmail.com
 Жубат К.Ж., РГП Научно-исследовательский центр «Ғарыш-Экология» г. Алматы, Республика Казахстан, +77015157915, E-mail: zhubat@mail.ru

В данной работе рассматривается динамика крупномасштабного облака, образующихся при мощных взрывах, в неоднородной атмосфере, с учетом турбулентного перемешивания и адиабатического расширения. Численное моделирование осуществляется на основе решения трехмерного отфильтрованного нестационарного уравнения Навье-Стокса, уравнения неразрывности, уравнения концентрации, уравнения энтальпии, уравнения состояния для сжимаемых сред. Модифицированный решатель основан на библиотеке решения задач математической физики OpenFOAM. Для замыкания основных уравнений используется вязкостная модель турбулентности. Определены изменение размера облака в атмосфере в зависимости от термодинамических параметров. Произведен расчет энергии взрыва рассчитанного от остатка топлива ракетносителя «Протон-М».

Ключевые слова: взрыв, Протон-М, облако, турбулентность, метод конечных объемов, моделирование, LES.

Біркелкі емес атмосферада ракета тасығыштың күшті жарылысы нәтижесінде пайда болған ауқымды бұлт динамикасын модельдеу

Қаржаубаев Қ.Қ., әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77073569961, E-mail: kairzhan.k@gmail.com
 Жакебаев Д.Б., әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77017537477, E-mail: dauren.zhakebayev@gmail.com
 Абдибекова А.У., әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77029299933, E-mail: a.aigerim@gmail.com
 Жұбат Қ.Ж., «Ғарыш-Экология» ғылыми-зерттеу орталығы» РМҚ, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77015157915, E-mail: zhubat@mail.ru

Бұл мақалада біркелкі емес атмосферадағы күшті жарылыс нәтижесінде пайда болған ауқымды бұлт динамикасын, турбулентті араластыру және адиабатикалық кеңеюді ескере отырып қарастырамыз. Саңдық модельдеу үшөлшемді фильтрлі стационарлық емес Навье-Стокс теңдеуін, үздіксіздік теңдеуін, концентрация теңдеуін, энтальпия теңдеуін, қысылатын орта үшін күй теңдеуін шешу негізінде жүзеге асырылады. Өзгертілген шешуші OpenFOAM математикалық физика кітапханасына негізделген. Негізгі теңдеулерді жабу үшін турбуленттіліктің тұтқыр моделі қолданылады. Атмосферадағы бұлт өлшемінің өзгеруі термодинамикалық параметрлерге байланысты анықталады. Протон-М зымыранының қалған бөлігіне есептелген жарылыс энергиясын есептеу жүргізіледі.

Түйін сөздер: жарылыс, Протон-М, бұлт, турбуленттілік, ақырлы көлем әдісі, модельдеу, LES

Modelling of the large-scale cloud dynamics in powerful explosions of a screening consumer in the inhomogeneous atmosphere

Karzhaubayev K.K., al-Farabi Kazakh National University,
 Almaty, Republic of Kazakhstan, +77073569961, E-mail: kairzhan.k@gmail.com
 Zhakebayev D.B., al-Farabi Kazakh National University,
 Almaty, Republic of Kazakhstan, +77017537477, E-mail: dauren.zhakebayev@gmail.com
 Abdibekova A.U., al-Farabi Kazakh National University,
 Almaty, Republic of Kazakhstan, +77029299933, E-mail: a.aigerim@gmail.com
 Zhubat K.Zh., RSE Scientific and Research Center "Garish-Ecology
 Almaty, Republic of Kazakhstan, +77015157915, E-mail: zhubat@mail.ru

In this paper, we consider the dynamics of a large-scale cloud formed in strong explosions in an inhomogeneous atmosphere, with allowance for turbulent mixing and adiabatic expansion. Numerical simulation is carried out on the basis of the solution of the three-dimensional filtered non-stationary Navier-Stokes equation, the continuity equation, the concentration equation, the enthalpy equation, and the equation of state for compressible media. The modified solver is based on the OpenFOAM mathematical physics library. To close the basic equations, a viscous model of turbulence is used. The change in the size of the cloud in the atmosphere is determined depending on the thermodynamic parameters. The calculation of the explosion energy calculated for the remainder of the Proton-M carrier rocket was made.

Key words: explosion, Proton-M, cloud, turbulence, finite volume method, modelling, LES

1 Введение

Все стадии цикла РКД, могут представлять экологическую опасность, что зачастую определяет очень большие, фактически, глобальные, масштабы проблемы. В первую очередь, это непосредственное загрязнение окружающей среды токсичными компонентами самого ракетного топлива, а также продуктами его горения. Так при запуске ракетносителя «Протон» только плановый выброс в атмосферу остатков неотработанного гептила из 1-й и 2-й ступеней составляет 2,7 тонны, а в случае аварии ракетносителя в атмосферу выбрасываются десятки тонн этого высокотоксичного горючего. В приземном слое атмосферы высотой до 1 километра, выбросы, образующиеся при стартах космических кораблей, могут приводить к токсичному загрязнению облаков, выпадению кислотных дождей и изменениям погодных условий в районе старта на территории до 200 квадратных километров. При этом сильные турбулентные потоки в атмосфере приводят к быстрому перемешиванию выброшенных химических компонентов с большими объемами воздуха и распространению их на большие расстояния, где роль облаков в эволюции атмосферных загрязнителей весьма значительна (Справочное пособие, 2000: 66-167), (Goodchild, 2008: 1-17). Динамика облаков сильно изменяет распределение загрязняющих веществ через адвекцию и более локальные вихревые движения. Микрофизика облаков участвует в эволюции загрязняющих веществ путем конденсации/ испарения и процессов сбора, переноса их в капли при образовании осадков и повторно впрыскивая обратно в воздух путем испарения капелек и капель дождя (Jakala, 2007: 1-10), (Жубатов, 2015: 1-152). С одной стороны, процессы в облаках приводят к очистке атмосферы путем мокрого удаления загрязнений. С другой стороны, они несут ответственность за так называемые кислотные дожди, наносящие ущерб материальным поверхностям водных и лесных экосистем. Кроме того, облака принимают активное участие в отслеживании химического перераспределения, влияют на глобальный бюджет излучения и, таким образом, влияют на глобальную фоновую атмосферу.

Существует модели, посвященных моделированию динамики крупномасштабных облаков, образующихся при мощных взрывах, в неоднородной атмосфере. В большинстве из них основное внимание уделялось динамическим аспектам развития облаков (Зейлер, 2001, 1-254). Однако все эти явления происходят во влажной атмосфере, и этот аспект в значительной степени влияет на основные параметры эволюции облаков и процессы очистки загрязняющих веществ. Имеются работы (Ishii, 2014: 1392-1408), (Michell, 2001: 1-190), (Ungerer, 2002: 41-54), (Fan, 2011:1-17), где внимание было уделено исследованию микрофизических характеристик. Но эти модели были основаны на приближении Буссинеска, которое неприменимо к потокам с большими вариациями термодинамических параметров и большими параметрами гидростатической сжимаемости, поэтому они не могли адекватно моделировать динамические характеристики таких облаков (Shaner, 2002: 1-226). В целом можно сказать, что в каждой модели строго учитываются лишь некоторые особенности взаимодействия облачных процессов, в то время как остальные рассматриваются приблизительно, с использованием сильных упрощающих предположений и грубых параметризации. Таким образом, существует острая необходимость в численном моделировании, способной правильно представлять все существенные взаимодействия, по крайней мере, между динамическими и микрофизическими процессами в конвективных облаках, развивающихся в экстремальных условиях.

В данной работе рассматривается динамика крупномасштабного облака, образующихся при мощных взрывах, в неоднородной атмосфере, с учетом турбулентного перемешивания и адиабатического расширения. Температура воздуха в начальный момент вихревого кольца очень велика, со временем она падает за счет адиабатического расширения и турбулентного перемешивания нагретого и холодного воздуха. Под действием силы инерции происходит процесс увеличения облака в атмосфере до момента выравнивания внутренней и внешней температуры и турбулентной энергии.

Численное моделирование динамики крупномасштабного облака осуществляется на основе решения трехмерного отфильтрованного нестационарного уравнения Навье-Стокса, уравнения неразрывности, уравнения концентрации, уравнения энтальпии, уравнения состояния для сжимаемых сред. Для замыкания основных уравнений используется вязкостная модель турбулентности. Основной проблемой в рассматриваемой задаче является корректное описание процессов турбулентного переноса. В настоящей работе сделана попытка решить эту проблему путем использования метода крупных вихрей.

Представлены результаты численного моделирования динамики крупномасштабного облака, образующихся при мощных взрывах ракетносителя «Протон-М» на высоте 42 км, где происходит очень скоротечный этап образования аэрозольного облака, включающий быстрые процессы истечения, расширения и конденсации гептила в стратосфере. На высотах более 40 км компоненты ракетного топлива не вступают в химические реакции. Получено изменение размера облака в атмосфере в зависимости от термодинамических параметров. Приведен расчет мощности взрыва рассчитанного от остатка топлива.

2 Материал и методы

2.1 Постановка задачи

Пусть в начальный момент времени на высоте H_0 в атмосфере находится огненный шар, областью - G , радиусом - R , начальной температурой шара - T_0 , и начальной объемной плотностью газовых фаз сухого воздуха - ρ_d и влажного воздуха - ρ_w , температура окружающей среды - T_1 (рисунок 1).

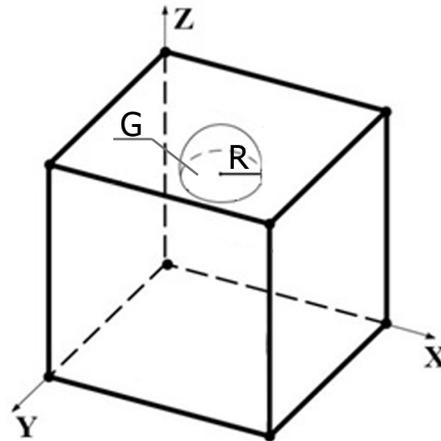


Рисунок 1 - Схематичная иллюстрация постановки задачи.

Для решения рассматриваемой задачи используются следующие уравнения:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla(\rho_m u_m) = 0 \tag{1}$$

где скорость смеси газовой фазы u_m , плотность воздуха $\rho_m = \rho_w + \rho_d$, $u_m = \frac{\mu_m}{\rho_m}$ - динамическая вязкость, $\mu_m = \mu_* \left(\frac{T}{T_*}\right)^w$, где μ_* - значение динамической вязкости при температуре T_* , $\rho_d = \sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} S_\alpha \rho_\alpha$; $\sum_{\alpha=1}^{N_\alpha} S_\alpha = 1$ - объемная плотность газовой фазы сухого воздуха, $\rho_w = \sum_{\beta=1}^{N_\beta} S_\beta \rho_\beta$; $\sum_{\beta=1}^{N_\beta} S_\beta = 1$ - объемная плотность газовой фазы водяного пара, $\rho_\alpha = \rho_{*\alpha}(1 - \gamma(T - T_*))$, $\alpha = 1, \dots, N_\alpha$; $\rho_\beta = \rho_{*\beta}(1 - \gamma(T - T_*))$, $\beta = 1, \dots, N_\beta$, также $\rho_{*\alpha}$, $\rho_{*\beta}$ - плотность газовых компонентов сухого воздуха и влажного воздуха соответственно, при $T_* = 20$.

Уравнение концентрации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m S_\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_m u_m S_\alpha) &= 0, \alpha = 1, \dots, N_\alpha \\ \frac{\partial(\rho_m S_\beta)}{\partial t} + \nabla(\rho_m u_m S_\beta) &= 0, \beta = 1, \dots, N_\beta \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнение движения:

Закон сохранения количества движения может быть записан с достаточной точностью в виде:

$$\frac{\partial(\rho_m u_m)}{\partial t} + \nabla(\rho_m u_m \otimes u_m + \rho_m \mathbf{T}_r) = -\nabla p + \nabla \mathbf{T} + \rho_m g \quad (3)$$

где g - ускорение происходит под действием силы тяжести, \mathbf{T} - тензор напряжений газовой фазы, t - время, p - давление.

Уравнение энтальпии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m h_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m h_m u_m) + \nabla \cdot (q - \mathbf{T} \cdot u_g) = \\ = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial(\rho_m K_m)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_m K_m u_m) + \rho_m (g \cdot u_m) \end{aligned} \quad (4)$$

где энтальпия смеси газовой - h_m , тепловой поток в газовой фазе - $q = -k_g \Delta T$, здесь - $k_g = \sum_{i=1}^{N_I} \chi_i k_i$, k_i - проводимость i -го компонента, T - температура, $K_m = \frac{1}{2}[u_m]^2$ - кинетическая энергия на единицу массы газовой фазы.

Уравнение температуры:

$$T = \frac{h_m}{\frac{1}{\rho_m} \sum_{i=1}^I \rho_i C_i + \frac{1}{\rho_m} \sum_{i=1}^I \rho_i R_i} \quad (5)$$

где C_i - теплоемкость газовой фазы при постоянном объёме.

Уравнение давления:

Выполняется уравнение состояния идеального газа:

$$P = \frac{R_*}{M_{rd}} \rho_d T + \frac{R_*}{M_{rw}} \rho_w T = R_* T \left(\frac{\rho_d}{M_{rd}} + \frac{\rho_w}{M_{rw}} \right) \quad (6)$$

где $R_* = 8.3144598$, $M_{rd} = \sum_{\alpha}^{N_{\alpha}} S_{\alpha} M_{r\alpha}$, $M_{rw} = \sum_{\beta}^{N_{\beta}} S_{\beta} M_{r\beta}$

Уравнение полной энергии состоит их удельной внутренние энергий и кинетической энергий:

$$E = U + E_k \quad (7)$$

где $E = 0, 25 * q * t$ - энергия взрыва; t - время взрыва; q - мощность взрыва.

Одна треть всей выделившейся при взрыве энергии испускается в виде излучения (Garnier, 2009:1-276). В итоге энергия, заключенная в огненном шаре к началу его подъема, составляет примерно одну четверть от всей энергии взрыва. Удельная внутренняя энергия при адиабатическом процессе выражается:

$$U = C_v(T_1 - T_0) \quad (8)$$

здесь C_v - теплоемкость газа в процессах с постоянным объемом, T_1 - температура окружающей среды, при различных значениях начальной температуры $T_0 = 3000^\circ\text{C}$ огненного шара:

$$E_k = \frac{2}{3}u_0^2 \quad (9)$$

Подставляя уравнения (8) и (9) в уравнение (7), получим начальное значение температуры огненного шара:

$$u_0^2 = \frac{2}{3}(E - U), u_1 = u_2 = u_3 = u_0 \quad (10)$$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3, t = 0) &= u_0(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \in G, \\ u_i(x_1, x_2, x_3, t = 0) &= 0, (x_1, x_2, x_3) \notin G, \\ T(x_1, x_2, x_3, t = 0) &= T_1, (x_1, x_2, x_3) \in G, \\ T(x_1, x_2, x_3, t = 0) &= T_0, (x_1, x_2, x_3) \notin G, \\ S_\alpha(x_1, x_2, x_3, t = 0) &= \frac{\rho_\alpha}{\rho_m}, \alpha = 1, \dots, N_\alpha, \\ S_\beta(x_1, x_2, x_3, t = 0) &= \frac{\rho_\beta}{\rho_m}, \beta = 1, \dots, N_\beta, \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = 0, \frac{\partial S_\alpha}{\partial n} = 0, \frac{\partial S_\beta}{\partial n} = 0, \frac{\partial T}{\partial n} = 0, i = 1, 2, 3, \alpha = 1, \dots, N_\alpha, \beta = 1, \dots, N_\beta.$$

2.2 Алгоритм определения полной энергий при взрыве РН

Для данной задачи важна энергия взрыва РН, определяемая тротиловым эквивалентом $T \ni_\tau$ находящегося на РН к моменту взрыва τ запаса компонентов ракетного топлива (КРТ) (Бирюков, 2003: 1-288):

$$T \ni_\tau = T \ni_0 \left(1 - \frac{m_\Sigma \tau}{M_0}\right), \quad (11)$$

где $T \ni_0$ - тротильный эквивалент полностью заправленной РН в кг тринитротолуола (ТНТ); m_Σ - суммарный расход КРТ в полете, кг/с; M_0 - масса КРТ в полностью заправленной РН, кг.

Масса КРТ, участвующая во взрыве выглядит следующим образом:

$$M_b = (M_0 - m_{\ni\tau}) \frac{T \ni_\tau}{T \ni_0}, k = 0, 1 \quad (12)$$

где k - отношение энергий, выделяющихся при взрыве 1 кг ТНТ и сгорании 1 кг топлива. Для топливных пар «НДМГ - АТ» и «керосин - кислород» $k = 0.1$. Полная энергия, выделяющаяся при взрыве РН, определяется соотношением (13):

$$E = M_b * E_{КТ}, \quad (13)$$

где E_{KT} – удельная теплота сгорания 1 кг топлива, Дж/кг, при этом 90% выделяющейся при взрыве энергии расходуется на формирование ударной волны и 10% – на сообщение скорости продуктам взрыва (Онфуриев, 1967: 3-15).

2.3 Метод крупных вихрей

Применяя фильтр к основным уравнениям (1) – (6), получены следующие уравнения (14 – 17):

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \overline{\rho_m}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho_m} \cdot \overline{u_m}) = 0 \quad (14)$$

Уравнение концентрации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m h_m S_\alpha) &= -\nabla \cdot G_\alpha, \alpha = 1, \dots, N_\alpha \\ \frac{\partial(\rho_m S_\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m h_m S_\beta) &= -\nabla \cdot G_\beta, \beta = 1, \dots, N_\beta \end{aligned} \quad (15)$$

где $G_\alpha = \overline{\rho_m(S_\alpha u_m)} - \overline{S_\alpha} \overline{u_m} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \Delta \overline{S_\alpha}$, $G_\beta = \mathbf{B}(\overline{S_\beta u_m} - \overline{S_\beta} \overline{u_m}) = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \Delta \overline{S_\beta}$ описывают вклад подсеточных турбулентных масштабов для уравнений концентрации компонент газа.

Уравнение движение:

Закон сохранения количества движения может быть записан с достаточной точностью в виде:

$$\frac{\partial(\rho_m u_m)}{\partial t} + \nabla(\rho_m u_m \otimes u_m + \rho_m \mathbf{T}_r) = -\nabla p + \nabla \mathbf{T} + \rho_m g - \nabla \mathbf{B} \quad (16)$$

где $\mathbf{B} = \overline{\rho_m(u_m \otimes u_m - \overline{u_m} \otimes \overline{u_m})} = \frac{2}{d} K_t \mathbf{I} - 2\mu_t \mathbf{S}_m$ - подсеточный тензор, отвечающий за мелкомасштабные структуры, которые нужно моделировать.

Уравнение энтальпии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m h_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m h_m u_m) + \nabla \cdot (q - \mathbf{T} \cdot u_g) &= \\ = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial(\rho_m K_m)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_m K_m u_m) + \rho_m (g \cdot u_m) - \nabla \cdot (Q + Q_K) \end{aligned} \quad (17)$$

где $Q = \overline{\rho_m(h_m u_m - \overline{h_m} \cdot \overline{u_m})} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \Delta \overline{h_m}$, $Q_K = \overline{\rho_m(K_m u_m - \overline{K_m} \cdot \overline{u_m})} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \Delta \overline{K_m}$ - описывают вклад подсеточных турбулентных масштабов (Онфуриев, 1967:3-15), (Piscaglia, 2013:926-940), Pr_t - турбулентное число Прандтля, μ_t - турбулентная вязкость.

2.4 Численный метод

Для получения нестационарных полей неизвестных переменных проводится трехмерное численное моделирование уравнения (14 - 17) с указанными начальными и граничными условиями.

Реализация численного алгоритма проведена на основе метода конечных объемов на неструктурированной сетке с использованием библиотеки классов OpenFOAM для языка C++ имеющей открытую лицензию GPL. Благодаря высокому уровню абстракции с применением шаблонов языка C++ библиотека OpenFOAM позволяет быстро создавать эффективные решатели и утилиты для пре и пост обработки результатов моделирования. Классы и функции в библиотеке OpenFOAM имеют неявные средства для распараллеливания вычислительных процедур, благодаря которым проведение численного расчета на многопроцессорных вычислительных системах не требует специфичных адаптаций в программном коде.

В методе конечных объемов (Ferziger, 2002: 251-268) дифференциальные уравнения в частных производных интегрируются по объему произвольной ячейки, после чего применяется теорема Гаусса-Остроградского для перевода объемных интегралов в поверхностные.

При вычислении потоков через границы конечного объема необходимо интерполировать неизвестные значения на каждую грань конечного объема. От выбора метода интерполирования зависят такие характеристики как точность и устойчивость. Интегрирование по времени проводится с помощью схемы Кранка-Николсона, число Куранта поддерживалось на уровне 0.5.

Для обеспечения устойчивости численного расчета применялись неявные схемы, как для конвективных, так и для диффузионных слагаемых.

Для связывания полей скорости и давления, а так же для выполнения закона сохранения массы использовалась процедура PISO. В уравнениях движения и сохранения массы используются явные представления полей давления и силы тяжести. Пространственная дискретизация имеет второй порядок точности.

Алгоритм PISO состоит из одного шага предиктора и нескольких шагов корректоров. В шаге предиктор находится промежуточное поле скорости с использованием поля давления из предыдущего временного слоя. На каждом шаге корректоре производится коррекция поля скорости и давления для увеличения точности и уменьшения дефекта массы в уравнении сохранения.

Система линейных алгебраических уравнений, полученная в результате дискретизации уравнения переноса, решается методом сопряженных градиентов с предобуславлителем Халецкого для уравнения давления и методом бисопряженных градиентов с предобуславлителем неполной LU факторизации.

Алгоритм численного решения разработан следующим образом:

1. Решение уравнения сохранения для плотности смеси явным методом, используя потоки с предыдущего временного слоя.
2. Решение уравнения переноса для газовых составляющих.
3. Решение уравнения сохранения импульса, используя поле давления с предыдущей итерации.
4. Решение уравнения переноса энтальпии, используя поле давления с предыдущей итерации.
5. Решение уравнения Пуассона для давления.
6. Модификация полей плотности и скорости на основе нового поля давления.
7. Возобновление итерации с шага 5 для уменьшения дефекта масс в уравнении сохранения массы.

8. Вычисление подсеточной вязкости.
9. Оценка точности решения и переход на шаг 2 в случае необходимости.

3 Результаты и обсуждение

Произведено моделирование при реалистичном сценарии аварийного взрыва ракетопылителя с определением состава и температурного распределения внутри аэрозольного облака.

Рассматривается моделирование динамики крупномасштабного облака, образующихся при мощных взрывах ракетопылителя «Протон-М» на высоте 42 км. На высотах более 40 км компоненты ракетного топлива не вступают в химические реакции. Здесь рассматривается этап образования аэрозольного облака, включающий быстрые процессы истечения, расширения и конденсации гептила в стратосфере.

Для расчёта параметров состояния воздуха на различных высотах пользуются стандартной атмосферой (СА) – условным распределением, не зависящим от погодных условий, времени года и времени суток. На территории СНГ принято пользоваться стандартной атмосферой - ГОСТ 4401-81 (Таблица 1).

Таблица 1 – Входные данные

Высота, км	Средне годовая температура, С	Давление, Па	Плотность, кг/м ³	Ускорение свободного падения, м/с ²
36	-24,5	$4,98 \cdot 10^2$	$7,25 \cdot 10^{-3}$	9,69
38	-19,4	$3,77 \cdot 10^2$	$5,38 \cdot 10^{-3}$	9,69
40	-16,2	$2,87 \cdot 10^2$	$3,99 \cdot 10^{-3}$	9,68
42	-9,83	$2,19 \cdot 10^2$	$2,99 \cdot 10^{-3}$	9,67
44	-5,92	$1,69 \cdot 10^2$	$2,25 \cdot 10^{-3}$	9,67
46	6,83	$1,31 \cdot 10^2$	$1,71 \cdot 10^{-3}$	9,66
48	3,67	$1,02 \cdot 10^2$	$1,31 \cdot 10^{-3}$	9,65
50	-1,83	$7,97 \cdot 10^1$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	9,65

В данной работе описываются результаты численного моделирования облака сформировавшегося при мощных взрывах ракетопылителя «Протон-М». Для детального исследования загрязнения стратосферы рассматривается инерционное распространение продукта сгорания в направлении движения ракетопылителя и образованием облака. Решение задач осуществляется при заданных начальных и граничных условиях. Из количества остаточного топлива был определена энергия взрыва, образующегося при мощных взрывах ракетопылителя «Протон-М».

Расчеты проводились в прямоугольной области с размерами по обоим горизонтальным направлениям 6.5 км, а по высоте от 16 до 18 км. Расчетная сетка 128x128x128. В таблице 2 приведены расчетное время, размеры облака, высота нахождения облака и максимальная концентрация продукта сгорания.

Таблица 2 – Информация о распространении гептила

Время прошедшее после образования облака	Размеры облака, км	Высота нахождения облака, км	Максимальная концентрация, мг/м ³
1 мин	1x1x1	40-41	1,2
5 мин	2x3x3	40-42	0,07
10 мин	3x5x5	39-42	0,016
20 мин	6x7x7	39-45	0,0041
30 мин	6x8x8	38-46	0,0032
40 мин	6x8x9	38-46	0,003
50 мин	6x8x10	38-46	0,0025
60 мин	6x8x10	38-46	0,0025

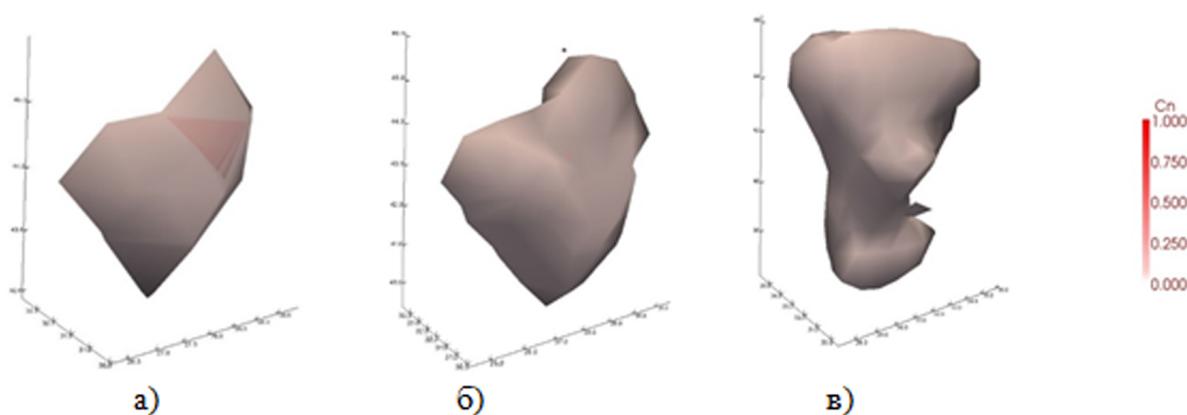


Рисунок 2 - Изменение размера облака концентрации КРТ а) в начальный момент времени б) через 20 мин в) через 50 мин после мощного взрыва ракетносителя «Протон- М» на высоте 42 км при скорости ветра 50 м/с.

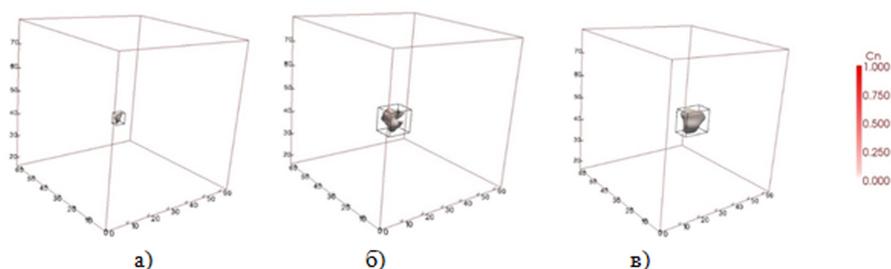


Рисунок 3 - Изменение размера облака концентрации КРТ а) в начальный момент времени б) через 20 мин в) через 50 мин после мощного взрыва ракетносителя «Протон- М» на высоте 42 км при скорости ветра 50 м/с.

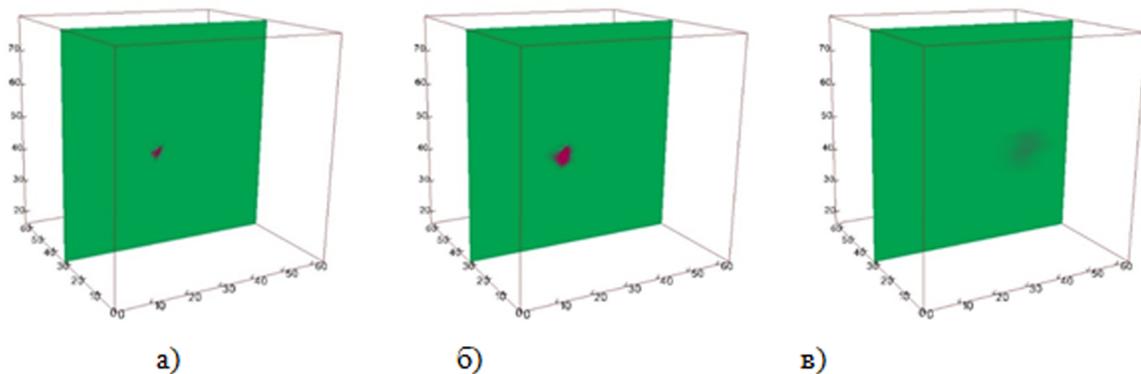


Рисунок 4 - Распределение температуры облака КРТ а) в начальный момент времени б) через 20 мин в) через 50 мин после мощного взрыва ракетносителя «Протон- М» на высоте 42 км при скорости ветра 50 м/с, Токр = -100 С.

На рисунках 2 - 4 представлена динамика изменения объема облака и - распределение температуры продукта сгорания на высоте 42 км, при скорости ветра равной 50 м/с, в различные моменты времени.

На рисунках 2, 3 показаны изменения размера облака концентрации КРТ в зависимости от времени. Как видно из рисунков концентрация КРТ в начальный момент времени максимальна, равна $1,2 \text{ мг/м}^3$ и является стержнем начального распространения. Под действием сил инерции облако расширяется и движется в направлении ветра, достигая границы расчетной области через 1 час взрыва ракетносителя «Протон-М», причем концентрация продукта сгорания уменьшается до $0,0025 \text{ мг/м}^3$ равномерно распределяясь по объему облака. Движение и распределение облака находится на высотах от 38 до 46 км, это значит, что его динамика происходит в стратосфере, и не выходит в другие слои атмосферы.

На рисунке 4 изображено распределение температуры облака продукта сгорания в различные моменты времени. Как видно из рисунков в начальный момент времени температура облака КРТ максимальна, через час она становится равной температуре окружающей среды.

4 Заключение

В данной работе было рассмотрено численное моделирование динамики крупномасштабного облака, образующихся при мощных взрывах ракетносителя «Протон-М». Начальные метеорологические условия, а также параметры взрыва, соответствуют реальным параметрам аварии РН «Протон-М».

Численный алгоритм основан на решении турбулентных отфильтрованных уравнений Навье-Стокса в сжимаемой постановке, уравнении сохранения массы, энтальпии и уравнении состояния для идеального газа. Для замыкания основных уравнений использована вязкостная модель турбулентности. Использованный численный алгоритм имеет второй порядок точности по времени и по пространству.

Получены результаты численного моделирования формирования и переноса крупномасштабного облака сформировавшегося в результате разлива компонентов ракетного топлива в атмосферу при мощных взрывах ракетносителя «Протон-М». Определены изменение размера облака в атмосфере в зависимости от термодинамических параметров. Произведен расчет энергии взрыва рассчитанного от остатка топлива ракетносителя «Протон-М».

Результаты данного исследования позволяют оценить объем и термодинамические параметры крупномасштабного облака в зависимости от высоты и давления окружающей среды. Подобная возможность неоценима при отсутствии экспериментальных данных об образовавшемся облаке в результате аварии. Полученные результаты позволят провести первичную оценку влияния аварии на окружающую среду.

Таким образом, осуществлена постановка задачи формирования облака в трехмерной области с учетом термодинамических параметров, разработана трехмерная математическая модель динамики крупномасштабного облака.

Список литературы

- [1] Fan Y., Fahong L., Jianping SHI. Applications of GIS in Environment Monitoring [electronic resource]. - Technical Division of Surveying and Mapping, Xian, Shaanxi, China, 2011. URL: <http://www.seiofbluemountain.com/upload/product/201105/2011fzjz31.pdf> (date of the application: 16.07.2017)
- [2] Ferziger and Peric, Computational Methods for Fluid Dynamics. - 3., rev. ed. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002. ISBN 3-540-42074-6,-P.251-253.
- [3] Garnier, E., Adams, N., and Sagaut, P.: Large Eddy Simulation for Compressible Flows, doi:10.1007/978-90-481-2819-8, Springer, the Netherlands, 2009. -P.276.
- [4] Goodchild M. F. GIS and Modeling Overview [electronic resource]. - Ch. 1. National center for geographic information and analysis university of California Santa Barbara, California. 2008. URL: <http://geog.ucsb.edu/good/papers/414.pdf> (date of the application: 28.08.2017)
- [5] Ishii M. and Yamamoto K. "An Environmental Risk Evaluation Method Employing Atmospheric Dispersion Models and GIS," Journal of Environmental Protection, Vol. 4 No. 12, 2013, P. 1392-1408. doi: 10.4236/jep.2013.412160.
- [6] Jakala D. A GIS Enabled Air Dispersion Modeling Tool for Emergency Management [electronic resource]. - Department of Resource Analysis, Saint Mary's University of Minnesota, Minneapolis, 2007. URL: <http://www.gis.smumn.edu/GradProjects/JakalaS.pdf> (date of the application: 06.08.2017)
- [7] Piscaglia, F., Montorfano, A., and Onorati, A.: Towards the LES simulation of IC engines with parallel topologically changing meshes, SAE Int. J. Engines, 6, 926–940, doi:10.4271/2013-01-1096, 2013.
- [8] Shaner J., Wrightsell J. Editing in ArcMap // M: MSU, 2002. – P. 226.
- [9] Ungerer, M. J., Goodchild M. F. 2002. Integrating spatial data analysis and GIS: A new implementation using the Component Object Model (COM) / International Journal of Geographical Information Science. 2002. – Vol. 16. - P 41–54.
- [10] Экологические проблемы и риски воздействий ракетно-космической техники на окружающую природную среду: справочное пособие / под ред. В.В. Адушкина, С.И. Козлова, А.В. Петрова. – М.: Анкил, 2000. – 640 с.
- [11] Бирюков Г.П. Элементы теории проектирования ракетно космических комплексов / Г. П. Бирюков, В. И. Смирнов. – М. Изд-во МАИ, 2003. – 288 с.
- [12] Разработка программного комплекса моделирования динамики облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя: отчет о НИР / РГП «НИЦ «Гарыш-Экология»: рук. Жубатов Ж. – Алматы, 2015. – 152 с. - № ГР 0115РК01057. - Инв. № 0215РК01616.

- [13] Зейлер М. Моделирование нашего мира. Руководство ESRI по проектированию базы геоданных. – пер с англ. Дата+. – М: МГУ им. М. В. Ломоносова, географический факультет, 2001. – 254 с.
- [14] Митчел Э. Руководство ESRI по ГИС анализу. Географические закономерности и взаимодействия // М: МГУ им. М. В. Ломоносова, географический факультет, 2001. - Т.1. - пер с англ. – 190 с.
- [15] Онуфриев, А.Т. Теория движения вихревого кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва // ПМТФ. 1967. № 2. -С. 3-15.

References

- [1] Environmental problems and risks of impacts of rocket and space technology on the environment: a reference book / Ed. V.V. Adushkina, S.I. Kozlova, A.V. Petrova. - Moscow: Ankil, 2000. – P. 640.
- [2] Biryukov GP Elements of the theory of the design of space-rocket complexes / GP Biryukov, VI Smirnov. - M. Izd-vo MAI, 2003. P - 288.
- [3] Fan Y., Fahong L., Jianping SHI . Applications of GIS in Environment Monitoring [electronic resource]. - Technical Division of Surveying and Mapping, Xian, Shaanxi, China,2011. URL: <http://www.seiofbluemountain.com/upload/product/201105/2011fzjz31.pdf> (date of the application: 16.07.2017)
- [4] Ferziger and Peric, Computational Methods for Fluid Dynamics. - 3., rev. ed. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002. ISBN 3-540-42074-6,-P.251-253.
- [5] Garnier, E., Adams, N., and Sagaut, P.: Large Eddy Simulation for Compressible Flows, doi:10.1007/978-90-481-2819-8, Springer, the Netherlands,2009. -P.276.
- [6] Goodchild M. F. GIS and Modeling Overview [electronic resource]. - Ch. 1. National center for geographic information and analysis university of California Santa Barbara, California. 2008. URL: <http://geog.ucsb.edu/good/papers/414.pdf> (date of the application: 28.08.2017)
- [7] Ishii M. and Yamamoto K. "An Environmental Risk Evaluation Method Employing Atmospheric Dispersion Models and GIS,"Journal of Environmental Protection, Vol. 4 No. 12, 2013, P. 1392-1408. doi: 10.4236/jep.2013.412160.
- [8] Jakala D. A GIS Enabled Air Dispersion Modeling Tool for Emergency Management [electronic resource]. - Department of Resource Analysis, Saint Mary's University of Minnesota, Minneapolis, 2007.URL: <http://www.gis.smumn.edu/GradProjects/JakalaS.pdf> (date of the application: 06.08.2017)
- [9] Mitchell E. ESRI GIS Analysis Guide. Geographical regularities and interactions // M: Moscow State University. MV Lomonosov, Faculty of Geography, 2001. - Volume 1. - Per from the English. – P.190.
- [10] Onufriyev, A.T. Teoriya dvizheniya vikhrevogo koltsa pod peystviyem sily tyazhesti. Podyem oblaka atomnogo vzryva // PMTF. 1967. №2. -P.3-15.
- [11] Piscaglia, F., Montorfano, A., and Onorati, A.: Towards the LES simulation of IC engines with parallel topologically changing meshes, SAE Int. J. Engines, 6, 926–940, doi:10.4271/2013-01-1096, 2013.
- [12] Shaner J., Wrightsell J. Editing in ArcMap // M: MSU, 2002. – P. 226.
- [13] Ungerer, M. J., M. F. Goodchild. 2002. Integrating spatial data analysis and GIS: A new implementation using the Component Object Model (COM) / International Journal of Geographical Information Science. 2002. – Vol. 16. - P 41–54.
- [14] Zeiler M. Modeling of our world. ESRI's Guide to Geodatabase Design // M: Moscow State University. MV Lomonosov, Faculty of Geography, 2001. – P.254.
- [15] Development of a software package for simulating the dynamics of a cloud formed during a ground-based explosion of a carrier rocket: a report on the research project / RSE "SRC" Garish-Ecology ": hands. Zhubatov Zh. - Almaty, 2015. – P.152. - No.GR 0115PK01057. - Inv. No. 0215RK01616.

МРНТИ 27.35.14

Численное решение и анализ пространственного сверхзвукового горения водородно-воздушной смеси

Матаев К.Т., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Республика Казахстан, +77022643813, E-mail: Matayev.K@gmail.com

Моисеева Е.С., Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77013954777, E-mail: K.Moisseyeva@gmail.com

В данной статье производится анализ численного моделирования сверхзвукового пространственного горения водородно-воздушной смеси. Рассматривается проблема жесткости при совместном численном решении уравнении Навье-Стокса и химической кинетики. Произведена верификация предлагаемой методики решения системы конечно-разностных уравнений Навье-Стокса, замкнутых $k - \omega$ моделью турбулентности, путем численного решения задачи вдува поперечной звуковой струи водорода в сверхзвуковой воздушный поток в трехмерном канале. Проведен вычислительный эксперимент горения водородно-воздушной смеси в сверхзвуковом турбулентном течении. Были получены крупномасштабные вихревые структуры и их рост вниз по потоку для свободного сдвигового течения многокомпонентных газов без введения нестационарных возмущений на входе. Из численных экспериментов следует, что процесс зажигания и диффузионного горения предварительно не перемешанной водородно-воздушной смеси для свободного сдвигового течения появляется в слое смешения, в зоне образования интенсивных вихрей с выделением тепла за счет химических реакций. Приведены результаты численного эксперимента и подробный анализ результатов.

Ключевые слова: Уравнения Навье-Стокса, ENO-схема, сверхзвуковое горение, многокомпонентный сжимаемый газ.

Сутегі-ауа қоспасының кеңістіктік дыбыстан жылдам жануын сандық есептеу және сараптау

Матаев К.Т., Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77022643813, E-mail: Matayev.K@gmail.com

Моисеева Е.С., Ph.D. Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77013954777, E-mail: K.Moisseyeva@gmail.com

Осы мақалада сутегі-ауа қоспасының кеңістікте жылдамдығы дыбыс жылдамдығынан жылдам жануының сандық модельдеуі сарапталады. Навье-Стокс теңдеулері мен химиялық кинетиканың сандық есептеу кезіндегі қатаңдық мәселелері қарастырылады. $k - \omega$ турбуленттілік моделі арқылы тұйықталған шекті-айырымды Навье-Стокс теңдеулер жүйесін үш өлшемді арнада жылдамдығы дыбыс жылдамдығындай сутегі ағыншасын көлденең жылдамдығы дыбыс жылдамдығынан жоғары ауа ағысына үрлеу есебін сандық шығару арқылы расталған шешу әдістемесін тексеру жүргізілді. Дыбыстан жылдам турбулентті ағында сутегі-ауа қоспасының жануының есептік тәжірибесі жүргізілді. Кірісінде тұрақсыз ауытқулар енгіздірілмей ірі масштабты құйындар жүйесі айқындалды және көп құрамды газдың еркін ығыспалы ағыны үшін ағын бойынша төмен осы құйындардың өсуі көрсетілді. Сандық тәжірибелерден еркін ығыспалы алдын-ала араласпаған сутегі-ауа қоспасы ағыны үшін тұтану және диффузионды жану үрдісі араласу аумағында, қарқынды құйындар түзілу аймағында химиялық реакциялар есебінен жылу бөле жүретіні анықталды. Сандық тәжірибе нәтижелері келтірілген және нәтижелерді талдау жүргізілген.

Түйін сөздер: Навье-Стокс теңдеуі, ENO-сұлба, дыбыстан жылдам жану, көп құрамды сығылмалы газ.

Numerical solution and analysis of spatial supersonic combustion of a hydrogen-air mixture

Mataev K.T., Kazakh National University named after al-Farabi, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77022643813, E-mail: Matayev.K@gmail.com

Moiseeva Ye.S., Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77013954777, E-mail: K.Moisseyeva@gmail.com

In this paper, we analyze the numerical simulation of supersonic spatial combustion of a hydrogen-air mixture. The problem of stiffness is considered in the simultaneous numerical solution of the Navier-Stokes equation and chemical kinetics. Verification of the proposed method for solving the system of finite-difference Navier-Stokes equations closed by the $k - \omega$ turbulence model has been performed by numerically solving the problem of injecting a transverse sound jet of hydrogen into a supersonic airflow in a three-dimensional channel. A computational experiment was carried out for the combustion of a hydrogen-air mixture in a supersonic turbulent flow. Large-scale vortex structures and their downstream growth were obtained for the free shear flow of multicomponent gases without introducing nonstationary perturbations at the inlet. It follows from numerical experiments that the process of ignition and diffusion combustion of a previously unmixed hydrogen-air mixture for free shear flow appears in the mixing layer, in the zone of formation of intense vortices with the release of heat due to chemical reactions. The results of a numerical experiment and a detailed analysis of the results are presented.

Key words: Navier-Stokes equations, ENO-scheme, supersonic combustion, multicomponent compressible gas.

1 Введение

Одной из важных современных задач авиационной техники является создание гиперзвуковых (число Маха $M = 7 - 20$) летательных аппаратов (ЛА) с прямоточно-воздушными реактивными двигателями (ВРД), использующих воздух как окислитель. Одной из главных проблем при проектировании таких двигателей является обеспечение максимальной полноты сгорания топлива в камере сгорания (КС), что является необходимым условием получения нужной тяги. Для достижения этой цели необходимо увеличить скорость смешения топливно-воздушной смеси и, соответственно, сжигания. Чтобы детально изучить процесс смешения, необходимо изучить нестационарное образование закручивающихся вихрей в слое смешения и их развитие. Кроме этого, в слое смешения появляются обширные дозвуковые зоны, изучение которых позволит определить механизмы стабилизации пламени. Так как процессы смешения и горения в сверхзвуковой камере сгорания проходят при очень больших скоростях, для детальной визуализации и изучения вихревой структуры необходимо использовать схемы высокого порядка точности как по времени, так и по пространству. Данный факт является одной из главных задач настоящей работы.

2 Обзор литературы

Из существующих работ по численному изучению сверхзвукового турбулентного горения в сдвиговом слое можно отметить труды Тахсини (Tahsini., 2011, 2012) и Чакраборти и др. (Chakraborty D., 2000). В представленных статьях основные усилия были направлены на изучение влияния различных эффектов, таких, как входная закрутка, начальное отношение температур, скоростей и давлений на время задержки воспламенения. Детальный механизм химических реакций был использован в работах (Tahsini.,

2011, 2012). В этих работах проведено численное изучение процесса зажигания сверхзвукового турбулентного водородно-воздушного слоя смешения с использованием метода расщепления адвекции против потока (AUSM+) совместно с турбулентной моделью Спаларта-Алмараса и детальной химической кинетикой. Из результатов следует, что если использовать закрутку в потоке топлива и окислителя, время задержки воспламенения значительно уменьшается посредством изменения угла закрутки. Во всех этих работах не было уделено внимания вихревой природе развития слоя смешения.

3 Материалы и методы

Рассматривается перпендикулярный вдув струи водорода из круглых сопел, расположенных симметрично на нижней и верхней стенках канала, в воздушный сверхзвуковой турбулентный поток в трехмерном канале. Для удобства вычисления рассматривается вдув только с нижней стенки, схема течения представлена на рисунке 1.

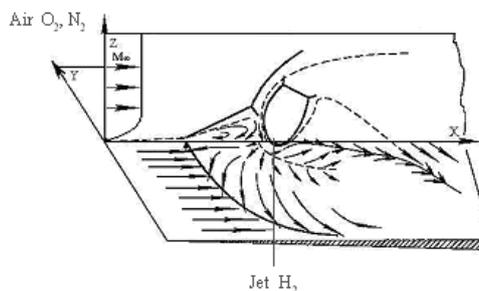


Рисунок 1 – Схема течения

3.1 Постановка задачи

Исходными уравнениями для рассматриваемой задачи является система трехмерных уравнений Навье-Стокса для сжимаемого турбулентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial (\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial y} + \frac{\partial (\vec{G} - \vec{G}_v)}{\partial z} = \vec{S}, \quad (1)$$

$$\vec{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E_t, \rho Y_k)^T, \quad \vec{E} = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, \rho uw, (E_t + p)u, \rho u Y_k)^T,$$

$$\vec{F} = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, \rho vw, (E_t + p)v, \rho v Y_k)^T, \quad \vec{G} = (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + p, (E_t + p)w, \rho w Y_k)^T.$$

$$\vec{E}_v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x, J_{kx})^T,$$

$$\vec{F}_v = (0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y, J_{ky})^T,$$

$$\vec{G}_v = (0, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{kz})^T,$$

$$\vec{S} = (0, 0, 0, 0, 0, \dot{W}_k)^T,$$

где τ , \vec{q} и \vec{J}_k - тензоры вязких напряжений, тепловой поток и диффузионная скорость, соответственно.

Давление и полная энергия определяются как:

$$p = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N \frac{Y_k}{W_k}, \quad E_t = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^N Y_k h_k - p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2)$$

В системе уравнений (1) u , v , w , ρ , T представляют компоненты вектора скорости плотности и температуры, соответственно. Y_k , W_k и h_k - это массовые доли, молекулярный вес и удельная энтальпия k -ой компоненты, соответственно, где $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7$ обозначают массовые доли $H_2, O_2, H_2O, OH, H, O, N_2$, соответственно. γ - это показатель адиабаты, M - число Маха. Параметры с индексом 0 относятся к параметрам струи, а с индексом ∞ к параметрам потока. Система уравнений (1) написана в безразмерной форме. В качестве определяющих параметров приняты параметры потока на входе ($u_\infty, \rho_\infty, T_\infty$). Характерным размером длины является диаметр круглого отверстия d . Система уравнений (1) замыкается двухпараметрической $k-\omega$ моделью турбулентности (?).

Как видно из системы (1), в правой части присутствует источниковый член \dot{W}_k , отвечающий за протекание химической реакции или горения.

$$\dot{W}_k = W_k \sum_{j=1}^{nr} (\nu''_{kj} - \nu'_{kj}) \dot{\omega}_j \quad (2)$$

где $\dot{\omega}_j$ - скорость химической реакции:

$$\dot{\omega}_j = f_j \left(k_j^f \prod_{i=1}^{ns} \left(\rho \frac{Y_i}{W_i} \right)^{\nu'_{ij}} - k_j^b \prod_{i=1}^{ns} \left(\rho \frac{Y_i}{W_i} \right)^{\nu''_{ij}} \right) \quad (3)$$

где f_j , $j = 6, 7$ - влияние катализатора; ν'_{ij} и ν''_{ij} - стехиометрические коэффициенты прямой и обратной реакции, соответственно; ns , nr - число компонент и число реакции, соответственно.

Начальные и граничные условия задаются в следующем виде. На входе задаются параметры потока. В струе задаются параметры вдуваемого газа. На нижней стенке задаются условия прилипания и теплоизоляции. На верхней стенке задается условие симметрии, а на боковых стенках мягкие граничные условия. На выходной границе задается условие неотражения (Poinsot., 1992).

3.2 Модель окисления водорода

Химические реакции моделируются с использованием семистадийного механизма Джачимовского с семью компонентами (таблица 1). В зависимости от скорости химических реакций были установлены три типа числа Дамкелера. Используется уравнение состояния совершенного газа для многокомпонентной смеси. Термодинамические свойства потока (удельная теплоемкость при постоянном давлении, энтальпия и энтропия) вычисляются согласно полиномиальной зависимости четвертого порядка по температуре. Температура вычисляется с помощью итерационной формулы Ньютона-Рафсона.

Таблица 1 – Химическая модель окисления водорода

№	Реакция	A	β_j	T_a
1	$H_2 + O_2 \rightarrow OH + OH$	0.170×10^{14}	0.0	24233
2	$H + O_2 \rightarrow OH + O$	0.142×10^{15}	0.0	8254
3	$OH + H_2 \rightarrow H_2O + H$	0.316×10^8	1.8	1525
4	$O + H_2 \rightarrow OH + H$	0.207×10^{15}	0.0	6920
5	$OH + OH \rightarrow H_2O + O$	0.550×10^{14}	0.0	3523
6	$H + OH \rightarrow H_2O + M$	0.221×10^{23}	-2.0	0.0
7	$H + H \rightarrow H_2 + M$	0.653×10^{18}	-1.0	0.0

Коэффициенты скоростей прямых реакций ($k_j^f, j = 1, 7$) определяются Аррениусовыми зависимостями: $k_j^f = A_j T^{\beta_j} \exp\left(-\frac{E_j}{RT}\right)$, а коэффициенты скоростей обратных реакций определяются из принципа детального равновесия: $k_j^b = \frac{k_j^f}{k_j^c(T)}$, где $k_j^c(T)$ - коэффициент равновесия, определяемый с использованием энергии Гиббса для каждой реакции: $\Delta G_j^0 = \frac{\Delta H_j}{T} - \Delta S_j$. Исходя из этого: $k_j^c = \left(\frac{1}{RT}\right)^{\Delta \nu_j} \exp\left(-\frac{\Delta G_j^0}{RT}\right)$. Здесь $\Delta H_j, \Delta S_j$ - это молярная энтальпия и энтропия j -ой реакции, соответственно и определяются по формулам: $\Delta H_j = \sum_{i=1}^{ns} (\nu''_{ij} - \nu'_{ij}) H_i$, $\Delta S_j = \sum_{i=1}^{ns} (\nu''_{ij} - \nu'_{ij}) S_i$. Где H_i, S_i - это молярная энтальпия и энтропия i -ой компоненты, соответственно. Данные параметры вычисляются по эмпирической зависимости от температуры:

$$\frac{H_k}{T} = \sum_{i=1}^5 \frac{\bar{a}_{ki} T^{i-1}}{i} + \frac{\bar{a}_{k6}}{T} \quad S_k = \bar{a}_{k1} \ln T + \sum_{i=2}^5 \frac{\bar{a}_{ki} T^{i-1}}{i-1} + \bar{a}_{k7},$$

где эмпирические константы \bar{a}_{ki} приняты согласно таблице JANAF (McBride B.J., 1993).

3.3 Метод решения

Метод решения основан на следующей схеме расщепления по физическим процессам. Для более детального моделирования турбулентного пограничного слоя, процесса смешения и горения используется сгущение расчетной сетки вблизи стенки и на уровне вдува струи. На первом этапе для системы (1) с нулевой правой частью была применена существенно неосциллирующая ENO-схема 3-го порядка точности (Moiseyeva., 2014), где значения массовых концентраций Y_k вычисляются на промежуточном временном слое Y_k^* . На втором этапе решается матричное уравнение кинетических членов, где массовые концентрации Y_k вычисляются на новом временном слое Y_k^{n+1} .

$$\frac{\Delta \rho Y_k}{\Delta t} = \dot{W}_k, \quad (4)$$

где источниковый член \dot{W}_k^{n+1} аппроксимируется со следующим весовым коэффициентом λ :

$$\dot{W}_k^{n+1} = (1 - \lambda) \dot{W}_k^n + \lambda \dot{W}_k^{n+1} \quad (5)$$

Рассматриваются три характеристических значения λ :

1. если $\lambda = 0$, метод является явным, т.е. значения \dot{W}_k на временном слое $n + 1$ зависят только от значений \dot{W}_k с предыдущего временного слоя n ;
2. если $\lambda = 1/2$, метод называется центрированным или неявным методом Кранка-Никольсона, т.е. значения \dot{W}_k на временном слое $n + 1$ зависят от значений \dot{W}_k с предыдущего временного слоя n и нового временного слоя $n + 1$ в равной доле;
3. если $\lambda = 1$, метод получается полностью неявным, который является устойчивым.

Такой метод раздельного решения части газодинамики и химической кинетики позволяет избежать трех проблем:

1. жесткость, получающаяся при численном решении системы (1).
2. разреженность матрицы, получающаяся при численном решении системы (1);
3. сложность отладки кода.

Система уравнений (4) является нелинейной относительно источникового члена (2). Существуют три способа линеаризации системы (4). Одним из способов линеаризации, использованный в данной работе, это разложение в ряд Тейлора. Поскольку из формул (2) и (3) видно, что источниковый член является функцией от ρ , Y_k , T , его разложение в ряд Тейлора, если отбросить члены второго порядка и выше, пренебрежимо малые на всем протяжении шага по времени: $\dot{W}_k^{n+1} = \dot{W}_k^n + \frac{\partial \dot{W}_k}{\partial Y_m} \Delta Y_m + \frac{\partial \dot{W}_k}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \dot{W}_k}{\partial \rho} \Delta \rho$, где $\Delta Y_m = Y_m^{n+1} - Y_m^n$, $\Delta T = T^{n+1} - T^n$, $\Delta \rho = \rho^{n+1} - \rho^n$.

Далее, если полученную линеаризацию подставить в (5), то получаем:

$$\dot{W}_k^{n+1} = \dot{W}_k^n + \lambda \left(\frac{\partial \dot{W}_k}{\partial Y_m} \Delta Y_m + \frac{\partial \dot{W}_k}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial \dot{W}_k}{\partial \rho} \Delta \rho \right)$$

Для сохранения высокого порядка точности значение λ было выбрано равным $1/2$, таким образом был использован неявный метод Кранка-Никольсона.

4 Результаты и обсуждение

Численное изучение горения водорода, перпендикулярно впрыскиваемого в канал в пространстве с геометрическими параметрами: длина канала – 20 калибров, ширина – 15 калибров, высота – 10 калибров, диаметр сопла – 1 калибр, центр сопла находится на расстоянии 10 калибров от входного участка. Струя водорода дувается из нижней стенки канала. Параметры струи и потока соответствуют эксперименту (Rogers., 1971): $M_0 = 1$, $T_0 = 1000K$ и $M_\infty = 4$, $T_\infty = 1000K$, $n = 15.61$ – параметр нерасчетности. Расчетная сетка составляет $161 \times 101 \times 101$ узлов. В начальный состав воздушного потока входит: $Y(H_2) = 0$, $Y(O_2) = 0.2$, $Y(N_2) = 0.8$, в струе: $Y(H_2) = 1.0$, $Y(O_2) = 0$, $Y(N_2) = 0$.

На рисунке 2а представлено распределение давления в плоскости симметрии, нормальной к оси y . Вследствие торможения потока перед струей повышается давление и возникает головной (основной) скачок уплотнения (отмечен цифрой 1 на рисунке 2а).

Далее, как следует из графика, вверх по течению от него отходит косой скачок уплотнения 2, за которым наблюдается зона сверхзвукового течения. Последующее торможение потока сопровождается повышением давления и появлением ударной волны – замыкающего скачка уплотнения 3, параллельного оси струи. Также на рисунке видно, что вследствие пересечения ударных волн, а именно головной 1, косой 2 и замыкающей 3, образуется сложная λ -образная структура волн. В передней застойной зоне давление понижается ввиду наибольшей скорости возвратного течения. Затем наблюдается рост давления с максимумом ($p_{max} = 0.398$) в области, лежащей за точкой пересечения ударных волн 1, 2 и 3, а именно за замыкающим скачком. Давление за струей существенно ниже, чем перед ней, что свидетельствует о наличии зоны разрежения. В результате вдува недорасширенной струи в поток давление в струе стремится выровняться с давлением окружающей среды, вследствие чего происходит расширение струи и образуются волны разрежения, которые движутся к границам струи. Семейство отраженных от границы струи волн разрежения формирует всячий скачок 4, замыкающийся диском Маха 5.

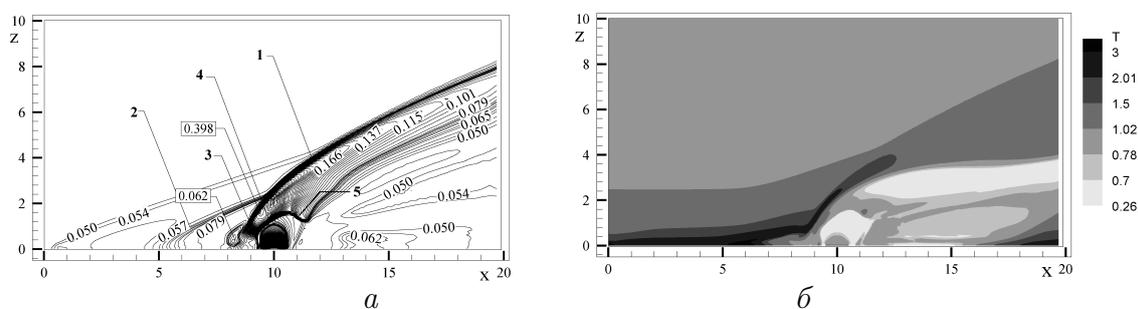
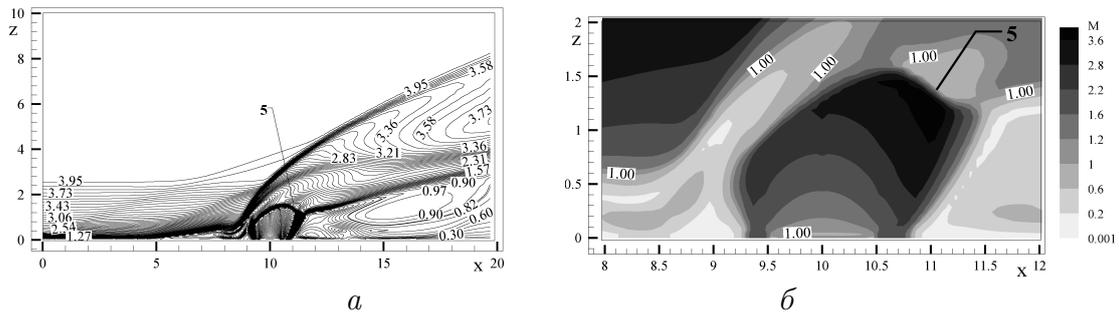


Рисунок 2 – Изобары (а) и поле температуры (б) в плоскости симметрии xz

Поле температуры представлено на рисунке 2б. Резкое изменение температуры происходит на скачках уплотнения, значения температуры превышают начальную температуру струи и потока (безразмерные $T_{\infty} = 1$, $T_0 = 1.3$). Из рисунка 2б следует, что максимальная температура концентрируется в области образования λ -образной ударно-волновой структуры, в пограничном слое и вблизи нижней стенки у выходной границы. В области пересечения струи с основным потоком безразмерная температура равна 2.1 (2100 К) при начальной максимальной температуре 1000 К, т.е. наблюдается повышение в два раза.

Образование прямого скачка 5 и излом всячего скачка 4 также демонстрируют изолинии числа Маха (рисунок 3а). Из графика также видно, что в области за струей значения числа Маха понижаются, что свидетельствует о возникновении области торможения вследствие существования зоны разрежения. Из детальной картины в области вдува (рисунок 3б) видно, что струя, вдуваясь со звуковой скоростью, ускоряется и на некотором расстоянии становится существенно сверхзвуковой. Затем граница образовавшейся сверхзвуковой зоны замыкается, очерчивая круг, который соответствует «бочке», разделяющей сверхзвуковую и дозвуковую зоны. Далее за диском Маха 5 течение замедляется и становится дозвуковым, после чего течение в струе вновь ускоряется до скорости основного потока.

В зоне перед струей формируются два противоположно вращающихся вихря (V_1, V_2), образующие линию растекания R_1 (Рисунок 4а). Здесь линия стекания S_1 соответствует



а)общая картина, б)детальная картина в области вдува

Рисунок 3 – Изомахи в плоскости симметрии xz

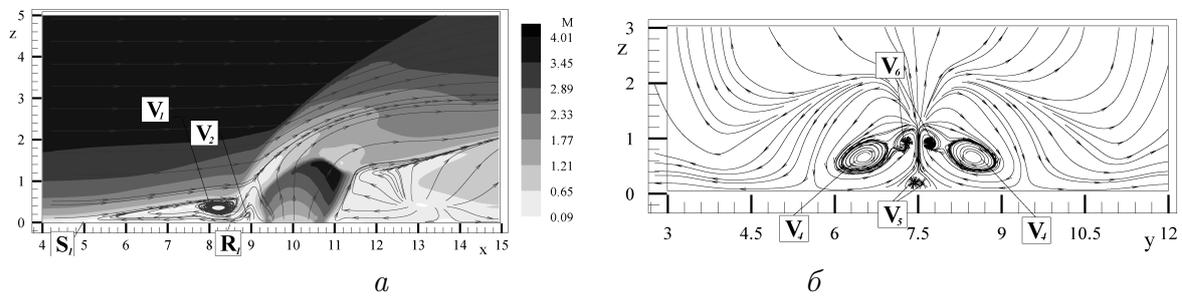


Рисунок 4 – Изомахи и проекции линий тока в плоскости симметрии xz (а), проекции линий тока в плоскости yz в сечении $x = 12.19$ (б)

линии отрыва пограничного слоя перед струей, вызванного косым скачком уплотнения 2. Первый вихрь V_1 формируется вследствие отрыва пограничного слоя перед струей. Взаимодействие расширяющейся струи и замыкающего скачка уплотнения приводит к появлению второго вихря V_2 . На рисунке 4б представлена картина проекции линий тока в плоскости yz. Симметричная вихревая пара V_4 формируется перед струей и генерируется вихрем V_2 . Численные эксперименты показывают, что после окончания бочкообразной структуры за струей вихри V_4 с центрами вращения в слое смешения струи и потока смещаются к плоскости симметрии и увеличиваются в размерах по мере их сноса вниз по потоку, и происходит существенная интенсификация этих вихрей. Вихрь V_4 наблюдается до конца расчетной области. Вихри V_5 являются следствием смещения осей вращения симметричной пары вихрей, которые сформировались в результате огибания струи потоком и поворота потока в направлении к плоскости симметрии. Поскольку за струей (рисунок 2а) образуется область пониженного давления, туда и устремляется натекающий поток, частично поворачивая обратно к соплу и растекаясь в разных направлениях, что и приводит к возникновению симметричной пары вихрей - вихревого следа V_5 . Формирование вихря V_6 обусловлено взаимодействием натекающего потока у основания диска Маха и восходящего потока за струей.

Влияние вихревой системы перед струей на процесс смешения струи и потока демонстрирует картина распространения массовых концентраций водорода в плоскости симметрии, нормальной к оси y (рисунок 5а). Рисунок 5б представляет распределение массовой концентрации продукта сгорания, а именно паров воды в плоскости симметрии

XZ . Так, из графиков видно, что часть водорода, в области перед струей захватывается подковообразными вихрями $V_1 - V_2$ и распределяется вверх по потоку вплоть до линии стекания S_1 .

Из сравнения рисунка 2б (температура), можно заключить следующее. Протекание химических реакций окисления водорода описывается за счет аррениусовой зависимости скорости реакций от температуры. Повышение температуры за ударными волнами способствует быстрому горению. В свою очередь, горение водорода, вызвав интенсивное тепловыделение, приводит к росту температуры в зонах горения. Начало увеличения концентрации паров воды и достижение максимального ее значения за ударными волнами оказывают заметное влияние на горение.

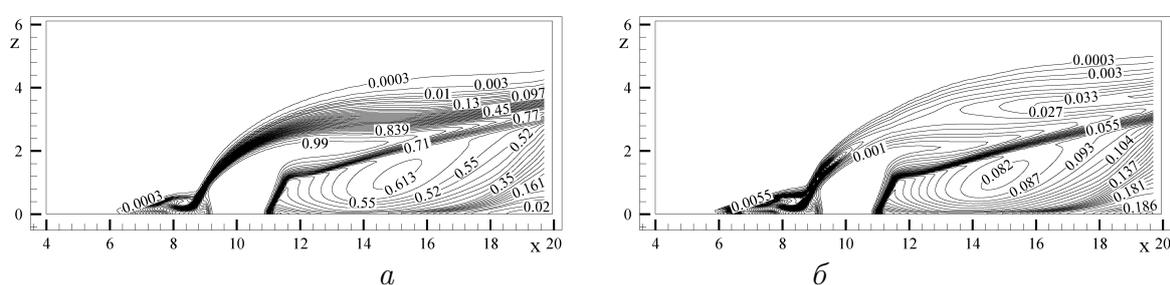


Рисунок 5 – Распространение массовой концентрации водорода (а) и паров воды (б) в плоскости симметрии xz

На рисунке 6 представлена картина распределения массовых концентраций водорода и паров воды в плоскостях yz в сечении перед струей (а, б), сразу за струей (в, г) и вниз по потоку (д, е).

На передней кромке сопла ($x = 9.08$) струя начинает расширяться. На задней кромке сопла ($x = 10.75$) область смешения увеличивается вследствие увеличения подковообразных вихрей V_4 . Последующее накопление водорода и паров воды вниз по потоку можно увидеть на рисунках бд-е ($x = 17.04$). Из графиков видно, что с удалением от вдува вниз по потоку ядро максимальных концентраций уменьшается, но область смешения расширяется. Из сравнения рисунка 4б с рисунком 6 в следует, что водород в основном скапливается в области вихрей V_4 , что является дополнительным подтверждением того, что вихри V_4 локализованы в слое смешения. Здесь также можно увидеть уменьшение концентрации водорода в контрасте с увеличением концентрации паров воды за счет горения. Перед струей в зоне максимальных температур (рисунок 6б) и вниз по потоку (рисунок 6г, е) происходит образование продуктов сгорания. При этом в нижней части слоя смешения за струей наблюдается присутствие обширных дозвуковых зон (рисунок 3), что позволяет водородно-воздушной смеси гореть стабильно.

5 Заключение

Механизм окисления водорода носит цепной характер, что является следствием зарождения в зоне смешения струи и основного потока активных центров – атомов и радикалов: H, O, OH . Дальнейшая диссоциация молекулярных компонентов смеси, а также обменные реакции горения приводят к накоплению активных центров. Поскольку ре-

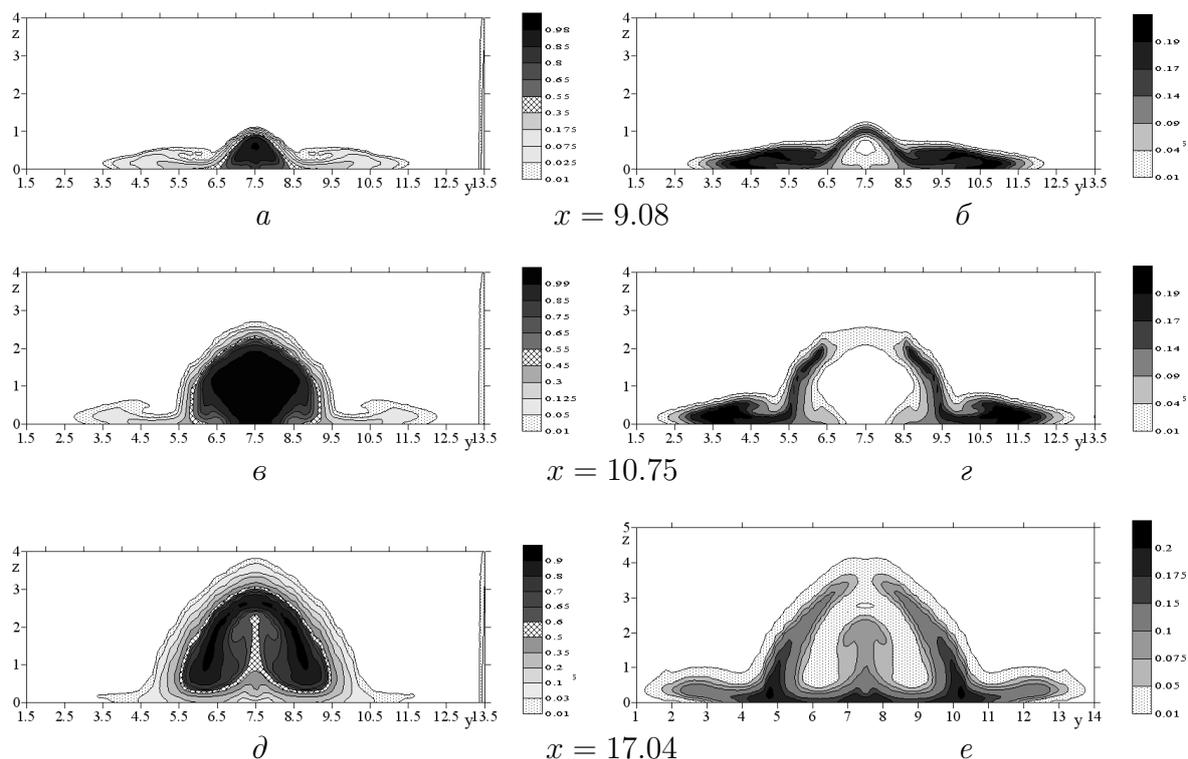


Рисунок 6 – Распространение массовой концентрации водорода (*a*, *в*, *д*) и паров воды (*б*, *г*, *е*) в плоскостях *yz*

акции инициирования и обменные реакции эндотермичны, то эта стадия окисления водорода проходит без значительного выделения тепла, что говорит о наличии периода индукции, характеризующегося постоянством температуры гомогенной смеси.

Список литературы

- Chakraborty D., Paul P. J., Mukunda H. S.* Evaluation of Combustion Models for High Speed H₂/Air Confined Mixing Layer Using DNS Data // *Combustion and Flame*. – 2000. – Vol. 121. – p. 195-209.
- McBride B.J., Gordon S., Reno M.A.* Coefficients for calculating thermodynamic and transport properties of individual species // *NASA Technical Memorandum 4513*, October 1993.
- Moiseyeva Ye.* Analysis of ENO scheme slope limiters // *Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф.*, № 80, Issue 1, 2014, pp. 10–20.
- Poinsot T.J., Lele S.K.* Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows // *J. Comp. Phys.* 1992. Vol. 101. pp. 104–129.
- Rogers R.C.* A study of the mixing of hydrogen injected normal to a supersonic airstream // *NASA Report TN D-6114*. – Washington, United States, 1971. – 53 p.
- Tahsini A.M.* Ignition Analysis in Supersonic Turbulent Mixing Layer // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. – 2011. – №57. – p. 353-357.
- Tahsini A.M.* Ignition Time Delay in Swirling Supersonic Flow Combustion // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. – 2012. – №70. – p. 623-627.
- Wilcox D. C.* Formulation of the *k* – ω Turbulence Model Revisited // *AIAA J.* – 2008. – Т. 46. – №. 11. – p. 2823-2838.

References

- Chakraborty D., Paul P. J., Mukunda H. S.* Evaluation of Combustion Models for High Speed H₂/Air Confined Mixing Layer Using DNS Data // *Combustion and Flame*. – 2000. – Vol. 121. – p. 195-209.
- McBride B.J., Gordon S., Reno M.A.* Coefficients for calculating thermodynamic and transport properties of individual species // *NASA Technical Memorandum 4513*, October 1993.
- Moissejeva Ye.* Analysis of ENO scheme slope limiters // *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.*, № 80, Issue 1, 2014, pp. 10–20.
- Poinsot T.J., Lele S.K.* Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows // *J. Comp. Phys.* 1992. Vol. 101. pp. 104–129.
- Rogers R.C.* A study of the mixing of hydrogen injected normal to a supersonic airstream // *NASA Report TN D-6114*. – Washington, United States, 1971. – 53 p.
- Tahsini A.M.* Ignition Analysis in Supersonic Turbulent Mixing Layer // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. – 2011. – №57. – p. 353-357.
- Tahsini A.M.* Ignition Time Delay in Swirling Supersonic Flow Combustion // *World Academy of Science, Engineering and Technology*. – 2012. – №70. – p. 623-627.
- Wilcox D. C.* Formulation of the $k - \omega$ Turbulence Model Revisited // *AIAA J.* – 2008. – Т. 46. – №. 11. – p. 2823-2838.

3-бөлім**Информатика**

IRSTI 20.19.19

Раздел 3**Информатика****Section 3****Computer science****Automatic document summarization based on statistical information**

Mussina A., Al-Farabi Kazakh National University,
 Almaty, Republic of Kazakhstan, +77759295274, E-mail: mussina.aigerim95@gmail.com
 Aubakirov S., Al-Farabi Kazakh National University,
 Almaty, Republic of Kazakhstan, +77002200051, E-mail: aubakirov.sanzhar@gmail.com
 Ahmed-Zaki D., Al-Farabi Kazakh National University,
 Almaty, Republic of Kazakhstan, +77772469374, E-mail: darhan.ahmed-zaki@kaznu.kz
 Trigo P., Instituto Superior de Engenharia de Lisboa,
 Lisbon, Portugal, E-mail: ptrigo@deetc.isel.ipl.pt

Actual problem in nowadays is to efficiently process the large amount of data that pass through our mind everyday. The object of study of this paper is automatic summarization algorithms. The main goal is to implement and make comparison of different summarization techniques on corpora of news articles parsed from the web. This research work contains the description of three summarization techniques based on TextRank algorithm: General TextRank, BM25, LongestCommonSubstring. It is specially noted the languages of used corpora: Russian and Kazakh languages. The results of summarization processes and their comparison are provided. It should be emphasized that used algorithms are well-known, but the way of their evaluation on defined corpora is different from those which usually used in summary evaluation. The method of summary evaluation proposed use the special dictionary of extracted key-words on the topic of corpora. As the title implies the article describes applying statistical information. The semantic and syntactic features of text are not examined.

Key words: summarization, automatic extraction, key-words, N-gram, TextRank

Статистикалық ақпараттар негізінде тексттерді автоматты түрде реферирлеу

Мусина А.Б., әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті,
 Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77759295274, E-mail: mussina.aigerim95@gmail.com
 Аубакиров С.С., әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті,
 Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77002200051, E-mail: aubakirov.sanzhar@gmail.com
 Ахмед-Заки Д.Ж., әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті,
 Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77772469374, E-mail: darhan.ahmed-zaki@kaznu.kz
 П. Триго, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa,
 Лиссабон, Португалия, E-mail: ptrigo@deetc.isel.ipl.pt

Біздің күнделікті ақыл-ойымыздан өтетін көптеген ақпараттарды тиімді өңдеу - бүгінгі күннің өзекті мәселесі. Автоматтандырылған реферирлеу алгоритмдері жұмыстың зерттеу объектісі болып табылады. Мақалада сипатталған мақсат интернеттен алынған жаңалықтар мақалаларының корпусында реферирлеу алгоритмдерін жүзеге асыру және салыстыру. Берілген зерттеу жұмысы TextRank алгоритміне негізделген General TextRank, BM25, LongestCommonSubstring реферирлеудің үш алгоритмдерінің сипаттамаларын қамтиды. Орыс және қазақ тілдері қолданылған корпусының ерекше тілдері ретінде атап өтілген. Реферирлеулер мен олардың салыстыруларының нәтижесі де берілген. Қолданылатын алгоритмдер жақсы танымал екендігін атап өтуге болатынына қарамастан, зерттеу барысындағы бағалау тәсілі әдеттегі қысқаша мазмұндағы бағалаудан ерекшеленетінін айта кету керек. Ұсынылып отырылған аннотацияларды бағалаудың әдісі корпус тақырыбындағы арнайы бөліп алынған кілттік сөздерді пайдаланады. Тақырыпқа сәйкес мақалада статистикалық ақпаратты пайдалану сипатталған. Мәтіннің семантикалық және синтаксистік қасиеттері қарастырылмайды.

Түйін сөздер: реферирлеу, автоматты шығарып алу, кілтті сөздер, N-gram, TextRank

Автоматическое реферирование текстов на основе статистической информации

Мусина А.Б., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77759295274, E-mail: mussina.aigerim95@gmail.com
Аубакиров С.С., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77002200051, E-mail: aubakirov.sanzhar@gmail.com
Ахмед-Заки Д.Ж., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77772469374, E-mail: darhan.ahmed-zaki@kaznu.kz
П. Триго, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa,
Лиссабон, Португалия, E-mail: ptrigo@deetc.isel.ipl.pt

На сегодняшний день актуальной проблемой остается эффективная обработка большого объема информации, проходящей через наше сознание каждый день. Объектами данного исследования являются алгоритмы автоматического реферирования. Описанная в статье цель заключается в реализации и сравнении алгоритмов реферирования на корпусе новостных статей, взятых из интернета. Данная исследовательская работа содержит описание трех алгоритмов реферирования основанных на алгоритме TextRank: General TextRank, BM25, LongestCommonSubstring. Особенно отмечаются языки используемого корпуса: русский и казахский. Предоставлены результаты реферирования и их сравнение. Следует подчеркнуть, что используемые алгоритмы хорошо известны, но способ их оценки на изучаемом корпусе отличается от тех что обычно используются при оценке краткого содержания. Предлагаемый метод оценки аннотаций использует специальный извлеченный словарь ключевых слов по теме корпуса. Согласно названию в статье описывается применение статистической информации. Семантические и синтаксические свойства текста не рассматриваются.

Ключевые слова: реферирование, автоматическое извлечение, ключевые слова, N-gram, TextRank

1 Introduction

In this research work, our goal is to make research and comparison on summarization algorithms. Automatic summarization is the process of generating a reduced text from document, which will save the idea of original text. There is primarily three types of automatic summarization: extraction-based, abstraction-based and aided. In this article extraction-based approach used, it uses parts of the original text, sentences, and construct the short paragraph summary, it does not make any modifications in text. (Automatic summarization) Many text features can influence on summary, like semantic and syntactic features, but we will concentrate on statistical data, which is a frequency statistics of N-grams. Based on this we chose extraction-based summarization type. Most of the algorithms that work based on statistical data build a summary text content by counting the similarity of text units and units' importance. Text unit could be a word, sentence or paragraph, in our case as a unit was chosen a sentence. Similarity is considered the presence of key-words in the sentences. Key-words are words that indicate the topic of the text.

2 Related works

During the search on related works were used next key-words: paragraph extraction from text, sentence extraction, position in text of main information, sentence similarity, informative sentence extraction. In the work (Chuleerat 2003: 9-16) presents an algorithm for extracting

the most significant paragraphs from a text in Thai, where the significance of a paragraph is considered based on the local and global properties of a paragraph. The main emphasis is on the known correct distribution of paragraphs, since Thai language is very different from European languages and is more like Chinese and Japanese in terms of fuzzy division of words and sentences. In our case, we consider Russian and Kazakh languages, which have a clear sentence structure. The (Mandar 1997: 39-46, Fukumoto 1997: 291-298) works propose that each word in text can have weight and depending on this weight it is possible to denote the important part of information. However, article (Fukumoto 1997: 291-298) uses words weight among a paragraph and the extraction unit in this work is a paragraph. The works (Federico 2016: 65-72, Yacko 2002) mainly depict one view of summarization methods. Authors suppose that each sentence has connection with other sentences and this connection is their similarity. In work (Federico 2016: 65-72) TextRank algorithm presented with different variations of similarity functions. The main feature is denoted in construction of a graph with sentences as vertex(tops) and similarity connections as edges, where each edge has its value calculated from similarity function. In work (Yacko 2002) similarity of sentences defined in common words, sentence with more connections recognized as informative. The way of constructing a graph seems the most preferable since it operates with sentences, and similarity functions use statistical data as word frequency.

One of the most important stage described in the work (Page 1998), it is about PageRank algorithm that proposed by Google. PageRank is an algorithm used in ranking of edges in any graph. TextRank uses it when construct summary from a generated graph.

The summary evaluation process described in (Federico 2016: 65-72, Sandeep 2009: 521-529) and they involve usage of ROUGE. Recall-Oriented Understudy for Gisting Evaluation (Chin-Yew Lin 2004: 74-81) is a set of metrics used in automatically generated summary evaluation and in machine translation. This kind of evaluation does not useful for us, because it assumes comparison of automatically produced summary and human generated summary, "ideal summary". This project work does not assume interaction with human. The hypothesis from work (Sandeep 2009: 521-529) stays that the summary must act as the full document, such that their probability distributions are very close to each other. Authors propose application of KL (Kullback-Leibler) Divergence, the calculation of entropy of summary, in evaluation process.

In this article we will not describe the process of dictionary extraction, since it is fully examined in our previous work (Mussina 2017:). The corpora used in previous work (Mussina 2017:) and in this work is the same.

3 Source and methods

The corpora, which was used, consists of news articles that were parsed by web-crawler from government and news portals. Texts are in Russian and Kazakh languages. Most of the texts about some notification situations, like floods, earthquakes and storms, also may contain not necessary information, for example, long requisites about department or region. Summary can help people to concentrate only on necessary facts without information noise.

3.1 Summarization techniques

In the work (Federico 2016: 65-72) described TextRank algorithm for automated summarization with author's modifications. It represents document as graph with sentences as nodes. Edges between nodes show the similarity between sentences. Work (Federico 2016: 65-72) compare original way of similarity calculation with different modification proposed by authors. In this project work we have implemented three variations of similarity functions: original, BM25 and Longest common substring. The summary size is equal to the 30% of the original text size.

$$Sim(S_i, S_j) = \frac{|\{w_k | w_k \in S_i \& w_k \in S_j\}|}{\log(|S_i|) + \log(|S_j|)} \quad (1)$$

Formula 1 shows the similarity calculation by the original TextRank version. Algorithm 1. Original TextRank

1. Extract list of sentences from text. Proceed to step 2.
2. For each sentence $i \in [0, \text{sentence list size} - 1]$
3. Extract N-grams of sentence[i]
4. For each sentence $j \in [i+1, \text{sentence list size}]$
5. Extract N-grams of sentence[j]
6. Count the number of similar N-grams by formula 1
7. If similarity is greater than 0, add edge between sentences with weight equal to their similarity.

As an example we will show the work of algorithm on "NOTIFICATION" message. Example 1. The original text shown below.

Жители Шымкента и Тараза почувствовали землетрясение в Афганистане, сообщает корреспондент Tengrinews.kz со ссылкой на ГУ "Сейсмологическая опытно-методическая экспедиция Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан". Подземные толчки были зафиксированы 10 апреля в 16.28 по времени Астаны. Эпицентр землетрясения располагался на территории Афганистана, в 787 километрах на юго-запад от Алматы. Энергетический класс землетрясения 14,5. Магнитуда - 6,8, глубина залегания - 20 километров. Толчки ощущались в Шымкенте и Таразе - 3 балла. Сведений о пострадавших и разрушениях нет. Напомним, 9 апреля землетрясение магнитудой 4,9 произошло в 141-м километре от Алматы. Подземные толчки были зафиксированы в 23.31 по времени Астаны. Эпицентр землетрясения находился в 141-м километре на юго-восток от Алматы на территории Кыргызстана. Энергетический класс подземных толчков - 10,2, глубина залегания - 5 километров.

All N-grams are counted, for example, in sentence 9 we have phrase "Подземные толчки были зафиксированы" and it contains 6 N-grams: "Подземные", "Подземные толчки",

“Подземные толчки зафиксированы”, “толчки”, “толчки зафиксированы”, “зафиксированы”. The word “были” is a stop-word.

The BM25 variation based on the below formulas:

$$BM25(R, S) = \sum_{i=1}^n IDF(S_i) * \frac{f(S_i, R) * (k_1 + 1)}{f(S_i, R) + k_1 * (1 - b + b * \frac{|R|}{avgDL})} \quad (2)$$

where IDF – inverse document frequency, $f(S_i, R)$ – occurrence frequency of a words i from sentence S in sentence R , $|R|$ - a length of sentence R , $avgDL$ – average length of sentences in the document; k_1 and b are parameters, we used the same that author of (Federico 2016: 65-72) work used, $k_1 = 1.2$, $b = 0.75$ This formula states that if a word appears in more than half of sentences it will cause negative result value. To avoid problems caused by negative value in future work of an algorithm next calculation of IDF was proposed:

$$IDF(S_i) = \begin{cases} \log(N - n(s_i) + 0.5) - \log(n(s_i) + 0.5) & , if \quad n(s_i) > \frac{N}{2} \\ \varepsilon * avgIDF & , if \quad n(s_i) \leq \frac{N}{2} \end{cases} \quad (3)$$

where ε - between 0.3 and 0.5, we use 0.5

Algorithm 2. BM25

1. Extract list of sentences from text. Proceed to step 2.
2. Calculate IDF for all N-grams and the average length of document sentences.
3. For each sentence $i \in [0, \text{sentence list size} - 1]$
4. Extract N-grams of sentence[i]
5. For each sentence $j \in [i+1, \text{sentence list size}]$
6. Extract N-grams of sentence[j]
7. Count the sentence similarity by formula 2
8. If similarity is greater than 0, add edge between sentences with weight equal to their similarity

The Longest common substring is the easiest in implementation algorithm, but it also can show sufficient results. For similarity value used length of the longest common substring.
Algorithm 3. Longest common substring

1. Extract list of sentences from text. Proceed to step 2.
2. For each sentence $i \in [0, \text{sentence list size} - 1]$
3. Extract N-grams of sentence[i]
4. For each sentence $j \in [i+1, \text{sentence list size}]$

5. Extract N-grams of sentence[j]
6. Find out longest common substring. Set its length as similarity value.
7. If similarity is greater than 0, add edge between sentences with weight equal to their similarity.

Table 1 - Algorithms' results for example 1

	General TextRank, $Sim(S_i, S_j)$	BM25, $BM25(S_i, S_j)$	Longest Common Substring, $LCS(S_i, S_j)$
S_1 and S_8	0.278	1.225	13
S_2 and S_6	0.377	1.133	6
S_2 and S_8	0.326	1.225	6
S_2 and S_9	3.239	13.663	30
S_3 and S_4	0.384	1.234	13
S_3 and S_8	0.313	0.814	6
S_3 and S_{10}	1.848	6.168	22
S_4 and S_{10}	0.378	0.769	13
S_4 and S_{11}	1.211	4.11	20
S_5 and S_{11}	1.439	5.48	17
S_6 and S_9	0.403	1.048	6
S_8 and S_{10}	1.855	6.556	15

After the graph construction we need to go to the next stage, summary construction. We have graph with sentences as nodes and edges as similarity value between sentences. The PageRank based on the assumption that the amount of connections and the source of connection play role in the "importance" of the connected object. Consider data from example 1 for general TextRank similarity function. Generally, in our graph we have sentences connected with each other. However, usually we have such a situation when some sentences do not have any common word. In this case we have graph presented in figure 1(a). We can see that sentence with number 7 does not have any connection with other sentences, this means it has no common word with others. To reduce number of edges we define a threshold, which is equal to the average value of all edges weights, figure 1(b). The average value of all edges weights will be equal to 1.0045. More sentences now rejected, like sentences with numbers 1, 6 and 7. The pairs that have passed through the threshold are (S_2, S_9) $Sim = 3.239$, (S_3, S_{10}) $Sim = 1.848$, (S_4, S_{11}) $Sim = 1.211$, (S_5, S_{11}) $Sim = 1.439$, (S_8, S_{10}) $Sim = 1.855$. We have reduced 7 pairs. Now we will rank each sentences with similarities that they have with other sentences, figure 1(c).

1. S_2 rank = 3.239 value, since it has only one link with S_9
2. S_3 rank = 1.848
3. S_4 rank = 1.211

4. S5 rank = 1.439
5. S8 rank = 1.855
6. S9 rank = 3.239
7. S10 has two links with sentences S3 and S8, its rank is equal to 3.703
8. S11 also has two links with sentences S4 and S5, its rank is equal to 2.65

In the ascending order we will get sentences array: S10, S2, S9, S11, S8, S3, S5, S4. The size of original text is equal to 11 sentences, the 30% of this is 3.3, we round value up and finally get size of summary of 4 sentences. Sentences with high rank will construct the summary, we get first 4 from ascending array: S10, S2, S9, S11. Then we permute sentences in the order of original text and save summary. Finally, we get the summary depicted below.

Подземные толчки были зафиксированы 10 апреля в 16.28 по времени Астаны. Подземные толчки были зафиксированы в 23.31 по времени Астаны. Эпицентр землетрясения находился в 141-м километре на юго-восток от Алматы на территории Кыргызстана. Энергетический класс подземных толчков - 10,2, глубина залегания - 5 километров.

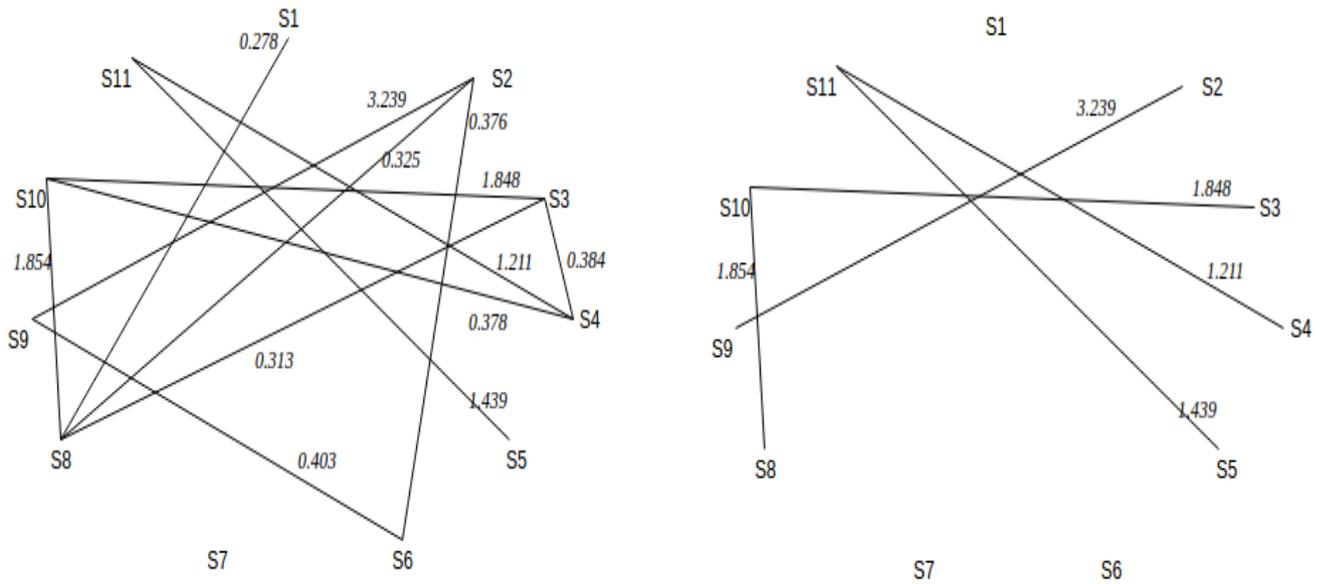
In the end we calculate the sum of all similarities that sentence have with other sentences. The final value we use in the summary construction. Sentence with the higher value goes to the summary.

3.2 Summary evaluation

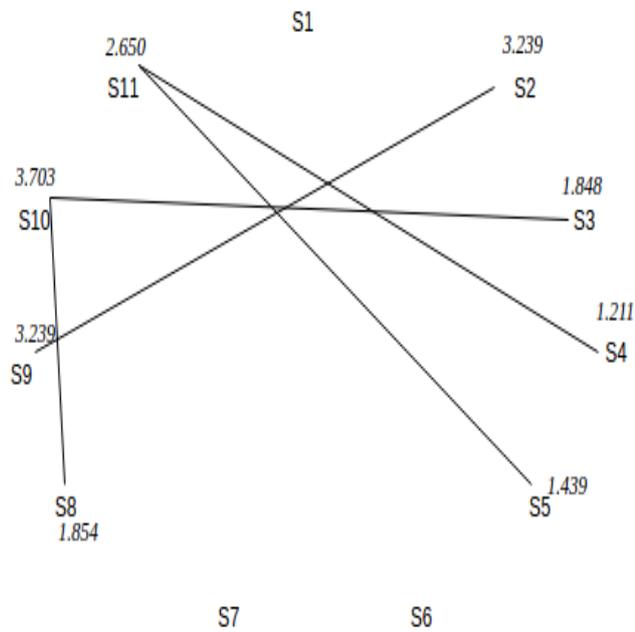
The evaluation of the summary based on the idea, proposed in work (Sandeep 2009: 521-529), that summary probability distribution model must be very close to the original document probability distribution model. Applying to our conditions we can suppose that the key-words distribution in the summary must be bigger than in the original text, because summary reduce amount of general words and save number of key-words. In (Sandeep 2009: 521-529) work authors use uni-gram model, but we will use model from 1 up to 5 N-grams. The algorithm of summary key-words distribution calculation described below.

Algorithm 4. Key-words distribution.

1. Get document from array of documents. Proceed to step 2.
2. Extract N-grams from text. Proceed to step 3.
3. For each N-gram check if it is in key-words dictionary. Count the sum of matches. Proceed to step 4.
4. Calculate key-words distribution by dividing sum of matches by the amount of N-gram extracted from the text. Proceed to step 5.
5. If there are one more document go to step 1, else calculate average key-words distribution which will describe the summary evaluation for the given TextRank variation function.



(a) Graph with similarities greater than 0 (b) Graph with similarities greater than threshold



(c) Graph with ranked sentences

Figure 1 - Graphs

The original text with underlined key-words:

“Жители Шымкента и Тараза почувствовали землетрясение в Афганистане, сообщает корреспондент Tengrinews.kz со ссылкой на ГУ “Сейсмологическая опытно-методическая экспедиция Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан”. Подземные толчки были зафиксированы 10 апреля в 16.28 по времени Астаны. Эпицентр землетрясения располагался на территории Афганистана, в 787 километрах на юго-запад от Алматы. Энергетический класс землетрясения 14,5. Магнитуда - 6,8, глубина залегания - 20 километров. Толчки ощущались в Шымкенте и Таразе - 3 балла. Сведений о пострадавших и разрушениях нет. Напомним, 9 апреля землетрясение магнитудой 4,9 произошло в 141-м километре от Алматы. Подземные толчки были зафиксированы в 23.31 по времени Астаны. Эпицентр землетрясения находился в 141-м километре на юго-восток от Алматы на территории Кыргызстана. Энергетический класс подземных толчков - 10,2, глубина залегания - 5 километров.”

The body evaluation = 0.124

The below summary is identical to all three TextRank techniques: General, BM25, LongestCommonSubstring. As we can see the key-words distribution increased in summary.

“Подземные толчки были зафиксированы 10 апреля в 16.28 по времени Астаны. Подземные толчки были зафиксированы в 23.31 по времени Астаны. Эпицентр землетрясения находился в 141-м километре на юго-восток от Алматы на территории Кыргызстана. Энергетический класс подземных толчков - 10,2, глубина залегания - 5 километров.”

The summary evaluation = 0.12

The results from each TextRank variation function then compared with each other. The distribution value is normalized and it is between 0 and 1. Probably it could be not equal to 1, because document could not contain only key-words. The described evaluation could be applied only to “NOTIFICATION” classified messages. Even the N-gram with negative “emergency” state that it is belonging more to “NEWS” messages, it could be not correct to say that we can use inverse “emergency” to evaluate general news articles. This assumption could be explained by the biased articles in “NEWS”, since they are about very different topics.

4 Results and discussion

Table 2 shows the amount of news articles that we have used during summary extraction tests. The average length of article presented in amount of symbols, since sentences and words could be of different length.

Table 2 - Source data for summary extraction

	Amount
Articles	74770
Average article length (in symbols)	1619

Table 3 - TextRank variations evaluation results

	Key-words distribution
Original documents	0.159
General TextRank	0.18
BM25	0.169
LongestCommonSubstring	0.175

From the table 3 we can see that all summarization techniques have reduced the number of general words and the concentration of key-words increased. General TextRank stays as the best technique according to summary evaluation described in the Section 3.2.

During this research work TextRank algorithm variations were tested and estimated. In the (Federico 2016: 65-72) work tests show that BM25, with modification of IDF value by formula (3), was the one with better results than general TextRank and Longest common substring. Authors used the database of the 2002 Document Understanding Conference (DUC) and for evaluation used version 1.5.5 of the ROUGE package. Our implementation on corpora of news articles show another results and we have two main possible reasons for that:

1. Corpora without “ideal summary”
2. Not clear dictionary

The ROUGE package evaluation metric use the reference summary, or “ideal summary”, and has several techniques. The generation of such reference summary needs human interaction and possibly not interaction of one human, but at least three persons summary, from which will be chosen one ideal. The professional activity of each human candidate also play role.

The alternative way of evaluation process, as was mentioned in sub-section 3.2, Summary evaluation, based on the hypothesis from (Sandeep 2009: 521-529). Authors used KL (Kullback-Leibler) Divergence which denotes the difference between two probability distributions by formula:

$$D_{KL}(P||Q) = \sum_{i \in w} P(i) \log \left(\frac{P(i)}{Q(i)} \right) \quad (4)$$

where P is probability distribution of original document and Q is a probability of summary. The basic term that used in Kullback-Leibler Divergence is entropy and information gain, but since information gain is an inverse value to entropy we will discuss on entropy.

Another one alternative way of summary evaluation which was proposed by us is calculation “emergency” of summary. The idea based on “emergency” value of N-grams from dictionary. Since we have N-grams with, “emergency” < 0 , we suppose that the summary with more not important, not from dictionary, words will have low “emergency”, when summary with less not important words and more key-words will have high “emergency”. The main problem with such method is in uncertainty of comparison of values, because we cannot properly normalize values with certain upper and lower bounds.

In future we would like to continue research on completely different summary generation. During tests it was noticed that sometimes not important N-grams repeated in several sentences, which cause that those sentences were written to the summary. We propose the possible idea to construct summary by sentences non similarity. The new algorithm is as follows:

1. Group sentences that has common N-grams. Proceed to step 2.
2. Choose sentence with biggest amount of key-words among those that are in one group. Proceed to step 3.
3. Generate summary from sentences that were chosen from previous step.

The attention also will be provided to numerical data. Such information will be very helpful for emergency work specialists. The summary should contain such information and presence of it will be used in evaluation process. Finally, the main and most meaningful research should be done in synonyms. Since the basic similarity calculated by presence of common words in two sentences, it is very important to add synonyms dictionary. The sentence S_A may contain word “подземные толчки” and sentence S_B “землетрясение”, meaning of these N-grams mostly equal, but implemented algorithm will not recognize similarity.

5 Conclusion

The research on already existent works about object of our study was made. The implemented algorithms were compared and results of this comparison show the practical meaning of this work. The results of summary evaluation mostly matched the comparison described in (Federico 2016: 65-72). The General TextRank was the best one, which generates summary with high distribution of key-words. Its average key-words distribution is equal to 0.18. The LongestCommonSubstring, which is the easiest algorithm to implement has key-words concentration equal to 0.17589730440957158. The lowest distribution 0.169 belongs to BM25. In the (Federico 2016: 65-72) work authors make changes in parameters values, such that the results of BM25 became better. In future work we will also make changes in parameters and IDF function definition. More research would be done on dictionary extraction, synonyms dictionary and summary evaluation. Dictionary extraction has more work to be done, since it is very important in summary evaluation and all problems should be resolved: stop-words, stemming. The summaries constructed by all three algorithms in most of cases cut off not important information and leave the important part with key-words. The examples of algorithm work and results of their tests presented in this research work.

This work was partially supported by the grant of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project 3350/GF4 MON RK).

References

- [1] Chin-Yew Lin, "ROUGE: A Package For Automatic Evaluation Of Summaries," *ACL Anthology Network* (2004): 74–81, accessed October 20, 2016
- [2] Chuleerat Jaruskulchai and Canasai Kruengkrai, "A Practical Text Summarizer by Paragraph Extraction for Thai," (paper presented at the Proceedings of the Sixth International Workshop on Information Retrieval with Asian Languages, Sapporo, Japan, July 7, 2003)
- [3] Federico Barrios, Federico Lopez, Luis Argerich, Rosita Wachenchauser, "Variations of the Similarity Function of TextRank for Automated Summarization," *Cornell University Library* (2016): 65-72, accessed November 14, 2016, arXiv:1602.03606.
- [4] Fukumoto F., Suzuki Y., Fukumoto J., "An Automatic Extraction of Key Paragraphs Based on Context Dependency," *Natural language processing* Vol. 4 (1997): 89-109, DOI:10.5715/jnlp.4.2_89.
- [5] Mandar Mitrat, Amit Singhal, Chris Buckleytt, "Automatic Text Summarization by paragraph Extraction," *Intelligent Scalable Text Summarization* (1997):39-46.
- [6] Nagwani N.K., "Summarizing large text collection using topic modeling and clustering based on MapReduce framework," *Journal of Big Data* (2015): 18.
- [7] Page L., Brin S., Motwani R., Winograd T., "The pagerank citation ranking: Bringing order to the web," (paper presented at the Proceedings of the 7th International World Wide Web Conference, Brisbane, Australia, 1998)
- [8] Sandeep S. and Jagadeesh J., "Summarization Approaches Based on Document Probability Distributions," (paper presented at Proceedings of the 23rd Pacific Asia Conference on Language, Information and Computation, Hong Kong, China, December 3-5, 2009).
- [9] Wikipedia. "Automatic summarization." Accessed November 25, 2016, https://en.wikipedia.org/wiki/Automatic_summarization.
- [10] Wikipedia. "Stop words." Accessed June 30, 2015, https://en.wikipedia.org/wiki/Stop_words.
- [11] Yacko V.A., "Simmetrichnoe referirovanie: teoreticheskie osnovy i metodika," *Nauchno-tehnicheskaya informaciya* Ser.2 (2002): 18-28

МРНТИ 20.23.21

Идентификация языка в системе поиска аудиоинформации по ключевым словам на казахском языке в многоязыковой среде

Кожирбаев Ж.М., Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева,
г. Астана, Республика Казахстан,
E-mail: zhanibekkm@gmail.com

Есенбаев Ж.А., National Laboratory Astana, г. Астана, Республика Казахстан,
E-mail: zhyessenbayev@nu.edu.kz

Шарипбай А.А., Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева,
г. Астана, Республика Казахстан, E-mail: sharalt@mail.ru

Обработка больших данных в настоящее время является одной из важнейших задач ИТ-индустрии, а аудиоматериалы рассматриваются как один из основных источников этих данных. Следовательно, наряду с увеличением объема аудиоинформации, необходимо создать эффективные информационно-поисковые системы для аудиоматериалов (STD). Так как аудио данные могут быть на разных языках, тут предстоит распознавать язык в аудио. Автоматическая идентификация языка (LID) рассматривается как задача, которая автоматически различает язык, на котором говорят в речевом образце. Современный прогресс в обработке сигналов, таких как распознавание образов, машинное обучение и нейронные сети, повышает производительность LID. В этой работе мы применили новейшие технологии рекуррентных нейронных сетей (RNN) с долгой краткосрочной памятью (LSTM) к исходным аудиофункциям, чтобы идентифицировать звуковые образцы на казахском языке. Сети LSTM рассматриваются как тип RNN, который использует специальные единицы вместе со стандартными. Кроме того, блоки LSTM состоят из «ячейки памяти», которая может хранить информацию в памяти в течение длительных периодов времени. STD система может отбирать аудиоматериалы на казахском языке с помощью LID и тем самым не тратить вычислительные ресурсы на аудио данных на других языках. В этой работе мы показываем результаты для автоматизированного распознавания речи, определения голосовых терминов и экспериментов по идентификации языка с LSTM RNN для сегментов аудио образцов 1с, 2с и 3с на казахском языке.

Ключевые слова: идентификация языка, рекуррентные нейронные сети с Долгой Краткосрочной Памятью, автоматическое распознавание речи, поиск в аудио по ключевым словам.

Көптілді ортадағы қазақ тілі үшін тірек сөздер арқылы аудиоадағы ақпараттарды іздеу жүйесінде тілді тану

Кожирбаев Ж.М., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразиялық ұлттық университет,
Астана қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: zhanibekkm@gmail.com
Есенбаев Ж.А., National Laboratory Astana, Астана қ., Қазақстан Республикасы,
E-mail: zhyessenbayev@nu.edu.kz

Шарипбай А.А., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразиялық ұлттық университет,
Астана қ., Қазақстан Республикасы, E-mail: sharalt@mail.ru

Зор деректерді өңдеу қазіргі АТ саласының маңызды бағыттарының бірі болып табылады, және аудио деректер оның негізгі көздерінің бірі ретінде саналады. Демек, дыбыстық ақпараттың көлемінің ұлғаюымен бірге, сол аудио деректерден тиімді ақпараттық-іздеу жүйесін (STD) құру қажеттілігі жоғары. Дыбыс деректері әртүрлі тілдерде болуы мүмкін болғандықтан, аудиоадағы тілді тану қажет. Автоматты түрде тілді тану (LID) сөйлеу үлгісінде айтылған тілдерді автоматты түрде анықтай алатын тапсырма ретінде қарастырылады. Сигналдарды өңдеу, машиналық оқыту және нейрондық желілер сияқты салалардағы технологиялық жетістіктер LID көрсеткіштерін жақсартты.

Бұл жұмыста қазақ тіліндегі дыбыс үлгілерін анықтау үшін жаңа технология болып саналатын ұзақ қысқа мерзімді жадылы қайталанатын нейрондық желілерді (RNN LSTM) қолдандық. LSTM желілері RNN түрі ретінде қарастырылады, ол стандартты құрылғылармен бірге арнайы бірліктерді пайдаланады. Сонымен қатар, LSTM блоктары ұзақ уақыт бойы ақпаратты жадта сақтауға болатын «жады ұяшығынан» тұрады. STD жүйесі қазақ тіліндегі аудио материалдарды LID көмегімен таңдай алады және осылайша есептеу ресурстарын басқа тілдердегі аудио деректерге жұмсамайды. Осы мақалада біз сөйлеуді автоматты түрде анықтауға, дыбыстық терминдерді табу және қазақ тілінде 1с, 2с және 3с үлгілерінің аудио сегменттері үшін LSTM RNN эксперименттерінің нәтижелерін ұсынамыз.

Түйін сөздер: тілді анықтау, ұзақ қысқа мерзімді жадылы қайталанатын нейрондық желі, автоматты түрде сөйлеуді тану, аудиодан кілт сөздер арқылы ақпарат іздеу

Language identification in the spoken term detection system for the kazakh language in a multilingue environment

Kozhirbayev Zh., L.N.Gumilyov Eurasian National University,

Astana city, The Republic of Kazakhstan, E-mail: zhanibekkm@gmail.com

Yessenbayev Zh., National Laboratory Astana, Astana city, The Republic of Kazakhstan,

E-mail: zhyessenbayev@nu.edu.kz

Sharipbay A., L.N.Gumilyov Eurasian National University,

Astana city, The Republic of Kazakhstan, E-mail: sharalt@mail.ru

The processing of Big data is currently one of the most important tasks of the IT industry, and audiomaterials are considered as one of the main sources of this data. Consequently, along with the increase in the volume of audio information, it is necessary to create effective information retrieval systems from audio materials (STD). Since audio data can be in different languages, it is essential to recognize the language in the audio. Automatic language identification (LID) is considered as a task which automatically distinguishes of the language spoken in a speech sample. The modern progress in signal processing such as pattern recognition, machine learning and neural networks increases the performance of LID. In this work we applied state-of-the-art technology Long Short-Term Memory (LSTM) recurrent neural networks (RNNs) to the raw audio features in order to identify the audio samples in the Kazakh language. LSTM networks are considered as a type of RNN which utilizes special units along with ones. Moreover, LSTM units consist of «memory cell» which can keep information in memory for long periods of time. STD system can select audio materials in Kazakh with LID and thus do not spend computing resources on audio data in other languages. In this work we show results for conducted automatic speech recognition, spoken term detection and language identification experiments with LSTM RNN for 1s, 2s and 3s segments of audio samples in the Kazakh language.

Key words: Language identification, Long Short-Term Memory Recurrent Neural Networks, Automatic Speech Recognition, Spoken Term Detection

1 Введение

Автоматическая идентификация языка (LID) - это один из основных процессов разработки речевых систем в многоязычной среде. Он рассматривается как ключевой механизм для различных многоязычных приложений для обработки речи: перевод разговорного языка, многоязычное распознавание речи и извлечение аудио информации. В этой работе мы применили подход, который ранее был введен в (Zazo и др. 2016), чтобы создать эффективную систему для идентификации языка в системе поиска аудио информации по ключевым словам STD (spoken term detection) в многоязыковой среде. Задачей системы поиска является оптимальный поиск конкретного термина (состоящего из одного ключевого слова или последовательности нескольких ключевых слов) в

большом объеме аудиоданных. Проблема идентификации языка в разговорной речи также актуальна для Казахстана, где в государственных организациях и органах местного самоуправления наравне с казахским официально употребляется русский язык.

Система поиска аудиоданных на казахском языке по ключевым словам, развернутая на платформе Kaldi (Povey и др. 2011), состоит из двух подсистем: подсистемы распознавания речи ASR (automatic speech recognition) и подсистемы поиска STD (spoken term detection). С помощью LID, аудио данные на казахском языке могут быть отобраны среди остальных данных, и распознаны с ASR, как показано на рисунке 1.

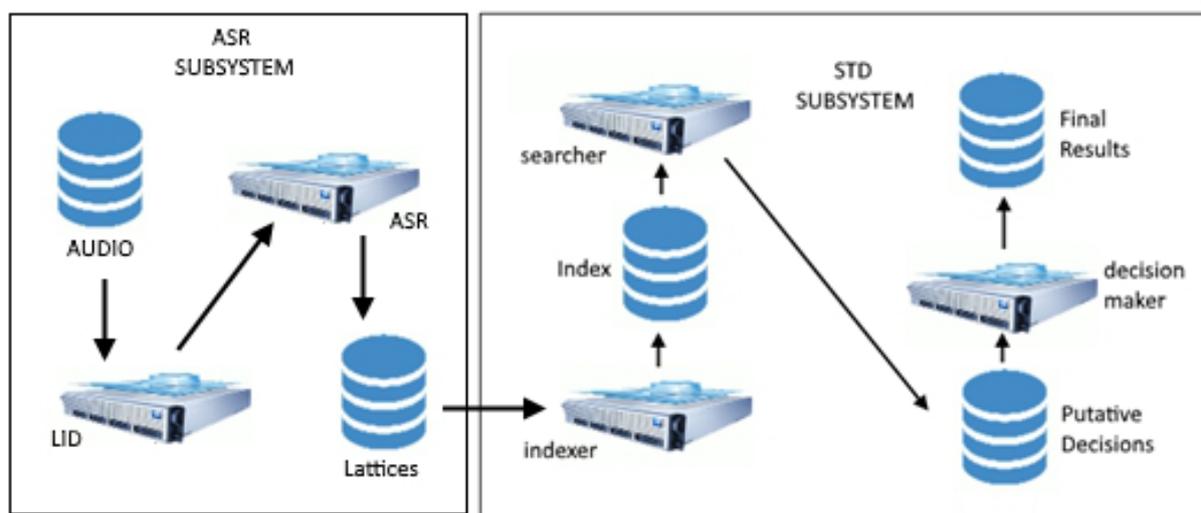


Рисунок 1 – Архитектура системы STD

Эта статья организована следующим образом: в разделе 2 представлен обзор смежных исследований для распознавания слитной речи и подходы к поиску ключевых слов и фраз, обзор методов идентификация языка. Следующие две раздела описывают подсистемы ASR и STD. Параметры сбора и настройки набора данных для LID и его параметры описаны в разделе 5. В разделе 6 описывается RSTN LSTM, а также его концептуальная архитектура. Детали эксперимента и полученные результаты представлены в разделе 7. Заключение выполненных экспериментов и областей дальнейших исследований приведено в разделе 8.

2 Обзор литературы

В этом разделе представлен краткий обзор методов идентификация языка. А также рассмотрим некоторые работы в области распознавания слитной речи и подходы к поиску ключевых слов и фраз, входящих в словарь системы (in-vocabulary words – IV). Для решения задачи идентификации языка в речи были предложены различные методы и алгоритмы, включая подходы на основе анализа текстовых данных (Gold 1967:447-474, Baldwin и др. 2010:229–237, Dunning 1994), фонотактических и акустических особенностей языка (Zissman 1996:31–44, Brummer и др. 2012:216–223, Singer и др. 2012:209–215), статистических особенностей фонетического распределения языка (Li и др. 1980:884–887, Nakagawa 1992:1011–1014, Cimarusti 1982:1661–1663), прочие.

В последнее время акустическое моделирование рассматривается как решение для задачи LID (Torres-Carrasquillo и др. 2002:89–92, Gonzalez-Dominguez 2010:1084–1093). Следуя современным достижениям в задаче идентификации дикторов, фундаментальный метод этих систем использует *i*-векторные интерфейсные функции и классификаторы (Brummer и др. 2012:216–223, Singer и др. 2012:209–215, Martinez и др. 2011:861–864). *I*-вектор рассматривается как оператор с полным размером разговора, полученным в виде точечной оценки скрытых переменных в модели факторного анализа (Dehak 2011:788–798). Несмотря на то, что в ряде случаев технология *i*-vector получила хорошую производительность (Van Segbroeck 2015:1118–1129), она имеет две основные функции, которые делают ее менее приемлемой. Во-первых, существует несколько отклонений в методах оценки. Во-вторых, *i*-вектор рассматривается как краткое изложение всего разговора.

Современные методы, основанные на нейронных сетях, работают лучше, чем ранние существующие механизмы. Исследователи (Lopez-Moreno 2014, Lozano-Diez 2014:79–88) доказали, что даже глубокие нейронные сети (DNN) превосходят результаты, полученные методом на основе *i*-вектора. Однако для обучения сети должен быть достаточный объем данных, а также должны учитываться размеры тестовых высказываний. Более того, LSTM RNN превышают результаты DNN из-за их способности точно моделировать долгосрочную зависимость в данных (Graves 2012).

В прошлом исследования по поиску аудиоданных проводились на базе классических методов по информационному поиску (information retrieval). Некоторые из этих исследований были обнародованы в рамках серии конференций Text REtrieval Conference (TREC) и опубликованы в ее трудах (Garofolo и др. 2000:1–20). В них системы LVCSR используются для транскрибирования речи – определения наилучшей орфографической транскрипции для аудиоданных. Затем классические системы поиска информации в тексте используются для обнаружения искомых терминов (Brown и др. 1997:307–316, James 1995:158). Этот метод широко применяется для таких аудиоданных, как телевизионные новости, которые при автоматической транскрипции показывают низкую величину WER (в пределах 15–30%).

Другой возможный способ состоит в использовании текстовых латтисов (word lattices) для улучшения производительности систем SDR (spoken document retrieval). В работах (Singhal и др. 1999a:239–252, Singhal и др. 1999b:34–41) предлагается добавлять некоторые термины в транскрипцию аудиоданных, чтобы бороться с неполнотой выдаваемых результатов, возникающей при поиске вследствие ошибок автоматического распознавания речи (ASR). Одним из методов добавления новых терминов является расширение документа с использованием родственного корпуса. Этот метод использует текстовые латтисы, чтобы определить, какие из слов, полученных с помощью алгоритма расширения документа, следует добавить к первичной транскрипции. Востребованность упомянутого алгоритма обусловлена тем, что в латтисах не содержится никакой информации о вероятностной оценке обнаруженных слов. Компактная версия текстовых латтисов PSPL (position specific posterior lattice) описывается в работах (Chelba и др. 2005a:61–64, Chelba и др. 2005b:443–450). Оценка результатов поиска производится с учетом уровня доверия для термина (term confidence level). Еще одна модель для задачи SDR была предложена на основе word confusion network (WCN) (Mamou 2006:51–58).

Таблица 1- Минимальное значение WER

Эксперимент \ выборка	train	dev	test1 (Хабар)	test2 (Астана ТВ)	test3 (31 Канал)
Трифоны	6.19 %	6.42 %	6.62 %	14.87 %	19.52 %
SGMM	5.16 %	5.39 %	5.56 %	13.18 %	16.95 %

3 Подсистема распознавания речи ASR

Подсистема ASR использует инструментарий Kaldi для генерации текстовых латтисов из необработанных аудиоданных. Он применяет 13-мерные мел-частотные кепстральные коэффициенты (MFCC), линейный дискриминантный анализ (LDA), а также рейтинг линейного преобразования максимального правдоподобия. Первоначальная инициализация контекстно-независимых фонетических НММ начинается с обучения, в то время как акустическая адаптивная тренировка штатно-ориентированных трифонов НММ вместе с выходными GMM ее завершает. Кроме того, выполняется этап обучения акустической модели на основе ML, который следует универсальной базовой модели. Он создается из данных обучения, которые используются для обучения SGMM, применяемого на этапе декодирования, для создания текстовых латтисов.

Акустический корпус KazBNT, на основе которого были проведены эксперименты по акустическому моделированию и распознаванию речи, состоит из двух независимых подкорпусов – KazSpeechDB и KazMedia. Корпус KazSpeechDB представляет собой 12675 предложений на казахском языке, озвученных в студийных условиях дикторами разного пола, возраста, из разных регионов Казахстана. Каждому аудиофайлу соответствует txt-файл с текстом озвученного предложения.

Корпус KazMedia представляет собой текстовые и аудиоданные, собранные с официальных сайтов телевизионных новостных агентств «Хабар», «Астана ТВ» и «31 канал». Текстовые данные – это тексты всех новостей на казахском языке, опубликованных на официальных сайтах трех телеканалов за период 2013–2015 гг. Аудиоданные – это wav-файлы, представляющие собой аудиодорожки, извлеченные из ряда видеонюостей этих трех телеканалов на казахском языке. Общая длительность аудио – 21 час речи, частота дискретизации 16000 Гц. Каждому wav-файлу соответствует eaf-файл с подробным текстом озвученной новости, с указанием границ предложений.

Словарь и языковая модель системы KazBNT сформированы на основе совокупного объединения всех текстовых данных корпусов KazSpeechDB и KazMedia. Словарь содержит 163429 казахских слов вместе с их фонетической транскрипцией.

Общей метрикой эффективности экспериментальных моделей распознавания речи является WER (коэффициент ошибок слов), который вычисляется как отношение ошибочно распознанных слов к общему числу слов. Считается, что более низкая WER демонстрирует превосходную точность распознавания речи по сравнению с более высокой WER. Экспериментальные результаты приведены в таблице 1.

4 Подсистема поиска STD

Подсистема поиска аудиоданных на казахском языке по ключевым словам STD, по-

Таблица 2-Результаты экспериментов STD

Title	Actual Decision TWV Analysis				Maximum TWV Analysis			
	PFA	PMiss	TWV	Dec. Thresh	PFA	PMiss	TWV	Dec. Thresh
Occurrence	0.00003	0.060	0.9074	0.5014	0.00003	0.060	0.9074	0.570

строенная на основе инструментария Kaldi, осуществляет поиск по ключевым словам в латтисах, полученных в результате работы подсистемы ASR. Сначала текстовые латтисы всех предложений речевого корпуса конвертируются из отдельных взвешенных конечных преобразователей (weighted finite-state transducer – WFST) в единый обобщенный преобразователь. Он агрегирует информацию о времени начала и конца звучания, а также об апостериорной вероятности для каждого слова-токена, в виде кортежа из трех чисел. Подобный метод индексации латтисов представлен в (Cao и др. 2011:2338–2347). Этот преобразователь указывает инвертированный индекс для всех словесных последовательностей, содержащихся в латтисах. Далее, при поиске, обычный конечный автомат, который принимает искомый термин, структурируется обобщенным преобразователем, с тем чтобы аккумулировать все появления этого термина в аудиоданных. Апостериорные вероятности латтисов для всех слов искомого термина складываются, формируя оценку степени уверенности (confidence score) для каждого результата. Процесс принятия решения заключается в простом отбрасывании тех результатов, для которых оценка степени уверенности ниже, чем заданное пороговое значение.

Мы провели оценку эффективности STD-системы в зависимости от длины искомого термина, состоящего из IV-слов. Для этой цели был составлен список терминов (ключевых слов и словосочетаний), из числа входящих в корпус казахского языка слов (униграммы), пар (биграмы) и троек слов (триграммы). Список составлялся с учетом частотности слов: в тестовые наборы были включены термины, встречающиеся в корпусе с высокой, средней и низкой частотностью. Для каждого из этих трех классов мы сформировали по 1000 поисковых запросов. Экспериментальные результаты приведены в таблице 2.

5 Подготовка данных для LID

Мы провели наши эксперименты на небольшой части акустического корпуса KazMedia, описанный в предыдущем пункте. Аудиоданные на казахском языке были выбраны из трех каналов «Хабар» (2.3 часов), «Астана ТВ» (2.3 часов), «Канал 31» (2.3 часов), а данные на русском языке – с канала «24kz» (7 часов). Чтобы обеспечить баланс между различными каналами в обучающей, валидационной и тестовой выборках, данные каждого канала были разбиты в соотношении 80%, 10% и 10% соответственно.

В качестве входных данных были извлечены 13 мел-частотных кедральных коэффициентов (MFCC) с дельта и дельта-дельта коэффициентами, свернутых с 25 мс окнами Хэмминга и сдвинутыми на каждые 10 мс. Таким образом, размерность вектора признаков составляет 39. Дополнительно векторы могут быть нормализованы с помощью алгоритма CMVN или нет, что будет отдельно отражено ниже в результатах. Мы использовали инструментарий Kaldi для извлечения акустических характеристик из аудиоданных. Далее, MFCC признаки, соответствующие одному аудиофайлу, были

сегментированы на 2-х секундные отрезки с перекрытием в 1 секунду, которые были смешаны между собой, как это было сделано в (Zazo 2016). Эти отрезки являются конечными входными последовательностями для нашей системы, на основе которых будут приниматься решения о языке.

Целью нашей системы является определение казахского языка в речевом сигнале. Имеющаяся разметка данных определяет 9 классов для всех акустических событий в аудио (0 - Пауза, 1 - КАЗ, 2 - РУС, 3 - АНГ, 4 - Иностраный язык, 5 - Шум, 6 - Музыка без речи, 7 - Песня, 8 - Смешанная речь). Однако мы сгруппировали их в 4 класса из-за недостаточности данных для некоторых типов событий, отделив речевые и неречевые события (0 - NONSpeech, 1 - КАЗ, 2 - РУС, 3 - Неизвестный язык).

6 Рекуррентная нейронная сеть LSTM для LID

Для экспериментов нами была использована рекуррентная нейронная сеть - LSTM RNN. На входе нейронная сеть принимает последовательность из 2-х секундных отрезков аудио сигнала, состоящих из 39-мерных MFCC векторов. Отрезки подаются в сеть партиями размером 100 штук.

Сеть состоит из двух скрытых слоев поверх входного слоя. Мы использовали однонаправленную LSTM по 300 нейронов в каждом слое. Это был максимальный размер, который удовлетворял нашим вычислительным ограничениям.

Выходом сети является слой softmax, имеющий такое же количество нейронов, что и классы в обучающем наборе. Функция softmax обычно используется в выходном слое сети для решения задачи классификации.

Для обучения сети мы использовали категориальную кроссентропию, которая была оптимизирована с использованием стохастического градиентного спуска (SGD) с начальной скоростью обучения 0,001 и коэффициентом распада $1e-4$. Кроме того, для ускорения SGD использовался импульс со значением 0,9 и ускоренным градиентом Нестерова.

Эксперименты проводились на машине с памятью 32 ГБ и 8 ядрами. Программное обеспечение Keras на основе Theano использовалось для разработки LSTM.

7 Результаты экспериментов LID

В таблице 3 приведены результаты идентификации языка на нормализованных и не нормализованных данных. Для нормализованного набора данных система показывает 7% абсолютное снижение по сравнению с не нормализованным аналогом. Несмотря на тот факт, что система с не нормализованным набором данных показывает лучшую производительность, ситуация противоположна и точность резко падает [эти результаты опущены намеренно], когда системе предъявляют данные вне домена. С другой стороны, система, обученная нормализованному набору данных, более устойчива для данных вне домена, как показано ниже.

Добавим также, что в нашей системе мы не применяли отдельную стадию обнаружения голосовой активности (VAD) до LID, но VAD был частью LID. При этом, в наших экспериментах мы получили 82% -ную точность на неречевых сегментах, таких как тишина, музыка и другие шумы. Точность на неизвестных (иностраных) языках незначительна, так как данных было недостаточно (всего 1,5%).

Таблица 3-Результаты системы LSTM RNN

Данные	Точность (%)
Ненормализованные	93
Нормализованные с CMVN	86

Таблица 4- Производительность системы в зависимости от архитектуры сети и длительности отрезков

Архитектура		Размер сегмента (в секундах)	Время обучения (в минутах)	Точность
LSTM	2 L, 300 u	1 s	3360	0.867
	2 L, 300 u	2 s	2902	0.864
	2 L, 300 u	3 s	2500	0.866
	3 L, 200 u	1 s	3230	0.867
	3 L, 200 u	2 s	2956	0.864
	3 L, 200 u	3 s	4875	0.839
	4 L, 150 u	1 s	3444	0.856
	4 L, 150 u	2 s	4027	0.881
BLSTM	200 u	1 s	1268	0.868
	100 u	2 s	733	0.8845

Также мы провели ряд экспериментов с разными архитектурами и длительностью речевых отрезков. Мы варьировали количество скрытых слоев и нейронов в сети LSTM, длину аудио отрезков от 1 сек до 3 сек, а также применяли двунаправленный LSTM. Как видно из таблицы 4, двунаправленный LSTM показывает наилучший результат (88%) на 2-х секундных отрезках.

8 Заключение

В данной работе мы представили систему STD, которая значительно выигрывает от распознавания языка. Применение LID, разных моделей для ASR, индексирование и методы поиска дают более продвинутые результаты для нашей системы.

В задаче идентификации казахского языка в новостных каналах использовалась LSTM сеть, которая показала точность идентификации на уровне 88%. При этом решение о принадлежности к языку делалось на двух секундных отрезках, что оказалось оптимальным интервалом в данной задаче.

На данный момент нами была проведена интеграция модуля идентификации языка целого аудио файла с основной системой поиска аудио информации по ключевым словам. Но мы не провели эксперименты по сегментацию большого аудио файла по языкам. Это будет предметом наших следующих работ для создания цельной системы автоматической транскрипции и поиска аудио новостей на казахском и русском языках. Еще одним немаловажным направлением будущих исследований станет интеграция морфологического анализатора для учета OOV-слов.

Список литературы

- [1] *Baldwin T. and Marco L.* Language identification: The long and the short of the matter // In Human Language Technologies: The 2010 Annual Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics, Association for Computational Linguistics, Los Angeles, CA. -2010. -P.229-237.
- [2] *Brown M.G., Jonathan T.F., Gareth J.J., Sparck J.K. and Steve J.Y.* Open-vocabulary speech indexing for voice and video mail retrieval // In Proceedings of the fourth ACM international conference on Multimedia, Boston, MA, USA. -1997. - P. 307-316.
- [3] *Brunner N., Sandro C., Glembek O., Karafiat M., Matejka P., Pesan J., Plchot O., Souffar M., Villiers E. and Cernocky J.H.* Description and analysis of the Brno276 system for LRE2011 // In Odyssey 2012-The Speaker and Language Recognition Workshop, Singapore. -2012.
- [4] *Can D. and Saraclar M.* Lattice indexing for spoken term detection // IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. -2011. -Vol.19, -P.2338-2347.
- [5] *Cimarusti D. and Ives R.* Development of an automatic identification system of spoken languages: Phase I // In Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'82, Paris, France. -1982. -Vol.7, -P.1661-1663.
- [6] *Chelba C., and Acero A.* Indexing uncertainty for spoken document search // In Proceedings of the Ninth European Conference on Speech Communication and Technology, Lisboa, Portugal. -2005. -P.61-64.
- [7] *Chelba C., and Acero A.* Position specific posterior lattices for indexing speech // In Proceedings of the 43rd Annual Meeting on Association for Computational Linguistics, Ann Arbor, Michigan, USA. -2005. -P.443-450.
- [8] *Dehak N., Kenny P.J., Dehak R., Dumouchel P. and Ouellet P.* Front-end factor analysis for speaker verification // IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. -2011. -Vol.19, -P.788-798.
- [9] *Dunning T.* Statistical identification of language // Computing Research Laboratory, New Mexico State University. -1994. -P. 94-273.
- [10] *Garofolo J.S., Auzanne C. and Voorhees E.M.* The TREC spoken document retrieval track: A success story // In Content-Based Multimedia Information Access. -2000. -Vol.1, -P.1-20.
- [11] *Gold M.E.* Language identification in the limit // Information and control. -1967. -Vol.10, -P.447-474.
- [12] *Gonzalez-Dominguez J., Lopez-Moreno I., Franco-Pedroso J., Ramos D., Toledano D.T. and Gonzalez-Rodriguez J.* Multilevel and session variability compensated language recognition: Atvs-uam systems at nist Irc 2009 // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing 4. -2010. -Vol. 6, -P.1084-1093.
- [13] *Graves A.* Supervised sequence labelling with recurrent neural networks // Heidelberg: Springer. -2012. -Vol.385.
- [14] *James.D.A.* The application of classical information retrieval techniques to spoken documents // PhD diss., University of Cambridge. -1995.
- [15] *Li K. and Edwards T.* Statistical models for automatic language identification // In Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'80, Denver, Colorado, USA. -1980. -Vol.5, -P.884-887.
- [16] *Lopez-Moreno I., Gonzalez-Dominguez J., Plchot O., Martinez D., Gonzalez-Rodriguez J. and Moreno P.* Automatic language identification using deep neural networks // In Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Florence, Italy. -2014. -P.5337-5341.
- [17] *Lozano-Diez A., Gonzalez-Dominguez J., Zazo R., Ramos D. and Gonzalez-Rodriguez J.* On the use of convolutional neural networks in pairwise language recognition // In Advances in Speech and Language Technologies for Iberian Languages. -2014, Madrid, Spain. -P.79-88.
- [18] *Mamou J., Carmel D. and Hoory R.* Spoken document retrieval from call-center conversations // In Proceedings of the 29th annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval, Seattle, WA, USA. -2006. -P.51-58.
- [19] *Martinez D., Plchot O., Burget L., Glembek O. and Matejka P.* Language recognition in ivectors space // Proceedings of Interspeech, Firenze, Italy. -2011. -P.861-864.
- [20] *Nakagawa S., Ueda Y., and Seino T.* Speaker-independent, text-independent language identification by HMM // In ICSLP, Alberta, Canada. -1992. -Vol.92, -P.1011-1014.

- [21] Povey D., Arnab G., Boulianne G., Burget L., Glembek O., Goel N., Hannemann M. The Kaldi speech recognition toolkit // In IEEE 2011 workshop on automatic speech recognition and understanding, no. EPFL-CONF-192584. IEEE Signal Processing Society. -2011.
- [22] Singer E., Torres-Carrasquillo P., Reynolds D.A., McCree A., Richardson F., Dehak N. and Sturim D. The MITLL NIST LRE 2011 language recognition system // In Odyssey 2012-The Speaker and Language Recognition Workshop, Singapore. -2012.
- [23] Singhal A. and Pereira F. Document expansion for speech retrieval // In Proceedings of the 22nd annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval, Berkeley, CA, USA. -1999. -P.34-41.
- [24] Singhal A., Choi J., Hindle D., Lewis D.D. and Pereira F. At&t at trec-7 // NIST SPECIAL PUBLICATION SP. -1999. -P.239-252.
- [25] Torres-Carrasquillo P., Singer E., Kohler M.A., Greene R.J., Reynolds D.A. and Deller Jr J.R. Approaches to language identification using Gaussian mixture models and shifted delta cepstral features // In Interspeech, Denver, Colorado, USA. -2002.
- [26] Van Segbroeck M., Travadi R. and Narayanan S.S. Rapid language identification // IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing. -2015. -Vol.7, -P.1118-1129.
- [27] Zazo R., Lozano-Diez A., Gonzalez-Dominguez J., Toledano D.T. and Gonzalez-Rodriguez J. Language identification in short utterances using long short-term memory (LSTM) recurrent neural networks // PloS one. -2016. -Vol.11: e0146917.
- [28] Zissman M.A. Comparison of four approaches to automatic language identification of telephone speech // IEEE Transactions on speech and audio processing. -1996. -Vol.4, -P.31.

References

- [1] Baldwin, Timothy, and Marco Lui. "Language identification: The long and the short of the matter." In *Human Language Technologies: The 2010 Annual Conference of the North American Chapter of the Association for Computational Linguistics, Los Angeles, CA*, pp. 229-237. Association for Computational Linguistics, 2010.
- [2] Brown, Martin G., Jonathan Trumbull Foote, Gareth JF Jones, K. Sparck Jones, and Steve J. Young. "Open-vocabulary speech indexing for voice and video mail retrieval." In *Proceedings of the fourth ACM international conference on Multimedia, Boston, MA, USA*, pp. 307-316. ACM, 1997.
- [3] Brummer, Niko, Sandro Cumani, Ondrej Glembek, Martin Karafiat, Pavel Matejka, Jan Pesan, Oldrich Plchot, Mehdi Souffar, Edward de Villiers, and Jan Honza Cernocky. "Description and analysis of the Brno276 system for LRE2011." In *Odyssey 2012-The Speaker and Language Recognition Workshop, Singapore*, 2012.
- [4] Can, Dogan, and Murat Saraclar, Edward de Villiers, and Jan Honza Cernocky. "Lattice indexing for spoken term detection." In *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing* 19, no. 8 (2011): 2338-2347.
- [5] Cimarusti, Deidre, and R. Ives. "Development of an automatic identification system of spoken languages: Phase I." In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'82, Paris, France*, vol. 7, pp. 1661-1663. IEEE, 1982.
- [6] Chelba, Ciprian, and Alex Acero. "Indexing uncertainty for spoken document search." In *Ninth European Conference on Speech Communication and Technology, Lisboa, Portugal*, pp. 61-64. 2005.
- [7] Chelba, Ciprian, and Alex Acero. "Position specific posterior lattices for indexing speech." In *Proceedings of the 43rd Annual Meeting on Association for Computational Linguistics, Ann Arbor, Michigan, USA*, pp. 443-450. Association for Computational Linguistics, 2005.
- [8] Dehak, Najim, Patrick J. Kenny, Reda Dehak, Pierre Dumouchel, and Pierre Ouellet. "Front-end factor analysis for speaker verification." In *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing* 19, no. 4 (2011): 788-798.
- [9] Dunning, Ted. "Statistical identification of language." In *Computing Research Laboratory, New Mexico State University*, pp. 94-273, 1994.
- [10] Garofolo, John S., Cedric GP Auzanne, and Ellen M. Voorhees. "The TREC spoken document retrieval track: A success story." In *Content-Based Multimedia Information Access-Volume 1*, pp. 1-20. LE CENTRE DE HAUTES ETUDES INTERNATIONALES D'INFORMATIQUE DOCUMENTAIRE, 2000.
- [11] Gold, E. Mark. "Language identification in the limit." In *Information and control*, 10, no. 5 (1967): 447-474.

- [12] Gonzalez-Dominguez, Javier, Ignacio Lopez-Moreno, Javier Franco-Pedroso, Daniel Ramos, Doroteo Torre Toledano, and Joaquin Gonzalez-Rodriguez. "Multilevel and session variability compensated language recognition: Atvs-uam systems at nist lre 2009." In *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* , 4, no. 6 (2010): 1084-1093.
- [13] Graves, Alex. In *Supervised sequence labelling with recurrent neural networks* , Vol. 385. Heidelberg: Springer, 2012.
- [14] James, David Anthony. "The application of classical information retrieval techniques to spoken documents." In *University of Cambridge Press* , 1995.
- [15] Li, K., and T. Edwards. "Statistical models for automatic language identification." In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE International Conference on ICASSP'80, Denver, Colorado, USA* , vol. 5, pp. 884-887. IEEE, 1980.
- [16] Lopez-Moreno, Ignacio, Javier Gonzalez-Dominguez, Oldrich Plchot, David Martinez, Joaquin Gonzalez-Rodriguez, and Pedro Moreno. "Automatic language identification using deep neural networks." In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Florence, Italy* , pp. 5337-5341. IEEE, 2014.
- [17] Lozano-Diez, Alicia, Javier Gonzalez-Dominguez, Ruben Zazo, Daniel Ramos, and Joaquin Gonzalez-Rodriguez. "On the use of convolutional neural networks in pairwise language recognition." In *Advances in Speech and Language Technologies for Iberian Languages, Madrid, Spain* , pp. 79-88. Springer, Cham, 2014.
- [18] Mamou, Jonathan, David Carmel, and Ron Hoory. "Spoken document retrieval from call-center conversations." In *Proceedings of the 29th annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval, Seattle, WA, USA* , pp. 51-58. ACM, 2006.
- [19] Martinez, David, Oldrich Plchot, Lukas Burget, Ondrej Glembek, and Pavel Matejka. "Language recognition in ivectors space." In *Proceedings of Interspeech, Firenze, Italy* (2011): 861-864.
- [20] Nakagawa, Seiichi, Yoshio Ueda, and Takashi Seino. "Speaker-independent, text-independent language identification by HMM." In *ICSLP, Alberta, Canada*, vol. 92, pp. 1011-1014. 1992.
- [21] Povey, Daniel, Arnab Ghoshal, Gilles Boulianne, Lukas Burget, Ondrej Glembek, Nagendra Goel, Mirko Hannemann et al. "The Kaldi speech recognition toolkit." In *IEEE 2011 workshop on automatic speech recognition and understanding*, no. EPFL-CONF-192584. IEEE Signal Processing Society, 2011.
- [22] Singer, Elliot, Pedro Torres-Carrasquillo, Douglas A. Reynolds, Alan McCree, Fred Richardson, Najim Dehak, and Doug Sturim. "The MITLL NIST LRE 2011 language recognition system." In *Odyssey 2012-The Speaker and Language Recognition Workshop, Singapore* , 2012.
- [23] Singhal, Amit, John Choi, Donald Hindle, David D. Lewis, and Fernando Pereira. "At&t at trec-7." *NIST SPECIAL PUBLICATION SP* (1999): 239-252.
- [24] Singhal, Amit, and Fernando Pereira. "Document expansion for speech retrieval." In *Proceedings of the 22nd annual international ACM SIGIR conference on Research and development in information retrieval, Berkeley, CA, USA* , pp. 34-41. ACM, 1999.
- [25] Torres-Carrasquillo, Pedro A., Elliot Singer, Mary A. Kohler, Richard J. Greene, Douglas A. Reynolds, and John R. Deller Jr. "Approaches to language identification using Gaussian mixture models and shifted delta cepstral features." In *Interspeech, Denver, Colorado, USA* . 2002.
- [26] Van Segbroeck, Maarten, Ruchir Travadi, and Shrikanth S. Narayanan. "Rapid language identification." In *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language Processing* 23, no. 7 (2015): 1118-1129.
- [27] Zazo, Ruben, Alicia Lozano-Diez, Javier Gonzalez-Dominguez, Doroteo T. Toledano, and Joaquin Gonzalez-Rodriguez. "Language identification in short utterances using long short-term memory (LSTM) recurrent neural networks." *PLoS one*. 11, no. 1 (2016): e0146917.
- [28] 1. Zissman, Marc A. "Comparison of four approaches to automatic language identification of telephone speech." *IEEE Transactions on speech and audio processing* 4, no. 1 (1996): 31.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набранные только в текстовом формате $\text{\LaTeX}2\epsilon$ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat.dairbayeva@gmail.com (ответственному секретарю редколлегии, Даирбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX}2\epsilon$ или формат eps [см. п.7]. Указывается код по УДК. В редакцию также представляется отпечаток работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 6 страниц.

Структура статьи.

Первая страница:

1) Первая строка - номер УДК, выравнивание - по левому краю, шрифт - полужирный.

2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.

3) Автор(ы) статьи - с указанием имени и фамилии, ученой степени, ученого звания, занимаемой должности, места работы, город, страна, контактный телефон, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.

4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие **ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ** пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.

5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.

Последующая страница (новая):

6) Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором

аспекте.

7) Материал и Методы - должны состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала - один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

8) В секции обзор литературы - должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

9) В разделе Результаты и Обсуждение - приводится анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) Заключение, выводы - обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50 необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый - в оригинале, второй - романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) – (год в круглых скобках)– название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossiiskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4.(2011): pp. 8-30.

Список литературы представляется в алфавитном порядке, и ТОЛЬКО те работы, которые цитируются в тексте. Стиль оформления списка литературы на русском и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления"(требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления Романизированного списка литературы, а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений - Chicago Style (www.chicagomanualofstyle.org).

В данном разделе необходимо учесть:

- а) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.
- б) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
- в) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
- г) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.

12) Ссылки на цитируемые работы в тексте даются в скобках, с указанием первого автора работы, год издания: номер страниц(-ы). Например, (Залесский 1991: 25). В случае, наличия в списке литературы нескольких работ одного и того же автора, изданных в один год, то дополнительно к году издания добавляется буква "а" "б" и т.д. Например, (Садуова, 2001а: 15), (Садуова, 2001б, 22).

6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов L^AT_EX₂ε и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами amsmath и amssymb. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps , либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета Latexcad. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера Conversion Artist. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказать от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ

1-бөлім**Раздел 1****Математика****Математика**

Айсағалиев С.А., Аязбаева А.М.

Исследование абсолютной устойчивости многомерных регулируемых систем. Проблема Айзермана ...3

Алдашев С.А.

Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений 22

Sadybekov M.A., Yergaliyev M.G.

On a boundary value problem for the nonhomogeneous heat equation in an angular domain 31

2-бөлім**Раздел 2****Қолданылмалы
математика****Прикладная
математика**

Исахов А.А., Алпар С.Д., Жазыылбеков Н.

Численное моделирование уравнений эллиптического типа на неструктурированных сетках 37

Каржасубаев К.К., Жакебаев Д.Б., Абдибекова А.У., Жубат К.Ж.

Моделирование динамики крупномасштабного облака при мощных взрывах ракетносителя в неоднородной атмосфере 52

Матаев К.Т., Моисеева Е.С.

Численное решение и анализ пространственного сверхзвукового горения водородно-воздушной смеси..... 65

3-бөлім**Раздел 3****Информатика****Информатика**

Mussina A., Aubakirov S., Ahmed-Zaki D., Trigo P.

Automatic document summarization based on statistical information 76

Кожырбаев Ж.М., Есенбаев Ж.А., Шарипбай А.А.

Идентификация языка в системе поиска аудиоинформации по ключевым словам на казахском языке в многоязыковой среде 88

К сведению авторов 99

CONTENS

Section 1

Mathematics

Aisagaliev S.A., Ayazbayeva A.M.

Investigation on absolute stability of multidimensional regulated systems. Aizerman problem 3

Aldashov S.A.

A criterion for the unique solvability of the spectral Dirichlet problem in a cylindrical domain for a class of multidimensional elliptic equations 23

Sadybekov M.A., Yergaliyev M.G.

On a boundary value problem for the nonhomogeneous heat equation in an angular domain 31

Section 2

Applied
Mathematics*Issakhov A.A., Alpar S., Zhalylbekov N.*

Numerical modeling of elliptic equations on unstructured grids 37

Karzhaubayev K.K., Zhakebayev D.B., Abdibekova A.U., Zhubat K.Zh.

Modelling of the large-scale cloud dynamics in powerful explosions of a screening consumer in the inhomogeneous atmosphere 52

Mataev K.T., Moiseeva Ye.S.

Numerical solution and analysis of spatial supersonic combustion of a hydrogen-air mixture 65

Section 3

Computer science

Mussina A., Aubakirov S., Ahmed-Zaki D., Trigo P.

Automatic document summarization based on statistical information 76

Kozhırbayev Zh., Yessenbayev Zh., Sharıpbay A.

Language identification in the spoken term detection system for the kazakh language in a multilinge environment 88

К сведению авторов 99

УСПЕЙТЕ ПОДПИСАТЬСЯ НА СВОЙ ЖУРНАЛ

АКЦИЯ!!!

**Каждому подписчику
ПУБЛИКАЦИЯ СТАТЬИ
БЕСПЛАТНО!!!**

- Акция действительна при наличии квитанции об оплате годовой подписки.
- Статья должна соответствовать требованиям размещения публикации в журнале.
- Статья печатается в той серии журнала, на которую подписался автор.
- Все нюансы, связанные с публикацией статьи, обсуждаются с ответственным секретарем журнала.

Издательский дом
«Қазақ университеті»
г. Алматы,
пр. аль-Фараби, 71
8 (727) 377 34 11, 221 14 65

АО «КАЗПОЧТА»
г. Алматы,
ул. Боғенбай батыра, 134
8 (727 2) 61 61 12

ТОО «Евразия пресс»
г. Алматы,
ул. Жибек Жолы, 6/2
8 (727) 382 25 11

ТОО «Эврика-пресс»
г. Алматы,
ул. Қожамқұлова, 124, оф. 47
8 (727) 233 76 19, 233 78 50