

ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ҚазҰУ ХАБАРШЫСЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК КазНУ

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№ 3 (95)

Алматы
«Қазақ университеті»
2017

Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного
согласия Республики Казахстан, свидетельство № 956-Ж от 25.11.1999 г.
(Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.). Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия

научный редактор – М.А. Бектемесов - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби;
заместитель научного редактора – А.Б. Кыдырбекулы – д. т. н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби;
ответственный секретарь – Г.М. Даирбаева – к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Алексеев А. – асс. профессор, Университет штата Калифорнии в Нортридж, США
Алиев Ф.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Азербайджана, Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан
Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., директор Департамента профессионального и технического образования МОН РК, Казахстан
Ахметов М. – доктор Ph.D., профессор, Средне Восточный Технический Университет, Турция
Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Гасников А.В. – д.ф.-м.н., Московский физико-технический институт, Россия
Джусупмашаев А.С. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК, Институт математики и математического моделирования, Казахстан
Жайнаков А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН КР, Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Кыргызстан
Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия
Калтаев А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Кангузин Б.Е. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Кудайбергенов К. – д.ф.-м.н., Казахстанский институт менеджмента, экономики и прогнозирования, Казахстан
Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института Аэродинамики, Германия

Малышкин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия
Мейрманов А.М. – д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, Россия
Мылошевич Х. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Приштины, Сербия
Мухамбетжанов С.Т. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Отелбаев М.О. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан
Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания
Рысбайулы Б. – д.ф.-м.н., профессор, Международный университет информационных технологий, Казахстан
Садыбеков М.А. – д.ф.-м.н., член-корр. НАН РК, Институт математики и математического моделирования МОН РК, Казахстан
Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия
Тукеев У.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Умирбаев У.У. – д.ф.-м.н., профессор, член-корр. НАН РК, Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва, Казахстан
Шиничи Накасука – доктор Ph.D., профессор, Университет Токио, Япония
Шокин Ю.И. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия
Юлдашев З.Х. – д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан

Научное издание

Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика, № 3(95) 2017.

Редактор – Г.М. Даирбаева. Компьютерная верстка – Б.А. Аетова

ИБ N 11358

Подписано в печать 30.09.2017 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 7.75 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ N 4232. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

ГРНТИ 27.29.17, 27.29.23

Несобственные интегралы в теории устойчивости многомерных регулируемых систем

Айсағалиев С.А. – доктор технических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77272211573,

E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Аязбаева А.М. – младший научный сотрудник Научно-исследовательского института математики и механики Казахского национального университета имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику нелинейных регулируемых систем, правая часть которых содержит нелинейные функции из заданного множества. Такая неопределенность правой части порождает неединственность решения, что приводит к необходимости исследования групповых свойств решений системы. Одним из таких свойств является абсолютная устойчивость тривиального решения, т.е. свойства при котором все решения, исходящие из любой начальной точки при любых нелинейных функциях из заданного множества, стремятся с течением времени к положению равновесия. Предлагается совершенно новый метод исследования абсолютной устойчивости нелинейных регулируемых систем без привлечения каких-либо функций Ляпунова и частотных теорем, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Неособым преобразованием уравнение движения системы приводится к специальному виду, который позволяет представить подынтегральную функцию несобственных интегралов в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое является квадратичной формой приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое полный дифференциал функции по времени. Такое представление подынтегральной функции, в конечном счете, приводит к легко проверяемым критериям абсолютной устойчивости.

Ключевые слова: Неособое преобразование, несобственные интегралы, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана, секторы абсолютной устойчивости.

Көпөлшемді басқарылатын жүйелердің орнықтылық теориясындағы меншіксіз интегралдар

Айсағалиев С.Ә. – техника ғылымдарының докторы, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, дифференциалдық теңдеулер және басқару теориясы кафедрасының профессоры, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Аязбаева А.М. – әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және механика ғылыми-зерттеу институтының кіші ғылыми қызметкері, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

Сызықты емес басқарылатын жүйелердің динамикасын сипаттайтын, оң шеті берілген жиынның сызықты емес функцияларын қамтитын жай дифференциалдық теңдеулер классы қарастырылады. Оң шетінің мұндай анықталмағандығы шешімнің жалғыз еместігін тудырады, сонымен қатар, жүйенің шешімдерінің топтық қасиеттерін зерттеу қажеттілігіне әкеледі. Мұндай қасиеттердің бірі тривиал шешімнің абсолютті орнықтылығы болып табылады, яғни, берілген жиынның кез келген сызықты емес функцияларында кез келген бастапқы нүктеден шығатын шешімдердің барлығы уақыт өте келе тепе-теңдік жағдайына келетін қасиеті орындалу керек. Жүйенің шешімінің бойында меншікті интегралдарды бағалау жолымен қандайда бір жиіліктегі теоремалары мен Ляпунов функциясын қолданбай-ақ, сызықты емес басқарылатын жүйелердің абсолютті орнықтылығын зерттеудің жаңа әдісі ұсынылады. Ерекше емес түрлендіру арқылы жүйенің қозғалыс теңдеуі меншіксіз функциялардың интеграл астындағы функциясын екі қосылғыштың қосындысы ретінде көрсетуге мүмкіндік беретін арнайы түрге келтіріледі. Бірінші қосылғыш диагональ түрге келтірілген квадраттық форма болып табылады, ал екінші қосылғыш уақыт бойынша функцияның толық дифференциалы. Интеграл астындағы функцияның мұндай түрі, ақыры соңында, абсолютті орнықтылықтың оңай тексерілетін критерийлеріне келеді.

Түйін сөздер: Ерекше емес түрлендіру, меншіксіз интегралдар, абсолютті орнықтылық, Айзерман есебі, абсолютті орнықтылықтың секторлары.

Improper integrals for stability theory of multidimensional regulated systems

Aisagaliev S.A. – Doctor of Technical Sciences of Differential equations and Control theory Department, Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Ayazbayeva A.M. – Junior Researcher of the Research Institute of Mathematics and Mechanics, al-Farabi Kazakh National University, +77273773223, E-mail: a_ayazbaeva@mail.ru

A class of ordinary differential equations described the dynamics of nonlinear regulated systems the right-hand part of which contains the nonlinear functions of the given set is considered. The uncertainty of the right-hand side arises the non-uniqueness of the solution, that leads to the necessity to study the group properties of solutions of the system. One such property is the absolute stability of the trivial solution, i.e. properties at which all decisions coming from any starting point for any non-linear functions of the given set tend over time to an equilibrium position. A completely new method for the study of absolute stability of nonlinear regulated systems without involving any Lyapunov functions and frequency theorems is proposed by evaluating improper integrals along the solutions of the system. The motion equations of the system is led to a special form by non-singular transformation, which allows to represent the integrand improper integrals as the sum of two terms. The first term is a quadratic form reduced to the diagonal form, and the second term is the total differential function on time. The representation of the integrand, ultimately, leads to easily verifiable criteria for absolute stability.

Key words: Nonsingular transformation, improper integrals, absolute stability, Aizerman problem, absolute stability sectors.

1 Введение

Рассматривается уравнение движения регулируемых систем следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I = [0, \infty), \quad (1)$$

где A, B, S – постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы A , $|x_0| < \infty$, $\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m))$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$.

Функция

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) | 0 \leq \varphi_i(\sigma_i)\sigma_i \leq \mu_{0i}\sigma_i^2, \forall \sigma_i, \sigma_i \in R^1, \varphi(0) = 0, |\varphi(\sigma)| \leq \varphi_*, \forall \sigma, \sigma \in R^m, 0 < \varphi_* < \infty\}, \quad (2)$$

где $\mu_0 = \text{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m}) > 0$ – диагональная матрица порядка $m \times m$, $|\cdot|$ – евклидова норма, $\varphi_* = \text{const} > 0$, $(*)$ – знак транспонирования. Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами и для таких систем вектор функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет условию (2).

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $\sigma_* = Sx_*$. Если матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ обращается в нуль только при $\sigma = 0$, то система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $x_* = 0$.

Заметим, что положению равновесия соответствует тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2). В статье, исследуется асимптотическая устойчивость в целом невозмущенного движения $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ при любом $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Полагаем, что при достаточно малой окрестности точки $\sigma = \sigma_* = 0$, функцию $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ можно аппроксимировать линейной функцией $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$, $0 < \mu_i \leq \mu_{0i}$, $i = \overline{1, m}$. Следовательно, при $|\sigma| < \delta$, $\delta > 0$ – достаточно малое число, уравнение возмущенного движения имеет вид

$$\dot{x} = Ax + B\mu Sx = A_1(\mu)x, \quad x(0) = x_0, \quad |x_0| < \infty, \quad t \in I,$$

где $A_1(\mu) = A + B\mu S$, $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $\overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1, m}$ – предельное значение, μ_i , $i = \overline{1, m}$ определяемое из гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$.

Если матрица $A_1(\mu)$, $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1, m}$ – гурвицева, то существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $|x(t)| < \varepsilon_1$ при $|x_0| < \delta_1$, более того, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Таким образом, когда матрица $A_1(\mu)$, где $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $i = \overline{1, m}$ – гурвицева, то тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \rightarrow \infty$.

Определение 1 Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если: 1) матрицы A , $A_1(\mu)$ – гурвицевы, где $0 < \mu_i \leq \mu_{0i} < \overline{\mu_{0i}}$, $\mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\mu_0 = \text{diag}(\mu_{01}, \dots, \mu_{0m})$; 2) для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ – решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; 0, x_0, \varphi) = 0$, $|x_0| < \infty$.

Иными словами, тривиальное решение $x(t) \equiv 0$, $t \in I$ системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если оно асимптотически устойчиво в целом для любого $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Определение 2 Условиями абсолютной устойчивости системы (1), (2) называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы (A, B, S, μ_0) , при выполнении которых положение равновесия $x_* = 0$ абсолютно устойчиво.

Кроме (2) рассмотрим следующее включение

$$\varphi(\sigma) \in \Phi = \{\varphi(\sigma) = (\varphi_1(\sigma_1), \dots, \varphi_m(\sigma_m)) \in C(R^m, R^m) | \varepsilon_i \sigma_i^2 \leq \varphi_i(\sigma_i) \sigma_i \leq r_{0i} \sigma_i^2, \quad i = \overline{1, m}, \quad \forall \sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi_i(\sigma_i) = \varepsilon_i \sigma_i + \varphi_{0i}(\sigma_i), \quad i = \overline{1, m}\}. \quad (3)$$

Из (3), в частности, когда $r_{0i} = r_{i0} + \varepsilon_i$, $i = \overline{1, m}$, $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \varphi_0(\sigma)$, где $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) > 0$, $\varphi_0(\sigma) = (\varphi_{01}(\sigma), \dots, \varphi_{0m}(\sigma))$, имеем

$$\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi_0(\sigma) \in C(R^m, R^m) | 0 \leq \varphi_{0i}(\sigma_i) \sigma_i \leq r_{i0} \sigma_i^2, \quad i = \overline{1, m}, \quad \forall \sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad \varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_0(\sigma) \leq \varphi_{0*}, \quad \forall \sigma, \quad \sigma \in R^m, \quad 0 < \varphi_{0*} < \infty\}. \quad (4)$$

Определение 3 Будем говорить, что функция $\varphi(\sigma) \in \Phi$ принадлежит сектору $[\varepsilon, r_0]$, $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, $r_0 = \text{diag}(r_{01}, \dots, r_{0m})$, если $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \varphi_0(\sigma)$, $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$.

Как следует из включений (3), (4), в случае $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \varphi_0(\sigma) \in \Phi$, где $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$ уравнение движения (1) запишется так

$$\dot{x} = (A + B\varepsilon S)x + B\varphi_0(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad x(0) = x_0, \quad t \in I. \quad (5)$$

Определение 4 Будем говорить, что в секторе $[\varepsilon, r_0]$ проблема Айзермана имеет решение, если: 1) $r_0 = \bar{\mu}_0$, где $\bar{\mu}_0 = \text{diag}(\bar{\mu}_{01}, \dots, \bar{\mu}_{0m})$, $\bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_0 - \delta$, $\delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_m)$, $\delta_i > 0$, $i = \overline{1, m}$ – сколь угодно малые числа; $\bar{\mu}_0$ – предельная диагональная матрица гурвицевости; 2) для любого $\varphi(\sigma) = \mu\sigma$, $\mu = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_m)$, $\varepsilon \leq \mu_i \leq r_{0i}$, $i = \overline{1, m}$ – решение системы (1) асимптотически устойчиво; 3) для любого $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$ тривиальное решение системы (4), (5) абсолютно устойчиво.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1 Найти условие абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Задача 2 Найти условие абсолютной устойчивости тривиального решения системы (4), (5).

Задача 3 Найти сектор $[\varepsilon, r_0]$, где тривиальное решение системы (4), (5) абсолютно устойчиво и проблема Айзермана имеет решение.

2 Обзор литературы

Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критическом случаях посвящено много работ. Среди них следует отметить монографии (Айзерман, 1963), (Лурье, 1951), (Попов, 1970), (Гелиг 1978). Существует два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем: метод А.И. Лурье (Лурье, 1951) и метод В.М. Попова (Попов, 1970). Связь между этими методами установлена в работах В.А. Якубовича и его учеников (Гелиг 1978). Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функции Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей". В конечном счете метод А.И. Лурье приводит к проверке разрешимости матричных неравенств. Естественно, довольно сложно применить такой подход для решения прикладных задач из-за неопределенности выбора произвольных постоянных в условиях абсолютной устойчивости.

Сложность проверки частотных условий, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических условий абсолютной устойчивости путем сведения частотных условий к проверке положительности полиномов на положительной полуоси (Айсагалиев, 1969 : 38-48), (Айсагалиев, 1970 : 83-94).

В 1949 году М.А. Айзерман сформулировал следующую проблему (Айзерман М.А., 1949 : 186-188): пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu\sigma$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$,

$\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi = \{\varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1) / 0 \leq \varphi(\sigma)\sigma \leq \mu_0\sigma^2, \forall \sigma, \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Айзермана была решена для систем второго порядка И.Г. Малкиным, Н.П. Еругиным, Н.Н. Красовским.

В 1957 году Р.Е. Калманом сформулирована следующая проблема (Kalman, 1957 : 553-556): Пусть решения всех линейных систем вида $\dot{x} = Ax + B\mu x$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, $\sigma = Sx$ асимптотически устойчивы. Будут ли решения системы $\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma)$, $\sigma = Sx$ с любой нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_1 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1) / 0 \leq \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} \leq \mu_0, \forall \sigma, \sigma \in R^1\}$ обладать свойством асимптотической устойчивости в целом. Проблема Калмана имеет положительное решение при $n = 2$.

Остаются открытыми решения проблемы Айзермана и проблемы Калмана для случая $n > 2$. В работе (Брагин, 2011 : 3-36) предложен новый подход к решению указанных проблем в виде вычислительных алгоритмов на основе модифицированного метода гармонической линеаризации.

В работах (Айсагалиев, 1994 : 748-757), (Айсагалиев, 2000), (Айсагалиев, 2012), (Aisagaliev, 2013 : 159-175) приведены результаты новых исследований абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований для систем со многими нелинейностями.

3 Материал и методы

Предлагается новый метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия многомерных нелинейных регулируемых систем состоящий из следующих разделов: неособое преобразование, свойства решений, оценки несобственных интегралов, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана.

Отличительной особенностью предлагаемого подхода является получение тождеств вдоль решения системы относительно входных и выходных переменных нелинейных элементов. Эти тождества позволяют использовать сведения о свойствах нелинейностей для оценки несобственных интегралов. При таком подходе к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем удастся получить дополнительные соотношения, связывающие фазовые переменные, что позволяет получить более эффективные условия абсолютной устойчивости.

3.1 Неособое преобразование

Для простоты проверки предлагаемого условия абсолютной устойчивости целесообразно преобразовать исходное уравнение движения (1). Пусть матрица $B = \|B_1, \dots, B_m\|$, где B_i , $i = \overline{1, m}$ – векторы столбцы $n \times 1$.

Лемма 1 Пусть вектор-строка $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1, m}$ такие, что:

$$\theta_i^* B_i = 1, \theta_i^* B_j = 0, j = \overline{1, m}, i \neq j, \quad (6)$$

где $B_i \neq B_j$, $i \neq j$, $(*)$ – знак транспонирования. Тогда вдоль решения уравнения (1) верно тождество

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* A x(t) + \varphi_i(\sigma_i(t)), \quad t \in [0, \infty), \quad i = \overline{1, m}. \quad (7)$$

Если, кроме того, ранг $B^* = m$ и определитель Грама

$$\Gamma(\theta_1, \dots, \theta_m) = \begin{vmatrix} \langle \theta_1, \theta_1 \rangle & \langle \theta_1, \theta_2 \rangle & \dots & \langle \theta_1, \theta_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \theta_m, \theta_1 \rangle & \langle \theta_m, \theta_2 \rangle & \dots & \langle \theta_m, \theta_m \rangle \end{vmatrix} \neq 0, \quad (8)$$

то векторы θ_i , $i = \overline{1, m}$ существует и они линейно независимы, где $\langle \theta_i, \theta_j \rangle$ – скалярное произведение векторов θ_i , θ_j , $i, j = \overline{1, m}$.

Доказательство. Поскольку $\theta_i^* = (\theta_{i1}, \dots, \theta_{in})$, $i = \overline{1, m}$, то умножая слева тождество $\dot{x}(t) = Ax(t) + B\varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ на θ_i^* имеем

$$\theta_i^* \dot{x}(t) = \theta_i^* A x(t) + \theta_i B \varphi(\sigma(t)), \quad t \in I, \quad i = \overline{1, m},$$

где $\theta_i^* B = (\theta_i^* B_1, \dots, \theta_i^* B_m)$. Отсюда, с учетом (6), получим (7). Заметим, что соотношение (6) запишется в виде линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \theta_{i1} B_{11} + \theta_{i2} B_{12} + \dots + \theta_{in} B_{1n} &= 0, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \theta_{i1} B_{i1} + \theta_{i2} B_{i2} + \dots + \theta_{in} B_{in} &= 1, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \theta_{i1} B_{m1} + \theta_{i2} B_{m2} + \dots + \theta_{in} B_{mn} &= 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Если ранг $B^* = m$, то данная система уравнений имеет решение, θ_i , $i = \overline{1, m}$. Из условия (8) следует, что векторы θ_i , $i = \overline{1, m}$ линейно независимы. Лемма доказана.

Лемма 2 Пусть вектор $\theta_0 \in R^n$ такой, что $\theta_0^* B_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, где $B_i \neq B_j$, $i \neq j$. Тогда вдоль решения уравнения (1) верно тождество

$$\theta_0^* \dot{x}(t) = \theta_0^* A x(t), \quad t \in I. \quad (9)$$

Если, кроме того, ранг $B^* = m$ и определитель Грама

$$\Gamma(\theta_{01}, \dots, \theta_{0n-m}) = \begin{vmatrix} \langle \theta_{01}, \theta_{02} \rangle & \dots & \langle \theta_{01}, \theta_{0n-m} \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \theta_{0n-m}, \theta_{01} \rangle & \dots & \langle \theta_{0n-m}, \theta_{0n-m} \rangle \end{vmatrix} \neq 0, \quad (10)$$

то векторы $\theta_{01}, \dots, \theta_{0n-m}$ существуют и они линейно независимы, где θ_{0i} , $i = \overline{1, n-m}$ получены из θ_0 путем выбора $(n-m)$ – произвольных компонентов вектора θ .

Доказательство. Пусть вектор $\theta_0 = (\theta_{10}, \dots, \theta_{n0}) \in R^n$. Тогда соотношение $\theta_0^* B_i = 0$, $i = \overline{1, m}$ запишется так

$$\theta_{10} B_{11} + \dots + \theta_{n0} B_{1n} = 0, \dots, \theta_{10} B_{m1} + \dots + \theta_{n0} B_{mn} = 0. \quad (11)$$

Умножая слева тождество (1) на θ_0^* получим (9). По условию леммы выполнено неравенство (10). Следовательно, векторы $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n-m}$ линейно независимы. Так как $\theta_{0i}^* B_i = 0$, $i = \overline{1, n-m}$, то тождество (9) равносильно тому, что

Лемма доказана.

$$R = \|\theta_1, \dots, \theta_m \quad \theta_{01}, \dots, \theta_{0n-m}\| \quad (13)$$
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= c_{11}y_1 + \dots + c_{1n}y_n + \varphi_1(\sigma_1), \dots, \dot{y}_m = c_{m1}y_1 + \dots + c_{mn}y_n + \varphi_m(\sigma_m), \\ \dot{y}_{m+1} &= c_{m+1,1}y_1 + \dots + c_{m+1,n}y_n, \dots, \dot{y}_n = c_{n1}y_1 + \dots + c_{nn}y_n, \\ \sigma_1 &= d_{11}y_1 + \dots + d_{1n}y_n, \dots, \sigma_m = d_{m1}y_1 + \dots + d_{mn}y_n, \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Так как ранг $R = n$, то из (13) следует, что векторы $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1, m}$, $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n - m}$ образует базис в R^n . Тогда векторы

где c_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$ коэффициенты разложения $A^* \theta_i$, $i = \overline{1, m}$, $A^* \theta_{0i}$, $i = \overline{1, n - m}$ по базисам $\theta_i \in R^n$, $i = \overline{1, m}$, $\theta_{0i} \in R^n$, $i = \overline{1, n - m}$. Из (15) с учетом (7), (9), (12) получим систему уравнений (14) относительно переменных $y_1, \dots, y_n$.

$$\sigma_1 = S_1 x = d_{11} \theta_1^* x + \dots + d_{1m} \theta_m^* x + d_{1m+1} \theta_{01}^* x + \dots + d_{1n} \theta_{0n-m}^* x,$$

где $S^* = (S_1^*, \dots, S_m^*)$. Лемма доказана.

$$\dot{y} = Cy + E\varphi(\sigma), \quad \sigma = Dy, \quad \varphi(\sigma) \in \Phi_0, \quad (16)$$

где C, E, D – постоянные матрицы порядков $n \times n, n \times m, m \times n$ соответственно, $C = \|c_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$, $D = \|d_{ij}\|$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $E = \begin{pmatrix} I_m \\ O_{n-m, m} \end{pmatrix}$, I_m – единичная матрица порядка $m \times m$, $O_{n-m, m}$ – матрица порядка $(n - m) \times m$ с нулевыми элементами. Если матрица $K = R^*$, то $y = Kx = R^*x$, $x = K^{-1}y = (R^*)^{-1}y$, матрицы C, E, D равны $C = KAK^{-1} = (R^*)^{-1}AR^{-1}$, $D = SK^{-1} = S(R^*)^{-1}$, $E = KB = R^*B$. Таким образом, дифференциальное уравнение (1) с нелинейностями (2) с неособым преобразованием $x = K^{-1}y = (R^*)^{-1}y$ приводится к виду (16).

3.2 Свойства решений

Рассмотрена ограниченность решений системы (1), (2), а также уравнений (16). Получены тождества вдоль решения уравнения (16) и исследовано ее асимптотическое свойство.

Теорема 1 Пусть матрица A – гурвицева, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1, n}$ и выполнены условия лемм 1 – 3. Тогда верны оценки:

$$|x(t)| \leq c_0, \quad |\dot{x}(t)| \leq c_1, \quad t \in I, \quad (17)$$

$$|y(t)| \leq c_2, \quad |\dot{y}(t)| \leq c_3, \quad t \in I, \quad (18)$$

$$|\sigma(t)| \leq c_4, \quad |\dot{\sigma}(t)| \leq c_5, \quad t \in I, \quad (19)$$

где $c_i = \text{const} > 0$, $c_i < \infty$, $i = \overline{0, 5}$. Кроме того, функции $x(t)$, $y(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$ равномерно непрерывны.

Доказательство. Так как матрица $C = KAK^{-1}$, то из гурвицевости матрицы A следует гурвицевость матрицы C , т.е. $\operatorname{Re} \lambda_j(A) = \operatorname{Re} \lambda_j(C) < 0$, $j = \overline{1, n}$. Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\varphi(\sigma(\tau))d\tau, \quad t \in I.$$

Заметим, что из гурвицевости матрицы A следует оценка $\|e^{At}\| \leq ce^{(a+\varepsilon)t}$, $c = c(\varepsilon) > 0$, $\forall t, t \in I$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число, величина $a = \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \|e^{At}\| |x_0| + \int_0^t \|e^{A(t-\tau)}\| \|B\| |\varphi(\sigma(\tau))| d\tau \leq \\ &\leq c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t} \|B\| \varphi_* \int_0^t e^{-(a+\varepsilon)\tau} d\tau = \\ &= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t} \|B\| \varphi_* \left[-\frac{1}{a+\varepsilon} e^{-(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon} \right] = \\ &= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon} c\|B\| \varphi_* (-1 + e^{(a+\varepsilon)t}) \leq \\ &\leq c|x_0| - \frac{1}{a+\varepsilon} c\|B\| \varphi_* = c_0, \end{aligned}$$

где $e^{(a+\varepsilon)t} \leq 1$, $t \in I$, $a + \varepsilon < 0$, $-\frac{1}{a+\varepsilon} > 0$, $|\varphi(\sigma(t))| \leq \varphi_*$, $\forall t, t \in I$. Отсюда следует ограниченность решения системы (1), (2). Из уравнения (1) следует, что

$$|\dot{x}(t)| \leq \|A\| |x(t)| + \|B\| |\varphi(\sigma(t))| \leq \|A\|c_0 + \|B\|\varphi_* = c_1, \quad \forall t, t \in I,$$

Тогда

$$|\sigma(t)| \leq \|S\| |x(t)| \leq \|S\|c_0 = c_4, \quad |\dot{\sigma}(t)| \leq \|S\| |\dot{x}(t)| \leq \|S\|c_1 = c_5, \quad \forall t, t \in I.$$

Так как функция $y(t) = Kx(t)$, $t \in I$, то $|y(t)| \leq \|K\||x(t)| \leq \|K\|c_0 = c_2$, $|\dot{y}| \leq \|K\||\dot{x}(t)| \leq \|K\|c_1 = c_3$, $\forall t, t \in I$.

Итак, доказаны оценки (17) – (19). Из ограниченности функций $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{\sigma}(t)$, $t \in I$ следуют равномерные непрерывности функции $x(t)$, $y(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$. Теорема доказана.

Следует отметить, что: 1. Из оценки $|x(t)|$, $t \in I$ имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = |x(\infty)| \leq c|x_0| - \frac{1}{a}c\|B\|\varphi_* = \bar{c}_0$, $c_0 \leq \bar{c}_0$ в силу непрерывности $x(t)$, $t \in I$, где $a < 0$. Следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = |y(\infty)| \leq \|K\|\bar{c}_0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |\sigma(t)| = |\sigma(\infty)| \leq \|s\|\bar{c}_0$.

2. Если $x_0 \in S_\rho = \{x_0 \in R^n | |x_0| \leq \rho, \rho > 0\}$, то $|\sigma| \leq \|S\|(c\rho - \frac{c}{a}\|B\|\varphi_*) = \bar{c}_4$.

Лемма 4 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3. Тогда вдоль решения системы (16) верны тождества:

$$\varphi(\sigma(t)) = \dot{Y}_1(t) - C_1 Y_1(t) - C_2 Y_2(t), \quad t \in I, \quad (20)$$

$$\sigma(t) = D_1 Y_1(t) + D_2 Y_2(t), \quad t \in I, \quad (21)$$

$$\dot{\sigma}(t) = D_1 \dot{Y}_1(t) + D_2 C_3 Y_1(t) + D_2 C_4 Y_2(t), \quad t \in I, \quad (22)$$

где

$$y(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}, \quad D = (D_1 \quad D_2), \quad t \in I. \quad (23)$$

Доказательство. Если матрицы C , D представить в виде (23), где $C_1 = \|c_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, m}$; $C_2 = \|c_{ij}\|$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{m+1, n}$; $C_3 = \|c_{ij}\|$, $i = \overline{m+1, n}$, $j = \overline{1, m}$; $C_4 = \|c_{ij}\|$, $i, j = \overline{m+1, n}$; $D_1 = \|d_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, m}$; $D_2 = \|d_{ij}\|$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{m+1, n}$, то уравнение (16) запишется так

$$\dot{Y}_1 = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \varphi(\sigma), \quad \dot{Y}_2 = C_3 Y_1 + C_4 Y_2, \quad t \in I, \quad (24)$$

$$\sigma = D_1 Y_1 + D_2 Y_2, \quad Y_1 = Y_1(t), \quad Y_2 = Y_2(t), \quad \sigma = \sigma(t), \quad t \in I. \quad (25)$$

Тогда тождество (20) следует из первого уравнения (24), тождества (21), (22) следуют из (25) с учетом второго уравнения из (24). Лемма доказана.

Лемма 5 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3. Тогда для любых матриц Λ , Γ , M , L порядков $m \times (n - m)$, $(n - m) \times (n - m)$, $m \times (n - m)$, $m \times m$ соответственно, вдоль решения уравнения (16) верны тождества

$$Y_1^*(t)\Lambda\dot{Y}_2(t) = Y_1^*(t)\Lambda C_3 Y_1(t) + Y_1^*(t)\Lambda C_4 Y_2(t), \quad t \in I, \quad (26)$$

$$Y_2^*(t)\Gamma\dot{Y}_2(t) = Y_2^*(t)\Gamma C_3 Y_1(t) + Y_2^*(t)\Gamma C_4 Y_2(t), \quad t \in I, \quad (27)$$

$$\dot{Y}_1^*(t)MY_2(t) = \frac{d}{dt}[Y_1^*(t)MY_2(t)] - Y_1^*(t)MC_3 Y_1(t) - Y_1^*(t)MC_4 Y_2(t), \quad t \in I, \quad (28)$$

$$\dot{Y}_1^*(t)LY_1(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}Y_1^*(t)(L + L^*)Y_1(t)\right] - \dot{Y}_1^*(t)L^*Y_1(t), \quad t \in I. \quad (29)$$

Доказательство. Тождества (26), (27) непосредственно следуют из (24). Тождество (28) следует из равенства

$$\frac{d}{dt}[Y_1^*(t)MY_2(t)] = \dot{Y}_1^*(t)MY_2(t) + Y_1^*(t)M\dot{Y}_2(t),$$

где $\dot{Y}_2(t)$, $t \in I$ определяется из второго уравнения (24). Тождество (29) следует из формулы

$$\dot{Y}_1^*(L + L^*)Y_1(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}[Y_1^*(t)(L + L^*)Y_1(t)], \quad t \in I.$$

Лемма доказана.

Теорема 2 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, и пусть, кроме того:

1) скалярная непрерывная функция $W(y) > 0 \quad \forall y, y \in R^n, y \neq 0, W(0) = 0$;

3) несобственный интеграл $\int_0^\infty W(y(t))dt < \infty$.

Тогда $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 1, то верна оценка (18). Пусть выполнены предпосылки теоремы. Покажем, что $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$.

Предположим противное т.е. $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \neq 0$. Тогда существует последовательность $\{t_k\} \subset [0, \infty)$ такая, что $|y(t_k)| \geq \varepsilon > 0, k = 1, 2, \dots$. Выберем $t_{k+1} - t_k \geq \varepsilon_1 > 0$. Поскольку $y(t), t \in I$ – непрерывно дифференцируема и $y(t) \leq c_2, |\dot{y}(t)| \leq c_3, t \in I$ (см. теорему 1), то $|y(t) - y(t_k)| \leq c|t - t_k|, \forall t, t \in [t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}, t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}], k = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\int_0^\infty W(y(t))dt \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} W(y(t))dt,$$

где $|y(t)| = |y(t_k) + y(t) - y(t_k)| \geq |y(t_k)| - |y(t) - y(t_k)| \geq \varepsilon - c\frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_0 > 0$.

Поскольку

$$\int_{t_k - \frac{\varepsilon_1}{2}}^{t_k + \frac{\varepsilon_1}{2}} W(y(t))dt \geq W_{\min} \cdot m, \quad W_{\min} = \min_{\varepsilon_0 \leq |y| \leq c_2} W(y),$$

то

$$\int_0^\infty W(y(t))dt = \infty.$$

Это противоречит второму условию теоремы. Теорема доказана.

3.3 Несобственные интегралы

На основе тождеств (20) – (22) и равенств (26) – (29) и теоремы 1 могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения уравнения (16), где $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Теорема 3 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой диагональной матрицы $\tau_1 = \text{diag}(\tau_{11}, \dots, \tau_{1m})$ порядка $m \times m$, вдоль решения уравнения (16) несобственный интеграл

$$I_1 = \int_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t) \tau_1 D_1 \dot{Y}_1^*(t) - \dot{Y}_1^*(t) L_1^* Y_1(t)] dt + \\ + \int_0^\infty W_1(y(t)) dt + l_1 + l_2 = \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i^*(\sigma_i) \tau_{1i} d\sigma_i = \bar{c}_1 < \infty, \\ |l_1| < \infty, \quad |l_2| < \infty, \quad (30)$$

где

$$l_1 = \frac{1}{2} Y_1^*(t) (L_1 + L_1^*) Y_1(t) \Big|_0^\infty, \quad L_1 = \tau_1 D_2 C_3 - D_1^* \tau_1 C_1, \quad |l_1| < \infty, \quad (31)$$

$$l_2 = -Y_1^*(t) [M_1 C_3 Y_1(t) + M_1 C_4 Y_2(t)] \Big|_0^\infty, \quad M_1 = \tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2, \quad |l_2| < \infty, \quad (32)$$

функция

$$W_1(y(t)) = -Y_1^*(t) (C_1^* \tau_1 D_2 C_3 + \tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2) Y_1(t) - \\ - Y_1^*(t) [C_3^* D_2^* \tau_1 C_2 + C_1^* \tau_1 D_2 C_4 + (\tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2^*) C_4] Y_2(t) - \\ - Y_2^*(t) C_2^* \tau_1 D_2 C_4 Y_2(t), \quad t \in I. \quad (33)$$

Доказательство. Как следует из теоремы 1, $|y(\infty)| \leq c_2 < \infty$, $|y(0)| \leq c_2 < \infty$. Несобственный интеграл

$$I_1 = \int_0^\infty \varphi^*(\sigma(t)) \tau_1 \dot{\sigma}(t) dt = \sum_{i=1}^m \int_{\sigma_i(0)}^{\sigma_i(\infty)} \varphi_i^*(\sigma_i) \tau_{1i} d\sigma_i = \bar{c}_1 < \infty,$$

в силу того, что $|\sigma(0)| \leq c_4 < \infty$, $|\sigma(\infty)| \leq c_4 < \infty$, где функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

Так как выполнены условия леммы 4, то верны тождества (20), (22). Тогда

$$I_1 = \int_0^\infty [\dot{Y}_1(t) - C_1 Y_1(t) - C_2 Y_2(t)]^* \tau_1 [D_1 \dot{Y}_1(t) + D_2 C_3 Y_1(t) + D_2 C_4 Y_2(t)] dt = \\ = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi^*(\sigma) \tau_1 d\sigma = \bar{c}_1 < \infty.$$

Отсюда с учетом тождеств (28), (29), получим

$$\begin{aligned}
 I_1 = & \int_0^\infty \{ [\dot{Y}_1^* \tau_1 D_1 \dot{Y}_1 + \dot{Y}_1^* (\tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2) Y_2] + \dot{Y}_1^* (\tau_1 D_2 C_3 - \\
 & - D_1^* \tau_1 C_1) Y_1] + [-Y_1^* C_1^* \tau_1 D_2 C_3 Y_1 - Y_1^* (C_3^* D_2^* \tau_1 C_2 + C_1^* \tau_1 D_2 C_4) Y_2 - \\
 & - Y_2^* C_2^* \tau_1 D_2 C_1 Y_2] \} dt = \int_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t) \tau_1 D_1 \dot{Y}(t) - \dot{Y}_1^*(t) (\tau_1 D_2 C_3 - \\
 & - D_1^* \tau_1 C_1) Y_1(t)] dt + \int_0^\infty W_1(y(t)) dt + l_1 + l_2 = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi^*(\sigma) \tau_1 d\sigma = \\
 & = \bar{c}_1 < \infty, \quad |l_1| < \infty, \quad |l_2| < \infty,
 \end{aligned}$$

где матрицы $M_1 = \tau_1 D_2 C_4 - D_1^* \tau_1 C_2$, $L_1 = \tau_1 D_2 C_3 - D_1^* \tau_1 C_1$, l_1 , l_2 , $W_1(y)$ определяются формулами (31) – (33) соответственно. Итак, доказана оценка (30).

Далее, учитывая что $Y_1(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$, $Y_2(t) = (y_{m+1}, \dots, y_n(t))$, $t \in I$, $|Y_1(t)| < \infty$, $|Y_2(t)| < \infty$, $\forall t$, $t \in I$, имеем $|l_1| < \infty$, $|l_2| < \infty$. Теорема доказана.

Теорема 4 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой диагональной матрицы $\tau_2 = \text{diag}(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}) \geq 0$ порядка $m \times m$, вдоль решения уравнения (16) несобственный интеграл

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \int_0^\infty [\dot{Y}_1^*(t) \tau_2 \mu_0^{-1} \dot{Y}_1(t) - \dot{Y}_1^*(t) L_2^* Y_1(t)] dt + \\
 & + \int_0^\infty W_2(y(t)) dt + l_3 \leq 0, \quad |l_3| < \infty,
 \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
 l_3 = & -\frac{1}{2} Y^*(t) (L_2 + L_2^*) Y_1(t) \Big|_0^\infty - Y_1^*(t) M_2 (C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)) \Big|_0^\infty, \\
 L_2 = & -2\tau_2 \mu_0^{-1} C_1 - \tau_2 D_1, \quad M_2 = -2\tau_2 \mu_0^{-1} C_2 - \tau_2 D_2,
 \end{aligned} \tag{35}$$

функция

$$\begin{aligned}
 W_2(y) = & Y_1^*(t) (C_1^* \tau_2 D_1 + \tau_2 D_2 C_3 + 2\tau_2 \mu_0^{-1} C_2 C_3 + C_1^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_1) Y_1(t) + \\
 & + Y_1^*(t) (D_1^* \tau_2 C_2 + C_1^* \tau_2 D_2 + \tau_2 D_2 C_4 + 2\tau_2 \mu_0^{-1} C_2 C_4 + 2C_1^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_2) Y_2(t) + \\
 & + Y_2^*(t) (C_2 \tau_2 D_2 + C_2^* \tau_2 \mu_0^{-1} C_2) Y_2(t), \quad t \in I.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Доказательство. Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует

$$\frac{\varphi_i(\sigma_i)}{\sigma_i} \leq \mu_{0i}, \quad \frac{\sigma_i}{\varphi_i(\sigma_i)} \geq \mu_{0i}^{-1}, \quad \forall \sigma_i, \quad \sigma_i \in R^1, \quad \overline{1, m}.$$

Следовательно, $\sigma_i \varphi_i(\sigma_i) \geq \mu_{0i}^{-1} \varphi_i^2(\sigma_i)$, $i = \overline{1, m}$. Тогда для любой величины $\tau_{2i} \geq 0$ верно неравенство $\varphi_i(\sigma_i) \tau_{2i} \sigma_i - \mu_{0i}^{-1} \tau_{2i} \varphi_i^2(\sigma_i) \geq 0$, $i = \overline{1, m}$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^m [\mu_{0i}^{-1} \tau_{2i} \varphi_i^2(\sigma_i) - \varphi_i(\sigma_i) \tau_{2i} \sigma_i] \leq 0. \quad (37)$$

Пусть $\tau_2 = \text{diag}(\tau_{21}, \dots, \tau_{2m}) \geq 0$, $\mu_0^{-1} = \text{diag}(\mu_{01}^{-1}, \dots, \mu_{0m}^{-1})$. Тогда неравенство (37) запишется в виде

$$\varphi^*(\sigma) \tau_2 \mu_0^{-1} \varphi(\sigma) - \varphi^*(\sigma) \tau_2 \sigma \leq 0, \quad \forall \sigma, \quad \sigma \in R^m. \quad (38)$$

Из (38) следует, что несобственный интеграл

$$I_2 = \int_0^\infty [\varphi^*(\sigma(t)) \tau_2 \mu_0^{-1} \varphi(\sigma(t)) - \varphi^*(\sigma(t)) \tau_2 \sigma(t)] dt \leq 0.$$

Отсюда с учетом тождеств (20), (21), имеем

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^\infty \{ & [\dot{Y}_1(t) - C_1 Y_1(t) - C_2 Y_2(t)]^* \tau_2 \mu_0^{-1} [\dot{Y}_1(t) - C_1 Y_1(t) - C_2 Y_2(t)] - \\ & - [\dot{Y}_1(t) - C_1 Y_1(t) - C_2 Y_2(t)] \tau_2 [D_1 Y_1(t) + D_2 Y_2(t)] \} dt \leq 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Тогда несобственный интеграл (39), с учетом тождеств (28), (29), может быть представлен в виде (34), где $L = -2\tau_2 \mu_0^{-1} C_1 - \tau_2 D_1$, $M = -2\tau_2 \mu_0^{-1} C_2 - \tau_2 D_2$. Величина l_3 , функция $W_2(y)$ определяются формулами (35), (36) соответственно. Оценка $|l_3| < \infty$ следует из оценок $|Y_1(t)| < \infty$, $|Y_2(t)| < \infty$, $\forall t, t \in I$. Теорема доказана.

Лемма 6 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любых векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in R^m$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in R^m$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-m}) \in R^{n-m}$, вдоль решения уравнения (16) несобственный интеграл

$$\begin{aligned} I_3 = \int_0^\infty & [\dot{Y}_1^*(t)(-\alpha^* \alpha) \dot{Y}_1(t) + \dot{Y}_1^*(t) L_3^* Y_1(t)] dt + \\ & + \int_0^\infty W_3(y(t)) dt + l_4 \leq 0, \quad |l_4| < \infty, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} l_4 = & -Y_1^*(t)(L_3 + L_3^*)Y_1(t) \Big|_0^\infty - Y_1^*(t) M_3 (C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)) \Big|_0^\infty, \\ & L_3 = 2\alpha^* \beta, \quad M_3 = 2\alpha^* \gamma, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} W_3(y) = & Y_1^*(t)(2\alpha^* \gamma C_3 - \beta^* \beta) Y_1(t) + Y_1^*(t)(2\alpha^* \gamma - 2\beta^* \gamma) Y_2(t) + \\ & + Y_2^*(t)(-\gamma^* \gamma) Y_2(t), \quad t \in I. \end{aligned} \quad (42)$$

Доказательство. Несобственный интеграл

$$I_3 = - \int_0^{\infty} [\alpha \dot{Y}_1(t) + \beta Y_1(t) + \gamma Y_2(t)]^* [\alpha \dot{Y}_1(t) + \beta Y_1(t) + \gamma Y_2(t)] dt \leq 0.$$

Далее, используя тождества (28), (29), где $M_3 = 2\alpha^*\gamma$, $L_3 = 2\alpha^*\beta$, получим (40), где l_4 , $W_3(y)$ определяются формулами (41), (42) соответственно. Лемма доказана.

Лемма 7 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица A – гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой симметричной матрицы $\Gamma = \Gamma^*$ порядка $(n - m) \times (n - m)$ несобственный интеграл

$$I_4 = \int_0^{\infty} W_4(y(t)) dt = \frac{1}{2} Y_2^*(t) \Gamma Y_2(t) \Big|_0^{\infty} < \infty, \quad (43)$$

где

$$W_4(y) = Y_2(t) \Gamma C_3 Y_1(t) + Y_2(t) \Gamma C_4 Y_2(t), \quad t \in I. \quad (44)$$

Доказательство. Как следует из формулы (24) производная $\dot{Y}_2(t) = C_3 Y_1(t) + C_4 Y_2(t)$, $t \in I$. Тогда для любой симметричной матрицы $\Gamma = \Gamma^*$ порядка $n - m \times (n - m)$ верно тождество (см. (27))

$$Y_2^*(t) \Gamma \dot{Y}_2(t) = Y_2^*(t) \Gamma C_3 Y_1(t) + Y_2^*(t) \Gamma C_4 Y_2(t), \quad t \in I. \quad (45)$$

интегрируя тождество (45) по t в пределах от 0 до ∞ , получим формулу (43), где $W_4(y)$ определяется по формуле (44). Лемма доказана.

Рассмотрим случай, когда $\varphi(\sigma) \in \Phi$ из (3), где $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \varphi_0(\sigma)$, функция $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$ (см. (4)). В этом случае, уравнение (5) с неособым преобразованием приводится к виду

$$\dot{y} = (C + E\varepsilon D)y + E\varphi_0(\sigma), \quad \sigma = Dy, \quad \varphi_0(\sigma) \in \Phi_1. \quad (46)$$

Обозначим через $\bar{A} = A + B\varepsilon S$, $\bar{C} = C + E\varepsilon D$. Теперь уравнения (5) и (46) запишутся так

$$\dot{x} = \bar{A}x + B\varphi_0(\sigma), \quad \sigma = Sx, \quad \varphi_0(\sigma) \in \Phi_1. \quad (47)$$

$$\dot{y} = \bar{C}y + E\varphi_0(\sigma), \quad \sigma = Dy, \quad \varphi_0(\sigma) \in \Phi_1. \quad (48)$$

где $\bar{C} = K\bar{A}K^{-1}$, $D = SK^{-1}$, $E = KB$, $K = R^*$, $\lambda_j(\bar{C}) = \lambda_j(\bar{A})$, $j = \overline{1, n}$.

Отсюда следует, что если матрица $\bar{A}$ из уравнения (47) гурвицева, то матрица $\bar{C}$ из уравнения (48) также гурвицева. Для уравнения (47), когда матрица $\bar{A}$ – гурвицева остаются верными утверждения теорем 1 – 4, лемм 4 – 7.

Лемма 8 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица $\bar{A}$ гурвицева, функция $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$. Тогда:

1) для решения уравнения (48) верны оценки

$$|y(t)| \leq c_6, \quad |\dot{y}(t)| \leq c_7, \quad |\sigma(t)| \leq c_8, \quad |\dot{\sigma}(t)| \leq c_9, \quad t \in I,$$

где функции $y(t)$, $\sigma(t)$, $t \in I$ равномерно непрерывны;

2) вдоль решения уравнения (48) верны тождества

$$\varphi_0(\sigma(t)) = \dot{\bar{Y}}_1(t) - \bar{C}_1 \bar{Y}_1(t) - \bar{C}_2 \bar{Y}_2(t), \quad t \in I, \quad (49)$$

$$\sigma(t) = D_1 \bar{Y}_1(t) + D_2 \bar{Y}_2(t), \quad t \in I, \quad (50)$$

$$\dot{\sigma}(t) = D_1 \dot{\bar{Y}}_1(t) + D_2 \bar{C}_3 \bar{Y}_1(t) + D_2 \bar{C}_4 \bar{Y}_2(t), \quad t \in I, \quad (51)$$

где

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \\ \bar{C}_3 & \bar{C}_4 \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1(t) \\ \bar{Y}_2(t) \end{pmatrix};$$

3) уравнение (48) может быть представлено в виде

$$\dot{\bar{Y}}_1(t) = \bar{C}_1 \bar{Y}_1(t) + \bar{C}_2 \bar{Y}_2(t) + \varphi_0(\sigma), \quad \dot{\bar{Y}}_2(t) = \bar{C}_3 \bar{Y}_1(t) + \bar{C}_4 \bar{Y}_2(t), \quad t \in I; \quad (52)$$

4) верны тождества

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Y}}_1^*(t) M \bar{Y}_2(t) = & \frac{d}{dt} [\bar{Y}_1^*(t) M \bar{Y}_2(t)] - \bar{Y}_1^*(t) M \bar{C}_3 \bar{Y}_1(t) - \\ & - \bar{Y}_1^*(t) M \bar{Y}_4(t), \quad t \in I, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\dot{\bar{Y}}_1^*(t) L \bar{Y}_1(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \bar{Y}_1^*(t) (L + L^*) \bar{Y}_1(t) \right] - \bar{Y}_1^*(t) L^* \bar{Y}_1(t), \quad t \in I, \quad (54)$$

где M , L любые матрицы порядков $m \times (n - m)$, $m \times n$.

Доказательство леммы следует из теоремы 1 и лемм 4, 5. Формулы (49) – (54) могут быть получены аналогичным путем как в теоремах 1 – 4, лемм 4 – 7.

Лемма 9 Пусть выполнены условия лемм 1 – 3, матрица $\bar{A}$ – гурвицева, функция $\varphi_0(\sigma) \in \Phi_1$. Тогда:

1) для любой диагональной матрицы τ_1 порядка $m \times m$, вдоль решения уравнения (48) несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 = & \int_0^\infty [\dot{\bar{Y}}_1^*(t) \tau_1 D_1 \dot{\bar{Y}}_1(t) - \dot{\bar{Y}}_1^*(t) \bar{L}_1^* \bar{Y}_1(t)] dt + \int_0^\infty \bar{W}_1(y(t)) dt + \\ & + \bar{I}_1 = \int_{\sigma(0)}^{\sigma(\infty)} \varphi_0^*(\sigma) \tau_1 d\sigma = \bar{c}_1 < \infty, \quad |l_1| < \infty, \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\bar{l}_1 = \frac{1}{2} \bar{Y}_1^*(t) (\bar{L}_1 + \bar{L}_1^*) \bar{Y}_1^*(t) \Big|_0^\infty - \bar{Y}_1^*(t) \bar{M} [\bar{C}_3 \bar{Y}_1(t) + \bar{C}_4 \bar{Y}(t)] \Big|_0^\infty, \quad (56)$$

$$\bar{L}_1 = \tau_1 D_2 \bar{C}_3 - D_1^* \tau_1 \bar{C}_1, \quad \bar{M}_1 = \tau_1 D_2 \bar{C}_4 - D_1^* \tau_1 \bar{C}_2,$$

функция $\bar{W}_1(y)$ определяется по формуле (33), после замены $Y_1, Y_2, C_1, C_2, C_3, C_4$ на $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4$ соответственно;

2) для любой диагональной матрицы $\tau_2 \geq 0$ порядка $m \times m$, вдоль решения системы (48) несобственный интеграл

$$\bar{I}_2 = \int_0^\infty [\dot{\bar{Y}}_1^*(t) \tau_2 r_{00}^{-1} \dot{\bar{Y}}(t) + \dot{\bar{Y}}_1^*(t) \bar{L}_2^* \bar{Y}_1(t)] dt + \int_0^\infty \bar{W}_2(y(t)) dt +$$

$$+ \bar{l}_3 \leq 0, \quad |\bar{l}_3| < \infty, \quad (57)$$

где

$$\bar{l}_3 = -\frac{1}{2} \bar{Y}_1^*(t) (\bar{L}_2 + \bar{L}_2^*) \bar{Y}_1^*(t) \Big|_0^\infty - \bar{Y}_1^*(t) \bar{M}_2 [\bar{C}_3 \bar{Y}_1(t) + \bar{C}_4 \bar{Y}_2(t)] \Big|_0^\infty, \quad |\bar{l}_3| < \infty, \quad (58)$$

$\bar{L}_2 = -2\tau_2 r_{00}^{-1} \bar{C}_1 - \tau_2 D_1$, $\bar{M}_2 = -2\tau_2 r_{00}^{-1} - \tau_2 D_1$, $r_{00} = \text{diag}(r_{10}, \dots, r_{m0})$, $r_0 = \text{diag}(r_1, \dots, r_m)$, $r_0 = r_{00} + \varepsilon$, $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, функция $\bar{W}_2(y)$ определяется по формуле (36), после замены Y_1, Y_2, C на $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{C}$ соответственно;

3) для любых векторов строк $\alpha \in R^m$, $\beta \in R^m$, $\gamma \in R^{n-m}$ несобственный интеграл

$$\bar{I}_3 = \int_0^\infty [\dot{\bar{Y}}_1^*(t) (-\alpha^* \alpha) \dot{\bar{Y}}(t) + \dot{\bar{Y}}_1^*(t) \bar{L}_3^* \dot{\bar{Y}}_1(t)] dt +$$

$$+ \int_0^\infty \bar{W}_3(y(t)) dt + \bar{l}_4 \leq 0, \quad |\bar{l}_4| < \infty, \quad (59)$$

где

$$\bar{l}_4 = -\bar{Y}_1^*(t) (\bar{L}_3 + \bar{L}_3^*) \bar{Y}_1^*(t) \Big|_0^\infty - \bar{Y}_1^*(t) \bar{M}_3 [\bar{C}_3 \bar{Y}_1(t) + \bar{C}_4 \bar{Y}_2(t)] \Big|_0^\infty, \quad |\bar{l}_4| < \infty, \quad (60)$$

$\bar{L}_3 = 2\alpha^* \beta$, $\bar{M}_3 = 2\alpha^* \gamma$, функция $\bar{W}_3(y)$ определяется по формуле (42), после замены Y_1, Y_2, C на $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{C}$ соответственно;

4) для любой симметричной матрицы $\Gamma = \Gamma^*$ порядка $(n-m) \times (n-m)$ несобственный интеграл

$$\bar{I}_4 = \int_0^\infty \bar{W}_4(y(t)) dt = \frac{1}{2} \bar{Y}_2^*(t) \Gamma \bar{Y}_2(t) \Big|_0^\infty, \quad (61)$$

где $\bar{W}_4(y)$ определяется по формуле (44), после замены Y_1, Y_2, C на $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{C}$ соответственно.

Доказательство леммы следует из теорем 3, 4 и лемм 6, 7. Формулы (55) – (61) следуют из теорем 3, 4 и лемм 6, 7.

4 Результаты и обсуждение

Для системы с ограниченными ресурсами, фазовые переменные ограниченные и являются равномерно непрерывными функциями. Эти свойства были использованы при оценке несобственных интегралов. Получены тождества относительно входных и выходных переменных нелинейных элементов, которые позволяют использовать сведения о свойствах нелинейностей из заданного множества. При таком подходе к исследованию абсолютной устойчивости удастся получить дополнительные соотношения, связывающие фазовые переменные, получить более эффективные условия абсолютной устойчивости.

В работах (Айсагалиев, 1994 : 748-757), (Айсагалиев, 2000), (Айсагалиев, 2012), (Aisagaliev, 2013 : 159-175) приведены результаты исследования абсолютной устойчивости одномерных систем. Данная работа является продолжением этих исследований для систем со многими нелинейностями.

Список литературы

- [1] Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем // Издательство АН СССР, 1963. С.240
- [2] Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1951. С.216
- [3] Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. С.453
- [4] Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.:Наука, 1978. С.400
- [5] Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1969. №5. С.38-48.
- [6] Айсагалиев С.А. Об определении области абсолютной устойчивости системы управления с несколькими нелинейными элементами // АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1970. №12. С.83-94.
- [7] Айзерман М.А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в "большом" динамических систем // УМН, 1949. т. 4. № 4. с. 186-188.
- [8] Kalman R.E. Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME, 1957. v. 79.3. pp. 553-556.
- [9] Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи ЧУА. Известия РАН. Теория и системы управления, 2011. № 4. с. 3-36.
- [10] Айсагалиев С.А. К теории абсолютной устойчивости регулируемых систем // Дифференциальные уравнения. Минск-Москва. 1994. Т.30. №5. С.748-757.
- [11] Айсагалиев С.А. Теория регулируемых систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2000. – С. 234
- [12] Айсагалиев С.А. Теория устойчивости динамических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2012. – 216 С.
- [13] Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N. Certain problems of Synchronization theory // Journal Inverse Ill Posed Problems, 21 (2013), – pp. 159-175.

References

- [1] Aizerman M. A., Gantmaher F. R. *Absolyutnaya ustoychivost reguliruemyyih sistem* [Absolute stability of regulated systems], (Izdatelstvo AN SSSR, 1963) : 240.
- [2] Lurie A. I. *Nekotoryie nelineynyye zadachi teorii avtomaticheskogo regulirovaniya* [Some nonlinear problems of automatic control theory], (M.: Gostehizdat, 1951) : 216.
- [3] Popov V. M. *Giperustoychivost avtomaticheskikh sistem* [Hyper-stability of automatic systems], (M.: Nauka, 1970) : 453.
- [4] Gelig A. H., Leonov G. A., Yakubovich V. A. *Ustoychivost nelineynykh sistem s neodnolokalnym sostoyaniem ravnovesiya* [Stability of nonlinear systems with a nonunique equilibrium state], (M.: Nauka, 1978) : 400.
- [5] Aisagaliev S. A., «Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti vyinuzhdennykh dvizheniy v nelineynykh sistemakh» [On the determination of the domain of absolute stability forced motions in nonlinear systems], *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* (1969) : 38–48.
- [6] Aisagaliev S. A., «Ob opredelenii oblasti absolyutnoy ustoychivosti sistemy upravleniya s neskolkimi nelineynymi elementami» [On the determination of the domain of absolute stability of a control system with several nonlinear elements], *AN SSSR. Avtomatika i telemekhanika* (1970) : 83–94.
- [7] Aizerman M. A., «Ob odnoy probleme, kasayusheysya ustoychivosti v "bolshom" dinamicheskikh sistemakh» [On one problem concerning stability in "large" dynamical systems], *UMN* (1949) : 186–188.
- [8] Kalman R. E., «Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems», *Transactions of ASME* (1957) : 553–556.
- [9] Bragin V. O., Vagaytsev V. I., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., «Algoritmy poiska skrytykh kolebaniy v nelineynykh sistemakh. Problemy Ayzermana, Kalmana i tsepi ChUA» [Algorithms for searching hidden oscillations in nonlinear systems. The problems of Aizerman, Kalman, and ChUA chain], *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* (2011) : 3–36.
- [10] Aisagaliev S. A., «K teorii absolyutnoy ustoychivosti reguliruemyyih sistem» [For the theory of absolute stability of regulated systems], *Differentsialnye uravneniya. Minsk-Moskva*, Vol. 30. No 5 (1994) : 748–757.
- [11] Aisagaliev S. A. *Teoriya reguliruemyyih sistem* [Theory of regulated systems] (Kazakh universiteti, 2000), 234.
- [12] Aisagaliev S. A. *Teoriya ustoychivosti dinamicheskikh sistem* [Stability theory of dynamical systems] (Kazakh universiteti, 2012), 216.
- [13] Aisagaliev S. A., Kalimoldayev M. N., «Certain problems of Synchronization theory», *Journal Inverse Ill Posed Problems*, No 21 (2013) : 159–175.

ГРНТИ 512.56, 512.57

 ω - независимые базисы квазитожеств дифференциальных группоидов

Башеева А.О., докторант, Евразийский национальный университет
им. Л.Н. Гумилева, г. Астана,
Республика Казахстан, +77075542275, E-mail: basheeva@mail.ru

Поиск решений проблемы конечной базирюемости находился и до сих пор находится под влиянием проблемы Альфреда Тарского (Tarski, 1966: 275–288), поставленной в 1966 году, которая спрашивает: Существует ли алгоритм, определяющий является ли эквациональная теория конечного множества конечных алгебр конечно аксиоматизируемой? Проблема Тарского была решена отрицательно в 1993 году МакКензи (McKenzie, 1996: 49–104), что на самом деле сделало Проблему конечной базирюемости более интересной и перспективной для исследований. Если бы Проблема Тарского имела бы позитивное решение, то статус Проблемы конечной аксиоматизируемости был бы совершенно иным. Возможно она бы существовала, однако, основным направлением исследований было бы улучшение известных алгоритмов и классификация их сложности. К сожалению, Проблема Тарского для квазиэквациональных теорий до сих пор не решена. В конце 90-х, ряд исследователей показали, что мощный метод МакКензи, используемый для решения Проблемы Тарского, нельзя просто перенести на квазиэквациональные теории. Так на сегодняшний день независимые базисы квазитожеств были найдены для многих классов алгебр и моделей. Отметим, что недавно в работе (Kravchenko, 2017c) было найдено общее и достаточное условие для существования континуума квазимногообразий без независимого базиса квазитожеств, но с ω -независимыми базисами квазитожеств. Однако дифференциальные группоиды этим условиям не подчиняются и в данной работе продолжено изучение независимой базирюемости квазимногообразий дифференциальных группоидов. Основным результатом является построение континуума квазимногообразий дифференциальных группоидов, которые имеют ω -независимый базис квазитожеств.

Ключевые слова: квазитожество, квазимногообразие, базис квазитожеств, независимый базис квазитожеств, дифференциальные группоиды.

Дифференциалды группоидтардың ω -тәуелсіз базистер квазитепетендіктері

Башеева А.О., докторант, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
Астана қ., Қазақстан Республикасы, +77075542275, Электрондық пошта: basheeva@mail.ru

Ақырлы базистену мәселесінің шешімін іздеу қазіргі күнге дейін Альфред Тарскийдің (Tarski, 1966:275-288) 1966 жылы көтерген мәселесінің ықпалында отыр. Ол мәселенің мәні: Ақырлы алгебралардың ақырлы жиынының эквационалды теориясы ақырлы аксиомаланатындығын анықтайтын алгоритм бар ма? Мак Кензи (McKenzie, 1996:49-104) 1993 жылы Тарский мәселесінің теріс шешімін тауып, ақырлы базистену мәселесін әлдеқайда қызықты және зерттеулер үшін перспективті етті. Егер Тарский мәселесінің оң шешімі табылғанда, онда ақырлы аксиомалану мәселесінің орны басқаша болар еді. Ол жағдайда мәселенің сақталуы мүмкін еді, алайда, зерттеулердегі негізгі бағыт белгілі алгоритмдерді жетілдіру және олардың күрделілігінің классификациясы болар еді. өкінішке орай, квазиэквационалды теориялар үшін Тарский мәселесі әлі шешілмеген. 90-жылдардың соңында бірқатар зерттеушілер Тарский мәселесін шешу үшін қолданылатын Мак Кензидің күшті әдісін квазиэквационалды теорияға көшіре салуға келмейтінін көрсетті. Осылайша, бүгінгі күні тәуелсіз базистер квазитепетендіктер көптеген алгебралар және модельдер класстары үшін табылған. Жақында (Kravchenko, 2017c) тәуелсіз базисы жоқ квазитепетендіктер, бірақ ω -тәуелсіз базисы бар квазитепетендіктер квазикөпбейнелердің континуумы бар болуының қажетті және жеткілікті шарттың тапқаның айта кеткен жөн.

Алайда дифференциалдық группOIDтар осы шарттарға бағынбайды және осы жұмыста дифференциалдық группOIDтардың тәуелсіз базисті квазикөпбейнелерің зерртеуі жалғастырылған. Негізгі нәтиже дифференциалдық группOIDтардың w -тәуелсіз базисті квазитепетендіктері бар квазикөпбейнелер континуумың құру болып табылады.

Түйін сөздер: квазитепетендіктер, квазикөпбейнелер, квазитепетендіктердің базистері, квазитепетендіктердің тәуелсіз базистері, дифференциалды группOIDтар.

w -independent quasi-equational basis of differential groupoids

Basheeva A.O., doctoral student, L.N. Gumilev Eurasian National University,
Astana, Kazakhstan, +77075542275, E-mail: basheeva@mail.ru

The search for the solutions of the finite basis problem was and still is under the influence of the problem of Alfred Tarski (Tarski, 1966: 275–288), who asked in 1966: if there is exists an algorithm for deciding whether the quasi-equational theory of a finite set of finite algebras which is assumed additionally to be equational, is finitely based. Tarski's problem has been solved in the negative by Ralph McKenzie (McKenzie, 1996: 49–104). The negative solution of Tarski's problem actually makes the finite basis problem more interesting and worthy of continued effort. If Tarski's problem had had a positive solution, the status of the finite basis problem would be totally different. It would probably still exist, however, the main stream of the scientific effort would go toward improving the known algorithms and classifying their complexity. However, the main stream of the scientific effort would go toward improving the known algorithms and classifying their complexity. We want to stress that the analogue of Tarski's problem for the quasi-equational theories that are not equational is unsolved. There is, however, a common believe that it will also have a negative answer. It has been established at the end of the 1990-ties by a number of researchers marvelous proof for the negative solution of Tarski's problem cannot be easily modified for quasi-equational theories. So today independent bases of quasiidentities have been found for many classes of algebras and models. We will note that recently in work (Kravchenko, 2017c) has found the general and sufficient condition for existence of a continuum of quasivarieties without independent basis of quasiidentities, but with w - independent bases of quasiidentities. However differential groupoids aren't satisfied to these conditions and in this work we continued to study the an independent quasiequational basis of quasivarieties of differential groupoids. The main result is exists a continuum of quasivarieties of differential groupoid which have w - independent basis of quasiidentities.

Key words: quasiidentity, quasivariety, quasi-equational bases, independent quasi-equational bases, differential groupoids.

1 Введение

Изучение базисов квазитождеств алгебраических систем - одна из центральных задач теории многообразий и квазимногообразий. Одной из целей этого направления является исследование базисов тождеств и базисов квазитождеств в различных классах алгебраических систем. Вопрос о конечности базисов квазитождеств играет особую роль при изучении квазиэквациональной теории для конкретных классов алгебр. Так, впервые интерес к вопросу о существовании независимого базиса квазитождеств для алгебраических систем, не имеющих конечного базиса квазитождеств, был поднят в работах А. И. Мальцева (Maltsev 1967: 1005–1014). Первый пример многообразия универсальных алгебр, не имеющих независимого базиса квазитождеств, был указан в работе А. Тарского (Tarski, 1966: 275–288). Пример квазимногообразия с двумя унарными операциями, которые не имеют независимого базиса квазитождеств, но имеют ω -независимый базис квазитождеств был построен В. А. Горбуновым (Gorbunov, 1977: 340–369). Им же была найдена конечная унарная алгебра, которая не имеет ω -независимого базиса квазитождеств и, следовательно, независимого базиса квазитождеств (Gorbunov, 1999: 331).

В настоящей работе продолжено изучение независимой базисуемости квазимногообразий. Объектом исследования является квазимногообразие дифференциальных группоидов, а предметом исследования являются независимые базисы квазитождеств. Основным результатом является построение континуума квазимногообразий дифференциальных группоидов, которые имеют ω -независимый базис квазитождеств, но не имеют независимый базис квазитождеств. Отметим, что этот результат был получен также в работе (Kravchenko, 2017b). Здесь мы приводим его независимое доказательство и используем некоторые идеи из работ (Basheyeva, 2017: 252–263), (Gorbunov, 1999: 320–321). Приведенное в данной работе доказательство является более общим результатом. Так как рассматриваемое здесь множество квазимногообразий является строгим надмножеством множества квазимногообразий приведенных в работе (Kravchenko, 2017b).

2 Обзор литературы

Вопросы теории многообразий и квазимногообразий привлекают внимание многих математиков, в виду ее тесной связи с теорией решеток, теорией моделей, алгебраической логикой и Computer Science. Ее основы были заложены А.И. Мальцевым (Мальцев, 1939: 187–189), (Мальцев, 1968: 217–231), (Maltsev, 1970). Именно им было установлено, что понятие квазимногообразия тесно связано с теорией определяющих соотношений и что среди аксиоматизируемых классов алгебр полной теорией определяющих соотношений обладают только квазимногообразия. Смотрите также работы Д. М. Смирнова (Смирнов, 1969: 1144–1160), (Смирнов, 1972: 61–75), (Smirnov, 1977: 745–751). Заслуживают отдельного внимания, результаты о конечной базисуемости квазимногообразий, полученные в работах (Nurakunov, 1995:), (Румянцев, 1975: 130–142), (Sapir, 1980: 73–88), (Sapir, 1985: 172–180) и (Bestsenyi, 1989: 493–512). Следует отметить и результаты о независимой базисуемости полученные для квазимногообразий групп, в работах А. И. Будкина (Будкин, 1982: 817–826), (Budkin, 1986: 249–266), (Budkin, 1991: 125–153).

Независимые базисы квазитождеств были найдены для многих классов алгебр и моделей. Например А.Н. Федоров (Федоров, 1986: 590–597) доказал, что свободная 2-нильпотентная группа ранга $n \geq 2$ не имеет независимого базиса квазитождеств относительно класса групп без кручения. Н.Я. Медведев (Медведев, 1985: 111–117) показал, что множество квазимногообразий разрешимых групп, не имеющих независимого базиса квазитождеств относительно класса групп без кручения, имеет мощность континуума. Интересный результат был получен В.И. Тумановым (Туманов, 1984: 811–815), который показал, что любую конечную решетку можно вложить в конечную решетку, не имеющую независимого базиса квазитождеств. Тот факт, что многие вопросы теории квазимногообразий находят свое наиболее естественное выражение в рамках теории определяющих соотношений был показан Горбуновым. Им же было установлено, что любая двухэлементная алгебра имеет конечный базис квазитождеств. В других не менее ценных исследованиях нашло отражение следующее его утверждение (Горбунов, 1977: 507–548):

Предложение 1 *Существует квазимногообразие $\mathbf{K}$ унарных алгебр такое, что*

- (a) *в решетке подквазимногообразий $L_q(\mathbf{K})$ есть 2^ω элементов, не имеющих покрытий (и, следовательно, независимого базиса квазитождеств),*

(б) среди них есть 2^ω квазимногообразий, имеющих ω -независимый базис квазитождеств.

Позднее аналогичный результат о существовании континуума квазимногообразий унарных, не имеющих независимого базиса квазитождеств доказал (Карташов, 1980: 173–193), для конечных псевдо-Булевых и топологических алгебр было показано Тропиным М.П. (Tropin, 1988: 79–99), для ориентированных графов С. В. Сизым (Sizyi, 1994: 783–794), в случае унарных алгебр специального вида (Кравченко, 2016: 388–394), в случае дифференциальных группоидов и точечных абелевых групп (Basheyeva, 2017: 252–263), в случае (неориентированных) графов (без петель) в работе (Kravchenko, 2017a), для антимногообразий унарных (Карташов, 2011: 521–532), для многообразия точечных абелевых групп и для квазимногообразий ориентированных графов, содержащих недвудольные графы, в работе (Kravchenko, 2017b). На сегодняшний день в работе (Kravchenko, 2017c) было найдено общее и достаточное условие для существования континуума квазимногообразий с отмеченными выше свойствами, однако дифференциальные группоиды этим условиям не подчиняются. Недавно получены результаты о существовании 2^ω многообразия дифференциальных группоидов и некоторого квазимногообразия унарных алгебр с двумя операциями, имеющих ω -независимый базис квазитождеств в работе (Kravchenko, 2017b), здесь мы показываем его независимое доказательство.

3 Материал и методы

Напомним некоторые основные определения и общепринятые обозначения из теории квазимногообразий. Все определения, не вошедшие сюда, можно найти в монографии В. А. Горбунова (Горбунов, 1999).

Пусть $P = \{p_0, p_1, \dots, p_n, \dots\}$ — множество простых чисел, упорядоченное по возрастанию, а $\mathcal{P}_{fin}(X)$ — множество конечных подмножеств множества X . Множество натуральных чисел мы обозначаем через ω . Для любого непустого конечного множества $F \subseteq \omega$ полагаем $[F] = \prod_{i \in F} p_i$. Пусть также $[\emptyset] = 1$.

Предложение φ сигнатуры σ называется *квазитождеством*, если оно эквивалентно предложению вида $\forall x_1 \dots x_n \ \&_{i < k} p_i(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow p(x_1, \dots, x_n)$ для некоторых атомарных формул $p_i(x_1, \dots, x_n)$, ..., $p_{k_1}(x_1, \dots, x_n)$ и $p(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры σ (Мальцев, 1970: 189). Пусть $\mathbf{K}_0$ — класс алгебраических систем произвольной фиксированной сигнатуры σ . Класс $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}_0$ называется *$\mathbf{K}_0$ -квазимногообразием*, если существует множество квазитождеств Σ сигнатуры σ , такое что класс $\mathbf{K}$ совпадает с множеством всех систем из $\mathbf{K}_0$, на которых истинны все квазитождества из Σ , т.е. $\mathbf{K} = \text{Mod}(\Sigma) \cap \mathbf{K}_0 = \{\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0 \mid \mathcal{A} \models \Sigma\}$. В этом случае множество квазитождеств Σ называется *базисом квазитождеств* класса $\mathbf{K}$ *относительно* $\mathbf{K}_0$. Базис квазитождеств Σ класса $\mathbf{K}$ относительно класса $\mathbf{K}_0$ называется *независимым*, если $\mathbf{K} \neq \text{Mod}(\Sigma \setminus \{\varphi\}) \cap \mathbf{K}_0$ для любого $\varphi \in \Sigma$. Другими словами, базис квазитождеств Σ класса $\mathbf{K}$ относительно класса $\mathbf{K}_0$ является независимым, если для любого $\varphi \in \Sigma$ существует алгебраическая система $\mathcal{A} \in \mathbf{K}_0$ такая, что $\mathcal{A} \models \Sigma \setminus \{\varphi\}$ и $\mathcal{A} \models \neg \varphi$. Базис квазитождеств Σ класса $\mathbf{K}$ относительно класса $\mathbf{K}_0$ называется *ω -независимым*, если $\Sigma = \bigcup_{n < \omega} \Sigma_n$, где $\Sigma_n \cap \Sigma_m = \emptyset$ для любых различных $m, n < \omega$, и $\mathbf{K} \neq \text{Mod}(\Sigma \setminus \Sigma_n) \cap \mathbf{K}_0$ для любого $n < \omega$ (Горбунов, 1999: 320).

Предложение 2 (Горбунов, 1999: 319, предложение 6.3.1) Пусть $\mathbf{K}$ — произвольное квазимногообразие и $\mathbf{K}_0$ — его собственное подквазимногообразие. Если $\mathbf{K}_0$ имеет бесконечный независимый базис квазитожеств относительно $\mathbf{K}$, то для любого квазимногообразия $\mathbf{K}_1 \in \text{Lq}(\mathbf{K})$, содержащего $\mathbf{K}_0$ и конечно аксиоматизируемого относительно $\mathbf{K}$, число покрытий $\mathbf{K}_0$ в $\text{Lq}(\mathbf{K}_1)$ бесконечно.

Приведем теперь вспомогательные утверждения, которыми мы будем пользоваться при доказательстве основного результата, касающиеся дифференциальных алгебр. Строение дифференциальных группоидов и их многообразий изучались в работах А. Рамоновской (Romanowska, 1987: 277-290), (Romanowska, 1988: 943-960), (Romanowska, 1989: 7-15).

Алгебра $\mathbf{A} = \langle A; \cdot \rangle$ с одной бинарной операцией $\cdot$, удовлетворяющая следующим тождествам:

$$\begin{aligned}x \cdot x &= x; \\(x \cdot y) \cdot (z \cdot t) &= (x \cdot z) \cdot (y \cdot t); \\x \cdot (x \cdot y) &= x\end{aligned}$$

называется *дифференциальным группоидом* (Romanowska 1987: 277–290).

Рассмотрим группоид $\mathcal{D}_n = \langle D_n, \cdot \rangle$, где $D_n = \{0, 1, \dots, n-1, \infty\}$, а бинарная операция $\cdot$ определяется следующим образом. Для любых $i, j \in D_n$ имеют место равенства:

$$\begin{aligned}i \cdot j &= i, \quad \text{если } j \neq \infty; \\i \cdot \infty &= i + 1, \quad \text{при } i \neq \infty, i \neq n-1; \\(n-1) \cdot \infty &= 0; \\\infty \cdot \infty &= \infty.\end{aligned}$$

Например, $\mathcal{D}_4 = \langle \{0, 1, 2, 3, \infty\}, \cdot \rangle$ и

$$\begin{aligned}0 \cdot 0 &= 0 \cdot 1 = 0 \cdot 2 = 0 \cdot 3 = 0; \\1 \cdot 0 &= 1 \cdot 1 = 1 \cdot 2 = 1 \cdot 3 = 1; \\2 \cdot 0 &= 2 \cdot 1 = 2 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 2; \\3 \cdot 0 &= 3 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 3 \cdot 3 = 3; \\0 \cdot \infty &= 1, \quad 1 \cdot \infty = 2, \quad 2 \cdot \infty = 3, \quad 3 \cdot \infty = 0; \\\infty \cdot 0 &= \infty \cdot 1 = \infty \cdot 2 = \infty \cdot 3 = \infty \cdot \infty = \infty.\end{aligned}$$

Лемма 1 $\mathcal{D}_n$ является дифференциальным группоидом для любого $n \in \omega$.

Доказательство леммы 1. Нетрудно видеть, что для любого $i \in D_n$ имеет место равенство $i \cdot i = i$. Таким образом, первое тождество из определения дифференциального группоида выполняется в $\mathcal{D}_n$. Далее, проверим второе тождество. Пусть $i, j, k, m \in D_n \setminus \{\infty\}$. Тогда $(i \cdot j) \cdot (k \cdot m) = i \cdot k = i$ и $(i \cdot k) \cdot (j \cdot m) = i \cdot k = i \cdot j = i$, то есть, $(i \cdot j) \cdot (k \cdot m) = (i \cdot k) \cdot (j \cdot m)$ для всех $i, j, k, m \in D_n \setminus \{\infty\}$. Так как $\infty \cdot i = \infty$ для любого $i \in D_n$, то $(\infty \cdot i) \cdot (j \cdot k) = \infty = (\infty \cdot j) \cdot (i \cdot k)$ для всех $i, j, k \in D_n$. Далее, если

$i \cdot \infty = i + 1$, то $(i \cdot \infty) \cdot (j \cdot k) = (i + 1) \cdot j = i + 1$ и $(i \cdot j) \cdot (\infty \cdot k) = i \cdot \infty = i + 1$. Значит, $(i \cdot j) \cdot (k \cdot m) = (i \cdot k) \cdot (j \cdot m)$ для всех $i, j, k, m \in D_n$, то есть второе тождество также выполняется в $\mathcal{D}_n$. Проверим третье тождество. Пусть $i, j \in D_n \setminus \{\infty\}$. Тогда $i \cdot j = i$. Значит, $i \cdot (i \cdot j) = i \cdot i = i$. Далее, так как $i \cdot \infty = i + 1$, то $i \cdot (i \cdot \infty) = i \cdot (i + 1) = i$. Таким образом, $i \cdot (i \cdot j) = i$ для всех $i, j \in D_n$, то есть третье тождество выполняется в $\mathcal{D}_n$. Следовательно, $\mathcal{D}_n$ есть дифференциальный группоид. Лемма 1 доказана.

Нетрудно видеть, что $\mathcal{D}_n$ порождается двумя элементами: элементом ∞ и любым элементом из множества $\{0, \dots, n - 1\} \subseteq D_n$. Который образует цикл длины n .

Лемма 2 (*Basheyeva, 2017: 257, lemma 3.6*) Пусть $n > 0$ целое число, пусть $\mathcal{D} \in \mathbf{K}$, и пусть $ab^n = a$, $ba = b$ для некоторых элементов $a, b \in D$. Тогда подструктура $\mathcal{D}$, порожденная элементами a и b , изоморфна $\mathcal{D}_k$ для некоторого натурального k , делящего n .

Доказательство леммы 2. Покажем, что $ab^i \cdot ab^j = ab^i$ и $b \cdot ab^i = b$ для любого $i, j < \omega$. Считаем при этом, что $ab^0 = a$. Допустим, что $j \leq i$. Проведем индукцию по i . Если $i = 0$, то $j = 0$, и по нашему предположению получим $ab^0 \cdot ab^0 = a \cdot a = a = ab^0$ и $b \cdot ab^0 = b \cdot a = b$.

Предположим теперь, что $i > 0$ и что для $i - 1$ требуемое утверждение имеет место. Доказательство ведем индукцией по j . Применив определение дифференциального группоида, получим

$$ab^i \cdot ab^0 = (ab^{i-1} \cdot b) \cdot (a \cdot a).$$

Используя второе тождество дифференциального группоида, получаем

$$(ab^{i-1} \cdot a) \cdot (b \cdot a) = ab^{i-1} \cdot b = ab^i;$$

Далее, согласно индукционным предположениям, имеем:

$$ab^i \cdot ab^j = (ab^{i-1} \cdot b) \cdot (ab^{j-1} \cdot b) = (ab^{i-1} \cdot ab^{j-1}) \cdot (b \cdot b) = ab^{i-1} \cdot b = ab^i;$$

$$b \cdot ab^i = (b \cdot b) \cdot (ab^{i-1} \cdot b) = (b \cdot ab^{i-1}) \cdot (b \cdot b) = b \cdot b = b,$$

что доказывает требуемое утверждение в случае $j \leq i$.

Если $j > i$, то найдется целое положительное число p такое, что $j \leq i + pn$. Так как $ab^n = a$, то $ab^{pn} = a$. Значит $ab^i \cdot ab^j = ab^{i+pn} \cdot ab^j = ab^{i+pn} = ab^i$ согласно предыдущему случаю.

Нетрудно видеть что отображение $a \mapsto 0$, $b \mapsto \infty$ является изоморфным отображением подсистемы в $\mathcal{D}$, порожденной элементами a и b , на цикл $\mathcal{D}_k$ для некоторого $k < n$, делящего n . Лемма 2 доказана.

4 Результаты и обсуждение

Теорема 1 Существует континуум квазимногообразий дифференциальных группоидов, имеющих ω -независимый базис квазитожеств, но не имеющих независимого базиса квазитожеств относительно класса всех дифференциальных группоидов.

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $\mathbf{K}$ — многообразие всех дифференциальных группоидов, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ — множество простых чисел, упорядоченных по возрастанию, I — бесконечное подмножество P , такое что множество $J = P \setminus I$ бесконечно.

Пусть $\mathbf{K}_I$ — класс всех систем из $\mathbf{K}$, не содержащих в качестве подсистем циклов, длина которых делится на числа из множества J . Рассмотрим следующее квазитождество, обозначаемое нами через φ_n^k :

$$\forall x \forall y \quad xy^{kp_n} = x \ \& \ yx = y \longrightarrow xy^k = x,$$

где $k \geq 1$, $n \geq 0$ — фиксированные натуральные числа. Пусть

$$\Sigma_n = \{\varphi_n^k \mid k \geq 1\} \text{ для любого } n \in \omega,$$

$$\Sigma_I = \bigcup_{p_n \in J} \Sigma_n.$$

Утверждение 1 $\mathcal{D}_r \models \varphi_n^k$ тогда и только тогда, когда r делит k или r не делит kp_n .

Доказательство утверждения 1. Действительно, пусть $\mathcal{D}_r \models \varphi_n^k$. Это значит, что для произвольных элементов $a, b \in D_n$ мы имеем $ab^k = a$ либо $ab^{kp_n} \neq a$ или $ba \neq b$. В последнем случае, очевидно, $b \neq \infty$ и $a = \infty$, поэтому $ab^k = a$. Рассмотрим теперь случай, когда $b = \infty$. Если $ab^k = a$, то r делит k . Допустим, что $ab^k \neq a$. Так как $\mathcal{D}_r \models \varphi_n^k$, то $ab^{kp_n} \neq a$. Следовательно, r не делит kp_n . Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2 $\mathbf{K}_I = \mathbf{K} \cap \text{Mod} \Sigma_I$.

Доказательство утверждения 2. Согласно утверждению 1, $\mathcal{D}_r \models \Sigma_I$ тогда и только тогда, когда все простые делители числа r принадлежат множеству I . Следовательно, $\mathbf{K}_I = \mathbf{K} \cap \text{Mod}(\Sigma_I)$ в силу леммы 1. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3 Σ_I является ω -независимым базисом квазитождеств квазимногообразия $\mathbf{K}_I$ относительно $\mathbf{K}$.

Доказательство утверждения 3. Покажем, что

$$\mathbf{K}_I \neq \mathbf{K} \cap \text{Mod}(\Sigma_I \setminus \Sigma_n)$$

для всех $n \geq 0$. Согласно определению и утверждению 2, это и будет означать, что квазимногообразие $\mathbf{K}_I$ имеет ω -независимый базис квазитождеств. Рассмотрим цикл $\mathcal{D}_{p_n}$. Согласно утверждению 1, $\mathcal{D}_{p_n} \not\models \varphi_n^k$ для любого $k \geq 1$. Следовательно, из утверждения 2 мы получаем, что $\mathcal{D}_{p_n} \notin \mathbf{K}_I$.

Покажем, что $\mathcal{D}_{p_n} \models \varphi_m^k$ для любого $k \geq 1$ и любого $m \neq n$. Действительно, пусть посылка квазитождества φ_m^k выполняется на некоторых элементах $a, b \in D_{p_n}$. Это означает, что $ab^{kp_m} = a$ и $ba = b$. Отсюда следует, что $a \in \{0, \dots, kp_n - 1\} \subseteq D_{p_n}$ и $b = \infty$. Таким образом, элементы a и b порождают цикл $\mathcal{D}_{p_n}$. В силу леммы ?? это означает, что p_n делит kp_m . Поскольку $n \neq m$, мы получаем, что p_n делит k . Таким образом, $ab^k = a$, и на элементах a, b выполняется заключение квазитождества φ_m^k . Следовательно, $\mathcal{D}_{p_n} \in \mathbf{K} \cap \text{Mod}(\Sigma_I \setminus \Sigma_n)$, но $\mathcal{D}_{p_n} \notin \mathbf{K}_I$. Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4 Квазимногообразие $\mathbf{K}_I$ не имеет независимого базиса квазитождеств относительно $\mathbf{K}$.

Доказательство утверждения 4. Согласно предложению ??, достаточно показать, что для $\mathbf{K}_I$ не существует верхних покрытий в решетке квазимногообразий класса $\mathbf{K}$.

Предположим противное: допустим, что $\mathbf{K}_I \prec \mathbf{B}$ в решетке $Lq(\mathbf{K})$; пусть $\mathcal{A} \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{K}_I$. Это значит, что существуют натуральные числа $k \geq 1$ и $n \geq 0$, такие что $p_n \in J$ и $\mathcal{A} \not\models \varphi_n^k$. Другими словами, существуют элементы $a, b \in \mathcal{A}$, такие что $ab^{kp_n} = a$, $ba = b$, но $ab^k \neq a$. Согласно лемме ??, существует цикл $\mathcal{D}_r \leq \mathcal{A}$, порожденный элементами a и b , причем r делит kp_n . Поскольку $ab^k \neq a$, мы заключаем, что r не делит k . Это возможно только в том случае, когда p_n делит r .

Поскольку множество I бесконечно, найдется натуральное число $m \geq 0$, такое что $p_m \in I$ и kp_n не делится на p_m . Тогда $\mathcal{D}_{p_m} \in \mathbf{K}_I$ и $\mathcal{D}_{rp_m} \leq \mathcal{D}_r \times \mathcal{D}_{p_m} \in \mathbf{B}$. Следовательно, $\mathcal{D}_{rp_m} \in \mathbf{B}$. Кроме того, $\mathcal{D}_{rp_m} \notin \mathbf{K}_I$, поскольку p_n делит r , а значит и rp_m .

Полагаем $\mathbf{B}' = \mathbf{B} \cap Mod(\varphi_n^k)$. Очевидно, $\mathbf{K}_I \subseteq \mathbf{B}' \subset \mathbf{B}$, поскольку $\mathcal{D}_r \in \mathbf{B} \setminus \mathbf{B}'$. Согласно утверждению 1, имеем $\mathcal{D}_{rp_m} \models \varphi_n^k$, так как rp_m не делит kp_n , поскольку в противном случае p_m делило бы kp_m , что противоречило бы выбору p_m . Таким образом, $\mathcal{D}_{rp_m} \in \mathbf{B}' \setminus \mathbf{K}_I$, то есть имеют место строгие включения

$$\mathbf{K}_I \subset \mathbf{B}' \subset \mathbf{B},$$

что противоречит нашему предположению о том, что $\mathbf{K}_I \prec \mathbf{B}$. Утверждение 4 доказано.

Доказательство теоремы завершено.

Теорема 1 доказана.

5 Заключение

В настоящей работе продолжается изучение независимой базирруемости квазимногообразий алгебраических систем. Основным результатом является построение континуума квазимногообразий дифференциальных группоидов, которые имеют ω -независимый базис квазитождеств, но не имеют независимый базис квазитождеств. Этот результат был получен в работе (Kravchenko, 2017б), для многообразия дифференциальных группоидов и некоторого квазимногообразия унарных алгебр с двумя операциями. Здесь приводится его независимое доказательство, для многообразия дифференциальных группоидов.

6 Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своим научным консультантам А. М. Нуракунову и М. В. Швидефски за постановку задач и всестороннюю поддержку.

Список литературы

- [1] Basheyeva A., Nurakunov A., Schwidefsky M., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. III //Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2017. — vol. 14. — P. 252–263.
- [2] Belkin, V.P. Some lattices of quasivarieties of algebras //Algebra and logic. — 1976. —vol. 5. — P. 7–13.

- [3] Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasivarieties of generalized solvable groups //Algebra and Logic. — 1986. — vol. 25, no.3.— P. 155–166.
- [4] Budkin A.I. Independent axiomatizability of quasivarieties of soluble groups //Algebra and Logic. —1991. — vol. 30, No.2.— P. 81–100.
- [5] Bestsenyi I.P. Quasivarieties of finite unary algebras //Algebra and Logic. —1989. — vol. 28, No.5. — P. 327–340.
- [6] Gorbunov V.A. Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability //Algebra and Logic — 1977. — vol. 16, no. 5. — P.340–369.
- [7] Gorbunov, V.A. Algebraic Theory of Quasivarieties.— New York:Plenum, 1998. — p.
- [8] Kartashov V.K. Quasivarieties of unary algebras with a finite number of cycles //Algebra and Logic — 1980. — vol. 19 — P.106–120.
- [9] Kartashova, A.V. Antivarieties of unars //Algebra and Logic —2011. — vol.50. — P.357–364
- [10] Kravchenko A.V. Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II //Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2016. — vol. 13. — P. 388–394.
- [11] Kravchenko A.V., Yakovlev A.V. Quasivarieties of graphs and independent axiomatizability //manuscript, 2017.
- [12] Kravchenko A.V., Nurakunov A.M., Schwedfsky M.V. On quasi-equational bases for differential groupoids and unary algebras //manuscript, 2017.
- [13] Kravchenko A.V., Nurakunov A.M., Schwedfsky M.V. Complexity of quasivariety lattices. I. Covers and independent axiomatizability //manuscript, 2017.
- [14] McKenzie R. Tarski's finite basis problem is undecidable //International Journal of Algebra and Computation. V. —1996. vol.6, P. 49–104.
- [15] Maltsev A.I. Universally axiomatizable subclasses of locally finite classes of models //Siberian Math. J. — 1967. vol.8, no. 5. — P.764–770.
- [16] Maltsev A.I. Algebraic Systems. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973. — p.
- [17] Nurakunov A.M. Quasi-identities of relatively distributive and relatively cocontinuous quasivarieties of algebras. — Darmstadt: Arbeitstangung Allgemeine Algebra, 1995.
- [18] Romanowska A. and Roszkowska B. On some groupoid models //Demonstr. Math. — 1987. vol. 20, No. 1-2 — P.277–290.
- [19] Romanowska A. On some representations of groupoid models satisfying the reduction law //Demonstr. Math. — 1988. vol. 21, No. 4. — P.277–290.
- [20] Romanowska A. and Roszkowska B. Representation of n -cyclic groupoids //Algebra Universalis — 1989. vol.26, No. 1— P.7–15.
- [21] Sapir M.V. On the quasivarieties generated by finite semigroups //Semigroup Forum — 1980. vol.20. — P.73–88.
- [22] Sapir M.V. The lattice of quasivarieties of semigroups //Algebra Universalis — 1985. vol.21. — P.172–180.
- [23] Sizyi S.V. Quasivarieties of graphs //Siberian Math. J. — 1994. vol.35. — P.783–794.
- [24] Smirnov D.M. Varieties and quasivarieties of algebras //Colloquia Math. Soc. J. — 1977. vol. 29. — P.745–751.
- [25] Tarski A. Equational logic and equational theories of algebras //Contrib. Math. Logic — 1966. vol. 8, — P.275–288.
- [26] Tropin M.P. Finite pseudo-Boolean and topological algebras not having an independent basis of quasiidentities //Algebra and Logic, — 1988. vol.27, No.1 , — P.79–99.
- [27] Будкин А.И. Независимая аксиоматизируемость квазимногообразий групп //Мат. заметки — 1982. — Т. 31, No. 6. — С.817–826.
- [28] Мальцев А.И. О включении ассоциативных систем в группы //Мат. сборник — 1939. Т. 6, 2. — С.187–189.
- [29] Мальцев А.И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики //Труды конгресса математиков, Москва (1966), М.Мир, — 1968. — С.217–231.

- [30] Медведев Н.Я. О квазимногообразиях l -групп и групп // Сиб.мат.журн. — 1985. Т. 26. — С.111–117.
- [31] Румянцев А.К. Независимые базисы для квазитождеств свободной канторвой алгебры // Мат.сб. — 1975. Т. 98, №1(9) — С.130–142.
- [32] Смирнов Д.М. Решетки многообразий и свободные алгебры // Сиб. мат. журн. — 1969. Т. 10. — С.1144–1160.
- [33] Смирнов Д.М. Канторовы алгебры с одним порождающим. I // Алгебра и логика — 1972. Т. 10. — С.61–75.
- [34] Туманов В.И. Конечные решетки с независимыми базисами квазитождеств // Мат. заметки, — 1984. Т. 36 — С.811–815.
- [35] Федоров А.Н. Квазитождества свободной 2-нильпотентной группы // Мат.заметки, — 1986. Т. 40 — С.590–597.

References

- [1] Basheyeva, Ainur, and Nurakunov Anvar, and Schwedfsky Marina, and Zamojska-Dzienio Anna. "Lattices of subclasses. III." *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 14 (2017): 252–263.
- [2] Belkin, Valerij. "Some lattices of quasivarieties of algebras." *Algebra and logic*. 5 (1976): 7–13.
- [3] Budkin, Aleksandr. "Independent axiomatizability of quasivarieties of generalized solvable groups." *Algebra and Logic*. 25 (1986): 155–166.
- [4] Budkin, Aleksandr. "Independent axiomatizability of quasivarieties of soluble groups." *Algebra and Logic*. 30 (1991): 81–100.
- [5] Bestsenyi, Igorj. "Quasiidentities of finite unary algebras." *Algebra and Logic*. 28 (1989): 327–340.
- [6] Gorbunov, Viktor. "Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability." *Algebra and Logic*. 16 (1977): 340–369.
- [7] Gorbunov, Viktor. *Algebraic Theory of Quasivarieties*. New York: Plenum, 1998.
- [8] Kartashov, Vladimir. "Quasivarieties of unary algebras with a finite number of cycles." *Algebra and Logic*. 19 (1980): 106–120.
- [9] Kartashova, Anna. "Antivarieties of unars." *Algebra and Logic*. 50 (2011): 357–364.
- [10] Kravchenko, Aleksandr. "Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II." *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 13 (2016): 388–394.
- [11] Kravchenko, Aleksandr, and Anvar Nurakunov, and Marina Schwedfsky. "On quasi-equational bases for differential groupoids and unary algebras." *manuscript*, 2017.
- [12] Kravchenko, Aleksandr, and Anvar Nurakunov, and Marina Schwedfsky. "Complexity of quasivariety lattices. I. Covers and independent axiomatizability." *manuscript*, 2017.
- [13] Kravchenko, Aleksandr, and Aleksandr Yakovlev. "Quasivarieties of graphs and independent axiomatizability." *manuscript*, 2017.
- [14] McKenzie Rudolf. "Tarski's finite basis problem is undecidable." *International Journal of Algebra and Computation*. V. —1996. vol.6, P. 49-104.
- [15] Maltsev, Anatolij. "Universally axiomatizable subclasses of locally finite classes of models." *Siberian Math. J.* 8 (1967): 764–770.
- [16] Maltsev, Anatolij. *Algebraic Systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.
- [17] Nurakunov, Anvar. *Quasi-identities of relatively distributive and relatively cocontinuous quasivarieties of algebras*. Darmstadt: Arbeitstangung Allgemeine Algebra, 1995.
- [18] Romanowska, Anna. and Barbara Roszkowska. "On some groupoid models." *Demonstr. Math.* — 1987. vol. 20, No. 1-2 — P.277–290.

-
- [19] Romanowska, Anna. "On some representations of groupoid models satisfying the reduction law." *Demonstr. Math.* — 1988. vol. 21, No. 4. — P.277–290.
- [20] Romanowska, Anna. and Barbara Roszkowska. "Representation of n -cyclic groupoids." *Algebra Universalis* — 1989. vol. 26, No. 1— P.7–15.
- [21] Sapir, Mark. "On the quasivarieties generated by finite semigroups." *Semigroup Forum*. 20 (1980): 73–88.
- [22] Sapir, Mark. "The lattice of quasivarieties of semigroups." *Algebra Universalis*. 21 (1985): 172–180.
- [23] Sizi, Sergei. "Quasivarieties of graphs." *Siberian Math. J.* 35 (1994): 783–794.
- [24] Smirnov, Dmitriy. "Varieties and quasivarieties of algebras." *Colloquia Math. Soc. J.* 29 (1977): 745–751.
- [25] Tarski, Alfred. "Equational logic and equational theories of algebras." *Contrib. Math. Logic*. 8 (1966): 275–288.
- [26] Tropin, Mihail. "Finite pseudo-Boolean and topological algebras not having an independent basis of quasiidentities." *Algebra and Logic*. 27 (1988): 79–99.
- [27] Budkin, A.I. (1982). Nezavisimaya aksiomatiziruemost kvazimnogoobrazij grupp [Independent axiomatizability of quasivarieties of group]. *Mat. zametki - math. notes*, vol. 31, no.6, pp.817–826.
- [28] Maltsev A.I. (1939) O vkluchenii assosiativnykh sistem v gruppy [About including of associative systems in groups]. *Mat. sbornik - Math. collection*, vol. 6, no. 2, pp.187–189.
- [29] Maltsev A.I. (1968) O nekotorykh pogranychnikh voprosakh algebry i matematicheskoi logiki [About some boundary questions of algebra and Mathematical logic]. *Trudy kongressa matematikov - works of mathematic congress* (Moskva, 1966), M.: Mir, pp.217–231.
- [30] Medvedev N.Y. (1985) O kvazimnogoobraznykh l -grupp i grupp [about quasivarieties of l -group and group]. *Sib. Mat. J.* - *Sib. Math. J.* vol. 26, pp. 111–117.
- [31] Rumyansev A.K. (1975) Nezavisimyye bazisy dlya kvazitozhdestv svobodnoi kantorovoi algebry [Independent basis for quasiidentities of free kantor algebra]. *Mat.sbornik. - Math. collection*, vol. 98, pp. 130–142.
- [32] Smirnov, D.M. (1969). Reshetki mnogoobrazij i svobodnye algebry [Varieties of lattices and free algebras]. *Sib. Mat. Zh.* - *Sib. Math. J.*, vol. 10, pp. 1144–1160.
- [33] Smirnov, D.M. (1972). Kantorovy algebry s odnim porozhdayushchim [Cantor algebras with one generating. I]. *Algebra and Logic*, vol. 10, pp. 61–75.
- [34] Tumanov V.I. (1984) Konechnye reshetki s nezavisimymi basisami kvazitozhdestv [Finite lattice with independent quasi-equational bases] *Mat. zametki - Math. notes*, vol.36 : 811–815.
- [35] Fedorov A.N. (1986) Kvazitozhdestva svobodnoi 2-nilpotentnoi gruppy [quasiidentities of free 2-nilpotent group] *Mat. zametki - Math. notes*, vol. 40, pp. 590–597.

ГРНТИ 510.67

О йонсоновских парах абелевых групп в обогащённом языке

Ешкеев А.Р., д.ф.-м.н, профессор, заведующий кафедрой, Карагандинский государственный университет имени Е.А. Букетова, г. Караганды, Республика Казахстан, +77479050409, E-mail: aibat.kz@gmail.com
 Касыметова М.Т., старший преподаватель, Карагандинский государственный университет имени Е.А. Букетова, г. Караганды, Республика Казахстан, +77013667609, E-mail: mairushaasd@mail.ru
 Ульбрихт О.И., старший преподаватель, Карагандинский государственный университет имени Е.А. Букетова, г. Караганды, Республика Казахстан, +77015231029, E-mail: ulbrikht@mail.ru

Данная статья посвящена изучению теоретико-модельных вопросов абелевых групп в рамках исследования йонсоновских теорий. Действительно, в работе показано, что абелевы группы с дополнительным условием выделенного предиката удовлетворяют условиям йонсоновости, а также совершенности в смысле йонсоновской теории. Мы можем заметить, что классические примеры из алгебры такие, как поля фиксированной характеристики, группы, абелевы группы, различные классы колец, булевы алгебры, полигоны являются примерами алгебр, теории которых удовлетворяют условиям йонсоновости. Условия йонсоновости определены очень естественно. Это свойство амальгамы и свойства совместного вложения, а также индуктивность рассматриваемой теории. Изучение теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий в классе абелевых групп является весьма актуальной задачей как в самой теории моделей, так и в универсальной алгебре. Йонсоновские теории образуют достаточно широкий подкласс класса всех индуктивных теорий. Но рассматриваемые йонсоновские теории, вообще говоря, не являются полными. Классическая теория моделей в основном имеет дело с полными теориями, а в случае изучения йонсоновских теорий существует дефицит технического аппарата, который в данное время развит для изучения теоретико-модельных свойств полных теорий. Поэтому нахождение аналогов такой техники для изучения йонсоновских теорий, имеет практическую значимость в данной теме исследования. В данной работе была расширена сигнатура на один одноместный предикат. Элементы, реализующие этот предикат, образуют экзистенциально-замкнутую подмодель некоторой модели рассматриваемой йонсоновской теории. В результате мы имеем йонсоновское обобщение известного вопроса об элементарных парах для полных теорий. В данной статье получен аналог теоремы В. Шмелёвой об элементарной классификации абелевых групп, а также аналог свойства Шрёдера-Бернштейна для йонсоновских пар теории абелевых групп. Полученные результаты показывают тесную связь теоретико-модельных свойств йонсоновской пары с теоретико-модельными свойствами центра рассматриваемой йонсоновской теории.

Ключевые слова: йонсоновская теория, модельный компаньон, экзистенциально-замкнутая модель, совершенность, косемантичесность, йонсоновский спектр, йонсоновская пара.

Байытылған тілдегі абельдік группалардың йонсондық қосарлары жайында

Ешкеев А.Р., ф.-м.ғ.д., профессор, кафедра меңгерушісі, Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қарағанды қ., Қазақстан Республикасы, +77479050409, E-mail: aibat.kz@gmail.com
 Касыметова М.Т., аға оқытушы, Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қарағанды қ., Қазақстан Республикасы, +77013667609, E-mail: mairushaasd@mail.ru
 Ульбрихт О.И., аға оқытушы, Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, Қарағанды қ., Қазақстан Республикасы, +77015231029, E-mail: ulbrikht@mail.ru

Бұл мақала йонсондық теорияларды зерттеу аясында абельдік группалардың модельді-теоретикалық сұрақтарын зерттеуге арналған. Жұмыста йонсондылық шартты абельдік группалардың белгіленген предикаттың қосымша шартын қанағаттандырады, сонымен қатар йонсондық теория мағынасында кемелділігі көрсетілген. Біз алгебрадан классикалық мысалдары болып келетін бекітілген сипаттамамен өрістер, группалар, абельдік группалар, сақинаның әртүрлі класстары, бульдік алгебра, полигондар алгебраның және йонсондық шартты қанағаттандыратын теорияның мысалдары болып табылады. Йонсонның шарттары өте табиғи түрде анықталады. Бұл амалға қасиеті және үйлесімді енгізілу қасиеті, сонымен қатар қарастырылып отырған теорияның индуктивтілігі. Йонсондық теорияның абельдік группалар класында модельді-теоретикалық қасиеттерін оқу модельдер теориясында және универсалды алгебрада өзекті мәселе болып табылады. Йонсондық теориялар барлық индуктивті теориялардың класстарының жеткілікті кең ішкі класын құрайды. Бірақ, қарастырып отырған йонсондық теориялар жалпы айтқанда толық емес болып табылады. Классикалық модельдер теориясы негізінен толық теориямен жұмыс жасайды, ал қазіргі уақытта толық теориялардың модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеу үшін дамыған, бірақ йонсондық теорияларды зерттеу барысында техникалық аппараттың жетіспеушілігі табылады. Сондықтан йонсондық теорияларды зерттеудің техникасы аналогын табу бұл зерттеу тақырыбында практикалық маңыздылығы бар. Осы предикатты құрайтын элементтер қарастырып отырған йонсондық теорияның кейбір модельдерінің экзистенциалды-тұйық ішкі моделін құрайды. Нәтижесінде біз толық теориялар үшін элементарлық қосарлары жайлы белгілі сұрақтың йонсондық жалпылауын аламыз. Бұл мақалада абельдік группалардың элементарлық классификациясы жайлы В. Шмелёваның теоремасының аналогы және абельдік группалардың теорияларының йонсондық қосарлары үшін Шрёдер-Бернштейн қасиетінің аналогы алынды. Алынған нәтижелер йонсондық қосарлардың модельді-теоретикалық қасиеттерінің қарастырып отырған йонсондық теорияның центрінің модельді-теоретикалық қасиеттерімен тығыз байланысын көрсетеді.

Түйін сөздер: йонсондық теория, модельді компаньон, экзистенциалды-тұйық модель, кемелділік, косеанттылық, йонсондық спектр, йонсондық қосар.

On the Jonsson pairs of Abelian groups in the enriched language

Yeshkeyev A.R., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department, Buketov Karaganda State University, Karaganda, Republic of Kazakhstan, +77479050409, E-mail: aibat.kz@gmail.com

Kassymetova M.T., Senior lecturer, Buketov Karaganda State University, Karaganda, Republic of Kazakhstan, +77013667609, E-mail: mairushaasd@mail.ru

Ulbricht O.I., Senior lecturer, Buketov Karaganda State University, Karaganda, Republic of Kazakhstan, +77015231029, E-mail: ulbricht@mail.ru

This paper is devoted to the study of model-theoretic questions of abelian groups in the framework of the study of Jonsson theories. Indeed, the paper shows that Abelian groups with the additional condition of the distinguished predicate satisfy the conditions of Jonssonness and also the perfectness in the sense of the Jonsson theory. We can see that classical examples from algebra such as fields of fixed characteristic, groups, abelian groups, different classes of rings, Boolean algebras, polygons are examples of algebras whose theories satisfy the conditions of Jonssonness. The conditions of Jonssonness are determined very naturally. This the amalgam property and the joint embedding properties, as well as the inductance of the theory under consideration. The study of the model-theoretic properties of the Jonsson theories in the class of abelian groups is a very urgent problem both in the Model Theory itself and in an universal algebra. The Jonsson theories form a rather wide subclass of the class of all inductive theories. But the Jonsson theories under consideration, in general, are not complete. The classical Model Theory mainly deals with complete theories and in the case of the study of Jonsson theories, there is a deficit of a technical apparatus, which at the present time is developed for studying the theoretical-model properties of complete theories. Therefore, the discovery of analogues of such a technique for the study of Jonsson theories has practical significance in this research topic. In this paper, the signature for one place predicate was extended. The elements realizing this predicate form an existentially closed submodel of some model of the Jonsson theory under consideration.

As a result, we have the Jonsson generalization of the well-known problem of elementary pairs for complete theories. In this paper we obtain an analogue of the theorem of W. Szemielew on the elementary classification of Abelian groups, and also an analog of the Schröder-Bernstein property for the Jonsson pairs of the theory of Abelian groups. The results obtained show a close connection between the theoretical-model properties of the Jonsson pair and the model-theoretic properties of the center of the Johnson theory under consideration. **Key words:** Jonsson theory, model companion, existentially closed model, perfectness, cosemanticness, Jonsson pair.

1 Введение

Настоящая статья связана с изучением некоторых теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий в классе абелевых групп. Класс йонсоновских теорий достаточно широк и он является естественным подклассом класса всех индуктивных теорий. Определение йонсоновской теории вполне естественно. Многие теории хорошо известных и классических алгебр являются по своей сути примерами йонсоновских теорий. К такому относятся примеры следующих алгебр: группы, абелевы группы, поля фиксированной характеристики, булевы алгебры, многие классы колец, полигоны. Как правило, рассматриваемые йонсоновские теории не являются полными и, так как классическая теория моделей в основном имеет дело с полными теориями, в случае изучения йонсоновских теорий существует дефицит технического аппарата, который соответственно в настоящий момент развит для изучения теоретико-модельных свойств полных теорий. Поэтому нахождение аналогов такой техники и, соответственно, понятий для изучения йонсоновских теорий, является весьма актуальной задачей.

В работе [1] была рассмотрена проблема, связанная с понятием косемантичности и свойства Шрёдера-Бернштейна для йонсоновской теории абелевых групп. Понятие косемантичности является обобщением понятия элементарной эквивалентности, которое используется как важный инструмент при изучении полных теорий. Свойство Шрёдера-Бернштейна также связано с моделями некоторой фиксированной полной теории. Т. е., как и свойство косемантичности, данное свойство является семантическим понятием, в отличие от свойств теории, которые мы относим к синтаксическим свойствам. В силу теоремы о полноте дуальность синтаксиса и семантики позволяет нам искать новые связи между теоретико-модельными свойствами теорий и их классов моделей. При этом в йонсоновском случае в силу неполноты напрямую использовать эту дуальность невозможно и в этом случае мы прибегаем к так называемому семантическому методу, суть которого заключается в «переброске» элементарных свойств первого порядка элементов центра йонсоновской теории на саму эту теорию. Оказалось, что теория абелевых групп является примером совершенной йонсоновской теории. В связи с этим удалось найти критерий косемантичности абелевых групп [1] и йонсоновский аналог свойства Шрёдера-Бернштейна.

Заметим, каким образом, исследование йонсоновских теорий принципиально отличается от исследования полных теорий. Классификация фиксированной полной теории и её класса моделей относительно некоторых синтаксических и семантических условий является одной из важнейших задач классической теории моделей. В самой теории моделей, как замечено в обзорной статье Х. Дж. Кейслера «Основы теории моделей» в справочной книге под ред. Дж. Барвайса [2], исторически сложилось два направления. В [2] их называют «западной» и «восточной» теорией моделей, эти названия условны,

они связаны с географическим местом проживания основоположников теории моделей. А.Робинсон жил на восточном побережье США, а А.Тарский жил на западном.

«Западная» теория моделей развивается в традициях Скулема и Тарского. Она в большей степени мотивировалась проблемами в теории чисел, анализе и теории множеств, и в ней используются все формулы логики первого порядка. В частности, в качестве морфизмов в «западной» теории моделей рассматриваются различные типы элементарных морфизмов. «Восточная» теория моделей развивается в традициях Мальцева и Робинсона. Она мотивировалась проблемами в абстрактной алгебре, где формулы теорий обычно имеют самое большее два блока кванторов. Она делает ударение на множества бескванторных формул и экзистенциальных формул. В «восточной» теории моделей, как правило, в качестве морфизмов рассматриваются гомоморфизмы и изоморфизмы.

Таким образом, можно заметить, что имея дело с теоретико-модельной атрибутикой «восточной» теорией моделей, мы, как правило, имеем дело с неполными теориями и морфизмами между их моделями, которые максимум сохраняет свойства булевых комбинаций атомарных формул. В качестве моделей при изучении данного типа теорий, как правило, рассматривается некоторый подкласс класса всех моделей рассматриваемой теории, а именно, класс её экзистенциально замкнутых моделей.

В данной работе мы расширяем сигнатуру на одноместный предикат, суть которого заключается в том, что элементы, реализующие этот предикат, образуют экзистенциально-замкнутую подмодель некоторой модели рассматриваемой йонсоновской теории. Таким образом, можно говорить, что мы переходим к ситуации, когда рассматриваемая задача обобщает задачу об элементарных парах.

2 Обзор литературы

Йонсоновские теории удовлетворяют естественным условиям, таким, как индуктивность, свойство совместного вложения и амальгамы [2] (опр. 6.1, стр. 80). Т. Г. Мустафин в работе [3] обобщил йонсоновские теории и нашёл связь между полными теориями, йонсоновскими теориями и обобщёнными йонсоновскими теориями. В работе [4] Ешкеевым А.Р. было продолжено исследование йонсоновских теорий относительно различных теоретико-модельных свойств их компаньонов, в том числе и J -стабильности. В частности, в рамках изучения йонсоновских теорий было переопределено такое важное понятие, как форкинг, которое ранее было определено С.Шелахом [5] и является одним из основных средств современной техники теории моделей при классификации полных теорий. В дальнейшем Ешкеевым А.Р. были определены новые классы позитивных йонсоновских теорий и в работе [6] были получены позитивные йонсоновские аналоги работы Ф. Вайспфенинга [7] для позитивной решётки экзистенциальных формул рассматриваемой теории. Понятие позитивных йонсоновских теорий впервые было рассмотрено в работе [8] и это понятие, в определённом смысле, было введено после появления серии работ И. Бен-Якова [9], [10], т.к. оба понятия позитивности теории из [8] и [9] совпадают между собой для минимального фрагмента рассматриваемой теории. Отсюда, в частности, следует нетривиальность (не просто обобщение йонсоновости ради обобщения) понятия позитивности в смысле [8], т.к., например, такой важный класс математических структур, как метрические пространства, не является йонсоновским

классом, но является позитивно йонсоновским в смысле работ [9], [10] и, в частности, в смысле [8] для минимального фрагмента. Следует заметить, что существуют различные регулярные способы перехода от произвольной теории к йонсоновской теории, которая сохраняет первоначальный класс экзистенциально замкнутых моделей. Один из этих способов это морлизация теории [2] (теоремы 2.18, 2.19, стр. 63-64; теорема 6.8', стр. 83). Таким образом, изучение теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий является актуальной задачей, как в самой теории моделей, так и в универсальной алгебре, причём вопросы, касающиеся изучения йонсоновских теорий в точности относятся по своей сути к проблематике «восточной» теории моделей.

Вопросы изучения теоретико-модельных свойств полных теорий абелевых групп представляют собой большой подраздел теоретико - модельной алгебры. В данной области исследования получены многие классические результаты, в частности, полная классификация абелевых групп с точностью до элементарной эквивалентности была проведена в работе польского математика В. Шмелевой [11].

Следующие ссылки на соответствующие источники позволят читателю получить исчерпывающую информацию относительно этой классификации [11], [12], [13], [14], [15].

Понятие элементарной пары впервые было определено Б. Пуаза в работе [16]. Следующие этапы в развитии исследования данного понятия отмечены в работах Е. Бускаран и Б. Пуаза [17], [18], [19]. Далее история изучения данного понятия связана с работой [20]. Мустафин Т.Г. в этой работе рассматривает новые понятия стабильности и показывает, что одним из них в частном случае является случай элементарной пары. Также сюда можно отнести работу этого периода Нурмагамбетова Т. и Пуаза Б. [21]. В дальнейшем появляются работы Палютин Е.А. [22] и [23]. В этих работах Палютин Е.А. уточняет понятие T^* -стабильности, введённого Мустафиным Т.Г. в работе [20] с помощью понятия E^* -стабильности, и в достаточно широком классе примитивно-нормальных теорий рассматривает теоретико-модельные свойства элементарных пар. Напомним, что все эти работы были сделаны в рамках изучения полных теорий. Понятно, что переход к вообще говоря неполным теориям на рассмотрении примера йонсоновских теорий и, в частности, теории абелевых групп, однозначно является актуальным продолжением вышеуказанных исследований.

Все неопределённые понятия и связанные с ними результаты в данной статье относительно йонсоновских теорий можно найти в [24].

3 Материал и методы

3.1 Элементарные сведения об абелевых группах и их теоретико-модельных свойствах

Вкратце дадим основные общепринятые обозначения, связанные с абелевыми группами.

Если A – произвольная абелева группа, n – целое число, то $nA = \{na : a \in A\}$. Нетрудно видеть, что и nA так же, как и $A[p] = \{a \in A : pa = 0\}$ для простого p , образуют подгруппы группы A . Будем говорить, что $n \neq 0$ делит элемент a из A , если $a = nb$ для некоторого $b \in A$. Если существует $m > 0$ такое, что $ma = 0$, то наименьшее из таких m называют порядком элемента a . Таким образом, nA – это множество элементов группы A , делящихся на n , $A[p]$ – множество всех элементов группы A порядка p .

Подгруппу $(nA)[p]$ обычно обозначают $nA[p]$. Множество $T(A)$ всех элементов группы A , имеющих конечный порядок, называют периодической частью группы A . Ясно, что $T(A)$ – подгруппа группы A и фактор-группа $A/T(A)$ – группа без кручения, т.е. группа, не имеющая ненулевых элементов конечного порядка. Если всякий элемент группы A имеет порядок, равный p^n для некоторого $n \geq 1$, то периодическая группа A называется p -группой. Группа A называется группой ограниченного порядка, если $nA = [0]$ для некоторого натурального n .

Группа A называется делимой, если для любого $a \in A$ и любого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ существует $b \in A$ такой, что $a = nb$. Если B – делимая группа и одновременно подгруппа группы A , то она называется делимой подгруппой группы A . Группа, не содержащая ненулевых делимых подгрупп, называется редуцированной. Подгруппа B группы A называется сервантной, если $nA \cap B = nB$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Говорят, что подгруппа B группы A выделяется в ней прямым слагаемым, если существует подгруппа C группы A для которой $A = B \oplus C$.

Группа A называется алгебраически компактной, если она выделяется прямым слагаемым во всякой группе, которая содержит A как сервантную подгруппу. Эти группы обладают рядом интересных свойств. Например, группа A алгебраически компактна $\Leftrightarrow$ в ней разрешимо любое совместное счётное множество уравнений от любого числа неизвестных с константами из A . Нетрудно видеть, что ω_1^+ -насыщенные группы всегда алгебраически компактны. Строение алгебраически компактных групп хорошо изучено.

Следующие примеры абелевых групп являются каноническими при изучении их элементарных теорий.

1. Q – аддитивная группа рациональных чисел, называемая полной рациональной группой.
2. $Z_p = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, (n, p) = 1 \right\}$.
3. Z_{p^n} – циклическая группа порядка p^n .
4. Z_{p^∞} – мультипликативная группа всех корней уравнений $x^{p^n} = 1$, $n = 1, 2, \dots$, из поля комплексных чисел, называемая квазициклической группой типа p^∞ , где p – простое число.

Замечание. Группу Z_{p^∞} можно определить как аддитивную, порождённую элементами $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, где $pc_1 = 0$, $pc_2 = c_1$, $\dots$, $pc_{n+1} = c_n$.

Пусть A – модель сигнатуры абелевых групп, где $\sigma_A = \langle +, -, 0 \rangle$.

Формулу вида $\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$, где φ – конъюнкция атомарных формул, называют положительно примитивной (п.п.формулой). П.п.формулы выражают разрешимость конечных систем линейных уравнений вида $m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_kx_k = 0$. Нетрудно показать, что п.п.формулы замкнуты относительно конъюнкции и навешивания квантора существования. Можно непосредственно проверить, что истинность п.п.формул сохраняется при расширениях, декартовых произведениях и гомоморфизмах абелевых групп.

Следующие факты являются хорошо известными.

Теорема 1 Пусть A – произвольная абелева группа. Каждая формула сигнатуры σ_A эквивалентна относительно $Th(A)$ булевой комбинации п.п.формул.

Предложение 1 Q и Z_{p^∞} – делимые группы.

Теорема 2 Каждая делимая периодическая абелева группа G является прямой суммой квазициклических групп (возможно по различным простым числам).

Известно, что любую группу A можно разложить следующим образом:

$$A = A_d \oplus A_r,$$

где A_d – единственная максимальная делимая подгруппа группы A , A_r – редуцированная подгруппа, т.е. группа без ненулевых делимых подгрупп. Алгебраически компактные группы определённым образом строятся из неразложимых групп Z_{p^∞} , Z_{p^n} , Z и Q , где p – простое число.

Делимая группа A_d имеет следующее разложение:

$$A_d \cong \bigoplus_p Z_{p^\infty}^{(\gamma_p)} \oplus Q^{(\delta)},$$

где γ_p (p – простое число) и δ – произвольные кардинальные числа, $\bigoplus_p$ означает прямое суммирование по всем простым p , $Z_{p^\infty}^{(\gamma_p)}$ – прямая сумма γ_p -копий квазициклических групп Z_{p^∞} , а $Q^{(\delta)}$ – прямая сумма δ -копий аддитивной группы рациональных чисел.

Напомним, что две модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ одного и того же языка $\mathfrak{L}$ первого порядка называются элементарно эквивалентными, если в них выполняются одни и те же предложения первого порядка языка $\mathfrak{L}$.

Определим инварианты Шмелёвой. В дальнейшем будем предполагать, что $\infty < \kappa$ для любого кардинала $\kappa \geq \omega$.

Для любой абелевой группы A и любых простых p

$$U(p, n; A) = \min \left\{ \omega, \dim_p \left(p^n A[p] / p^{n+1} A[p] \right) \right\};$$

$$T_f(p; A) = \min \left\{ \omega, \inf_n \dim_p \left(p^n A / p^{n+1} A \right) \right\};$$

$$D(p; A) = \min \left\{ \omega, \inf_n \dim_p (p^n A[p]) \right\};$$

$$Exp(A) = \begin{cases} 0, & \text{если группа } A \text{ ограниченного порядка,} \\ \infty, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\dim_p$ – размерность соответствующего векторного пространства над полем Z/pZ .

Это и есть элементарные инварианты Шмелёвой.

Обозначим через $III(A)$ упорядоченную последовательность элементарных инвариантов Шмелёвой группы A :

$$III(A) = \langle \langle U(p, n; A) : n \in \omega \rangle, T_f(p; A), D(p; A) : p = 2, 3, \dots \rangle, Exp(A) \rangle.$$

Теорема 3 Пусть A, B – две произвольные группы. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $A \equiv B$.
2. $III(A) = III(B)$.

Определим стандартную группу Шмелёвой A^0 для любой группы A :

$$A^0 = \oplus_{p,n} Z_{p^n}^{(\alpha_{p^n}^0)} \oplus \oplus_p Z_p^{(\beta_p^0)} \oplus \oplus_p Z_{p^\infty}^{(\gamma_p^0)} \oplus Q^{(\delta^0)},$$

где $\alpha_{p^n}^0 = \min(U(p, n-1; A), \omega)$, $\beta_p^0 = \min(T_f(p; A), \omega)$, $\gamma_p^0 = \min(D(p; A), \omega)$, $\delta^0 = \min(\text{Exp}(A), 1)$.

Теорема 4 $A \equiv A^0$.

Теорема 5 *Всякую абелеву группу можно вложить в качестве подгруппы в делимую группу.*

3.2 Понятия и результаты, касающиеся йонсоновских теорий

Дадим известные определения понятий и результаты, связанные с йонсоновскими теориями, необходимые для изучения абелевых групп в рамках йонсоновости.

Определение 1 *Теория T называется йонсоновской, если*

1. T имеет бесконечную модель;
2. T индуктивна, т.е. T эквивалентна множеству $\forall\exists$ -предложений;
3. T обладает свойством совместного вложения (JEP), то есть любые две модели $\mathfrak{A} \models T$ и $\mathfrak{B} \models T$ изоморфно вкладываются в некоторую модель $\mathfrak{C} \models T$;
4. T обладает свойством амальгамируемости (AP), то есть если для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \models T$ таких, что $f_1 : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$, $f_2 : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$ - изоморфные вложения, существуют $\mathfrak{D} \models T$ и изоморфные вложения $g_1 : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{D}$, $g_2 : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ такие, что $g_1 f_1 = g_2 f_2$.

Дадим определение семантической модели. Данная модель играет важную роль в качестве семантического инварианта. Такая модель всегда существует для любой йонсоновской теории. В дальнейшем мы будем использовать так называемый семантический метод [24] при изучении йонсоновских абелевых групп. Суть этого метода заключается в трансляции элементарных свойств фиксированной полной теории (центра йонсоновской теории) на саму йонсоновскую теорию.

Изначально понятие семантической модели предполагало другое понятие однородности, но при этом для доказательства существования семантической модели необходимо было к аксиоматике теории множеств ZF добавить аксиому о существовании сильно недостижимого кардинала. Чтобы эту аксиому элиминировать, необходимо было изменить определение однородности семантической модели на приемлемый вариант. Это было сделано в работе [25] Е.Т.Мустафиным. При этом понятие универсальной модели не меняется. Напомним его.

Определение 2 *Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется κ -универсальной для T , если каждая модель T мощности строго меньше κ изоморфно вкладывается в $\mathfrak{M}$.*

Следующее определение κ -однородности для модели было введено в работе [25].

Определение 3 ([25]) Пусть $\kappa \geq \omega$. Модель $\mathfrak{M}$ теории T называется κ -однородной для T , если при любых двух моделях $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_1$ теории T , являющихся подмоделями $\mathfrak{M}$, мощности строго меньше, чем κ , и изоморфизме $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_1$, для каждого расширения $\mathfrak{B}$ модели $\mathfrak{A}$, являющегося подмоделью $\mathfrak{M}$ и моделью T мощности строго меньше κ существует расширение $\mathfrak{B}_1$ модели $\mathfrak{A}_1$, являющееся подмоделью $\mathfrak{M}$, и изоморфизм $g : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}_1$, продолжающий f .

Однородной-универсальной моделью для T называется κ -однородная - универсальная модель для T мощности κ , где $\kappa \geq \omega$.

Теорема 6 ([25]) Каждая йонсоновская теория T имеет κ^+ -однородную - универсальную модель мощности 2^κ . Обратно, если T индуктивна, имеет бесконечную модель и имеет ω^+ -однородную-универсальную модель, то теория T является йонсоновской теорией.

Теорема 7 ([25]) Пусть T йонсоновская теория. Две модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_1$ κ -однородные - универсальные для T являются элементарно эквивалентными.

Определение 4 ([25]) Семантической моделью C_T йонсоновской теории T называется ω^+ -однородная - универсальная модель теории T .

Предложение 2 ([25]) Любые две семантические модели йонсоновской теории T являются элементарно эквивалентными между собой.

Определение 5 ([24]) Семантическим пополнением (центром) йонсоновской теории T называется элементарная теория T^* семантической модели C_T теории T , т.е. $T^* = Th(C_T)$.

Пусть T – некоторая йонсоновская теория фиксированной сигнатуры σ и $\text{Mod } T$ – класс всех моделей теории T . Рассмотрим произвольную модель A из $\text{Mod } T$. Определим следующее понятие, с помощью которого мы собираемся различать модели йонсоновской теории. Пусть $JSp(A) = \{T \mid T \text{ - йонсоновская теория в языке } \sigma \text{ и } A \in \text{Mod } T\}$ и назовём $JSp(A)$ йонсоновским спектром модели A .

Следующие определения 6, 7 принадлежат Т.Г. Мустафину.

Определение 6 ([24]) Мы говорим, что йонсоновская теория T_1 косемантическина йонсоновской теории T_2 ($T_1 \bowtie T_2$), если $C_{T_1} = C_{T_2}$, где C_{T_i} – семантическая модель T_i , $i = 1, 2$.

Отношение косемантичности на множестве теорий является отношением эквивалентности. Тогда $JSp(A)/\bowtie$ – фактор множество йонсоновского спектра модели A по отношению $\bowtie$.

Определение 7 ([24]) Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель T является насыщенной моделью T^* .

Определение 8 ([2]) Теория T называется модельно полной, если для любых моделей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ теории T любая подсистема $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ будет элементарной подсистемой $\mathfrak{B}$. Эквивалентно, каждое изоморфное вложение есть элементарное вложение.

Теорема 8 ([2]) Теория T модельно полна, если и только если теория $T \cup D(\mathfrak{M})$ полна для любой модели $\mathfrak{M}$ теории T .

Определение 9 ([2]) Пусть T, T^* – некоторые L -теории. Теория T^* называется модельным пополнением теории T , если:

- (a) T и T^* взаимно модельно совместны, т.е. любая модель теории T вкладывается в модель теории T^* и наоборот;
- (b) T^* – модельно полная теория;
- (c) если $\mathfrak{M} \models T$, то $T^* \cup \text{Diagram}(\mathfrak{M})$ – полная теория.

Теория T^* называется модельным компаньоном теории T , если выполнены условия (a) и (b).

Теорема 9 ([2]) Теория T имеет не более одного модельного компаньона.

Теорема 10 ([2], стр. 68, табл 1) Теория алгебраически замкнутых абелевых групп является модельным пополнением теории абелевых групп.

Теорема 11 ([24]) Пусть T – произвольная йонсоновская теория, тогда следующие условия эквивалентны:

- 1. теория T – совершенна;
- 2. T^* – модельный компаньон теории T .

Пусть E_T – класс всех экзистенциально замкнутых моделей теории T .

Теорема 12 ([24]) Если йонсоновская теория T совершенна, то $E_T = \text{Mod } T^*$, где $T^* = \text{Th}(C_T)$.

Пусть T – йонсоновская теория, $S^J(X)$ – множество всех экзистенциальных полных n -типов над X , совместных с T , для любого конечного n , где $X \subset C$.

Определение 10 ([24]) Будем говорить, что йонсоновская теория T J - λ -стабильна, если для любой T -экзистенциально замкнутой модели $\mathfrak{A}$, для любого подмножества X из A , $|X| \leq \lambda \Rightarrow |S^J(X)| \leq \lambda$.

Теорема 13 Пусть T – совершенная йонсоновская теория, полная для $\exists$ – предложений, $\lambda \geq \omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1. T – J - λ -стабильна;
- 2. T^* – λ -стабильна, где T^* – центр йонсоновской теории T .

Доказательство. Следует из теоремы 2.1 из [26].

4 Результаты и обсуждение

Рассмотрим язык L_P , полученный прибавлением к языку L одноместного предиката $P(x)$. Обозначим через T_P теорию, полученную добавлением к T аксиом, утверждающих, что интерпретация P также есть модель теории T . Мы можем сказать, что P интерпретируется как экзистенциально замкнутая подструктура, т.е. для каждой бескванторной формулы φ в языке L верно следующее: $(\forall \bar{x}) [P(\bar{x}) \wedge (\exists \bar{y}) \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (\exists \bar{z}) P(\bar{z}) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{z})]$, где $P(\bar{x})$ означает $P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n)$.

Модель теории T_P называется йонсоновской парой (J -парой) моделей T . Будем обозначать эту пару (N, M) , где M – интерпретация предиката $P(\bar{x})$. В этой паре назовём N – большой моделью, а M – малой моделью.

Обозначим через $T_{P_{AG}}$ теорию йонсоновских пар теории абелевых групп. Пусть M – класс моделей $T_{P_{AG}}$.

Следующие леммы необходимы для доказательства предложения 3.

Лемма 1 Если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in M$; $\mathfrak{C} \in M$ и $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$, $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$; $|\mathfrak{C}| = |\mathfrak{A}| \cap |\mathfrak{B}|$, то существует такая система $\mathfrak{D} \in M$, что $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}$.

Доказательство. Пусть A и B – абелевы группы и $A \cap B = C$, $C \subseteq A$, $C \subseteq B$. Пусть $A \times B$ – свободное произведение групп A и B с объединённой подгруппой C . Тогда $A \subseteq_C A \times B$ и $B \subseteq_C A \times B$.

Лемма 2 Если M абстрактный и удовлетворяет лемме 1, то M удовлетворяет и свойству амальгамируемости (AP).

Доказательство. Доказательство можно извлечь из теорем А, В работы [27], при этом надо лишь учитывать новое определение однородности.

Предложение 3 Теория $T_{P_{AG}}$ – совершенная йонсоновская теория.

Доказательство. Покажем сначала, что $T_{P_{AG}}$ – йонсоновская теория. $T_{P_{AG}}$ имеет бесконечную модель. Она индуктивна, т.к. объединение возрастающей цепочки абелевых групп – абелева группа. Т.е. условия (1) и (2) из определения 1 выполнены.

Если A и B – две J -пары теории $T_{P_{AG}}$, то их прямое произведение $A \times B$ – абелева группа. Множество элементов $\langle a, e^B \rangle$, где $a \in A$, e^B – единичный элемент B , является подгруппой $A \times B$, изоморфной A . Аналогично, множество элементов $\langle e^A, b \rangle$, где $b \in B$, e^A – единичный элемент A , является подгруппой $A \times B$, изоморфной B . Таким образом выполнено условие (3).

Проверим выполнимость условия (4). Т.к. класс абелевых групп – абстрактный, т.е. замкнут относительно изоморфизмов, то согласно лемме 1 и соответственно лемме 2, класс абелевых групп обладает свойством амальгамируемости (AP). Т.о. $T_{P_{AG}}$ является йонсоновской теорией.

Совершенство следует из предложения 3 работы [1], т.к. в силу совершенности теории абелевых групп, семантическая модель этой теории насыщена в своей мощности. Рассмотрим семантическую модель (N, M) теории $T_{P_{AG}}$. Пусть реализация предиката P малой моделью M является экзистенциально-замкнутой подмоделью большой модели N . Все типы над этой моделью реализуются в большой модели N в силу предложения

3 из [1]. Других новых типов нет, таким образом, J -пара (N, M) насыщена в своей мощности.

Следующее понятие было рассмотрено Д. Гудриком в работе [28] и там же он обозначает его как свойство Шрёдера-Бернштейна (SB).

Определение 11 Теория T допускает свойство SB если для любых двух взаимно элементарно-вложимых моделей теории T следует, что они изоморфны.

Но при этом Д. Гудрик отмечает, что впервые данное свойство было рассмотрено для ω -стабильных теорий Нурмагамбетовым Т.А. в работах [29], [30]. В частности, Нурмагамбетовым Т.А. был получен следующий результат относительно свойства SB.

Теорема 1.2 из [29] Если T является ω -стабильной теорией, тогда T имеет SB свойство тогда и только тогда, когда T ограниченной размерности.

Д.Гудриком в работе [28] получено описание свойства SB для классифицируемой (суперстабильной, с NDOP и NOTOP) теории с ограниченной размерностью. В частности, в работе [31] Д.Гудрик и М.Ласковский описали свойство SB для слабо минимальных теорий.

В дальнейшем Д.Гудрик [32] нашёл необходимые и достаточные условия того, что теория абелевых групп допускает свойство SB. А именно, им была доказана следующая теорема:

Теорема 3.8 из [32] Если G - абелева группа, то следующие условия эквивалентны:

1. $Th(G, +)$ имеет свойство Шрёдера Бернштейна;
2. $Th(G, +)$ - ω -стабильна;
3. G есть прямая сумма делимой группы и группы с кручением ограниченной экспоненты;
4. $Th(G, +)$ - суперстабильна, и если $(\overline{G}, +) \equiv (G, +)$ является насыщенной, тогда каждое отображение в $Aut(\overline{G}/G^0)$ является унитарным.

Нами было переопределено данное понятие для йонсоновских теорий и обозначено как JSB, а именно: йонсоновская теория T имеет свойство JSB, если для любых двух экзистенциально замкнутых моделей $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ теории T из того, что они взаимно изоморфно вкладываются друг в друга следует, что они изоморфны.

Следующий результат является йонсоновским аналогом теоремы 3.8 из работы [32] в обогащённом языке, а именно:

Теорема 14 Пусть $T_{P_{AG}}$ - теория йонсоновских пар теории абелевых групп, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $T_{P_{AG}}$ - J - ω -стабильна;
2. $T_{P_{AG}}^*$ - ω -стабильна;
3. $T_{P_{AG}}$ обладает свойством JSB.

Доказательство. В силу предложения 3 эквивалентность пунктов (1) и (2) следует из теоремы 13, т.к. в теореме 13 используется $\exists$ -полнота и тогда, в силу теоремы 1 мы можем применить теорему 13.

Покажем из (3) в (2). В силу предложения 3 теория йонсоновских пар теории абелевых групп – совершенная йонсоновская теория. Тогда в силу критерия совершенности 11 и теоремы 12 мы имеем, что $E_{T_{P_{AG}}} = \text{Mod } T_{P_{AG}}^*$. Следовательно, любая модель центра теории $T_{P_{AG}}$ является экзистенциально замкнутой. В силу теоремы 11 $T_{P_{AG}}^*$ – центр теории $T_{P_{AG}}$ является модельным компаньоном теории $T_{P_{AG}}$. Следовательно $T_{P_{AG}}^*$ – модельно полная теория и любое вложение является элементарным. Остаётся применить теорему 3.8 из [32].

Покажем из (2) в (3). Пусть центр $T_{P_{AG}}^*$ является ω -стабильным. Так как $T_{P_{AG}} \subset T_P^*$ следует, что $\text{Mod } T_{P_{AG}}^* \subset \text{Mod } T_{P_{AG}}$. При этом в силу теоремы 3.8 из [32] $T_{P_{AG}}^*$ допускает SB. Но в силу теоремы 11 и совершенности теории $T_{P_{AG}}$ $\text{Mod } T_{P_{AG}}^* = E_{T_{P_{AG}}}$. И это заканчивает доказательство в силу того, что йонсоновское свойство JSB определено только для моделей из $E_{T_{P_{AG}}}$.

Следующий результат, касающийся йонсоновских абелевых групп, является аналогом теоремы В.Шмелёвой об элементарной классификации абелевых групп. Мы знаем, что для любой абелевой группы G существует её стандартная группа G^0 так, что $G \equiv G^0$, при этом

$$G^0 = \oplus_{p,n} \mathbb{Z}_{p^n}^{(\alpha_{pn}^0)} \oplus \oplus_p \mathbb{Z}_p^{(\beta_p^0)} \oplus \oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\gamma_p^0)} \oplus Q^{(\delta^0)}.$$

Обозначим через $JSp(A)$ йонсоновский спектр абелевой группы A , где

$$JSp(A) = \{T_{P_{AG}} \mid T_{P_{AG}} - \text{йонсоновская теория в языке } \sigma_{P_{AG}} \text{ и } A \in \text{Mod } T_{P_{AG}}\}.$$

Следующий результат даёт описание семантической модели йонсоновской теории абелевых групп.

Теорема 15 Пусть $T_{P_{AG}}$ – йонсоновская теория абелевых групп в языке $\sigma_{P_{AG}}$, тогда её центр $C_{T_{P_{AG}}} \in E_{T_{P_{AG}}}$, при этом $C_{T_{P_{AG}}}$ – делимая группа и её стандартная группа Шмелёвой представима в виде $\oplus_p \mathbb{Z}_{p^\infty}^{(\alpha_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\beta)}$, где $\alpha_p, \beta \in \omega^+$, $2^\omega = |C_{T_{P_{AG}}}|$.

Доказательство. Следует из теоремы 5, теоремы 2 и того, что любая йонсоновская теория имеет семантическую модель, которая является ω^+ -однородной-универсальной моделью.

Предложение 4 Существуют континуум несовершенных подклассов класса всех абелевых групп.

Доказательство. В работе [33] данное предложение было доказано с использованием старого определения семантической модели. Для нового определения 4 семантической модели можно повторить доказательство из [33] учитывая лишь мощностные оценки семантической модели. Для доказательства этого факта нам достаточно показать, что не элементарно эквивалентных между собой семантических моделей несовершенных йонсоновских теорий абелевых групп будет континуум. Из теоремы 15 семантическая модель любой абелевой группы будет прямой суммой соответственного числа копий групп двух видов: $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ и $\mathbb{Q}$. В несовершенном случае отсутствовать может только $\mathbb{Q}$, т.к. $\mathbb{Q}$ не может быть универсальной моделью. Количество копий $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ может быть любым подмножеством ω .

Назовем пару $(\alpha_p, \beta)_{C_{[T_{P_{AG}}]}^A}$ йонсоновским инвариантом абелевой группы A , если стандартная группа Шмелёвой группы A представима в виде $\oplus_p \mathbb{Z}_p^{(\alpha_p)} \oplus \mathbb{Q}^{(\beta)}$, где $C_{[T_{P_{AG}}]}$ семантическая модель $[T_{P_{AG}}] \in JSp(A)/_{\bowtie}$.

Дадим следующие определения понятий, которые уточняют в рамках изучения йонсоновских теорий, определение элементарной эквивалентности для полных теорий.

Пусть A и B – модели одной и той же сигнатуры.

Определение 12 Мы будем говорить, что модель A йонсоновски элементарно эквивалентна модели B ($A \equiv_J B$), если $JSp(A) = JSp(B)$.

Лемма 3 $\forall A, B \in Mod \sigma_{P_{AG}} JSp(A) \cap JSp(B) \neq \emptyset$.

Доказательство. Это верно в силу того, что как минимум $T_{P_{AG}} \in JSp(A) \cap JSp(B)$.

Определение 13 Мы говорим, что модель A JSp -косемантична модели B ($A \bowtie_{JSp} B$), если $JSp(A)/_{\bowtie} = JSp(B)/_{\bowtie}$.

Лемма 4 $A \bowtie_{JSp} B \Leftrightarrow JSp(A) \cap JSp(B) = JSp(A) \cup JSp(B)$.

Доказательство. Следует из определения.

Легко понять, что понятия, введенные в определениях 12 и 13, обобщают понятие элементарной эквивалентности. В следующей лемме, в силу предложения 3, мы можем заметить, что верно следующее:

Лемма 5 Пусть A и B произвольные абелевы группы, тогда

$$A \equiv B \Rightarrow A \equiv_J B \Rightarrow A \bowtie_{JSp} B.$$

Доказательство. Следует из определения.

Следующий результат является йонсоновским аналогом хорошо известной теоремы В. Шмелевой об элементарной классификации абелевых групп и является следствием теоремы 15 и леммы 5.

Определим следующее множество $\left\{ (\alpha_p, \beta)_{C_{[T_{P_{AG}}]}^A} : [T_{P_{AG}}] \in JSp(A)/_{\bowtie}, \text{ для всех простых } p \right\}$ как йонсоновский инвариант фактор-множества $JSp(A)/_{\bowtie}$ и обозначим его через $JInv(JSp(A)/_{\bowtie})$.

Теорема 16 Пусть $A, B \in Mod \sigma_{P_{AG}}$, $A = \langle M_1, N_1 \rangle$, $B = \langle M_2, N_2 \rangle$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $A \bowtie_{JSp} B$;
2. $JInv(JSp(A)/_{\bowtie}) = JInv(JSp(B)/_{\bowtie})$.

Доказательство. Из (2) в (1). Если (2) выполнено, это означает, что стандартные группы Шмелёвой для A и B совпадают между собой, тогда в силу леммы 5 следует, что $A \boxtimes_{JSp} B$, т.е. выполнено (1).

Пусть выполнено (1), тогда $JSp(A)/\boxtimes = JSp(B)/\boxtimes$. Предположим противное, т.е. $JInv(JSp(A)/\boxtimes) \neq JInv(JSp(B)/\boxtimes)$. Тогда существует $(\alpha_p, \beta)_{C_{[T_{PAG}]}}^A \in JInv(JSp(A)/\boxtimes)$ и $(\alpha_p, \beta)_{C_{[T_{PAG}]}}^A \notin JInv(JSp(B)/\boxtimes)$. Следовательно, для каждого класса $[T'_{PAG}] \in JSp(B)/\boxtimes$ имеем $(\alpha_p, \beta)_{C_{[T_{PAG}]}}^A \neq (\alpha_p, \beta)_{C_{[T'_{PAG}]}}^B$, т.е. нет ни одной йонсоновской теории группы B , семантической моделью которой является $C_{[T_{PAG}]}$. Но при этом известно, что любая йонсоновская теория однозначно определяется своей семантической моделью ([3], теорема 2.2 при $\alpha = 0$). Отсюда следует, что найдётся такая йонсоновская теория T_{PAG} , которая определяется йонсоновским инвариантом $(\alpha_p, \beta)_{C_{[T_{PAG}]}}^A$ и $T_{PAG} \notin JSp(B)$. А это противоречит условию (1), значит наше предположение неверно.

5 Заключение

Основным полученным результатом данной статьи является содержание теоремы 16. В этой теореме получен йонсоновский аналог в расширенной сигнатуре одноместным предикатом известной теоремы польского математика В. Шмелёвой об элементарной классификации абелевых групп. Интерпретацией предикатного символа в йонсоновской паре $\langle M, N \rangle$ является экзистенциально-замкнутая подмодель M в большой модели N . Такая постановка задачи является йонсоновским обобщением известного вопроса об элементарных парах для полных теорий [17]. С другой стороны, в рамках изучения стабильности в смыслах работ [20] и [22] в связи с представленной в данной работе теоремы 14, существует явная связь. Таким образом, обогащение сигнатуры одноместным предикатом можно рассматривать в рамках классификации йонсоновских теорий и их классов экзистенциально-замкнутых моделей. Как показывают полученные результаты (теорема 14 и теорема 16), теоретико-модельные свойства йонсоновской пары тесно связаны с теоретико-модельными свойствами центра рассматриваемой йонсоновской теории. Так как центр является полной теорией и изначально йонсоновская теория (теория абелевых групп) является примером совершенной йонсоновской теории, мы можем сделать вывод, что в случае обогащения одноместным предикатом языка данной теории, основные свойства, полученные в работе [1], также сохраняются, как и до обогащения.

Список литературы

- [1] Ешкеев А.Р., Ульбрихт О.И. JSp -косемантичность и JSB свойство абелевых групп // Сибирские электронные математические известия. – 2016. – Т. 13. – С. 861–874.
- [2] Справочная книга по математической логике: В 4-х частях / под ред. Дж. Барвайса. – Ч. I. Теория моделей: Пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
- [3] Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Математические труды. – 1998. – Т. 1, № 2. – С. 135–197.
- [4] Yeshkeyev A.R. On Jonsson stability and some of its generalizations // Journal of Mathematical Sciences. – Springer New York, 2010. – Vol. 166, № 5. – P. 646–654.

- [5] *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models // *Studies in logic and the foundations of mathematics.* – 1990. – Vol.92. – 116 p.
- [6] *Yeshkeyev A.R.* The structure of lattices of positive existential formulae of $(\Delta-PJ)$ -theories // *Science Asia. Journal of The Science Society of Thailand.* – 2013. – Vol. 39. – P. 19-24.
- [7] *Weispfenning V.* The model-theoretic significance of complemented existential formulas // *Journal of Symbolic Logic.* – 1981. – Vol. 46, № 4. – P. 843-849.
- [8] *Ешкеев А.Р.* Категоричные позитивные йонсоновские теории // *Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика».* – 2006. – № 4(44). С. 10-16.
- [9] *Ben-Yaacov I.* Positive model theory and compact abstract theories // *Journal of Mathematical Logic.* – 2003. – Vol. 3, № 1. – P. 85-118.
- [10] *Ben-Yaacov I.* Compactness and independence in non first order frameworks // *Bulletin of Symbolic logic.* – 2005. – Vol. 11, № 1. P. 28–50.
- [11] *Szmielew W.* Elementary properties of Abelian groups // *Fundamenta Mathematica.* – 1955. – Vol. 41. – P. 203-271.
- [12] *Ершов Ю.Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. – М.: Наука, 1980. – 416 с.
- [13] *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. – М.: Мир, 1974. – Т. 1. – 335 с.
- [14] *Eklof P.C., Fischer E.R.* The elementary theory of abelian groups // *Annals of Mathematical Logic.* – 1972. – Vol. 4, № 2. P. 115-171.
- [15] *Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.* Математическая логика. – М.: Физматлит, 2011. – 356 с.
- [16] *Poizat B.* Paires de structures stables // *Journal of Symbolic Logic.* – 1983. – Vol. 48, № 2. – P. 239–249.
- [17] *Bouscaren E.* Elementary pairs of models // *Annals of Pure and Applied Logic.* – 1989. – Vol. 45. – С. 129-137.
- [18] *Bouscaren E.* Dimensional Order Property and pairs of models // *Annals of Pure and Applied Logic.* – 1989. – Vol. 41. – С. 205-231.
- [19] *Bouscaren E., Poizat B.* Des belles paires aux beaux uples // *The Journal of Symbolic Logic.* – 1988. – Vol. 53, № 2. – P. 434-442.
- [20] *Мустафин Т.Г.* Новые понятия стабильности теорий // *Труды советско-французского коллоквиума по теории моделей.* – Караганда, 1990. – С. 112-125.
- [21] *Нурмагамбетов Т., Пуза Б.* О числе элементарных пар над множествами // *Труды французско-казахстанского коллоквиума по теории моделей.* – Алматы, 1995. – С. 73-82.
- [22] *Palyutin E.A.* E^* -stable theories // *Algebra and Logic.* – 2003. – Vol. 42, № 2. – С. 194-210.
- [23] *Palyutin E.A.* Elementary pairs of primitive normal theories // *Algebra and Logic.* – 2004. – Vol. 43, № 3. – P. 321-340.
- [24] *Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т.* Йонсоновские теории и их классы моделей: монография. – Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. – 370 с.
- [25] *Mustafin Y.T.* Quelques proprietes des theories de Jonsson // *The Journal of Symbolic Logic.* – 2002. – Vol. 67, № 2. – P. 528-536.
- [26] *Ешкеев А.Р., Бегетаева Г.С.* Стабильность Δ -РМ-теории и её центра // *Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика».* – 2009. – № 4(56). – С. 29-34.
- [27] *Jonsson B.* Homogeneous universal relational systems // *Math. Scand.* – 1960. – Vol. 8. – P. 137-142.
- [28] *Goodrick J.* When are elementarily bi-embeddable models isomorphic? // *PhD thesis.* – University of California, Berkeley, 2007. – 98 pp.
- [29] *Нурмагамбетов Т.А.* О взаимно элементарной вложимости моделей // *Теория алгебраических структур: сборник научных трудов.* – Караганда, 1985. – С. 109–115.
- [30] *Нурмагамбетов Т.А.* Характеризация ω -стабильных теорий ограниченной размерности // *Алгебра и логика.* – 1989. – Т. 28, № 5. – С. 584–596.

- [31] Goodrick J., Laskowski M.C. The Schröder-Bernstein property for a -saturated models // Proc. AMS, 2014. – Vol. 142, № 3. – P. 1013–1023.
- [32] Goodrick J. The Schröder-Bernstein property for theories of abelian groups // arXiv.org > math > arXiv:0705.1850v1, 2007. – 17 pp.
- [33] Ешкеев А.Р. Йонсоновские классы абелевых групп // Букетовские чтения: Межвузовская конференция, посвященная 20-летию КАРГУ. Тезисы докладов. – Караганда, 1992. – С. 127.

References

- [1] Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., “ JSp -cosemantiness and JSB property of Abelian groups,” Siberian Electronic Mathematical Reports 13 (2016), 861–874.
- [2] Barwise J., Ed.; Handbook of mathematical logic, Part 1. Model theory (Moscow: Science, 1982), 392.
- [3] Mustafin T.G., “Obobshchennyye usloviya Yonsona i opisaniye obobshchenno-yonsonovskikh teoriy bulevykh algebr,” Matematicheskiye trudy 1:2 (1998), 135–197.
- [4] Yeshkeyev A.R., “On Jonsson stability and some of its generalizations,” Journal of Mathematical Sciences 166:5 (2010), 646–654.
- [5] Shelah S., “Classification theory and the number of non-isomorphic models,” Studies in logic and the foundations of mathematics 92 (1990), 116.
- [6] Yeshkeyev A.R., “The structure of lattices of positive existential formulae of $(\Delta-PJ)$ -theories,” Science Asia, Journal of The Science Society of Thailand 39 (2013), 19–24.
- [7] Weispfenning V., “The model-theoretic significance of complemented existential formulas,” Journal of Symbolic Logic 46:4 (1981), 843–849.
- [8] Yeshkeyev A.R., “Kategorichnyye pozitivnyye yonsonovskiye teorii.” Vestnik Karagandinskogo universiteta, Seriya «Matematika» 4(44) (2006), 10–16.
- [9] Ben-Yaacov I., “Positive model theory and compact abstract theories,” Journal of Mathematical Logic 3:1 (2003), 85–118.
- [10] Ben-Yaacov I., “Compactness and independence in non first order frameworks,” Bulletin of Symbolic logic 11:1 (2005), 28–50.
- [11] Szmielew W., “Elementary properties of Abelian groups,” Fundamenta Mathematica 41 (1955), 203–271.
- [12] Yershov YU.L., Problemy razreshimosti i konstruktivnyye modeli (Moskva: Nauka, 1980), 416.
- [13] Fuks L., Beskonechnyye abelevy gruppy (Moskva: Mir, 1974), 335.
- [14] Eklof P.C., Fischer E.R., “The elementary theory of abelian groups,” Annals of Mathematical Logic 4:2 (1972), 115–171.
- [15] Yershov YU.L., Palyutin Ye.A., Matematicheskaya logika (Moskva: Fizmatlit, 2011), 356.
- [16] Poizat B., “Paires de structures stables,” Journal of Symbolic Logic 48:2 (1983), 239–249.
- [17] Bouscaren E., “Elementary pairs of models,” Annals of Pure and Applied Logic 45 (1989), 129–137.
- [18] Bouscaren E., “Dimensional Order Property and pairs of models,” Annals of Pure and Applied Logic 41 (1989), 205–231.
- [19] Bouscaren E., Poizat B., “Des belles paires aux beaux uples,” The Journal of Symbolic Logic 53:2 (1988), 434–442.
- [20] Mustafin T.G., “Novyye ponyatiya stabil’nosti teoriy,” Trudy sovetsko-frantsuzskogo kollokviuma po teorii modeley (Karaganda, 1990), 112–125.
- [21] Nurmagametov T., Puaza B., “O chisle elementarnykh par nad mnozhestvami,” Trudy frantsuzsko-kazakhstanskogo kollokviuma po teorii modeley (Almaty, 1995), 73–82.
- [22] Palyutin E.A., “ E^* -stable theories,” Algebra and Logic 42:2 (2003), 194–210.

-
- [23] *Palyutin E.A.*, “Elementary pairs of primitive normal theories,” *Algebra and Logic* 43:3 (2004), 321-340.
- [24] *Yeshkeyev A.R., Kasymetova M.T.* Yonsonovskiye teorii i ikh klassy modeley: monografiya (Karaganda: Izd-vo KarGU, 2016), 370.
- [25] *Mustafin Y.T.*, “Quelques proprietes des theories de Jonsson,” *The Journal of Symbolic Logic* 67:2 (2002), 528-536.
- [26] *Yeshkeyev A.R., Begetayeva G.S.*, “Stabil’nost’ Δ -PM-teorii i yeyo tsentra,” *Vestnik Karagandinskogo universiteta, Seriya «Matematika»* 4(56) (2009), 29-34.
- [27] *Jonsson B.*, “Homogeneous universal relational systems,” *Math. Scand.* 8 (1960), 137-142.
- [28] *Goodrick J.*, “When are elementarily bi-embeddable models isomorphic?” PhD thesis (University of California, Berkeley, 2007), 98.
- [29] *Nurmagambetov T.A.*, “O vzaimno elementarnoy vlozhimosti modeley,” *Teoriya algebraicheskikh struktur, Sbornik nauchnykh trudov* (Karaganda, 1985), 109–115.
- [30] *Nurmagambetov T.A.*, “Kharakterizatsiya ω -stabil’nykh teoriy ogranichennoy razmernosti,” *Algebra i logika* 28:5 (1989), 584–596.
- [31] *Goodrick J., Laskowski M.C.*, “The Schröder-Bernstein property for a -saturated models,” *Proc. AMS* 142:3 (2014), 1013–1023.
- [32] *Goodrick J.*, “The Schröder-Bernstein property for theories of abelian groups,” *arXiv.org > math > arXiv:0705.1850v1* (2007), 17.
- [33] *Yeshkeyev A.R.*, “Yonsonovskiye klassy abelevykh grupp,” *Buketovskiye chteniya, Mezhvuzovskaya konferentsiya, posvyashchennaya 20-letiyu KarGU, Tezisy dokladov* (Karaganda, 1992), 127.

2-бөлім

Раздел 2

Section 2

Қолданылмалы
математикаПрикладная
математикаApplied
Mathematics

ГРНТИ 517.9

**Алгоритмические модели поведения человека и стохастическая
оптимизация**

Бектемесов М.А., д.ф.-м.н., профессор, декан, механико-математический факультет,
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика
Казахстан, +7(701) 5154347, E-mail: maktagali@gmail.com

Гасников А.В., д.ф.-м.н., доцент, ведущий научный сотрудник ИППИ РАН сектор 7,
Московский физико-технический институт, г. Москва, Российская Федерация,
+7(905) 7806974, E-mail: gasnikov@yandex.ru

Лагуновская А.А., инженер, Московский физико-технический институт, г. Москва,
Российская Федерация, +7(905) 7806974, E-mail: a.lagunovskaya@phystech.edu

Ордабаева Ж.М., студент, механико-математический факультет, Казахский
национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан,
+7(775) 5128240, E-mail: ordabayevazhanna@gmail.com

В статье исследуется параллелизация вычислений при решении задач стохастической оптимизации; рассматривается приложение полученных здесь результатов к поиску равновесного распределения потоков по путям; исследуется зависимость скорости сходимости оптимальных алгоритмов в задачах стохастической безградиентной оптимизации, в зависимости от числа обращений к оракулу за реализацией функции на каждой итерации. Отличительная особенность данной статьи – демонстрация полученных результатов наглядными примерами.

Ключевые слова: стохастический зеркальный спуск, безградиентные методы, поиск равновесия в транспортных сетях.

Адам мінез-құлық және стохастикалық оңтайландырудың алгоритмдік моделдері

Бектемесов М.А., ф.-м.ғ.д., профессор, декан, механика-математика факультеті, Өл-Фараби атындағы
Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +7(701) 5154347
E-mail: maktagali@gmail.com

Гасников А.В., ф.-м.ғ.д., доцент, ж.ғ.қ. ИППИ РАН 7 сектор, Мәскеу физико-техникалық институты,
Мәскеу қ., Ресей Федерациясы, +7(905) 7806974, E-mail: gasnikov@yandex.ru

Лагуновская А.А., инженер, Мәскеу физико-техникалық институты, Мәскеу қ., Ресей Федерациясы,
+7(905) 7806974, E-mail: a.lagunovskaya@phystech.edu

Ордабаева Ж.М., студент, механика-математика факультеті, Өл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық
университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +7(775) 5128240, E-mail:
ordabayevazhanna@gmail.com

Мақалада параллелизация есептеу кезіндегі стохастикалық оңтайландыру зерттеледі; қосымша алынған нәтижелерін іздеуге тепе-теңдік бөлу ағындар жолдары бойынша қаралады; тәуелділік жылдамдығы жинақтылық оңтайлы алгоритмдер міндеттерінде стохастикалық градиентсіз оңтайландыру байланысты өтініштердің санының оракул бақылау функцияларын әрбір итерациясы зерттеледі. Бұл мақаланың ерекшелігі – алынған нәтижелердің көрнекі мысалдар демонстрациясы.

Түйін сөздер: стохастикалық айналы түсіру, градиентсіз әдістері, тепе-көлік желілерінде іздеу.

Algorithmic models of human behavior and stochastic optimization

Bektemessov M.A., Dr.Sci.(Phys.-Math.), professor, Dean, Mechanics and Mathematics Faculty, Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan, +7(701) 5154347,

E-mail: maktagali@gmail.com

Gasnikov A.V., Dr.Sci.(Phys.-Math.), Associated professor, Moscow, Russian Federation, +7(905) 7806974,

E-mail: gasnikov@yandex.ru

Lagunskaya A.A., engineer, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation, +7(905) 7806974, E-mail: a.lagunovskaya@phystech.edu

Ordabayeva Zh.M., student, Mechanics and Mathematics Faculty, Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan, +7(775) 5128240, E-mail: ordabayevazhanna@gmail.com

The article explores the parallelization of computations in solving stochastic optimization problems; The application of the results obtained here to the search for an equilibrium distribution of flows along paths is considered; The dependence of the rate of convergence of optimal algorithms in the problems of stochastic, gradient optimization is investigated, depending on the number of calls to the oracle behind the implementation of the function at each iteration. A distinctive feature of this article is the demonstration of the results obtained with illustrative examples.

Key words: Stochastic mirror descent, gradient methods, the search for equilibrium in transport networks.

1 Введение

Настоящая статья носит обзорный характер. Ее цель продемонстрировать несколькими яркими (на наш взгляд) примерами то, как можно интерпретировать ряд современных результатов о сходимости (стохастического) метода зеркального спуска и его безградиентных вариантов.

В разделе 2 описывается стохастический зеркальный спуск – численный метод решения задач выпуклой стохастической оптимизации. Исследуется вопрос о возможности его параллелизации.

В разделе 3 результаты раздела 2 переносятся на безградиентные методы – нет возможности считать (стохастический) субградиент.

В разделе 4 результаты раздела 2 переносятся на конкретную задачу – поиск равновесного распределения транспортных потоков.

2 Стохастический зеркальный спуск

В данном разделе описывается метод зеркального спуска – МЗС (Немировский 1977: 24-33), (Nemirovski 2016: 261-283). Обсуждается стохастический и онлайн варианты метода, а также возможность его параллелизации.

Рассматривается класс задач выпуклой стохастической оптимизации

$$f(x) = E_{\xi} [f(x, \xi)] \rightarrow \min_{x \in Q}, \quad (1)$$

где $f(x)$ – выпуклая функция, а Q – выпуклое множество. Часто в приложениях, рассматриваемых в данной статье

$$Q = S_n(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

На каждой итерации (шаге) можно посчитать в выбранной точке x^k стохастический субградиент $\partial_x f(x^k, \xi^k)$, где $\{\xi^k\}_k$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (распределенные также как ξ). Для простоты рассуждений будем считать, что работаем с каким-то конкретным измеримым селектором $\nabla_x f(x^k, \xi^k)$. При этом

$$E_{\xi} [\nabla_x f(x, \xi)] \equiv \nabla f(x). \quad (2)$$

Вводится p -норма ($p \in [1, 2]$) и параметр q : $1/p + 1/q = 1$. Предполагается, что существует такое $M > 0$, что

$$E_{\xi} [\|\nabla_x f(x, \xi)\|_q^2] \leq M^2, \quad q \in [2, \infty]. \quad (3)$$

Вводится прокс-функция $d(x) \geq 0$ ($d(x^0) = 0$, в ряде случаев точку старта будем обозначать не x^0 , а x^1 , тогда $d(x^1) = 0$), являющаяся 1-строго выпуклой функцией в p -норме. Вводится расхождение Брэгмана

$$V(x, y) = d(x) - d(y) - \langle \nabla d(y), x - y \rangle.$$

Популярными примерами таких функций являются (Nemirovskiy 2016: 261-283):

$$p = 1, \quad d(x) = \ln n + \sum_{k=1}^n x_k \ln x_k, \quad V(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \ln(x_k/y_k), \quad Q = S_n(1),$$

$$p = 2, \quad d(x) = \frac{1}{2} \|x\|_2^2, \quad V(x, y) = \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2, \quad Q = \mathbb{R}^n.$$

Далее вводится оператор проектирования согласно расхождению Брэгмана

$$\text{Mirr}_{x^k}(v) = \arg \min_{x \in Q} \{ \langle v, x - x^k \rangle + V(x, x^k) \}.$$

С помощью этого оператора вводится МЗС

$$x^{k+1} = \text{Mirr}_{x^k}(h \nabla_x f(x^k, \xi^k)), \quad k = 0, \dots, N-1,$$

где

$$h = \frac{R}{M} \sqrt{\frac{2}{N}} = \frac{\varepsilon}{M^2}, \quad R^2 = V(x_*, x^0),$$

здесь x_* – решение задачи (1). Если x_* не единственно, то можно считать, что среди всех решений (1) выбирается такое x_* , которое доставляет минимум $V(x_*, x^0)$.

Теорема 1 (А.С. Немировский (Nemirovskiy 2016: 261-283)) Пусть выполняются условия (2), (3). Тогда после

$$N = \frac{2M^2 R^2}{\varepsilon^2}$$

итераций (вычислений стохастических градиентов)

$$E[f(\bar{x}^N)] - f_* \leq \varepsilon,$$

$$f_* = \min_{x \in Q} f(x), \quad \bar{x}^N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^k.$$

Следующая теорема немного уточняет в случае тяжелых хвостов стохастического субградиента (см. условие iii)) (Juditsky 2009:1574-1609).

Теорема 2. Пусть выполняется условие (2) и одно из следующих условий

1. $\|\nabla_x f(x, \xi)\|_q \leq M$ для всех $x \in Q$ и п.н. по ξ ;
2. $E_\xi \left[\exp \left(\|\nabla_x f(x, \xi)\|_q^2 / M^2 \right) \right] \leq \exp(1), \quad \ln \sigma^{-1} \ll N$;
3. Существует такое $\alpha > 2$,

$$P \left(\|\nabla_x f(x, \xi)\|_q^2 / M^2 \geq t \right) \leq (1+t)^{-\alpha}, \quad \sigma^{-1/(\alpha-1)} \ll N.$$

Тогда при соответствующих σ (см. ii) и iii)) имеет место неравенство

$$P \left(f(\bar{x}^N) - f_* \leq \frac{C_1 M}{\sqrt{N}} \left(R + C_2 \bar{R} \sqrt{\ln \sigma^{-1}} \right) \right) \geq 1 - \sigma,$$

$\bar{R} = \max_{x, y \in Q} \|x - y\|_p, C_1, C_2 \leq 3$ за исключением случая iii), в котором $C_1(\alpha)$.

С помощью теоремы 2 был получен следующий результат, который может быть использован для распараллеливания работы МЗС.

Теорема 3. Пусть выполняется условие (2) и одно из условий i) – iii). Тогда существует такое $C \leq 50$, что по $K = \lceil 2 \log_2 \sigma^{-1} \rceil$ независимым друг от друга в смысле выбора реализаций $\{\xi^k\}_k$ траекториям МЗС (на каждой траектории рассчитываем $\bar{x}^{N,i}$) с одинаковым числом шагов

$$N = \frac{CM^2 \bar{R}^2}{\varepsilon^2}$$

можно "собрать" такой

$$\bar{x}^N = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \bar{x}^{N,i},$$

$$P(f(\bar{x}^N) - f_* \leq \varepsilon) \geq 1 - \sigma.$$

Пример 1. Результат теоремы 3 допускает следующую интерпретацию. Пусть есть один мудрец, который прожил 1000 лет и есть 10 экспертов, проживших по 100 лет. Считается, что у всех у них одинаковая функция ежедневных затрат $f(x)$ и каждый стремится оказаться как можно быстрее в минимуме этой функции. Каждый день эксперт или мудрец (оптимально) выбирают способ "как жить", исходя из своей истории. Оказывается, что при весьма общих условиях на "обратную связь", которую можно получать

ежедневно $(\nabla_x f(x^k, \xi^k))$, мудрец "эквивалентен" соответствующему числу независимых экспертов в смысле итогового понимания, как именно надо было жить. Под эквивалентностью понимается "с точностью до универсального числового множителя", и результат, с небольшими оговорками, не зависит от того, сколько именно прожил мудрец и эксперты. Важно только, чтобы эксперты в сумме прожили приблизительно столько же сколько мудрец. При переходе на такую интерпретацию в теореме 3, по сути, получено решение задачи, поставленной Ю.Е. Нестеровым (Nesterov 2009: 261-283), (Nesterov 2008: 1559-1568).

Далее приведенные выше результаты распространяются, следуя (Nazari 2016: 157-325), на задачи, в которых дополнительно известно, что

$$f(x) \quad - \quad \mu_2 - \text{сильной выпуклая функция в } 2\text{-норме}, \quad (4)$$

при этом выбирается $p = 2$. В варианте аналогичном теореме 1 это также было ранее сделано А.С. Немировским (Немировский 1979: 156-178). Более того, в 2011 году А.С. Немировским и А.Б. Юдицким теорема 1 была обобщена на случай, когда вместо условия (2) выполняется более слабое условие (Juditsky 2012: 1-63)

$$\|E_\xi [\nabla_x f(x, \xi^k)] - \nabla f(x)\|_q \leq \delta / \bar{R}. \quad (5)$$

Теорема 4 (Немировский–Юдицкий). Пусть выполняются условия (3), (5). Тогда

$$E[f(\bar{x}^N)] - f_* \leq MR\sqrt{\frac{2}{N}} + \delta,$$

$$\bar{x}^N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^k.$$

Пусть выполняются условия (3), (4), (5) ($p = 2$). Тогда

$$E[f(\bar{x}^N)] - f_* \leq \frac{M_2^2}{2\mu_2 N} (1 + \ln N) + \delta$$

$$\bar{x}^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x^k, \quad x^{k+1} = \text{Mirr}_{x^k}(h_k \nabla_x f(x^k, \xi^k)), \quad h_k = (\mu_2 k)^{-1}, \quad k = 1, \dots, N.$$

В работе (Гасников 2017: 36-49) удалось еще больше ослабить условие (5)

$$\sup_{\{x^k = x^k(\xi^1, \dots, \xi^{k-1})\}_{k=1}^N \in Q} E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle E_{\xi^k} [\nabla_x f(x^k, \xi^k) | \xi^1, \dots, \xi^{k-1}] - \nabla f(x^k), x^k - x_* \rangle \right] \leq \delta. \quad (6)$$

При этом формулировка теоремы 4 полностью сохранилась. Именно в таком варианте с наиболее общим условием (6) на уровень допустимого шума δ в следующем разделе

удалось воспользоваться теоремой 4 для получения оценок скорости сходимости безградиентных методов.

Приведенные выше результаты можно обобщить на задачи онлайн оптимизации (Lugosi 2006: 135-170). Оказывается, что теорема 4 имеет место с точно такими же оценками скорости сходимости и для задач онлайн оптимизации. В условиях шума (6) ($\delta > 0$) такие результаты были получены впервые.

Оценки теоремы 4 являются неувлучшаемыми в выпуклом случае с точностью до мультипликативной константы и с точностью до множителя вида $\sim \ln N$ в сильно выпуклом случае. В случае задач онлайн оптимизации ($\delta = 0$) оценки теоремы 4 являются в обоих случаях неувлучшаемыми с точностью до мультипликативной константы (Nazer 2014: 2489-2512).

Приведем вкратце постановку задачи онлайн оптимизации и полученный результат. Положим (все функции $f_k(x)$ из того же класса, что была функция $f(x)$), причем $f_k(x)$ может враждебно подбираться, исходя из знания истории $\{x^1, \dots, x^{k-1}\}$

$$\text{Regret}_N(\{f_k(\cdot)\}, \{x^k\}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(x^k) - \min_{x \in Q} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(x)$$

и рассмотрим следующую задачу

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k(x^k) \rightarrow \min_{\{x^k(\nabla_x f_1(x^1, \xi^1); \dots; \nabla_x f_{k-1}(x^{k-1}, \xi^{k-1})) \in Q\}_{k=1}^N}.$$

Если в теореме 4 в процедуре МЗС при расчете x^{k+1} вместо $\nabla_x f(x^k, \xi^k)$ использовать $\nabla_x f_k(x^k, \xi^k)$ – то, что доступно наблюдению только на этом шаге (можно называть этот вектор δ -смещенным стохастическим субградиентом $f_k(x)$), то теорема 4 останется верной если заменить

$$E[f(\bar{x}^N)] - f_* \text{ на } E[\text{Regret}_N(\{f_k(\cdot)\}, \{x^k\})].$$

Приводимый далее (известный ранее) конкретный пример задачи онлайн оптимизации (взвешивание экспертных мнений) будет играть важную роль в разделе 4.

Пример 2. Если $f_k(x) = \langle l^k, x \rangle$, $Q = S_n(1) = \left\{x \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}$, то стоит выбирать $p = 1$, $V(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \ln(x_k/y_k)$. В этом случае

$$x_i^{k+1} = \frac{\exp\left(-h \sum_{r=1}^k l_i^r\right)}{\sum_{j=1}^n \exp\left(-h \sum_{r=1}^k l_j^r\right)} = \frac{x_i^k \exp(-h \cdot l_i^k)}{\sum_{j=1}^n x_j^k \exp(-h \cdot l_j^k)},$$

$$\text{Regret}_N(\{f_k(\cdot)\}, \{x^k\}) \leq MR \sqrt{\frac{2}{N}},$$

где

$$h = \frac{R}{M} \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad M = \max_{k=1, \dots, N} \|l^k\|_\infty, \quad R^2 = \ln n.$$

Все приведенные выше результаты (в том числе и этот) можно обобщить на случай, когда h выбирается адаптивным, т.е. не зависящим от N , образом. Для этого нужно использовать вместо МЗС метод двойственных усреднений (Nesterov 2009: 261-283). Для большей наглядности мы ограничились здесь изложением варианта с МЗС.

Приведенная оценка регрета также является неулучшаемой с точностью до мультипликативной константы (Lugosi 2006: 135-170).

Полученная выше оценка регрета останется верной (в среднем), если на каждом шаге k в оценке регрета выбирать не x^k , а независимо и случайно осуществлять выбор одной из вершин симплекса, согласно распределению вероятностей $\{x_i^k\}_{i=1}^n$, определенному выше, и использовать то, что получится в качестве $\{x^k\}_k$, формирующих регрет.

Этот результат можно проинтерпретировать, например, следующим образом. Пусть мы играем с казино в орлянку: каждый день казино сообщает нам один из двух возможных исходов $\{1, -1\}$. Каждый день мы (заранее) должны делать ставку 1 рубль на один из исходов. Если мы угадали, то выигрываем рубль – нам возвращают этот рубль вместе с еще одним, если не угадали, то проигрываем (этот) рубль. Казино не знает нашу текущую ставку, но зато знает все предыдущие наши ставки (и может это использовать враждебным для нас способом). Будем формировать вектор $l^k \in \mathbb{R}^2$ следующим образом: $l^k = (-1, 1)^T$ если в k -й день казино сообщило 1 и $l^k = (1, -1)^T$ в противном случае. Приведенный выше результат позволяет обыгрывать такое казино, если казино не в состоянии генерировать случайную последовательность $\{1, -1\}$ в следующем смысле: за $N \gg 1$ дней доли (частоты) встречаемости 1 и -1 отличаются не более чем на $N^{-1/2}$.

3 Стохастический зеркальный спуск и безградиентная оптимизация

В данном разделе результаты предыдущего раздела переносятся на задачи стохастической онлайн оптимизации, в которых вместо (зашумленного) стохастического градиента доступными наблюдению на каждом шаге (итерации) являются только (зашумленные) реализации значений функции в нескольких точках или зашумленная реализация производной по направлению. Для простоты формулировок далее в этом разделе мы ограничимся только не онлайн случаем и сходимостью в среднем. Основная идея (Немировский 1979: 156-178 и Гасников 2017: 36-49) заключается в введении

$$\nabla_x f(x^k, \xi^k := (\xi^k, e^k)) := \frac{n}{\tau} f(x^k + \tau e^k, \xi^k) e^k, \quad (7)$$

(одноточечная обратная связь)

$$\nabla_x f(x^k, \xi^k) := \frac{n}{\tau} (f(x^k + \tau e^k, \xi^k) - f(x^k, \xi^k)) e^k, \quad (8)$$

(двухточечная обратная связь)

$$\nabla_x f(x^k, \xi^k) := n \langle \nabla_x f(x^k, \xi^k), e^k \rangle e^k. \quad (9)$$

(обратная связь в виде реализации производной по направлению)

Считается, что $\{e^k\}_k$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы. Будем предполагать, что $f(x^k, \xi^k)$ в случаях (7), (8) доступны с, вообще говоря, неслучайным шумом уровня δ :

$$|E_\xi [f(x, \xi)] - f(x)| \leq \delta. \quad (10)$$

В случае (9) будем считать, что выполняется условие (2). Здесь и далее в этом разделе будем считать, что все условия выполняются не только в множестве Q , но и в δ -окрестности (в 2-норме) этого множества.

В литературе давно открытым стоял вопрос: как следует выбирать e^k ? Основные конкурирующие способы:

$$e^k \in RS_2^n(1),$$

т.е. e^k выбирается равновероятно на поверхности евклидовой сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^n$;

$$e^k = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0, \dots, 0) \text{ с вероятностью } 1/n,$$

покомпонентная рандомизация.

В работе (Гасников 2015: 104-113) было установлено, что абсолютно во всех случаях, если ориентироваться только на число сделанных итераций, и не смотреть на "стоимость" итерации, первый способ $e^k \in RS_2^n(1)$ доминирует все известные остальные способы – с точностью до логарифмического множителя, причем в большинстве случаев такая оговорка не требуется.

Заметим, что

$$E_{e^k} [n \langle \nabla_x f(x^k, \xi^k), e^k \rangle e^k] = \nabla_x f(x^k, \xi^k), \text{ (следует сравнить с (2))}$$

$$E \left[\left\| \frac{n}{\tau} (f(x^k + \tau e^k, \xi^k) - f(x^k, \xi^k)) e^k \right\|_q^2 \right] \leq \frac{3}{4} n^2 \tau^2 L_2^2 E_{e^k} [\|e^k\|_q^2] +$$

$$+ 3n^2 E [\langle \nabla_x f(x^k, \xi^k), e^k \rangle^2 \|e^k\|_q^2] + 12 \frac{\delta^2 n^2}{\tau^2} E_{e^k} [\|e^k\|_q^2]. \text{ (следует сравнить с (3))}$$

Если

$$E_{\xi^k} [|f(x, \xi^k)|^2] \leq B^2, \quad (11)$$

то

$$E \left[\left\| \frac{n}{\tau} f(x^k + \tau e^k, \xi^k) e^k \right\|_q^2 \right] \leq \frac{n^2 B^2}{\tau^2} E_{e^k} [\|e^k\|_q^2]. \text{ (следует сравнить с (3))}$$

Также заметим, что мы не можем стремиться $\tau \rightarrow 0+$ в (7), (8) из-за присутствия в оценках неограниченно возрастающего отношения δ/τ . Если бы $\delta = 0$, то можно было объединить случаи (8) и (9), поскольку при $\tau \rightarrow 0+$ (8) переходит в (9).

Используя явление концентрации меры на сфере Леви для $e \in RS_2^n(1)$ можно получить (это было сделано совместно с И.Н. Усмановой) следующие результаты

$$E [\|e\|_q^2] \leq \min \{q - 1, 4 \ln n\} \cdot n^{\frac{2}{q}-1}, \quad E [\langle c, e \rangle^2] \leq \|c\|_2^2 n^{-1}, \quad 2 \leq q \leq \infty,$$

$$E [\langle c, e \rangle^2 \|e\|_q^2] \leq \frac{4}{3} \|c\|_2^2 \min \{q - 1, 4 \ln n\} \cdot n^{\frac{2}{q}-2}, \quad 2 \leq q \leq \infty.$$

Выписанные формулы позволяют надеяться, что можно погрузить рассматриваемые в этом разделе задачи в класс задач обычной стохастической оптимизации, рассматриваемый в прошлом разделе. И, действительно, уже прямо сейчас это можно сделать для случая (9). Однако для случаев (7), (8) даже при $\delta = 0$ возникает проблема с условием (2)

$$E_{e^k} \left[\frac{n}{\tau} f(x^k + \tau e^k, \xi^k) e^k \right] = E_{e^k} \left[\frac{n}{\tau} (f(x^k + \tau e^k, \xi^k) - f(x^k, \xi^k)) e^k \right] \neq \\ \neq E_{e^k} [n \langle \nabla_x f(x^k, \xi^k), e^k \rangle e^k].$$

Выручает введенное ранее условие (6). Благодаря именно такому обобщению теоремы 4 удалось получить следующий результат.

Теорема 5. Пусть для задачи выпуклой стохастической оптимизации (1) на каждой итерации доступен наблюдению один из следующих векторов (7) – (9). При этом в случае (7) выполняются условия (3) с $q = 2$, (10), (11), в случае (8) выполняются условия (3) с $q = 2$, (9) и условие

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2 \leq L_2 \|y - x\|_2, \quad (12)$$

в случае (9) выполняются условия (2), (3) с $q = 2$. Тогда используя МЗС с $\nabla_x f(x^k, \xi^k)$, рассчитываемым по соответствующей формуле (7) – (9), с явно выписываемыми оценками на τ, h и допустимым уровнем шума $\delta \leq \delta(\varepsilon, n)$, N итераций можно получить следующую оценку

$$E[f(\bar{x}^N)] - f_* \leq \varepsilon,$$

N определяется из таблицы 1 в случае (7) и из таблицы 2 в случае (8), (9). Причем, $\tilde{O}() = O()$ с точностью до логарифмического по nN множителя. Параметр p выбирается из отрезка (Немировский 1977: 24-33), (Nemirovski 2016: 261-283), $1/p + 1/q = 1$.

Таблица 1

$N(R^2 = \tilde{O}(\ x_* - x^0\ _p^2))$	$E[\ \nabla_x f(x, \xi)\ _2^2] \leq M_2^2$	$\ \nabla f(y) - \nabla f(x)\ _2 \leq L_2 \ y - x\ _2$
$f(x)$ выпуклая	$\tilde{O}\left(\frac{B^2 M_2^2 R^2 n^{1+2/q}}{\varepsilon^4}\right)$	$\tilde{O}\left(\frac{B^2 L_2 R^2 n^{1+2/q}}{\varepsilon^3}\right)$
$f(x) - \mu_2$ — сильно выпуклая	$\tilde{O}\left(\frac{B^2 M_2^2 n^2}{\mu_2 \varepsilon^3}\right)$	$\tilde{O}\left(\frac{B^2 L_2 n^2}{\mu_2 \varepsilon^2}\right)$

Замечание 1. В категориях $\tilde{O}()$ даже при $\delta = 0$ выписанные в таблицах 1, 2 оценки оптимальны, т.е. совпадают с нижними оценками (Agarwal 2010: 28-40). В случае таблицы 1 нужны оговорки, что все-таки приведенные оценки могут быть улучшены по тому как входит в оценку N желаемая точность ε за счет ухудшения того как входит размерность пространства n (Bubeck 2015: 152-164). В случае таблицы 2 оценки равномерно оптимальны одновременно и по ε и по n . Причем эти оценки остаются оптимальными также в случае, когда рассматривается задача не стохастической, а обычной оптимизации. В точности такие же оценки можно получить и для задач стохастической онлайн

оптимизации. Иногда в таком контексте, т.е. с обратной связью (7) – (9), эти задачи называют задачами о (контекстуальных) нелинейных многоруких бандитах (Bubeck 2012: 1-122). Новизна в теореме 5 заключается в рассмотрении случая $\delta > 0$, а также в рассмотрении случаев с $p \neq 2$. Впрочем, недавно в работе (Duchi 2015: 2788-2806) были получены результаты, близкие к приведенным в теореме 5 при $p = 1$ и $\delta = 0$. Таблица 2

$N(R^2 = \tilde{O}(\ x_* - x^0\ _p^2))$	$E[\ \nabla_x f(x, \xi)\ _2^2] \leq M_2^2$	$\ \nabla f(y) - \nabla f(x)\ _2 \leq L_2 \ y - x\ _2$
$f(x)$ выпуклая	$\tilde{O}\left(\frac{M_2^2 R^2 n^{2/q}}{\varepsilon^2}\right)$	$\tilde{O}\left(\frac{M_2^2 R^2 n^{2/q}}{\varepsilon^2}\right)$
$f(x)$ – μ_2 -сильно выпуклая	$\tilde{O}\left(\frac{M_2^2 n}{\mu_2 \varepsilon}\right)$	$\tilde{O}\left(\frac{M_2^2 n}{\mu_2 \varepsilon}\right)$

Замечание 2. В случае обратной связи (8) условие на уровень шума δ имеет вид

$$\delta \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon \tau}{16R\sqrt{n}}, \frac{M_2 \tau}{\sqrt{96n}} \right\},$$

Откуда из условия на τ

$$\tau = \min \left\{ \max \left\{ \frac{\varepsilon}{2M_2}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{L_2}} \right\}, \frac{M_2}{L_2} \sqrt{\frac{1}{6n}} \right\},$$

в итоге можно получить

$$\delta \leq \frac{\varepsilon^{3/2}}{16R\sqrt{L_2 n}}.$$

Замечание 3 (техника двойного сглаживания). Сопоставляя условия, при которых оценки таблицы 2 справедливы для обратной связи вида (8) и вида (9), несложно заметить, что в случае (8) в теореме 5 требовалось выполнение дополнительного условия гладкости (12). Замечание 2 хорошо поясняет почему при $\delta > 0$ это условие может понадобиться. Однако уже довольно давно (Поляк 1983: 254-264); см. также (Duchi 2015: 2788-2806) было подмечено, что и без условия (12) можно использовать безградиентные двухточечные методы. Для этого вместо (8) формируется

$$\nabla_x f(x^k, \xi^k) = \frac{n}{\tau_2} (f(x^k + \tau_1 \tilde{e}_1^k + \tau_2 e_2^k, \xi^k) - f(x^k + \tau_2 \tilde{e}_1^k, \xi^k)) e_2^k,$$

где $\tilde{e}_1^k \in RB_2^n(1)$, т.е. $\tilde{e}_1^k$ – случайный вектор, равномерно распределенный на евклидовом шаре единичного радиуса в пространстве $\mathbb{R}^n$, $e_2^k \in RS_2^n(1)$ и $\{\tilde{e}_1^k, e_2^k, \xi^k\}_k$ – независимы в совокупности. В работе удалось получить условие на уровень шума, при котором оценки из второго столбца таблицы 2, отвечающего негладкому случаю, для обратной связи (8) остаются по-прежнему верными, т.е. верными без условия (12),

$$\delta \leq \frac{\varepsilon^2}{56M_2 R n^{3/2}}.$$

При этом

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon}{4M_2}, \quad \tau_2 = \frac{\varepsilon}{4M_2n}.$$

Насколько нам известно, ранее не были известны теоретически обоснованные способы выбора τ_1, τ_2 . Как и следовало ожидать, из-за отсутствия гладкости, приведенное здесь условие на допустимый уровень шума δ получилось более жестким, чем в гладком случае – см. замечание 2.

Пример 3. Пусть на воображаемой планете живут "оптимизаторы". Каждый из них стремится жить с наименьшими потерями нервов. Планета характеризуется выпуклой M_2 -липшицевой функцией $f(x)$, аргумента $x \in Q \subseteq \mathbb{R}^n$, где Q – выпуклое множество, являющееся множеством допустимых стратегий оптимизаторов. Считаем, что этому множеству соответствует выбор $p = 2$. Функция $f(x)$ обозначает нервные потери оптимизатора за день, если оптимизатор в этот день использовал стратегию $x \in Q$. Однако значение функции $f(x)$ не наблюдаемы. Оптимизатор, использовавший в k -й день стратегию x^k , может наблюдать лишь зашумленную реализацию значения этой функции $f(x^k, \xi^k)$.

Рассматривается два способа жить на такой планете: 1) жить одному, 2) жить вдвоем. В случае 1) оптимизатор может получать каждый день только обратную связь вида (7), а вот в случае 2), за счет сговора, каждому можно рассчитывать на обратную связь вида (8). Из теоремы 5 и замечания 3 (в онлайн варианте) получаем, что в случае 1) необходимо (и достаточно) прожить $N = C_1 B^2 M_2^2 R^2 n^2 / \varepsilon^4$ дней, чтобы обеспечить выполнение условия

$$E[\text{Regret}_N] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E[f(x^k)] - \min_{x \in Q} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x) \leq \varepsilon.$$

В случае 2) для этой же цели достаточно прожить $N = C_2 M_2^2 R^2 n / \varepsilon^2$ дней. Здесь $C_1, C_2 \leq 100$. Интересно заметить, что если жить втроем, вчетвером и т.д., то это лишь немного улучшает оценку $N = C_2 M_2^2 R^2 n / \varepsilon^2$. А именно, если $2k$ оптимизаторов живут вместе и могут согласовывать свои стратегии, исходя из общедоступной информации, то $N \approx (C_2/k) M_2^2 R^2 n / \varepsilon^2$.

4 Стохастический зеркальный спуск и нащупывание равновесия в популяционной игре загрузки

В данном разделе, базируясь на работе (Гасников 2016: 57-77), рассматривается приложение результатов раздела 2 к решению задач поиска равновесного распределения потоков в транспортных сетях.

Рассматривается транспортная сеть, которую можно представить ориентированным графом $\langle V, E \rangle$, где V – множество вершин, а E – множество ребер. Обозначим множество пар источник-сток через $OD \subseteq V \otimes V$; d_w – корреспонденция, отвечающая паре w ; x_p – поток по пути p ; P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции w , $P = \bigcup_{w \in OD} P_w$ – множество всех путей. Обозначим через H – максимальное число ребер в пути из P .

Затраты на прохождение ребра $e \in E$ описываются неубывающей и ограниченной в рассматриваемом диапазоне значений функцией

$$0 \leq \tau_e(f_e) \leq \tilde{M},$$

где f_e – поток по ребру e ,

$$f_e(x) = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p, \quad \delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in p \\ 0, & e \notin p \end{cases}.$$

Положим $\tilde{M} = \tilde{M} \cdot H$. Введем затраты на проезд по пути p

$$G_p(x) = \sum_{e \in E} \tau_e(f_e(x)) \delta_{ep}.$$

Введем также множество

$$X = \left\{ x \geq 0 : \sum_{p \in P_w} x_p = d_w, \quad w \in OD \right\},$$

и функцию, порождающее потенциальное векторное поле $G(x)$:

$$\Psi(x) = \sum_{e \in E} \int_0^{f_e(x)} \tau_e(z) dz.$$

Основное свойство этой функции заключается в том, что

$$\nabla \Psi(x) = G(x).$$

Будем считать, что число пользователей транспортной сети большое

$$d_w := d_w \cdot \bar{N}, \quad \bar{N} \gg 1, \quad w \in OD,$$

но в функциях затрат это учитывается

$$\tau_e(f_e) := \tau_e(f_e / \bar{N}).$$

Таким образом, далее под d_w , x , f будем понимать соответствующие прошкалированные по $\bar{N}$ величины (Sandholm 2010: 1-616).

Выберем корреспонденцию $w \in OD$ и рассмотрим пользователя транспортной сети, соответствующего этой корреспонденции. Стратегией пользователя является выбор одного из возможных путей следования $p \in P_w$. Будем считать, что пользователь мало что знает об устройстве транспортной системы и о формировании своих затрат. Все что доступно пользователю на шаге $k+1$ – это история затрат на разных путях, соответствующих его корреспонденции, на всех предыдущих шагах $\left\{ l_p^r = \{G_p(x^r)\}_{p \in P_w} \right\}_{r=1}^k$. Для простоты рассуждений мы не зашумляем эту информацию, считая что доступны

точные значения имевших место затрат. Все последующие рассуждения можно обобщить и на случай зашумленных данных.

Допуская, что $0 \leq \{l_p^k\} \leq \tilde{M}$ могут выбираться враждебно, пользователь стремится действовать оптимальным образом, то есть так, как предписывает стратегия из примера 2 с $i = p$, $n = n_w = |P_w|$. Заметим, что при некоторых дополнительных оговорках (Lugosi 2006: 135-170) случайный выбор пути согласно рандомизированному варианту МЗС из примера 2 может быть осуществлен за время $O(|E|)$, что не зависит от n , которое может быть намного больше, как это имеет место, например, для манхетенской сети.

Представим себе, что остальные пользователи ведут себя аналогичным образом, но независимо (в вероятностном плане) друг от друга. Тогда в пределе $\tilde{N} \rightarrow \infty$ такая стохастическая марковская динамика в дискретном времени вырождается в детерминированную динамику $x^k \in \prod_{w \in OD} S_{n_w}(1)$, $k = 1, \dots, N$ в дискретном времени, и имеет место следующий результат.

Теорема 6.

$$\bar{x}^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x^k, \quad \Psi_* = \Psi(x_*), x_* \in \operatorname{Arg} \min_{x \in X} \Psi(x).$$

Тогда

$$\Psi(\bar{x}^N) - \Psi_* \leq \frac{M}{\sqrt{N}} \frac{\max_{w \in OD} \{\ln n_w\}}{\sqrt{2 \min_{w \in OD} \{\ln n_w\}}} \left(\sum_{w \in OD} d_w^2 + 1 \right).$$

Решение x_* часто называют равновесием Нэша(–Вардропа) в описанной выше классической модели равновесного распределения потоков по путям (Beckmann 1955: 1-323). Такая "онлайн"интерпретация этого равновесия, насколько нам известно, приводится впервые.

К аналогичному равновесию можно было прийти и по-другому. Вторым подход воспроизводит logit-динамику в соответствующей описанной модели популяционной игре загрузки. Приводимый далее способ рассуждения пополняет аналогичные известные ранее результаты, полученные сразу в непрерывном времени (Sandholm 2010: 1-616).

Пусть теперь l -й пользователь, принадлежащий корреспонденции $w \in W$, независимо от всех остальных пользователей на шаге $k + 1$ с вероятностью $1 - \lambda/N$ выбирает путь $p^{l,k}$, который использовал на шаге $k = 0, \dots, tN$, а с вероятностью λ/N ($\lambda > 0$) решает изменить путь и выбирает (возможно, тот же самый) зашумленный кратчайший путь

$$p^{l,k+1} = \arg \max_{q \in P_w} \{-G_q(x^k) + \xi_q^{l,k+1}\},$$

$$G_q(x) = \sum_{e \in E} \tau_e(f_e(x)) \delta_{eq}, \quad f_e(x) = \sum_{p \in P} \delta_{ep} x_p, \quad \delta_{ep} = \begin{cases} 1, & e \in p \\ 0, & e \notin p \end{cases};$$

где независимые случайные величины $\xi_q^{l,k+1}$ одинаково распределены

$$P(\xi_q^{l,k+1} < \zeta) = \exp\{-e^{-\zeta/\gamma-E}\}, \quad \gamma > 0.$$

Такое распределение обычно называю распределение Гумбеля или двойным экспоненциальным распределением. Возникает оно здесь не случайно (Andersen 1992: 1-423). В математической экономике имеется целое направление Discrete choice theory, которое объясняет использование именно такого распределения. А именно, распределение Гумбеля можно объяснить исходя из идемпотентного аналога центральной предельной теоремы (вместо суммы случайных величин – максимум) для независимых случайных величин с экспоненциальным и более быстро убывающим правым хвостом. Распределение Гумбеля возникает в данном контексте, например, если при принятии решения водитель собирает информацию с большого числа разных (независимых) зашумленных источников, ориентируясь на худшие прогнозы по каждому из путей. Также это распределение удобно тем, что есть явная формула

$$P(p^{l,k+1} = p | \text{агент решил "поменять" путь}) = \frac{\exp(-G_p(x^k)/\gamma)}{\sum_{q \in P_w} \exp(-G_q(x^k)/\gamma)}.$$

Если взять $E \approx 0.5772$ – константа Эйлера, то

$$E[\xi_q^{l,k+1}] = 0, \quad D[\xi_q^{l,k+1}] = \gamma^2 \pi^2 / 6.$$

Пусть $N \rightarrow \infty$. Тогда описанная марковская динамика в дискретном времени перейдет в марковскую динамику в непрерывном времени. Если $t \rightarrow \infty$, то полученный таким образом марковский процесс в виду эргодичности выйдет на стационарную меру (теорема типа Санова)

$$\sim \exp\left(-\frac{\bar{N}}{\gamma} \cdot (\Psi_\gamma(x) + o_{\bar{N}}(1))\right), \quad \bar{N} \gg 1,$$

где

$$\Psi_\gamma(x) = \Psi(x) + \gamma \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} x_p \ln x_p.$$

При $\bar{N} \rightarrow \infty$ эта мера экспоненциально быстро концентрируется в окрестности "стохастического" равновесия (Sheffi 1985: 1-416), которое определяется из решения задачи

$$\Psi_\gamma(x) \rightarrow \min_{x \in X}. \quad (13)$$

Поскольку $\Psi_\gamma(x)$ – строго выпуклая функция, то стохастическое равновесие всегда единственно.

Отметим, что при $\gamma \rightarrow 0+$ описанная выше logit-динамика вырождается в одну из самых популярных и естественных динамик в популяционной теории игр (Sandholm 2010: 1-616) – динамику наилучших ответов. При этом стохастическое равновесие вырождается в равновесие Нэша(–Вардропа). Если последних равновесий много, то описанный выше предельный переход $\gamma \rightarrow 0+$ можно понимать как естественный способ отбора единственного (Гасникова 2012: 1-90). "Естественный", потому что связан с естественно интерпретируемой энтропийной регуляризацией.

Приведенная выше трактовка равновесия с точки зрения популяционной теории игр допускает и эволюционную (дарвиновскую) интерпретацию. Если под разными типами корреспонденций понимать разные типы популяций. Под пользователями, использующими внутри заданной корреспонденции–популяции заданный маршрут, понимать заданный вид внутри заданной популяции, то динамика наилучших ответов – это просто естественный отбор (борьба за существование), в результате которого "выживет" такая конфигурация видов, которая максимально приспособлена. Таким образом, равновесие Нэша(–Вардропа) может быть тут также проинтерпретировано, как результат естественного отбора, т.е. как равновесие Дарвина. Причем, поскольку $x_* \in \operatorname{Arg} \min_{x \in X} \Psi(x)$, то имеет место эволюционная оптимальность с функционалом $\Psi(x)$ (Разжевайкин 2010: 1-174).

К сожалению, хорошо интерпретируемый способ поиска x_* из теоремы 6 не является наиболее подходящим численным методом поиска x_* . Тому как именно стоит численно искать x_* планируется посвятить отдельные работы. В завершении данного раздела приведены необходимые и также интерпретируемые выкладки по переформулировки исходной задачи (12), с целью возможности ее последующего эффективного численного решения.

Запишем, следуя (Гасников 2015: 129-142) двойственную задачу к задаче (13), используя обозначение $\operatorname{dom} \sigma^*$ – область определения сопряженной к σ функции:

$$\begin{aligned} & \min_{f,x} \left\{ \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e) + \gamma \sum_{w \in OD} \sum_{p \in P_w} x_p \ln(x_p/d_w) : f = \Theta x, x \in X \right\} = \\ & = \min_{f,x} \left\{ \sum_{e \in E} \max_{t_e \in \operatorname{dom} \sigma_e^*} [f_e t_e - \sigma_e^*(t_e)] + \gamma \sum_{w \in OD} \sum_{p \in P_w} x_p \ln(x_p/d_w) : f = \Theta x, x \in X \right\} = \\ & = \max_{t \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ \min_{f,x} \left[\sum_{e \in E} f_e t_e + \gamma \sum_{w \in OD} \sum_{p \in P_w} x_p \ln(x_p/d_w) : f = \Theta x, x \in X \right] - \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) \right\} = \\ & = - \min_{t \in \operatorname{dom} \sigma^*} \left\{ \gamma \psi(t/\gamma) + \sum_{e \in E} \sigma_e^*(t_e) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \sum_{w \in OD} d_w \psi_w(t), \quad \psi_w(t) = \ln \left(\sum_{p \in P_w} \exp \left(- \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e \right) \right), \\ f &= -\nabla \gamma \psi(t/\gamma), \quad x_p = d_w \frac{\exp \left(-\frac{1}{\gamma} \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e \right)}{\sum_{q \in P_w} \exp \left(-\frac{1}{\gamma} \sum_{e \in E} \delta_{eq} t_e \right)}, \quad p \in P_w, \end{aligned} \quad (15)$$

для

$$\tau_e(f_e) = \bar{t}_e \cdot \left(1 + \rho \cdot \left(\frac{f_e}{\bar{f}_e} \right)^{\frac{1}{\mu}} \right),$$

$$\sigma_e^*(t_e) = \sup_{f_e \geq 0} \left((t_e - \bar{t}_e) \cdot f_e - \bar{t}_e \cdot \frac{\mu}{1 + \mu} \cdot \rho \cdot \frac{f_e^{1 + \frac{1}{\mu}}}{\bar{f}_e^{\frac{1}{\mu}}} \right) = \bar{f}_e \cdot \left(\frac{t_e - \bar{t}_e}{\bar{t}_e \cdot \rho} \right)^\mu \frac{(t_e - \bar{t}_e)}{1 + \mu}.$$

В приложениях наиболее популярны BPR-функции, в которых $\mu = 1/4$.

Собственно, формула (15) есть не что иное, как отражение формулы $f = -\nabla \gamma \psi(t/\gamma)$ и связи $t_e = \tau_e(f_e)$, $e \in E$. Действительно, по формуле Демьянова–Данскина–Рубинова

$$\frac{d\sigma_e^*(t_e)}{dt_e} = \frac{d}{dt_e} \max_{f_e \geq 0} \left\{ t_e f_e - \int_0^{f_e} \tau_e(z) dz \right\} = f_e : \quad t_e = \tau_e(f_e).$$

В свою очередь, формула $f = -\nabla \gamma \psi(t/\gamma)$ может интерпретироваться, как следствие соотношений $f = \Theta x$ и формулы распределения Гиббса (логит-распределения)

$$x_p = d_w \frac{\exp \left(-\frac{1}{\gamma} \sum_{e \in E} \delta_{ep} t_e \right)}{\sum_{q \in P_w} \exp \left(-\frac{1}{\gamma} \sum_{e \in E} \delta_{eq} t_e \right)}, \quad p \in P_w.$$

При такой интерпретации связь задачи (15) с логит-динамикой, порождающей стохастические равновесия, наиболее наглядна.

5 Заключение

Рассмотрен стохастический зеркальный спуск и безградиентные методы, а также исследована возможность параллелизации вычислений при решении класса задач выпуклой стохастической оптимизации. Результаты применены к решению задач поиска равновесного распределения потоков в транспортных сетях, и показана зависимость скорости сходимости оптимальных алгоритмов в задачах стохастической безградиентной оптимизации, в зависимости от числа обращений к оракулу за реализацией функции на каждой итерации. Теоретические утверждения объяснены на наглядных примерах.

6 Благодарности

Работа поддержана грантом РФФИ 15-31-70001-мол_а_мос.

Список литературы

- [1] Agarwal A., Dekel O., Xiao L. Optimal algorithms for online convex optimization with multi-point bandit feedback // Proceedings of 23 Annual Conference on Learning Theory. - 2010. - P. 28-40.
- [2] Andersen S.P., de Palma A., Thisse J.F. Discrete choice theory of product differentiation. - Cambridge: MIT Press, 1992.- 423 p.
- [3] Beckmann M., McGuire C.B., Winsten C. Studies in the economics of transportation. - RM-1488. Santa Monica: RAND Corporation, 1955. - 323 p.
- [4] Bubeck S., Cesa-Bianchi N. Regret analysis of stochastic and nonstochastic multi-armed bandit problems // Foundation and Trends in Machine Learning. - 2012. - V. 5, № 1. - P. 1-122.

- [5] *Bubeck S., Eldan R.* Multi-scale exploration of convex functions and bandit convex optimization // e-print, 2015. - URL: <http://research.microsoft.com/en-us/um/people/sebubeck/ConvexBandits.pdf> (дата обращения: 09.07.2017)
- [6] *Duchi J.C., Jordan M.I., Wainwright M.J., Wibisono A.* Optimal rates for zero-order convex optimization: the power of two function evaluations // IEEE Transaction of Information. - 2015. - V. 61, № 5. - P. 2788-2806.
- [7] *Hazan E.* Introduction to online convex optimization // Foundations and Trends in Optimization. - 2016. - V. 2, № 3-4. P. 157-325.
- [8] *Hazan E., Kale S.* Beyond the regret minimization barrier: Optimal algorithms for stochastic strongly-convex optimization // JMLR. - 2014. - V. 15. - P. 2489-2512.
- [9] *Juditsky A., Lan G., Nemirovski A., Shapiro A.* Stochastic approximation approach to stochastic programming // SIAM Journal on Optimization. - 2009. - V. 19, № 4. - P. 1574-1609.
- [10] *Juditsky A., Nemirovski A.* First order methods for nonsmooth convex large-scale optimization, I, II. // Optimization for Machine Learning. - 2012. - MIT Press. - P. 1-63.
- [11] *Ledoux M.* Concentration of measure phenomenon. - Amer Mathematical Society, 2001. - 192 p.
- [12] *Lugosi G., Cesa-Bianchi N.* Prediction, learning and games. - New York: Cambridge University Press, 2006. - 403 p.
- [13] *Nemirovski A.* Lectures on modern convex optimization analysis, algorithms, and engineering applications. Philadelphia: SIAM. - 2016. - URL: <http://www2.isye.gatech.edu/nemirovs/LectModConvOpt.pdf> (дата обращения: 12.08.2017)
- [14] *Nesterov Yu.* Primal-dual subgradient methods for convex problems // Math. Program. Ser. B. - 2009. - V. 120, №1 - P. 261-283.
- [15] *Nesterov Y., Vial J.-Ph.* Confidence level solution for stochastic programming // Automatica. - 2008. - V. 44, № 6. - P. 1559-1568.
- [16] *Sandholm W.* Population games and Evolutionary dynamics. Economic Learning and Social Evolution. - Cambridge: MIT Press, 2010. - 616 p.
- [17] *Sheffi Y.* Urban transportation networks: Equilibrium analysis with mathematical programming methods. - N.J.: Prentice-Hall Inc, 1985. - 416 p.
- [18] *Гасников А.В., Гасникова Е.В., Мацеевский С.В., Усик И.В.* О связи моделей дискретного выбора с разномасштабными по времени популяционными играми загрузок // Труды МФТИ. - 2015. - Т. 7, № 4. - С. 129-142.
- [19] *Гасников А.В., Крымова Е.А., Лагуновская А.А., Усманова И.Н., Федоренко Ф.А.* Стохастическая онлайн оптимизация. Одноточечные и двухточечные нелинейные многорукые бандиты. Выпуклый и сильно выпуклый случай. // Автоматика и Телемеханика. - 2017. - № 2. - С. 36-49.
- [20] *Гасников А.В., Лагуновская А.А., Морозова Л.Э.* О связи имитационной логит динамики в популяционной теории игр и метода зеркального спуска в онлайн оптимизации на примере задачи выбора кратчайшего маршрута. // Труды МФТИ. - 2015. - Т. 7, № 4. - С. 104-113.
- [21] *Гасников А.В., Лагуновская А.А., Усманова И.Н., Федоренко Ф.А.* Безградиентные прокс-методы с неточным оракулом для негладких задач выпуклой стохастической оптимизации на симплексе. // Автоматика и телемеханика. - 2016. - № 10. - С. 57-77.
- [22] *Гасникова Е.В.* Моделирование динамики макросистем на основе концепции равновесия: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. - М.: МФТИ, 2012. - 90 с.
- [23] *Немировский А.С., Юдин Д.Б.* Сложность задач и эффективность методов оптимизации. - Москва: Наука, 1979. - 384 с.
- [24] *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. - М.: Наука, 1983. - 384 с.
- [25] *Разжевский В.Н.* Анализ моделей динамики популяций. Учебное пособие. - М.: МФТИ, 2010. - 174 с.

References

- [1] Agarwal A., Dekel O. and Xiao L., "Optimal Algorithms for Online Convex Optimization with Multi-Point Bandit Feedback." *Proceedings of 23 Annual Conference on Learning Theory* (2010): 528.
- [2] Andersen S.P., de Palma A. and Thisse J.F., *Discrete Choice Theory of Product Differentiation*. (Cambridge: MIT Press, 1992), 423.
- [3] Beckmann M., McGuire C.B. and Winsten C. *Studies in the Economics of Transportation*. (Santa Monica: RAND Corporation, 1955), 323.
- [4] Bubeck S. and Cesa-Bianchi N., "Regret Analysis of Stochastic and Nonstochastic Multi-Armed Bandit Problems" *Foundation and Trends in Machine Learning* 5(2012): 122.
- [5] Bubeck S. and Eldan R., "Multi-Scale Exploration of Convex Functions and Bandit Convex Optimization" e-print, 2015, <http://research.microsoft.com/en-us/um/people/sebubeck/ConvexBandits.pdf>
- [6] Duchi J.C., Jordan M.I., Wainwright M.J. and Wibisono A., "Optimal Rates for Zero-Order Convex Optimization: the Power of Two Function Evaluations" *IEEE Transaction of Information* 61(2015): 2952.
- [7] Gasnikov A.V., Gasnikova Ye.V., Matsiyevskiy S.V. and Usik I.V., "O Svyazi Modeley Diskretnogo Vyбора s Raznomasshtabnymi po Vremeni Populyatsionnymi Igrami Zagruzok" *Trudy MFTI*. 7(2015): 204.
- [8] Gasnikov A.V., Krymova Ye.A., Lagunovskaya A.A., Usmanova I.N. and Fedorenko F.A., "Stokhasticheskaya Onlain Optimizatsiya. Odnotochechnyye i Dvukhtocheynyye Nelineynyye Mnogorukiye Bandity. Vypuklyy i Sil'no Vypuklyy Sluchai." *Avtomatika i Telemekhanika* 2(2017): 144.
- [9] Gasnikov A.V., Lagunovskaya A.A. and Morozova L.E., "O Svyazi Imitatsionnoy Logit Dinamiki v Populyatsionnoy Teorii Igr i Metoda Zerkal'nogo Spuska v Onlayn Optimizatsii na Primere Zadachi Vyбора Kratchayshego Marshruta." *Trudy MFTI* 7(2015): 204.
- [10] Gasnikov A.V., Lagunovskaya A.A., Usmanova I.N. and Fedorenko F.A., "Bezgradiyentnyye Proks-Metody s Netochnym Orakulom Dlya Negladkikh Zadach Vypukloy Stokhasticheskoy Optimizatsii na Simplekse" *Avtomatika i telemekhanika* 10(2016): 166.
- [11] Gasnikova Ye.V., "Modelirovaniye Dinamiki Makrosistem na Osnove Kontseptsii Ravnovesiya" (Associate prof. diss., MFTI, 2012).
- [12] Hazan E., "Introduction to Online Convex Optimization." *Foundations and Trends in Optimization* 2(2016): 325.
- [13] Hazan E. and Kale S., "Beyond the Regret Minimization Barrier: Optimal Algorithms for Stochastic Strongly-Convex Optimization." *JMLR* 15(2014): 2512.
- [14] Juditsky A., Lan G., Nemirovski A. and Shapiro A., "Stochastic Approximation Approach to Stochastic Programming." *SIAM Journal on Optimization* 19 (2009): 2014.
- [15] Juditsky A. and Nemirovski A., "First Order Methods for Nonsmooth Convex Large-Scale Optimization, I, II." *Optimization for Machine Learning* (2012): 63.
- [16] Ledoux M., *Concentration of Measure Phenomenon* (Amer Mathematical Society, 2001), 192.
- [17] Lugosi G. and Cesa-Bianchi N., *Prediction, Learning and Games*. (New York: Cambridge University Press, 2006), 403.
- [18] Nemirovski A., "Lectures on Modern Convex Optimization Analysis, Algorithms, and Engineering Applications." Philadelphia: SIAM, 2016, accessed August 12, 2017, <http://www2.isye.gatech.edu/nemirovs/LectModConvOpt.pdf>.
- [19] Nemirovski A.C. and Judin D.B., *Lozhnost' Zadach i Effektivnost' Metodov Optimizatsii* (Moscow: Nauka, 1979), 384.
- [20] Nesterov Yu., "Primal-Dual Subgradient Methods for Convex Problems." *Math. Program. Ser. B*. 120(2009): 287.
- [21] Nesterov Y. and Vial J.-Ph., "Confidence Level Solution for Stochastic Programming." *Automatica* 44(2008): 1652.
- [22] Polyak B.T., *Vvedeniye v Optimizatsiyu* (Moscow: Nauka, 1983), 384.
- [23] Sandholm W., *Population Games and Evolutionary Dynamics. Economic Learning and Social Evolution*. (Cambridge: MIT Press, 2010), 616.

- [24] Sheffi Y., *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis With Mathematical Programming Methods*. (N.J.: Prentice-Hall Inc, 1985), 416.
- [25] Razzhevaykin V.N., *Analiz Modeley Dinamiki Populyatsiy. Uchebnoye posobiye*. (Moscow: MFTI, 2010), 174.

ГРНТИ 517.958; 504:629.78

Создание базы данных входных параметров для моделирования динамики облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя

Большакова Н.А., начальник отдел геоинформационных систем,
РГП Научно-исследовательский центр «Ғарыш-Экология»,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77772507741, E-mail: natylya_b@mail.ru
Жубат К.Ж., PhD, РГП Научно-исследовательский центр «Ғарыш-Экология»,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77015157915, E-mail: zhubat@mail.ru
Зенина А.С., ведущий научный сотрудник, РГП Научно-исследовательский центр
«Ғарыш-Экология»,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77054474979, E-mail: Abelhodzhayeva@mail.ru
Каржаубаев К.К., докторант, КазНУ им. аль-Фараби
г. Алматы, Республика Казахстан, +77073569961, E-mail: kairzhan.k@gmail.com

Использование возможностей геоинформационной системы (ГИС) широко распространено среди специалистов, работающих с большими объемами данных. Преимуществом ГИС по сравнению с другими информационными системами является наличие цифровой карты, дающей информацию о земной поверхности. Благодаря этому ГИС часто привлекают для моделирования динамических процессов. В данной статье рассмотрена база данных ГИС, созданная для моделирования формирования и динамики облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя. С помощью ГИС собраны и систематизированы входные параметры для модели, подготовлена картографическая основа. После интеграции базы данных в программный комплекс, обеспечивающий функционирование модели, все формы ввода параметров получили прямой доступ к данным. Картографическая основа, размещенная в главном окне интерфейса, позволяет визуализировать движение облака над земной поверхностью, изменение его размеров, а также с помощью картометрических функций получать интересные площади и расстояния. Пополнение карты новыми «слоями» особо охраняемых природных территорий, почвенного покрова подтрассовой территории или инфраструктуры дает возможность извлечь дополнительную необходимую информацию. База данных также является хранилищем для результатов моделирования, которые возможно будут использоваться для экологической оценки влияния облака на окружающую природную среду.

Ключевые слова: база данных, геоинформационная система, авария ракеты-носителя, моделирование, программный комплекс, входные параметры.

Зымыран-тасығыштың жерүсті жарылуы кезінде пайда болған бұлттың динамикасын үлгілеуге арналған кірістік параметрлердің деректер базасын құру

Большакова Н.А., геоақпараттық жүйелер бөлім бастығы, «Ғарыш-Экология» ғылыми-зерттеу орталығы РМК,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77772507741, E-mail: natylya_b@mail.ru
Жұбат Қ.Ж., PhD, «Ғарыш-Экология» ғылыми-зерттеу орталығы РМК,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77015157915, E-mail: zhubat@mail.ru
Зенина А.С., жетекші зерттеуші «Ғарыш-Экология» ғылыми-зерттеу орталығы РМК,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77054474979, E-mail: Abelhodzhayeva@mail.ru
Каржаубаев Қ.Қ., докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77073569961, E-mail: kairzhan.k@gmail.com

Геоақпараттық жүйенің (ГАЗ) мүмкіндіктерін деректердің үлкен көлемімен жұмыс істейтін мамандар кеңінен пайдаланады. ГАЗ-дың басқа геоақпараттық жүйелермен салыстырғандағы артықшылығы сол, онда жер беті туралы ақпарат беретін цифрлық карта бар. Соның арқасында ГАЗ динамикалық үдерістерді үлгілеуде жиі қолданылып отырады.

Бұл мақалада зымыран-тасығыштың жерүсті жарылуы кезінде пайда болған бұлттың қалыптасуы мен динамикасын үлгілеуге арнап құрылған ГАЖ-дың деректер базасы қарастырылған. ГАЖ-дың көмегімен үлгіге арналған кірістік параметрлер жинақталып және жүйеге келтірілді, картографиялық негіз құрылды. Деректер базасы үлгінің әрекеттілігін қамтамасыз ететін бағдарламалық кешенге біріктірілгеннен кейін параметрлерді енгізудің барлық нысандары деректер базасына тікелей қатынау мүмкіндігіне ие болды. Интерфейстің басты терезесінде орналасқан картографиялық негіз жер беті үстіндегі бұлттың қозғалысын, оның мөлшерінің өзгерісін көзбен шолуға, сонымен бірге картометриялық қызметтер көмегімен маңызды аудандар мен арақашықтықтарды алуға мүмкіндік береді. Ерекше қорғалатын табиғи аймақтардың, трасса астындағы аймақтың топырақ жамылғысының немесе инфрақұрылымының картасын жаңа «қабаттармен» толтыру қосымша қажетті ақпараттарды алуға мүмкіндік береді. Сондай-ақ деректер базасы бұлттың қоршаған табиғи ортаға тигізетін әсерін экологиялық бағалау үшін пайдаланылуы мүмкін модельдеу нәтижелері үшін қойма болып табылады.

Түйін сөздер: Деректер базасы, геоақпараттық жүйе, зымыран-тасығыштың апатқа өшырауы, үлгілеу, бағдарламалық кешен, кірістік параметрлер.

Creation of the input parameters database for modeling of dynamics of the cloud formed at carrier rocket surface explosion

Bolshakova N.A., Head of Department of Geoinformation Systems, RSE Scientific and Research Center "Garish-Ecology"

Almaty, Republic of Kazakhstan, +77772507741, E-mail: natylya_b@mail.ru

Zhubat K.Zh., PhD, RSE Scientific and Research Center "Garish-Ecology"

Almaty, Republic of Kazakhstan, +77015157915, E-mail: zhubat@mail.ru

Zenina A.S., Leading researcher, RSE Scientific and Research Center "Garish-Ecology"

Almaty, Republic of Kazakhstan, +77054474979, E-mail: Abelhodzhayeva@mail.ru

Karzhabayev K.K., doctoral student, al-Farabi Kazakh National University,

Almaty, Republic of Kazakhstan, +77073569961, E-mail: kairzhan.k@gmail.com

Use of geographic information system (GIS) opportunities is widespread among the experts working with large volumes of data. Advantage of GIS in comparison with other information systems is existence of the digital card giving land surface information. Because of this GIS often use for dynamic processes modeling. In this article the GIS database created for the model of formation and dynamics of the cloud formed at carrier rocket surface explosion is considered. By means of GIS the model input parameters are collected and systematized, the cartographical basis is prepared. After database integration into the program complex providing model functioning, all input parameters forms had access to the database. The cartographical basis placed in a primary interface window allows to visualize the cloud movement over land surface and his sizes change also with the help the map-metric functions to receive the pertinent squares and distances. The addition of the map new "layers" of especially protected natural territories, of a soil cover or infrastructure subroute territory gives the chance to take additional necessary information. The database is also storage for modeling results which will be perhaps used for ecological assessment of cloud influence on the surrounding environment.

Key words: Database, geographic information system, carrier rocket accident, modelling, program complex, input parameters.

1 Введение

Возникновение аварийных ситуаций при пусках ракет-носителей приводит к падению тяжелой ракетной техники с большой высоты. При столкновении с поверхностью земли топливные баки разрушаются, остатки ракетного топлива самовоспламеняются и взрываются. Образовавшееся результате взрыва облако за счет турбулентных потоков расширяется, и движется под действием силы ветра.

Экологическая оценка воздействия такого облака на окружающую среду требует определения продуктов взрыва, их взаимодействия с окружающей средой. Проведение экспериментальных замеров для выявления состава облака не возможно, поскольку аварийная ситуация не предсказуема, а процесс образования облака скоротечен. Поэтому для исследования формирования облака и его динамики используются методы математического моделирования.

С 2015 по 2017 годы РГП «НИЦ «Гарыш-Экология» совместно с ДГП «Научно-исследовательский институт математики и механики» КазНУ им. аль-Фараби выполняют научную работу по теме «Разработка программного комплекса моделирования динамики облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя». Основными целями проекта является разработка математической модели образования и переноса облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя и создание пользовательской программной среды для функционирования модели (Жубатов, 2015: 1-152).

Научными сотрудниками ДГП «НИИ математики и механики» разработана разработаны математические модели образования облака с учетом мощности взрыва, переноса облака под действием силы ветра, создан программный комплекс для функционирования модели. Назначением ГИС в этом проекте является сбор, систематизация и хранение входных параметров модели; предоставление данных для форм ввода и обеспечение главного окна программного комплекса картографической основой для визуализации результатов моделирования.

2 Обзор литературы

Применение ГИС в моделировании широко используется в настоящее время. Так, для оценки экологического риска вредных химических веществ – диоксинов, вырабатываемых из установок для сжигания отходов в области Tokyo Metropolis (Япония), использовались модели атмосферной дисперсии и ГИС. Исследовано поведение диоксинов, выбрасываемых в атмосферу из установок. Наложение атмосферных уровней и данных о населении и землепользовании позволило оценить влияние диоксинов на человека и окружающую среду количественно и визуально (Ishii, 2014: 1392-1408). Необходимость использования ГИС при моделировании атмосферной дисперсии отмечена авторами (Jakala, 2007:1-20). В статье приводится пример анализа сценария аварийного выброса. С помощью ГИС проанализирована область, затронутая шлейфом, создан сводный отчет о людях и ресурсах, которые находятся в опасности. Авторы (Fan, 2011:178-181) указывают на важную роль ГИС в охране окружающей среды - в экологическом мониторинге воды, воздуха и экологических шумов. Большое внимание уделено объединению ГИС с пакетами программ, которые более непосредственно настроены на потребности моделирования. Например, пакет Matlab является широко используемым набором инструментов из-за его мощных математических подпрограмм. Пакеты программ могут быть связаны с ГИС путем обмена файлами - ГИС может использоваться для подготовки входов, которые затем передаются в пакет моделирования, а после выполнения результаты моделирования будут возвращены в ГИС для отображения и анализа. Связь может принимать форму интеграции ГИС с пакетами моделирования с использованием таких стандартов, как Microsoft COM и .Net, которые позволяют одному сценарию вызывать команды из обоих пакетов (Goodchild, 2008: 2-15), (Ungerer, 2002: 41-54).

3 Материал и методы

Для создания базы данных (БД) привлечена программа ArcGIS 10.1 for Desktop Advanced (ArcInfo). Выбор программы ArcGIS обусловлен удобным интерфейсом. Приложение ArcCatalog обеспечивает доступ и управление данными, организует базы геоданных для их хранения. В приложении ArcMap создаются и редактируются классы пространственных объектов, формируются тематические карты. Приложение ArcToolbox содержит множество функций и инструментов для обработки данных. Дополнительные модули ArcGIS, такие как Spatial Analyst, 3D Analyst позволяют проводить расширенный ГИС-анализ. Векторный формат данных Shapefile имеет ряд преимуществ перед другими источниками данных, например, более быструю прорисовку; требует меньшей дисковой памяти (за счет хранения данных в двоичном виде), более прост при чтении и записи. Поэтому этот формат был выбран для интеграции базы данных в программный комплекс (Shaner, 2002:8, 84), (Зейлер, 2001: 34-68), (Митчел, 2001:98-114). Входными параметрами для модели являются метеорологические данные, расчетные характеристики взрыва – количество остатков компонентов ракетного топлива на момент взрыва, мощность взрыва, размер воронки, масса поднятой взрывом почвы, физико-химические характеристики составляющих облака и др. БД «Model. Avaria RN» состоит из четырех блоков: MeteoBaza, VzrivParametryBaza, VzrivHimOblBaza, и OsnovaBaza. Информационные таблицы базы данных сформированы в формате dBASE в виду отсутствия у них географической привязки, за исключением таблиц блока «OsnovaBaza». Для каждой таблицы заполнены описания, содержащие даты создания таблиц, расшифровки сокращений, важные замечания и не внесенные в таблицу данные, рекомендации и другую полезную информацию (Жубатов, 2015: 7-34). *Метеорологические данные («MeteoBaza»)*. Погодные условия, несомненно, влияют на процессы, происходящие внутри облака, определяют направление движения облака, скорость его рассеяния. В качестве источника метеоданных привлекались государственные стандарты по параметрам стандартной и справочной атмосферы. В блоке собраны значения температуры, давления и плотности для высот от поверхности земли через 50 м. Аналогичные данные внесены для летних месяцев «июнь–июль» на широте 45°, распределение скорости ветра в июле на широте 40-60°, а также характеристики влажности воздуха в июле на широте 50°. Сформированы таблицы по метеорологическим данным на момент аварийных падений (Жубатов, 2015: 34-73).

Таблица 1 - Пример таблицы БД «Расчет мощности взрыва и размеров воронок» для РН «Протон-М»

№ п/п	Номер ступени	Время, с	Остаток КРТ, т	Мощность взрыва, т	Глубина воронки, м	Радиус воронки, м	Высота вала, м
1	1+2+3	0	652	83,46446	22,82381	32,60544	5,705952
2	1+2+3	1	648,4	83,1574	22,79578	32,56541	5,698946
3	1+2+3	2	644,8	82,84977	22,76764	32,52520	5,691910
4	1+2+3	3	641,2	82,54157	22,73937	32,48482	5,684843

Взрыв. Параметры («VzrivParametryBaza»). Большинство параметров этого блока расчетные - масса остатков компонентов ракетного топлива для каждой секунды по-

лета РН «Протон-М» и МБР РС-20 на активном участке траектории, мощность взрыва, радиус огненного шара, высота поднятия облака, размер воронки, масса поднятой взрывом почвы (таблица, высота вала и др. В таблице 1). приведен пример таблицы БД. Также в блок вошли сведения о состоянии почвы на местах аварийных падений ракет-носителей. В качестве источника информации привлекались материалы экспедиционных исследований на местах аварийных падений. Для БД отбирались характеристики ненарушенных почв, находящихся в радиусе не более одного километра от мест аварийного падения.

Составляющие облака («VzrivHimOblBaza»). В состав блока вошли физико-химические характеристики составляющих облака – газовых компонентов (оксид углерода, диоксид углерода, азот, оксид азота, диоксид азота, водяной пар) и частиц сажи и почвы (Адушкина, 2000: 8-42).

Векторная картографическая основа («OsnovaBaza»). Блок включает следующие наборы классов пространственных объектов «OsnKartKaz» и «OsnPochPodtrass». В набор «OsnKartKaz» вошли классы: дорожная сеть, гидрографическая сеть, населенные пункты, административные области и районы, граница РК (картографическая основа центральной и восточной части Республики Казахстан масштаба 1:1 000 000), граница позиционного района космодрома «Байконур» (рисунок 1).

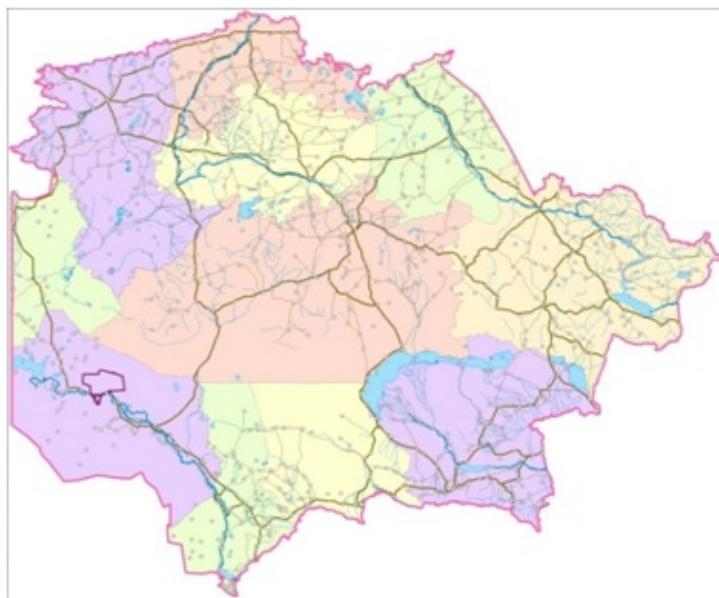


Рисунок 1 - Картографическая основа центральной и восточной части Республики Казахстан (масштаб: 1 : 1 000 000).

Дополнительно созданы также классы пространственных объектов - особо охраняемых природных территорий, объектов транспортного, горно-металлургического и топливно-энергетического комплексов (рисунок 2).



Рисунок 2 – Объекты транспортного, горно-металлургического и топливно-энергетического комплексов (класс пространственных объектов)

«OsnPochPodtrass» разработан с целью определения характеристик почвенного покрова на местах аварийных падений РН «Протон» и МБР. В набор вошли классы почвенного покрова подтрассовых территории РН «Протон» и МБР (рисунок 3). Общая площадь оцифрованной территории составила 45000 км².



Рисунок 3 – Почвенный покров подтрассовой территории МБР (класс пространственных объектов)

4 Результаты и обсуждение

Созданная база данных входных параметров и картографическая основа интегрированы в программный комплекс.

Все формы ввода входных параметров имеют возможность загружать данные из БД, например, метеоданные, физико-химические свойства газовых составляющих или расчетные данные остатков компонентов ракетного топлива. При вводе данных это позволяет пользователю избежать ошибок (На рисунке 4, показан пример загрузки входных параметров (метеоданных) из базы данных (блоки 1 и 2)).

Справка о метеорологических параметрах в районе комплекса "Байконур", 02 июля 2013 года

Введите параметры

Время: 8 3

Площадь: 92

Высота: 40

Сохранить Отменить 4

Блок 1: Таблица метеорологических параметров (Площадь 92)

Время	Температура	Влажность воз.	Атмосферное	Высота 10 м.			Высота 40 м.		
				Направление	Средняя скор.	Максимальная	Направление	Средняя скор.	Максимальная
8	18.6	45	738.5	10	6	8	20	7	8
9	17.4	59	738.4	10	5	8	20	5	8
10	19.8	70	738.6	20	4	7	30	4	7
11	19.5	54	738.9	360	5	6	20	5	6
12	21.5	44	738.7	360	7	9	10	7	8
13	20.3	49	738.9	350	8	11	360	8	10
14	17.5	68	739.2	350	7	9	10	6	9
15	19.9	56	739.2	360	5	7	10	5	6

Блок 2: Таблица метеорологических параметров (Площадь 6)

Время	Температура воздуха, °C	Влажность воздуха, %	Атмосферное давление, мм рт. ст.	Высота 10 м.		
				Направление	Средняя скор.	Максимальная
8	21.3	31	738.3	10	6	8
9	22.1	29	738.7	10	5	8
10	22.8	29	738.7	20	4	7
11	23.6	29	738.5	360	5	6
12	22.2	42	738.3	360	7	9
13	21.6	46	739.3	350	8	11
14	19.3	67	739.7	350	7	9
15	17.4	83	739.2	360	5	7

Рисунок 4– Окно ввода метеоданных

Картографическая основа стала источником получения основных результатов моделирования – наглядно показано в какую сторону движется облако, на каком расстоянии от облака находятся населенные пункты, над территорией какого административного района происходит движение облака, какое расстояние облако успевает преодолевать до того как концентрации составляющих облака не уменьшатся до безопасных и т.д. Полученные при моделировании изолинии концентраций веществ трансформируются в базу данных «Model. Avaria RN». При необходимости, они могут быть добавлены к любой другой карте, например, к расположению земельных участков или карте растительного покрова.

5 Заключение

Подводя итог о проделанной работе, можно сделать несколько выводов:

1. Создана БД «Model. Avaria RN», которая вошла в состав программного комплекса.
2. Систематизированы входные параметры для математической модели образования и динамики облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя.

3. Таблицы входных параметров взаимодействуют с окнами ввода, позволяя оперативно загружать входные данные для математической модели.
4. Картографическая основа, размещенная в главном окне интерфейса, наглядно отображает направление движения облака и изменение его размеров.
5. Результаты моделирования возможно будут привлекаться для экологической оценки воздействия облака на окружающую среду.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0383/ГФ4

Список литературы

- [1] Fan Y., Fahong L., Jianping SHI. Applications of GIS in Environment Monitoring [electronic resource]. - Technical Division of Surveying and Mapping, Xian, Shaanxi, China, 2011. URL: <http://www.seiofbluemountain.com/upload/product/201105/2011fzjz31.pdf> (date of the application: 16.07.2017)
- [2] Goodchild M. F. GIS and Modeling Overview [electronic resource]. - Ch. 1. National center for geographic information and analysis university of California Santa Barbara, California. 2008. URL: <http://geog.ucsb.edu/good/papers/414.pdf> (date of the application: 28.08.2017)
- [3] Ishii M. and Yamamoto K. "An Environmental Risk Evaluation Method Employing Atmospheric Dispersion Models and GIS," Journal of Environmental Protection, Vol. 4 No. 12, 2013, P. 1392-1408. doi: 10.4236/jep.2013.412160.
- [4] Jakala D. A GIS Enabled Air Dispersion Modeling Tool for Emergency Management [electronic resource]. - Department of Resource Analysis, Saint Mary's University of Minnesota, Minneapolis, 2007. URL: <http://www.gis.smumn.edu/GradProjects/JakalaS.pdf> (date of the application: 06.08.2017)
- [5] Shaner J., Wrightsell J. Editing in ArcMap // M: MSU, 2002. - P. 226.
- [6] Ungerer, M. J., Goodchild M. F. 2002. Integrating spatial data analysis and GIS: A new implementation using the Component Object Model (COM) / International Journal of Geographical Information Science. 2002. - Vol. 16. - P 41-54.
- [7] Экологические проблемы и риски воздействий ракетно-космической техники на окружающую природную среду: справочное пособие / под ред. В.В. Адушкина, С.И. Козлова, А.В. Петрова. - М.: Анкил, 2000. - 640 с.
- [8] Разработка программного комплекса моделирования динамики облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя: отчет о НИР / РГП «НИЦ «Гарыш-Экология»: рук. Жубатов Ж. - Алматы, 2015. - 152 с. - № ГР 0115РК01057. - Инв. № 0215РК01616.
- [9] Зейлер М. Моделирование нашего мира. Руководство ESRI по проектированию базы геоданных. - пер с англ. Дата+. - М: МГУ им. М. В. Ломоносова, географический факультет, 2001. - 254 с.
- [10] Митчел Э. Руководство ESRI по ГИС анализу. Географические закономерности и взаимодействия // М: МГУ им. М. В. Ломоносова, географический факультет, 2001. - Т.1. - пер с англ. - 190 с.

References

- [1] Environmental problems and risks of impacts of rocket and space technology on the environment: a reference book / Ed. V.V. Adushkina, S.I. Kozlova, A.V. Petrova. - Moscow: Ankil, 2000. - P. 640.
- [2] Fan Y., Fahong L., Jianping SHI. Applications of GIS in Environment Monitoring [electronic resource]. - Technical Division of Surveying and Mapping, Xian, Shaanxi, China, 2011. URL: <http://www.seiofbluemountain.com/upload/product/201105/2011fzjz31.pdf> (date of the application: 16.07.2017)
- [3] Goodchild M. F. GIS and Modeling Overview [electronic resource]. - Ch. 1. National center for geographic information and analysis university of California Santa Barbara, California. 2008. URL: <http://geog.ucsb.edu/good/papers/414.pdf> (date of the application: 28.08.2017)

-
- [4] Ishii M. and Yamamoto K. "An Environmental Risk Evaluation Method Employing Atmospheric Dispersion Models and GIS," *Journal of Environmental Protection*, Vol. 4 No. 12, 2013, P. 1392-1408. doi: 10.4236/jep.2013.412160.
 - [5] Jakala D. A GIS Enabled Air Dispersion Modeling Tool for Emergency Management [electronic resource]. - Department of Resource Analysis, Saint Mary's University of Minnesota, Minneapolis, 2007. URL: <http://www.gis.smumn.edu/GradProjects/JakalaS.pdf> (date of the application: 06.08.2017)
 - [6] Mitchell E. ESRI GIS Analysis Guide. Geographical regularities and interactions // M: Moscow State University. MV Lomonosov, Faculty of Geography, 2001. - Volume 1. - Per from the English. - P.190.
 - [7] Shaner J., Wrightsell J. Editing in ArcMap // M: MSU, 2002. - P. 226.
 - [8] Ungerer, M. J., M. F. Goodchild. 2002. Integrating spatial data analysis and GIS: A new implementation using the Component Object Model (COM) / *International Journal of Geographical Information Science*. 2002. - Vol. 16. - P 41-54.
 - [9] Zeiler M. Modeling of our world. ESRI's Guide to Geodatabase Design // M: Moscow State University. MV Lomonosov, Faculty of Geography, 2001. - P.254.
 - [10] Development of a software package for simulating the dynamics of a cloud formed during a ground-based explosion of a carrier rocket: a report on the research project / RSE "SRC" Garish-Ecology ": hands. Zhubatov Zh. - Almaty, 2015. - P.152. - No.GR 0115PK01057. - Inv. No. 0215RK01616.

ГРНТИ 27.53.21; 27.41.19

Задача Коши для уравнений Стокса

Даирбаева Г. – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры математического и компьютерного моделирования, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +7272211589, E-mail: lazzat.dairbaeva@kaznu.kz
Аширова Г.А., магистрант, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +7272211589, E-mail: gulzana.ashyrova@yandex.ru

В данной работе рассматривается задача Коши для уравнений Стокса в области с криволинейной границей, неизвестно решение неизвестно на части границы. Данная задача является некорректной. Построены прямая и сопряженная задачи для исходных уравнений, введено понятие обобщенных решений для этих задач в пространствах Соболева. Решение для исходной задачи сводится к решению обратной задачи для прямой. Обратная задача представлена в операторной форме, построен целевой функционал, вычислен его градиент. Разработан вычислительный алгоритм для решения обратной задачи для уравнений Стокса на основе сочетания оптимизационного метода и метода конечных элементов (МКЭ).

Ключевые слова: Задача Коши, уравнения Стокса, обратная задача, МКЭ, оптимизационный метод.

Стокс теңдеулеріне арналған Коши есебі

Даирбаева Г. - физика-математика ғылымдарының кандидаты, математикалық және компьютерлік үлгілеу кафедрасының доценті, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ-сы, Қазақстан Республикасы, +7272211589, E-mail: lazzat.dairbaeva@kaznu.kz
Аширова Г.А., магистрант, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +7272211589, E-mail: gulzana.ashyrova@yandex.ru

Осы жұмыста қисық сызықты шегі бар салада Стокс теңдеулеріне арналған Коши есебі қарастырылады, шек бөліктеріне шешімі белгісіз. Бұл есеп қисынсыз болып табылады. Түзу сызылды және бастапқы теңдеулерге арналған түйіндес есептер жасалды, Соболев кеңістіктерінде осы есептерге жалпыланған шешім түсінігі енгізілді. Бастапқы есеп шешімі түзуге арналған кері есепті шешуге қисындасып келеді. Кері есеп операторлық үлгіде келтірілген, мақсатты функционал сызылып, оның градиенті есептелді. Стокс теңдеулеріне арналған кері есепті шешу мақсатында оңтайландыру әдістемесі және соңғы элемент әдістемесі (СЭӘ) негізінде есептеу алгоритмі әзірленді.

Түйін сөздер: Коши есебі, Стокс теңдеуі, кері есеп, СЭӘ, оңтайландыру әдістемесі.

The Cauchy problem for the Stokes Equations

Dairbayeva G. - candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate Professor, Mathematical and Computer Modeling Department, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +7272211589, E-mail: lazzat.dairbaeva@kaznu.kz
Ashirova G.A., master student, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +7272211589, E-mail: gulzana.ashyrova@yandex.ru

In this paper we consider the Cauchy problem for the Stokes equations in domain with curvilinear boundary, the solution is not known on a part of the boundary. This problem is ill-posed. Direct and conjugate problems are constructed for the initial equations, the definition of generalized solutions are introduced for these problems in the Sobolev space. It is shown that the solution for the initial problem is reduced to the solution of the inverse problem for the direct problem. The inverse problem is represented in operator form, objective functional is constructed, its gradient is calculated. Computational algorithm is developed for solving the inverse problem for the Stokes equations on the basis of the combination of optimization method and the finite element method (FEM).

Key words: Cauchy Problem, Stokes equations, inverse problem, FEM, optimization method.

1 Введение

Обратные и некорректные задачи естествознания в настоящее время представляют большой интерес в прикладной математике. Таким задачам посвящено много литературы, например, обширный справочный материал представлен в монографии (Кабанихин, 2009). В большинстве случаев, как и в данной работе, обратные и некорректные задачи неустойчивы.

Рассмотрим задачу Коши для уравнений Стокса в криволинейной области $\Omega = \{(x, y) : -2\pi < x < 2\pi, \cos x + 1 < y < \cos x + 3\}$

$$\nabla \vec{u} - \nabla p = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}|_{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}} &= 0 \\ \vec{u}|_{\Gamma_{03}} &= \vec{\varphi} \end{aligned} \quad (3)$$

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{f}, \quad (x, y) \in \Gamma_0 \quad (4)$$

где $\vec{n} = (n_1, n_2)$ – единичная внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, $\vec{u} = (u_1, u_2)$,

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \Gamma_{03}, \quad \Gamma_1 = \{(x, y) : x = 2\pi, 2 \leq y \leq 4\},$$

$$\Gamma_{01} = \{(x, y) : -2\pi \leq x \leq 2\pi, x = 2\pi, y = \cos x + 1\},$$

$$\Gamma_{02} = \{(x, y) : -2\pi \leq x \leq 2\pi, x = 2\pi, y = \cos x + 3\},$$

$$\Gamma_{03} = \{(x, y) : x = -2\pi, 2 \leq y \leq 4\}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = (\vec{n} \nabla) \vec{u} = (\vec{n} \nabla u_1, \vec{n} \nabla u_2) = \left(n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u_1}{\partial y}, n_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)$$

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = ((p - u_{1x})n_1 - u_{1y}n_2, (p - u_{2x})n_2 - n_1u_{2y})$$

$$\vec{n} = \left(-\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, -\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \right), \quad \text{если } (x, y) \in \Gamma_{01},$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \right), \quad \text{если } (x, y) \in \Gamma_{02},$$

условия (4) можно записать в следующем виде

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \left((-p + u_{1x}) \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \frac{(-p + u_{2x})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{u_{2y} \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \right) = (f_1, f_2),$$

если $(x, y) \in \Gamma_{01}$,

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \left(\frac{(p - u_{1x}) \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, \frac{-\sin x u_{2x}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{(p - u_{2y})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} \right) = (f_1, f_2), \quad (x, y) \in \Gamma_{02},$$

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = ((-p + u_{1x}), u_{2x}) = (f_1, f_2), \quad (x, y) \in \Gamma_{03},$$

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = ((p - u_{1x}), -u_{2x}) \quad \text{при } (x, y) \in \Gamma_1.$$

2 Материалы и методы

Метод исследования некорректной задачи (1) – (4) заключается в сведении ее к обратной задаче по отношению к некоторой прямой (корректной) задаче для исходных уравнений (Кабанихин, 2009).

2.1 Постановка прямой задачи

Рассмотрим следующую задачу

$$\nabla \vec{u} - \nabla p = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (5)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (6)$$

$$P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} = \vec{q}, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}|_{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}} &= 0 \\ \vec{u}|_{\Gamma_{03}} &= \vec{\varphi}, \quad (x, y) \in \Gamma_{03} \end{aligned} \quad (8)$$

Задачу (5) – (8), в которой по заданным функциям $\vec{q} = (q_1(y), q_2(y))$, $\vec{\varphi} = (\varphi_1(y), \varphi_2(y))$ нужно найти функции $\vec{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y))$, $p(x, y)$, будем называть прямой.

Для задачи (5) – (8) налагаем условия склейки на границе

$$\Gamma_{04} = \{x = 0, 2 \leq y \leq 4\} :$$

$$\varepsilon_1^- u_{1x}(0 - 0, y) = \varepsilon_1^+ u_{1x}(0 + 0, y), \quad (9)$$

$$\varepsilon_2^- u_{2x}(0 - 0, y) = \varepsilon_2^+ u_{2x}(0 + 0, y), \quad y \in [2, 4] \quad (10)$$

Рассмотрим пространства Соболева $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ с соответствующими нормами

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx dy \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx dy + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим пространство следов функций из $W_2^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$ и обозначим это пространство через $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} u^2 ds + \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(z) - u(h)|^2}{|z - h|} ds dh \right)^{1/2}, \quad (11)$$

где $z = (x, y)$, $h = (u, v)$.

Сужение функций из $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ на часть границы $\Gamma_0(\Gamma_{02}, \Gamma_1)$ обозначим через $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$, $(W_2^{1/2}(\Gamma_{02}), W_2^{1/2}(\Gamma_1))$ с нормой (11), где $\partial\Omega$ заменяется на $\Gamma_0(\Gamma_{02}, \Gamma_1)$.

Дадим определение обобщенного решения прямой задачи (5) – (8).

Определение. Пусть $\varphi \in W_2^{1/2}(\Gamma_{02})$ и $q \in (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*$. Обобщенным решением прямой задачи (5) – (8) будем называть совокупность функций

$$(\vec{u}, p) : \vec{u} \in W_2^1(\Omega), \vec{u}|_{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}} = 0, \vec{u}|_{\Gamma_{03}} = \vec{\varphi}, p \in L_2(\Omega),$$

удовлетворяющие тождеству

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \nabla \vec{u} \nabla \vec{v} dx dy + \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{v} dx dy + \\ & + \int_2^4 [q_1 v_1 + q_2 v_2](2\pi, y) dy + \\ & + k_1(\varepsilon) \int_2^4 u_{1x}(0 - 0, y) v_1(0, y) dy + k_2(\varepsilon) \int_2^4 u_{2x}(0 - 0, y) v_2(0, y) dy = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

для $\forall \vec{v} \in W_2^1(\Omega)$, $\vec{v}|_{\Gamma_0} = 0$. Здесь $k_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_1^+ - \varepsilon_1^-}{\varepsilon_1^+}$, $k_2(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_2^+ - \varepsilon_2^-}{\varepsilon_2^+}$.

Прямая задача (5) – (8) в смысле данного определения обобщенного решения является корректной (Ладыженская, 1961).

2.2 Обратная задача для прямой задачи (5) – (8)

Рассмотрим дополнительную информацию для задачи (5) – (8):

$$\left(P\vec{u} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \right) |_{\Gamma_0} = \vec{f} \quad (13)$$

или в координатной форме

$$\begin{cases} \frac{(-p + u_{1x}) \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = f_1(x, y) \\ \frac{u_{2x} \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{(-p + u_{2y})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = f_2(x, y), (x, y) \in \Gamma_{01}, \\ \frac{(p - u_{1x}) \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = f_1(x, y) \\ \frac{-\sin x u_{2x}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{(p - u_{2y})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} = f_2(x, y), (x, y) \in \Gamma_{02}, \\ \begin{cases} -p + u_{1x} = f_1(x, y) \\ u_{2x} = f_2(x, y), (x, y) \in \Gamma_{03}. \end{cases} \end{cases}$$

Сделаем постановка следующей обратной задачи.

$$\nabla \vec{u} - \nabla p = 0, \quad (14)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}|_{\Gamma_{01} \cup \Gamma_{02}} &= 0 \\ \vec{u}|_{\Gamma_{03}} &= \vec{\varphi}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\left(P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \right) |_{\Gamma_1} = \vec{q}, \quad (x, y) \in \Gamma_1 \quad (17)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_1^- u_{1x}(0-0, y) = \varepsilon_1^+ u_{1x}(0+0, y) \\ \varepsilon_2^- u_{2x}(0-0, y) = \varepsilon_2^+ u_{2x}(0+0, y), \quad y \in [2, 4]. \end{cases} \quad (18)$$

Требуется найти $\vec{q}(x, y)$ в задаче (14) – (18) с дополнительным условием (13). Обратную задачу (14) – (18), (13) можно записать в операторной форме

$$A\vec{q} = \vec{f} \quad (19)$$

где $: (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^* \rightarrow (W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$, $f = (f_1, f_2)|_{\Gamma_0}$ – заданная функция, $q = (q_1, q_2)|_{\Gamma_1}$ – неизвестная функция. Пространства, аналогичные пространствам $(W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*$, $(W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$ введены в работе (Bastay, 2006).

Оператор A определен следующим образом

$$A : \vec{q} := \left(P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \right) |_{\Gamma_1} \rightarrow \vec{f} := \left(P\vec{n} - \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \right) |_{\Gamma_0}. \quad (20)$$

Здесь $Aq = (Aq_1, Aq_2)$, где

$$Aq_1 = \begin{cases} \frac{(-p + u_{1x})\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, & (x, y) \in \Gamma_{01}, \\ \frac{(p - u_{1x})\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - \frac{u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, & (x, y) \in \Gamma_{02}, \\ -p + u_{1x}, & (x, y) \in \Gamma_{03}. \end{cases}$$

$$Aq_2 = \begin{cases} \frac{u_{2x}\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{-p + u_{2y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, & (x, y) \in \Gamma_{01} \\ \frac{-u_{2x}\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} + \frac{p - u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, & (x, y) \in \Gamma_{02} \\ u_{2x}, & (x, y) \in \Gamma_{03}. \end{cases}$$

Для решения уравнения (19) применяется оптимизационный метод Ландвебера. Для этого рассмотрим следующий функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|_{L_2(0)}^2 = \|Aq_1 - f_1\|_{L_2(0)}^2 + \|Aq_2 - f_2\|_{L_2(0)}^2.$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
 J(q_1, q_2) = & \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{(-p + u_{1x} \sin x) + u_{1y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_1 \right)^2 (x, \cos x + 1) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx + \\
 & \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{u_{2x} \sin x - p + u_{2y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_2 \right)^2 (x, \cos x + 1) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx + \\
 & \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{(p - u_{1x} \sin x - u_{1y})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_1 \right)^2 (x, \cos x + 3) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx + \\
 & \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\frac{-u_{2x} \sin x + p - u_{2y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_2 \right)^2 (x, \cos x + 3) \sqrt{1 + \sin^2 x} dx + \\
 & \int_2^4 (-p + u_{1x} - f_1)^2 (-2\pi, y) dy + \int_2^4 (u_{2x} - f_2)^2 (-2\pi, y) dy.
 \end{aligned}$$

Для применения оптимизационного метода для решения уравнения (19) построим сопряженную задачу к прямой задаче (5) – (8).

Сопряженная задача имеет вид

$$\nabla \psi - \nabla g = 0, \quad (21)$$

$$\operatorname{div} \psi = 0 \quad (22)$$

$$(\psi_{1x} - g)|_{\Gamma_1} = 0, \quad \psi_{2x}|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left(g\vec{n} - \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right)|_{\Gamma_1} = 0 \quad (23)$$

$$\psi|_{\Gamma_0} = \mu. \quad (24)$$

Здесь $\psi = (\psi_1, \psi_2)$:

$$\begin{aligned}
 \psi_1|_{\Gamma_0} = & \begin{cases} 2 \left(\frac{(-p + u_{1x} \sin x + u_{1y})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_1 \right), & (x, y) \in \Gamma_{01} \\ -2 \left(\frac{(p - u_{1x} \sin x - u_{1y})}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_1 \right), & (x, y) \in \Gamma_{02} \\ -2(-p + u_{1x} - f_1), & (x, y) \in \Gamma_{03} \end{cases} \\
 \psi_2|_{\Gamma_0} = & \begin{cases} 2 \left(\frac{u_{2x} \sin x - p + u_{2y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_2 \right), & (x, y) \in \Gamma_{01} \\ -2 \left(\frac{-u_{2x} \sin x + p - u_{2y}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}} - f_2 \right), & (x, y) \in \Gamma_{02} \\ -2(u_{2x} - f_2), & (x, y) \in \Gamma_{03}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Аналогично, как для прямой задаче обобщенное решение сопряженной задачи (21) – (24) удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$-\int_{\Omega} \nabla \psi \nabla v dx dy + \int_{\Omega} g \operatorname{div} v ds = 0,$$

$$\psi|_{\Gamma_0} = \mu,$$

$$v|_{\Gamma_0} = 0.$$

Вычислен градиент данного функционала $\nabla J = (J'_{q_1}, J'_{q_2})$, где

$$J'_{q_1} = \psi_1|_{L_2(\Gamma_1)},$$

$$J'_{q_2} = \psi_2|_{L_2(\Gamma_1)},$$

ψ есть решение сопряженной задачи (21) – (24), в которой граничная функция $\mu(x, y)$ имеет следующий вид

$$\mu(x, y) = 2[Aq - f](x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0.$$

Для применения метода конечных элементов проведена триангуляция области Ω , которая показана рисунке 1:

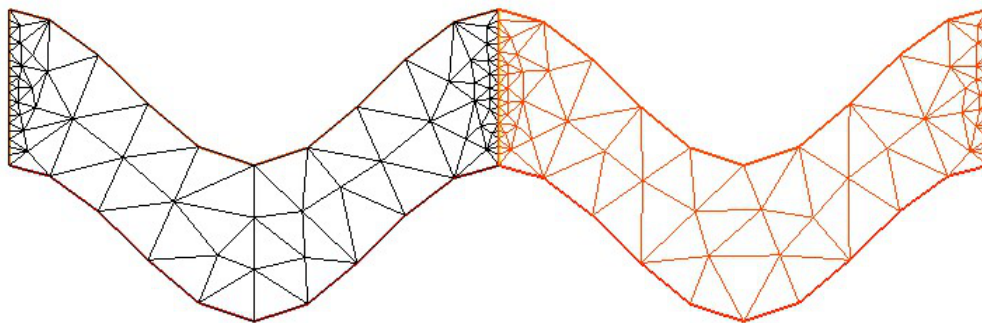


Рисунок 1 – Триангуляция области Ω

2.3 Сходимость обратной задачи по функционалу

В качестве оптимизационного метода для решения обратной задачи (14) – (18), (13) рассмотрим метод Ландвебера

$$q_{n+1} = q - \alpha J' q_n,$$

$$\alpha \in (0, \|A\|^{-2}), \quad \text{где } q_n = (q_1^{(n)}, q_2^{(n)}).$$

Сходимость последовательности q_n по функционалу доказывается аналогично, как в (Kabanikhin, 2006).

Теорема (о сходимости по функционалу метода Ландвебера). Пусть $A : (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^* \rightarrow (W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$ — линейный ограниченный оператор. Предположим, что для некоторого $f \in (W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$ существует точное решение q_T уравнения $Aq = f$. Тогда при любом $q_0 \in (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*$ и $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$ последовательность q_n , определяемая равенствами

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \quad q_0 \in (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*,$$

сходится по функционалу, и имеет место оценка

$$J(q_n) \leq \frac{\|q_0 - q_T\|^2}{n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)}.$$

2.4 Численное решение обратной задачи

Из алгоритма метода Ландвебера видно, что для вычисления приближенного решения q_n для каждого n приходится решать прямую задачу (5) – (8) и сопряженную (21) – (24). Для численного решения прямой и сопряженных задач применяется метод конечных элементов (Larry J. Segerlind, 1984), число разбиения сторон области $n = 30$. В качестве нулевого приближения решения обратной задачи (19) взято нулевое приближение $q_{(1)0} = 0$, $q_{(2)0} = 0$, а параметр $\alpha = 0,01$.

На рисунках 2-4 показаны компоненты точного решения $(u_{(1)}, u_{(2)}, p)$ прямой задачи (5) – (8). На рисунках 5-7 приведены компоненты нулевого приближения $(u_{(1)0}, u_{(2)0}, p_{(0)})$ решения прямой задачи (5) – (7). На рисунках 8-10 показаны компоненты приближенного решения $(u_{(1)}, u_{(2)}, p)$ прямой задачи при 1000 итераций. Рисунки 11, 12 иллюстрируют погрешности скорости $(u_{(1)}, u_{(2)})$ и давления p в норме сеточного аналога нормы в $L_2(\Gamma_1)$, где горизонтальная ось - итерации, вертикальная - погрешность, на рисунке 13 показана погрешность приближенного решения q обратной задачи.

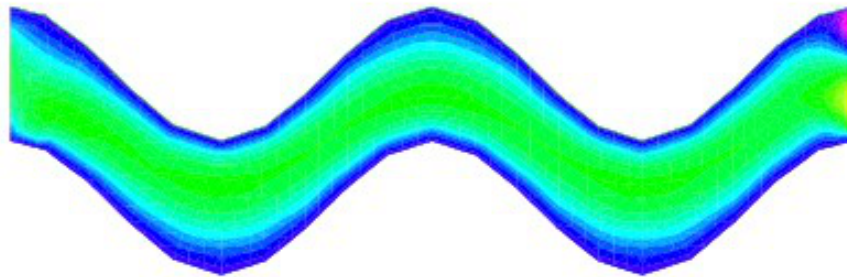


Рисунок 2 – Точное решение прямой задачи. Скорость $u_{(1)}$

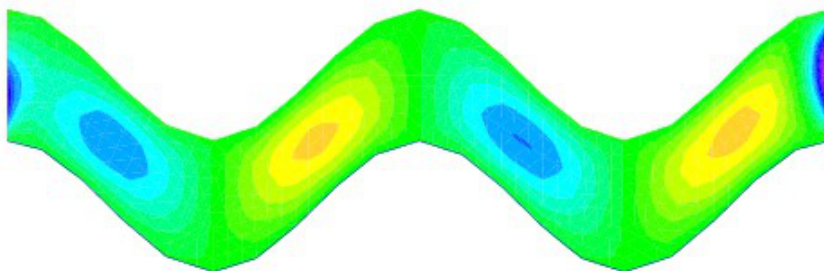


Рисунок 3 – Точное решение прямой задачи. Скорость $u_{(2)}$

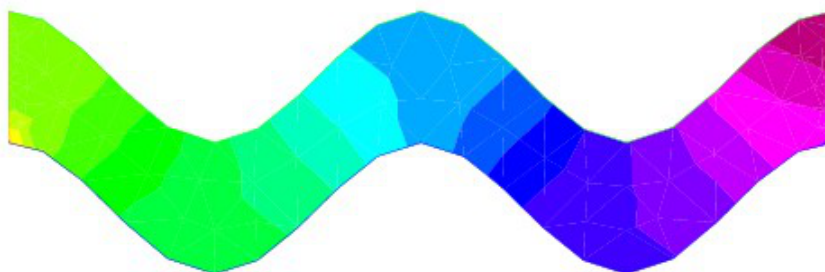


Рисунок 4 – Точное решение прямой задачи. Давление p

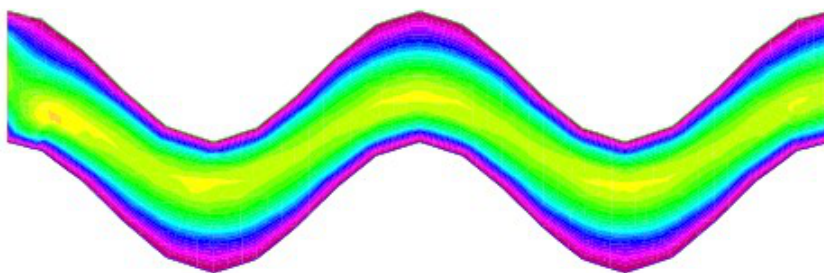


Рисунок 5 – Нулевое приближение решения прямой задачи. Скорость $u_{(1)0}$

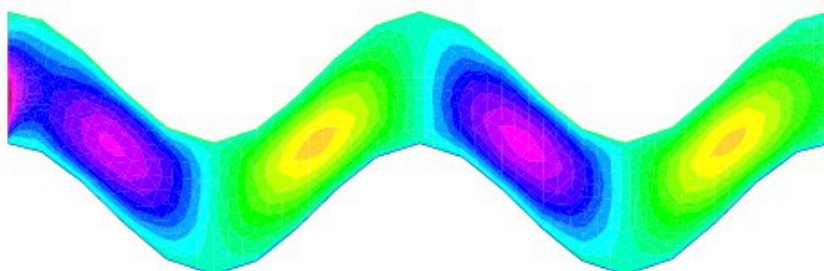


Рисунок 6 – Нулевое приближение решения прямой задачи. Скорость $u_{(2)0}$

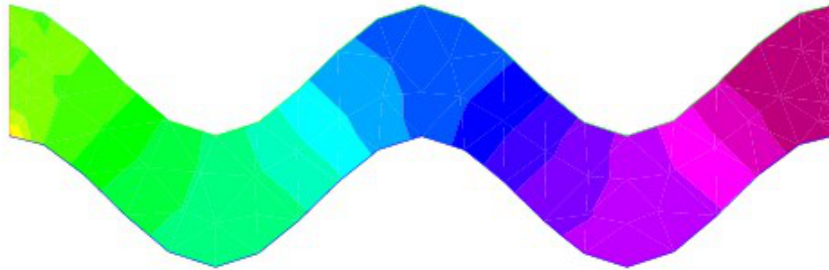


Рисунок 7 – Нулевое приближение решения прямой задачи. Давление $p_{(0)}$

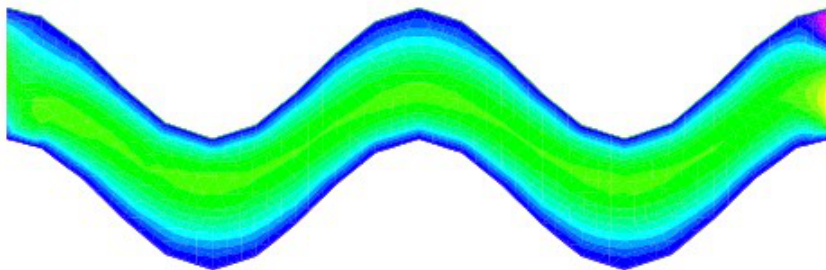


Рисунок 8 – Приближенное решение прямой задачи. Скорость $u_{(1)}$

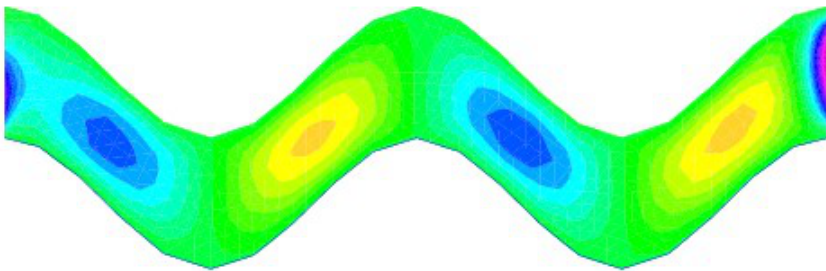


Рисунок 9 – Приближенное решение прямой задачи. Скорость $u_{(2)}$

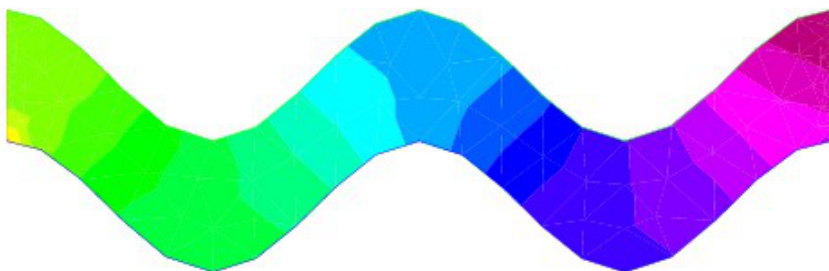


Рисунок 10 – Приближенное решение прямой задачи. Давление p

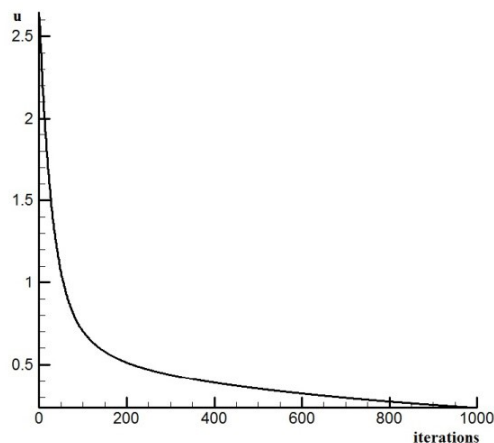


Рисунок 11 – Погрешность скорости u прямой задачи от количества итераций

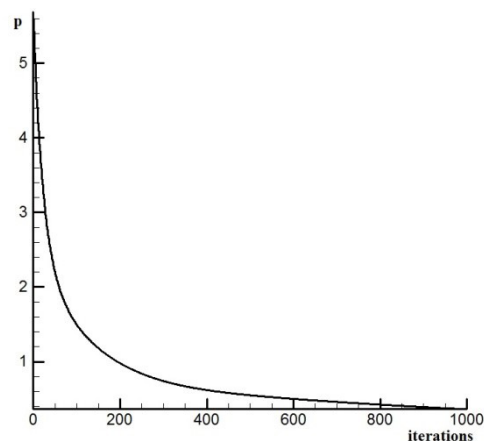


Рисунок 12 – Погрешность давления от количества итераций

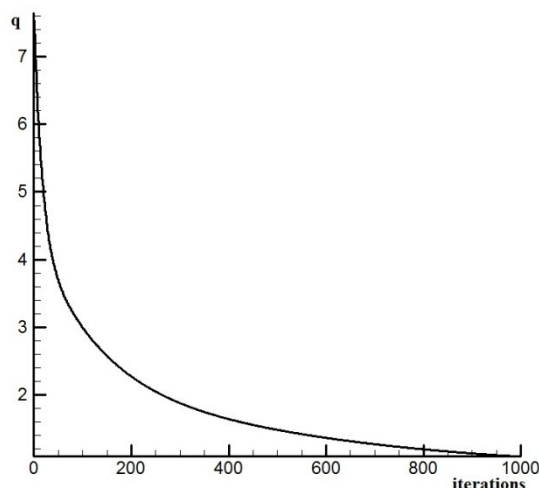


Рисунок 13 – Невязка приближенного решения q обратной задачи от количества итераций

3 Заключение

Рассмотрена некорректная задача Коши для уравнений Стокса в криволинейной области. Показано сведение исходной задачи к обратной задаче для исходных уравнений, для прямой и сопряженных задач определены обобщенные решения и классы пространств функций. Для решения обратной задачи разработан вычислительный алгоритм с использованием оптимизационного метода Ландвебера, в котором предполагается также решение прямой и сопряженной задач. Показана сходимость обратной задачи по целевому функционалу. Для численного решения прямой и сопряженных задач применен МКЭ. Из численных результатов следует, что погрешности решений прямой и сопряженной задач сходятся к нулю с увеличением числа итераций, обратная задача сходится по функционалу.

4 Благодарность

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант №1746/ГФ4

Список литературы

- [1] *Bastay G., Johansson T., Lesnik D., Kozlov K.* Alternating Method for the Stationary Stokes System // *ZAMM (Z. Angew. Math. Mech)*. – 2006. – Vol. 86. – С. 268-280.
- [2] *Kabanikhin S.I., Dairbaeva G.* The Cauchy problem for Laplace equation on plane // *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany)*. – 2006. – Vol. 93. – P. 89-102.
- [3] *Larry J. Segerlind* Applied finite elements analysis. – New York: United States Copyright, 1984. – 411 p.
- [4] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
- [5] *Ладженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Государственное издательство физик-математической литературы, 1961. – 310 с.

References

- [1] Bastay G., Johansson T., Lesnik D., Kozlov K., "An Alternating Method for the Stationary Stokes System", *ZAMM (Z. Angew. Math. Mech)* 86 (2006.): 268-280.
- [2] Kabanikhin S.I., Dairbaeva G., "The Cauchy problem for Laplace equation on plane", *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany)* 93 (2006): 89-102.
- [3] Larry J. Segerlind. *Applied finite elements analysis* (New York: United States Copyright, 1984), 411 p.
- [4] Kabanikhin S.I. *Inverse and ill-posed problems* (Novosibirsk: Siberian scientific publishing, 2009), 457 p.
- [5] Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie voprosy dinamiki вязкой neszhimaemoj zhidkosti* [Mathematical problems of dynamics of viscous incompressible fluid]. (M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fizik-matematicheskoy literatury, 1961), 310 s.

ГРНТИ 517.9: 004.9; 519.711.3; 504.75.05

Численное моделирование эволюции облака при наземном взрыве ракеты-носителя

Жакебаев Д.Б., Ph.D., заведующий кафедрой, Казахский национальный университет имени аль-Фараби,

г. Алматы, Республика Казахстан, +77017537477, E-mail: dauren.zhakebayev@gmail.com

Каржаубаев К.К., докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби,

г. Алматы, Республика Казахстан, +77073569961, E-mail: kairzhan.k@gmail.com

Жубат К.Ж., Ph.D., РГП Научно-исследовательский центр «Ғарыш-Экология»

г. Алматы, Республика Казахстан, +77015157915, E-mail: zhubat@mail.ru

Абдибекова А.У., Ph.D., Казахский национальный университет имени аль-Фараби,

г. Алматы, Республика Казахстан, +77029299933, E-mail: a.aigerim@gmail.com

В данной работе рассматривается эволюция облака под действием силы плавучести, с учетом турбулентного перемешивания и адиабатического расширения. Численное моделирование осуществляется на основе решения трехмерного отфильтрованного нестационарного уравнения Навье-Стокса, уравнения неразрывности, уравнения концентрации, уравнения энтальпии, уравнения состояния для сжимаемых сред. Модифицированный решатель основан на библиотеке решения задач математической физики OpenFOAM. Для замыкания основных уравнений используется вязкостная модель турбулентности. Получена зависимость высоты подъема огненного шара в атмосфере от термодинамических параметров, при взрыве ракеты-носителя «Протон-М» 2-го июля 2013г.

Ключевые слова: взрыв, Протон-М, эволюция, облако, турбулентность.

Тасымалдаушы-ракетаның жер үсті жарылыс кезіндегі бұлт эволюциясын сандық модельдеу

Жакебаев Д.Б., Ph.D., кафедра меңгерушісі, әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті,

Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77017537477, E-mail: dauren.zhakebayev@gmail.com

Қаржаубаев Қ.Қ., докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті,

Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77073569961, E-mail: kairzhan.k@gmail.com

Жұбат Қ.Ж., Ph.D., «Ғарыш-Экология» ғылыми-зерттеу орталығы» РМҚ,

Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77015157915, E-mail: zhubat@mail.ru

Абдибекова А.У., Ph.D., әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті,

Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77029299933, E-mail: a.aigerim@gmail.com

Осы мақалада турбулентті араластыру және адиабатикалық кеңеюді ескере отырып, күшейту күш әсерінен бұлттың эволюциясы қарастырылады. Сандық модельдеу үшөлшемді фильтрлі стационарлық емес Навье-Стокс теңдеуін, үздіксіздік теңдеуін, концентрация теңдеуін, энтальпия теңдеуін, қысылатын орта үшін күй теңдеуін шешу негізінде жүзеге асырылады. Өзгертілген шешуші OpenFOAM математикалық физика кітапханасына негізделген. Негізгі теңдеулерді жабу үшін турбуленттіліктің тұтқыр моделі қолданылады. 2013 жылғы 2 шілдеде «Протон-М» зымыран тасығышының жарылысы кезінде термодинамикалық параметрлер бойынша атмосфераға өрт сөндіру биіктігінің тәуелділігі алынды.

Түйін сөздер: жарылыс, протон-М, эволюция, бұлт, турбуленттілік.

Numerical simulation of the clouds evolution in the ground explosion of the carrier-rocket

Zhakebayev D.B., Ph.D., head of the department, al-Farabi Kazakh National University,

Almaty, Republic of Kazakhstan, +77017537477, E-mail: dauren.zhakebayev@gmail.com

Karzhabayev K.K., doctoral student, al-Farabi Kazakh National University,

Almaty, Republic of Kazakhstan, +77073569961, E-mail: kairzhan.k@gmail.com
Zhubat K.Zh., Ph.D., RSE Scientific and Research Center "Garish-Ecology
Almaty, Republic of Kazakhstan, +77015157915, E-mail: zhubat@mail.ru
Abdibekova A.U., Ph.D., al-Farabi Kazakh National University,
Almaty, Republic of Kazakhstan, +77029299933, E-mail: a.aigerim@gmail.com

In this paper, the evolution of a cloud under the influence of the buoyancy force is considered, taking into account turbulent mixing and adiabatic expansion. Numerical simulation is carried out on the basis of the solution of the three-dimensional filtered non-stationary Navier-Stokes equation, the continuity equation, the concentration equation, the enthalpy equation, and the equation of state for compressible media. The modified solver is based on the OpenFOAM mathematical physics library. To close the basic equations, a viscous model of turbulence is used. The dependence of the height of the lifting of the fireball in the atmosphere on the thermodynamic parameters, during the explosion of the Proton-M rocket carrier on July 2, 2013, was obtained.

Key words: explosion, proton-M, evolution, cloud, turbulence.

1 Введение

Аварийные падения ракет-носителей часто сопровождаются наземным взрывом, при котором образуется газопылевое облако. Невозможность проведения экспериментальных замеров механического и химического состава облака, его температуры, взаимодействия с окружающей средой, в связи со скоротечностью процесса образования и распространения облака, обуславливают необходимость применения методов математического моделирования. Изучение процесса поднятия огненного шара под действием силы Архимеда, с учетом турбулентного перемешивания и адиабатического расширения, несмотря на большое количество публикаций на данную тематику, остается актуальной задачей для исследователей. Впервые проблема подъема облака атомного взрыва была рассмотрена в работах (Sutton, 1947:20-22), (Machta, 1950: 215-216) Сэттона и Мечта, где предполагается, что подъем облака вызывается силой Архимеда, а охлаждение происходит в результате адиабатического расширения и перемешивания с окружающим воздухом. Циркуляция в облаке и влияние инерции не учитываются, а также приводится аналитический метод определения величин максимальной высоты подъема огненного шара. В работах (Вулис, 1956: 22-23), (Ершин, 1959: 21-23) был исследован процесс распространения турбулентной струи газа в среде иной плотности и начальный участок турбулентной струи сжимаемого газа, где на поверхности огненного шара происходит турбулентное перемешивание нагретого воздуха, заключенного внутри кольца, и холодного окружающего воздуха. Проблема движения вихревого кольца, образовавшегося после взрыва, под действием силы тяжести была теоретически исследована в работе (Онфуриев, 1967: 3-15), где рассмотрен случай малой разности плотностей внутри и вне облака, а также случай, когда разность плотностей велика. Образовавшийся после взрыва от ударной волны объем горячего воздуха, так называемый огненный шар, после увеличения до определенного размера стремится вверх, образуя вихревое кольцо. В случае, когда облако образовано у поверхности Земли, его поднятие сопровождается поднятием пылевого столба, придающего грибообразную форму. Основная действующая сила для поднятия облака - это сила Архимеда, которая возникает при разной плотности воздуха, как внутри облака, так и вне облака, в атмосфере. Но, помимо силы Архимеда, из-за существования вихревого кольца циркуляции, на облако действует сила Жуковского, направленная перпендикулярно к направлению скорости движения элемента кольца. Горизонтальная составляю-

щая этой силы растягивает вихревое кольцо в стороны, а вертикальная - несколько тормозит подъем кольца. Температура воздуха в начале подъема велика, затем падает из-за адиабатического расширения. В результате исследования были получены зависимости вертикальной и горизонтальной составляющих скорости движения от времени, а также геометрические размеры облака в зависимости от мощности взрыва. Исследование эволюции крупномасштабных термиков в неоднородной атмосфере, образующихся при мощных взрывах, в рамках приближения Буссинеска выполнено в работе (Гостинцев, 1987:47-49). В вышеупомянутых работах (Онфурьев, 1967: 3-15), (Гостинцев, 1987:47-49) использовалось приближение Буссинеска, при котором плотность считается постоянной во всех слагаемых уравнения движения, где плотность пропорциональна градиенту температуры. Однако приближение Буссинеска применимо только для описания течений с относительно небольшими изменениями температуры и малыми значениями параметра гидростатической сжимаемости (Лапин, 1989: 368-369). С появлением относительно доступных вычислительных устройств появились работы, в которых для описания процесса подъема взрывного облака были использованы более сложные модели (Лапин, 1989: 368-369), (Zatevakhin, 2001: 532-539), (Веремей, 2007: 792-806) основанные на уравнениях Навье-Стокса для сжимаемых газов. Физически использование сжимаемой постановки в уравнениях приводит к более адекватным результатам, поскольку плотность не всегда является линейной функцией градиента температуры. В данной работе рассматривается поднятие огненного шара под действием силы Архимеда, с учетом турбулентного перемешивания и адиабатического расширения. Температура воздуха в начальный момент вихревого кольца очень велика, со временем она падает за счет адиабатического расширения, т.е. уменьшения давления с высотой и за счет турбулентного перемешивания нагретого и холодного воздуха. Под действием силы Архимеда огненный шар нагретого воздуха будет подниматься в атмосферу до момента выравнивания температуры, плотности газовых компонентов внешнего и внутреннего нагретого и холодного воздуха за счет конвективного и диффузионного перемешивания. Температурой охлаждения из-за теплового излучения можно пренебречь, поскольку длина пробега излучения значительно больше размеров облака. Численное моделирование формирования облака осуществляется на основе решения трехмерного отфильтрованного нестационарного уравнения Навье-Стокса, уравнения неразрывности, уравнения концентрации, уравнения энтальпии, уравнения состояния для сжимаемых сред. Для замыкания основных уравнений используется вязкостная модель турбулентности. Основной проблемой в рассматриваемой задаче является корректное описание процессов турбулентного переноса. В настоящей работе сделана попытка решить эту проблему путем использования метода крупных вихрей. Представлены результаты численного моделирования формирования облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя «Протон-М» 2-го июля 2013 г. В позиционном районе космодрома «Байконур». Показана зависимость высоты подъема огненного шара в атмосфере от термодинамических параметров. Проведено сравнение высоты поднятия облака в зависимости от мощности взрыва с аналитической формулой Сэттона, которая применима для взрывов малых мощностей (q [0.1:1000] тонн). Мощность взрыва рассчитана от размеров воронки.

2 Материал и методы

2.1 Постановка задачи

Пусть в начальный момент времени у поверхности земли находится огненный шар, обозначаемый областью - G , радиусом - R , начальной температурой шара - T_1 , и начальной объемной плотностью газовых фаз сухого воздуха - ρ_d и влажного воздуха - ρ_w , температура окружающей среды - T_1 (рисунок 1).

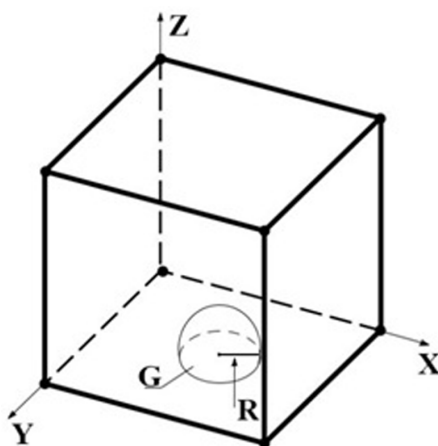


Рисунок 1 - Схематичная иллюстрация постановки задачи.

Для решения рассматриваемой задачи используются следующие уравнения:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla(\rho_m u_m) = 0 \quad (1)$$

где скорость смеси газовой фазы u_m , плотность воздуха $\rho_m = \rho_w + \rho_d$, $u_m = \frac{\mu_m}{\rho_m}$ - динамическая вязкость, $\mu_m = \mu_* \left(\frac{T}{T_*}\right)^w$, где μ_* - значение динамической вязкости при температуре T_* , $\rho_d = \sum_{\alpha=1} \hat{N}_\alpha S_\alpha \rho_\alpha$; $\sum_{\alpha=1} \hat{N}_\alpha S_\alpha = 1$ - объемная плотность газовой фазы сухого воздуха, $\rho_w = \sum_{\beta=1} \hat{N}_\beta S_\beta \rho_\beta$; $\sum_{\beta=1} \hat{N}_\beta S_\beta = 1$ - объемная плотность газовой фазы водяного пара, $\rho_\alpha = \rho_{*\alpha}(1 - \gamma(T - T_*))$, $\alpha = 1, \dots, N_\alpha$; $\rho_\beta = \rho_{*\beta}(1 - \gamma(T - T_*))$, $\beta = 1, \dots, N_\beta$, также $\rho_{*\alpha}$, $\rho_{*\beta}$ - плотность газовых компонентов сухого воздуха и влажного воздуха соответственно, при $T_* = 20$.

Уравнение концентрации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m S_\alpha)}{\partial t} + \nabla(\rho_m u_m S_\alpha) &= 0, \alpha = 1, \dots, N_\alpha \\ \frac{\partial(\rho_m S_\beta)}{\partial t} + \nabla(\rho_m u_m S_\beta) &= 0, \beta = 1, \dots, N_\beta \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение движения:

Закон сохранения количества движения может быть записан с достаточной точностью в виде:

$$\frac{\partial(\rho_m u_m)}{\partial t} + \nabla(\rho_m u_m \otimes u_m + \rho_m \mathbf{T}_r) = -\nabla p + \nabla \mathbf{T} + \rho_m g \quad (3)$$

где g - ускорение происходит под действием силы тяжести, $\mathbf{T}$ - тензор напряжений газовой фазы, t - время, p - давление.

Уравнение энтальпии:

$$\frac{\partial(\rho_m h_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m h_m u_m) + \nabla \cdot (q - \mathbf{T} \cdot u_g) = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial(\rho_m K_m)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_m K_m u_m) + \rho_m (g \cdot u_m) \quad (4)$$

где энтальпия смеси газовой - h_m , тепловой поток в газовой фазе - $q = -k_g \Delta T$, здесь - $k_g = \sum_{i=1}^{N_I} \chi_i k_i$, k_i - проводимость i -го компонента, T - температура, $K_m = \frac{1}{2}[u_m]^2$ - кинетическая энергия на единицу массы газовой фазы.

Уравнение температуры:

$$T = \frac{h_m}{\frac{1}{\rho_m} \sum_{i=1}^I \rho_i C_i + \frac{1}{\rho_m} \sum_{i=1}^I \rho_i R_i} \quad (5)$$

где C_i - теплоемкость газовой фазы при постоянном объёме.

Уравнение давления:

Выполняется уравнение состояния идеального газа:

$$P = \frac{R_*}{M_{rd}} \rho_d T + \frac{R_*}{M_{rw}} \rho_w T = R_* T \left(\frac{\rho_d}{M_{rd}} + \frac{\rho_w}{M_{rw}} \right) \quad (6)$$

где $R_* = 8.3144598$, $M_{rd} = \sum_{\alpha}^{N_{\alpha}} S_{\alpha} M_{r\alpha}$, $M_{rw} = \sum_{\beta}^{N_{\beta}} S_{\beta} M_{r\beta}$

Начальные условия:

$$\begin{aligned} u_i(x_1, x_2, x_3, t=0) &= u_0(x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \in G, \\ u_i(x_1, x_2, x_3, t=0) &= 0, (x_1, x_2, x_3) \notin G, \\ T(x_1, x_2, x_3, t=0) &= T_1, (x_1, x_2, x_3) \in G, \\ T(x_1, x_2, x_3, t=0) &= T_0, (x_1, x_2, x_3) \notin G, \\ S_{\alpha}(x_1, x_2, x_3, t=0) &= \frac{\rho_{\alpha}}{\rho_m}, \alpha = 1, \dots, N_{\alpha}, \\ S_{\beta}(x_1, x_2, x_3, t=0) &= \frac{\rho_{\beta}}{\rho_m}, \beta = 1, \dots, N_{\beta}, \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = 0, \frac{\partial S_{\alpha}}{\partial n} = 0, \frac{\partial S_{\beta}}{\partial n} = 0, \frac{\partial T}{\partial n} = 0, i = 1, 2, 3, \alpha = 1, \dots, N_{\alpha}, \beta = 1, \dots, N_{\beta}.$$

2.2 Алгоритм определения начального значения температуры огненного шара.

Уравнение полной энергии состоит из удельной внутренней энергии и кинетической энергий. Предположим в этой задаче кинетическая энергия $E_k = 0$:

$$E = U \quad (7)$$

где $E = 0,25 \cdot q \cdot t_{\text{вз}}$ - энергия взрыва; $t_{\text{вз}}$ - время взрыва; q - мощность взрыва.

Одна треть всей выделившейся при взрыве энергии испускается в виде излучения (Garnier, 2009:1-276). В итоге энергия, заключенная в огненном шаре к началу его подъема, составляет примерно одну четверть от всей энергии взрыва.

Удельная внутренняя энергия при адиабатическом процессе выражается:

$$U = C_v(T_1 - T_0) \quad (8)$$

здесь C_v - теплоемкость газа в процессах с постоянным объемом, T_1 - температура окружающей среды, при различных значений начальной температуры T_0 огненного шара.

Подставляя уравнения (8) в уравнение (9), получим начальное значение температуры огненного шара:

$$T_0 = \frac{E}{C_v} + T_1 \quad (9)$$

2.3 Метод крупных вихрей

Применяя фильтр к основным уравнениям (1) - (6), получены следующие уравнения (10 - 11):

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \overline{\rho_m}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\rho_m} \cdot \overline{u_m}) = 0 \quad (10)$$

Уравнение концентрации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m S_\alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m h_m S_\alpha) &= -\nabla \cdot G_\alpha, \alpha = 1, \dots, N_\alpha \\ \frac{\partial(\rho_m S_\beta)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m h_m S_\beta) &= -\nabla \cdot G_\beta, \beta = 1, \dots, N_\beta \end{aligned} \quad (11)$$

где $G_\alpha = \overline{\rho_m}(\overline{S_\alpha u_m} - \overline{S_\alpha} \overline{u_m}) = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \Delta \overline{S_\alpha}$, $G_\beta = \mathbf{B}(\overline{S_\beta u_m} - \overline{S_\beta} \overline{u_m}) = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \Delta \overline{S_\beta}$ описывают вклад подсеточных турбулентных масштабов для уравнений концентрации компонент газа.

Закон сохранения количества движения может быть записан с достаточной точностью в виде:

$$\frac{\partial(\rho_m u_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m u_m \otimes u_m + \rho_m \mathbf{T}_r) = -\nabla p + \nabla \mathbf{T} + \rho_m \mathbf{g} - \nabla \mathbf{B} \quad (12)$$

где $\mathbf{B} = \overline{\rho_m}(u_m \otimes u_m - \overline{u_m} \otimes \overline{u_m}) = \frac{2}{d} K_t \mathbf{I} - 2\mu_t \mathbf{S}_m$ - подсеточный тензор, отвечающий за мелкомасштабные структуры, которые нужно моделировать.

Уравнение энтальпии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_m h_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m h_m u_m) + \nabla \cdot (q - \mathbf{T} \cdot u_g) = \\ = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial(\rho_m K_m)}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho_m K_m u_m) + \rho_m (g \cdot u_m) - \nabla \cdot (Q + Q_K) \end{aligned} \quad (13)$$

где $Q = \overline{\rho_m(h_m u_m - h_m \cdot \overline{u_m})} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \Delta \overline{h_m}$, $Q_K = \overline{\rho_m(K_m u_m - K_m \cdot \overline{u_m})} = -\frac{\mu_t}{Pr_t} \Delta \overline{K_m}$ - описывают вклад подсеточных турбулентных масштабов (Онуфриев, 1967:3-15), (Piscaglia, 2013:926-940), Pr_t - турбулентное число Прандтля, μ_t - турбулентная вязкость.

2.4 Численный метод

Для получения нестационарных полей неизвестных переменных проводится трехмерное численное моделирование уравнения (Moin, 1991:2746-2757), (Nicoud, 1999:183-200), (Piscaglia, 2013:926-940) с указанными начальными и граничными условиями.

Реализация численного алгоритма проведена на основе метода конечных объемов на неструктурированной сетке с использованием библиотеки классов OpenFOAM для языка C++ имеющей открытую лицензию GPL. Благодаря высокому уровню абстракции с применением шаблонов языка C++ библиотека OpenFOAM позволяет быстро создавать эффективные решатели и утилиты для пре и пост обработки результатов моделирования. Классы и функции в библиотеке OpenFOAM имеют неявные средства для распараллеливания вычислительных процедур, благодаря которым проведение численного расчета на многопроцессорных вычислительных системах не требует специфичных адаптаций в программном коде.

В методе конечных объемов (Ferziger, 2002: 251-253) дифференциальные уравнения в частных производных интегрируются по объему произвольной ячейки, после чего применяется теорема Гаусса-Остроградского для перевода объемных интегралов в поверхностные.

При вычислении потоков через границы конечного объема необходимо интерполировать неизвестные значения на каждую грань конечного объема. От выбора метода интерполирования зависят такие характеристики как точность и устойчивость. Интегрирование по времени проводится с помощью схемы Кранка-Николсона, число Куранта поддерживалось на уровне 0.5.

Для обеспечения устойчивости численного расчета применялись неявные схемы, как для конвективных, так и для диффузионных слагаемых.

Для связывания полей скорости и давления, а так же для выполнения закона сохранения массы использовалась процедура PISO (Issa, 1986 : 66-82). В уравнениях движения и сохранения массы используются явные представления полей давления и силы тяжести. Пространственная дискретизация имеет второй порядок точности.

Алгоритм PISO состоит из одного шага предиктора и нескольких шагов корректоров. В шаге предиктор находится промежуточное поле скорости с использованием поля давления из предыдущего временного слоя. На каждом шаге корректора производится коррекция поля скорости и давления для увеличения точности и уменьшения дефекта массы в уравнении сохранения.

Система линейных алгебраических уравнений, полученная в результате дискретизации уравнения переноса, решается методом сопряженных градиентов с предобуславливателем Халецкого для уравнения давления и методом бисопряженных градиентов с предобуславливателем неполной LU факторизации.

Алгоритм численного решения разработан следующим образом:

1. Решение уравнения сохранения для плотности смеси явным методом, используя потоки с предыдущего временного слоя.
2. Решение уравнения переноса для газовых составляющих.
3. Решение уравнения сохранения импульса, используя поле давления с предыдущей итерации.
4. Решение уравнения переноса энтальпии, используя поле давления с предыдущей итерации.
5. Решение уравнения Пуассона для давления.
6. Модификация полей плотности и скорости на основе нового поля давления.
7. Возобновление итерации с шага 5 для уменьшения дефекта масс в уравнении сохранения массы.
8. Вычисление подсеточной вязкости.
9. Оценка точности решения и переход на шаг 2 в случае необходимости.

3 Результаты и обсуждение

Представлены результаты численного моделирования образования и динамики облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя. Были использованы условия аварии РН «Протон-М» 2-го июля 2013 г. Определена динамика изменения высоты подъема огненного шара в атмосфере зависимости от термодинамических параметров. Проведено сравнение высоты поднятия облака в зависимости от мощности взрыва с аналитической формулой Сэттона, которая применима для взрывов малых мощностей, при которых q [0.1:1000] тонн. Также показана динамика изменения состава облака при мощности взрыва, рассчитанной от размеров воронки.

РН «Протон-М» была запущена с космодрома «Байконур» 02.07.2013 г. в 08 ч 38 мин. 22 сек. по времени Астаны. До 10 секунды полет осуществлялся штатно. Во второй половине 10 секунды полета произошла нештатная ситуация - ракета начала сильно отклоняться от траектории - полетела в юго-восточном направлении в сторону площадки 200 космодрома «Байконур». На 18 секунде полета ракета развернулась в сторону Земли, стала разваливаться на части и загорелась (на 24 секунде от ракеты оторвалась космическая головная часть, на 26 секунде один из боковых блоков первой ступени, на 28 секунде еще один блок (возможно еще один боковой блок). На 30 секунде происходит столкновение с землей, взрыв и образование взрывного облака (рисунок 2). Через 10 секунд после взрыва высота облака увеличивается, а через минуту достигает своего максимума (рисунок 3). На месте аварийного падения образовалась воронка размерами 40 на 25 м с севера на юг, глубиной 5 м. Высота бруствера до 1,5 м (Авдеева, 1972: 239-241).



Рисунок 2 - Взрыв на месте аварийного падения (30 секунда).



Рисунок 3 - Максимальная высота облака (через 1 минуту после взрыва).

Численное моделирование этапа формирования газопылевого облака в первые минуты аварии проведено в кубической области с физическим размером ребра куба 1280 м и расчетной сеткой 64x64x64. В момент взрыва ракеты-носителя были выявлены параметры указанные в таблицах 1 и 2.

Наземный взрыв сопровождается образованием воронки. Размеры воронок зависят главным образом от мощности взрыва и типа почво-грунтов. Мощность взрыва и глубина воронки связаны соотношением (Авдеева 1972: 239-241), (Орленко, 2002: 832-833):

$$q = K_B W^3 (0,4 + 0,6n^3) \quad (14)$$

где q - мощность взрыва; $K_B = 1,35$ - расчетный удельный расход ВВ, кг/м³; $W = 5$ - глубина воронки, м; $n = 2$ - показатель действия взрыва.

Формула (14) позволяет вычислить мощность взрыва по известной глубине воронки, получилась $q = 0,878$ т. Максимальная высота подъема (км) огненного шара определяется по формуле Сэттона (Sutton, 1947: 20-22), (Онфуриев, 1967: 3-15):

$$H = 0,665q^{0,276}$$

Таблица 1 - Метеорологические параметры, площадка 92 (высота расположения около 100 м).

Высота, м	Температура воздуха, С	Влажность воздуха, %	Атмосферное давление, мм.рт.ст	Направление ветра, град	Скорость ветра, м/с
02.07.2013 (08:00)					
10	18,6	45	738,5	10	6-8
40				20	7-8

Таблица 2 - Параметры взрыва ракеты-носителя

Номер ступени РН	1+2+3
Остаток ракетного топлива на момент взрыва (НДМГ + АТ), т	0,703
Показатель действия взрыва (n)	2
Мощность взрыва, т	0.878
Глубина воронки, м	5
Радиус воронки, м	10
Диаметр воронки, м	20
Объем воронки, м ³	785,4
Масса выброшенной из воронки почвы, т	1178,2
Высота вала (бруствера) воронки, м	1,3
Радиус огненного шара, м	2,6
Объем огненного шара, м	74,05
Энергия взрыва, *10 ⁹ Дж	3,67
Высота поднятия облака, м	288

Таблица 3 - Физико-химические свойства газов облака

№	Название	Молярная масса, г/моль	Плотность 0°C, кг/м ³	Кинематическая вязкость, м ² /с	Динамическая вязкость, Па·с 0°C	Диаметр молекул, м	Доля (%)
1	Оксид углерода	28,01	1,2500	1329,6* 10 ⁻⁸	1662* 10 ⁻⁸	0,32* 10 ⁻⁹	15
2	Диоксид углерода	44,01	1,9768	693,039* 10 ⁻⁹	1370* 10 ⁻⁸	0,33* 10 ⁻⁹	1,95
3	Азот	28,01456	1,251	2,053* 10 ⁻⁸	1660* 10 ⁻⁸	0,30* 10 ⁻⁹	78
4	Оксид азота	30,0061	1,3402	1343,08* 10 ⁻⁸	1780* 10 ⁻⁸	0,30* 10 ⁻⁹	2,5
5	Диоксид азота	46,0055	2,0527	829,72* 10 ⁻⁸	1112* 10 ⁻⁸	0,28* 10 ⁻⁹	2,5
6	Водяной пар	18,01528	998,2	101,2* 10 ⁻⁸ (при 20 °C)	101000* 10 ⁻⁸	0,29* 10 ⁻⁹	0,05

На рисунке 4 изображена начальная форма огненного шара в облаке. Как видно из рисунков 4-5, в первые секунды аварии облако принимает грибовидную форму, где на верхней части наблюдается образование вихревого кольца. В начальный момент времени температура вихревого кольца велика и равняется 1800 К, в течении 5,5 секунд температура существенно падает до 400 К за счет адиабатического расширения и за счет турбулентного перемешивания нагретого воздуха облака и холодного воздуха окружающей среды. Падение температуры обла-

ка после 5,5 секунды происходит с меньшей скоростью, поскольку в данные моменты времени изменение температуры осуществляется за счет турбулентного перемешивания. Под действием силы плавучести огненный шар нагретого воздуха поднимается в атмосферу до момента выравнивания температуры, плотности газовых компонентов внешнего и внутреннего нагретого и холодного воздуха. При проведении численного моделирования эффект теплового излучения не учитывался. Динамика изменения концентрации в облаке представлена на рисунке 6. На рисунках 7 - 9 представлены графики изменения высоты поднятия облака, максимальной температуры в облаке, объема облака в зависимости от времени.

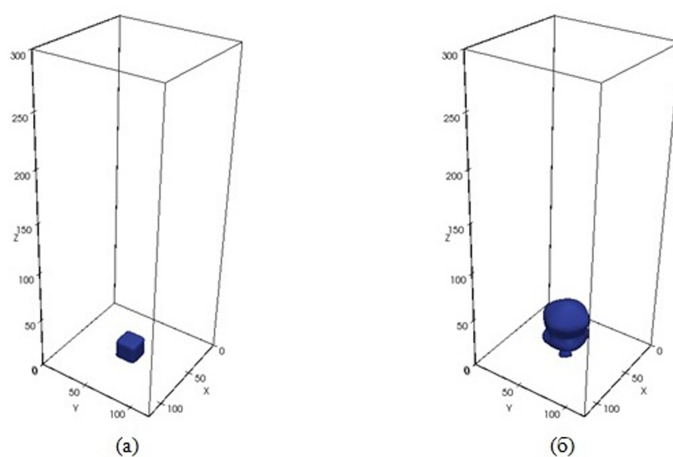


Рисунок 4 - Динамика облакообразования при начальном значении энергии взрыва $E = 3.67 * 10^9$ Дж: а) $t = 0$ с; б) $t = 5$ с.

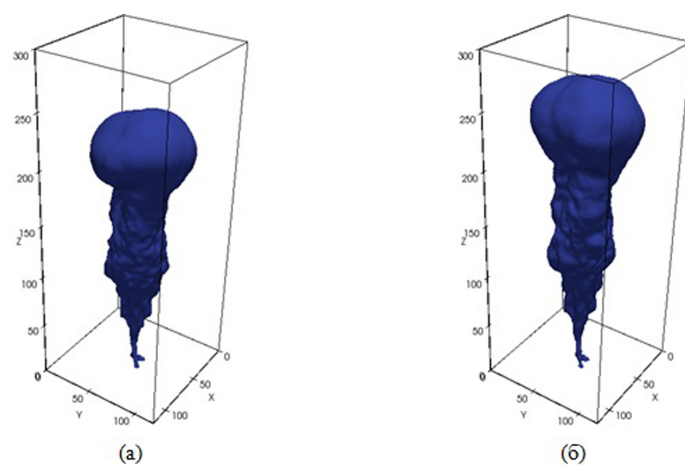


Рисунок 5 - Динамика облакообразования при начальном значении энергии взрыва $E = 3.67 * 10^9$ Дж: а) $t = 30$ с; б) $t = 35$ с.

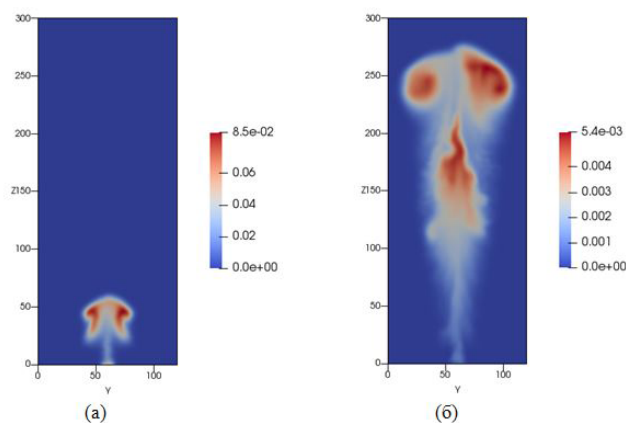


Рисунок 6 - Динамика распространения поля концентрации смеси при начальном значении энергии взрыва $E = 3.67 \cdot 10^9$ Дж в сечении $x = 60$ м: а) $t = 5$ с; б) $t = 35$ с.

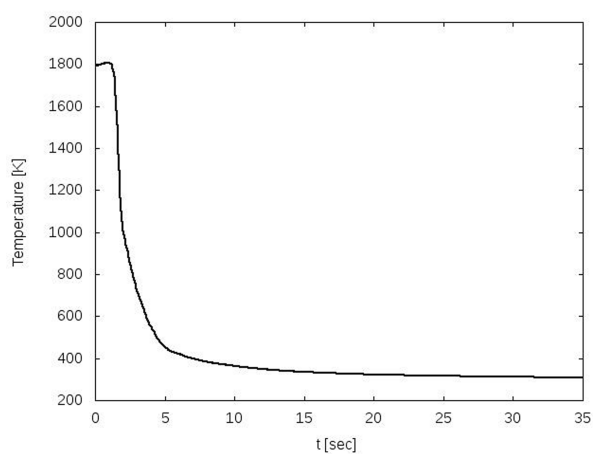


Рисунок 7 - Изменение температуры образовавшегося облака при мощности взрыва $q=0.878$ т.

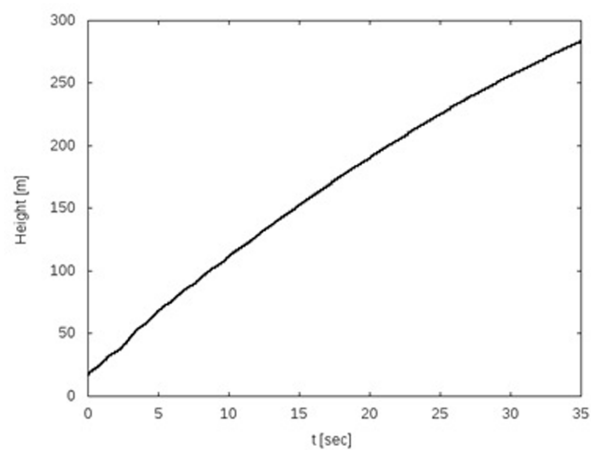


Рисунок 8 - Изменение высоты образовавшегося облака при мощности взрыва $q=0.878$ т.

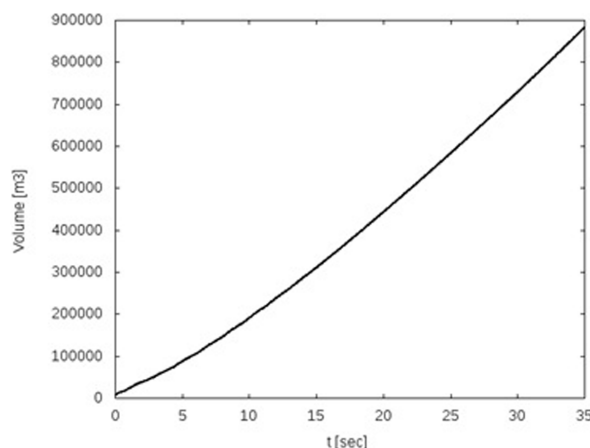


Рисунок 9 - Изменение объема образовавшегося облака при мощности взрыва $q=0.878$ т.

4 Заключение

В данной работе было рассмотрено поднятие огненного шара под действием силы плавучести, с учетом эффектов турбулентного перемешивания и адиабатического расширения. Начальные метеорологические условия, а также параметры взрыва, соответствуют реальным параметрам аварии РН «Протон-М», произошедшей 2-го июля 2013 г. в позиционном районе космодрома «Байконур».

Численный алгоритм основан на решении турбулентных отфильтрованных уравнений Навье-Стокса в сжимаемой постановке, уравнении сохранения массы, энтальпии и уравнении состояния для идеального газа. Для замыкания основных уравнений использована вязкостная модель турбулентности. Используемый численный алгоритм имеет второй порядок точности по времени и по пространству.

Получены результаты численного моделирования формирования облака. Определены геометрические характеристики облака поднятого в результате всплывания: высота поднятия облака, объем облака, формы вихревого кольца в облаке. Сравнение высоты поднятия облака в зависимости от мощности взрыва с аналитической формулой Сэттона подтвердило применимость использованной математической модели к задаче формирования облака при наземном взрыве ракеты-носителя. Мощность взрыва рассчитана от размеров воронки.

В заключении отметим, что результаты данного исследования позволяют оценить геометрические характеристики поднятого облака, концентрацию смеси газовых компонентов в облаке в разные моменты времени. Подобная возможность неоценима при отсутствии экспериментальных данных об образовавшемся облаке в результате аварии. Полученные результаты позволят провести первичную оценку влияния аварии на окружающую среду.

Список литературы

- [1] Ferziger and Peric, Computational Methods for Fluid Dynamics. - 3., rev. ed. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002. ISBN 3-540-42074-6. -P.251-253.
- [2] Garnier, E., Adams, N., and Sagaut, P.: Large Eddy Simulation for Compressible Flows, doi:10.1007/978-90-481-2819-8, Springer, the Netherlands, 2009. -P.276.
- [3] Issa R.I., Gosman A.D., and Watkins A.P. The Computation of Compressible and Incompressible Recirculating Flow by a Non-Iterative Implicit Scheme, Journal of Computational Physics, 1986. Vol. 62, -P.66-82.

- [4] Machta L. Entrainment and the maximum height of an atomic cloud // Bull. Amer. Meteor. Soc. 1950. V. 31. № 6. P. 215–216.
- [5] Moin, P., Squires, K., Cabot, W., and Lee, S.: A dynamic subgrid scale model for compressible turbulence and scalar transport, Phys. Fluids A-Fluid, 1991. Vol. 3, -P. 2746, doi:10.1063/1.858164.
- [6] Nicoud, F. and Ducros, F.: Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor, Flow Turbul. Combust. 1999, Vol.62. -P.183–200, doi:10.1023/A:1009995426001.
- [7] Piscaglia, F., Montorfano, A., and Onorati, A.: Towards the LES simulation of IC engines with parallel topologically changing meshes, SAE Int. J. Engines, 2013, Vol. 6, -P. 926–940, doi:10.4271/2013-01-1096.
- [8] Sutton, O.G. The Atom bomb as an experiment in convection // Weather. 1947. Vol. 2. № 4. -P. 20.
- [9] Zatevakhin, M.A. Turbulent Thermal in a Humid Atmosphere // High Temperature. 2001. Vol. 39. N 4. -P. 532–539.
- [10] Технические правила ведения взрывных работ на дневной поверхности / под ред. Ф.А. Авдеева.- М: Недра, 1972. -С. 239.
- [11] Веремей, Н.Е., Довгалюк, Ю.А., Станкова, Е.Н. Численное моделирование конвективных облаков, развивающихся в атмосфере при чрезвычайных ситуациях // Известия РАН. Физика атмосферы и океанов, 2007, т.43, №6, -С.792-806.
- [12] Вулис, Л.А. Терехина, Н.А. Распространение турбулентной струи газа в среде иной плотности // Журнал технической физики. – 1956 г. – т. 26. № 6. -С. 22-23
- [13] Гостинцев, Ю.А., Солодовник, А.Ф. Мощный турбулентный термик в устойчиво стратифицированной атмосфере. Численное моделирование // ПМТФ. 1987. № 1.-С. 47.
- [14] Ершин, Ш.А., Сакипов, З.Б. Исследование начального участка турбулентной струи сжимаемого газа // Журнал технической физики. – 1959. – т. 2. № 1. -С.21-23
- [15] Лапин, Ю.В., Стрелец, М.Х. Внутренние течения газовых смесей. – М.: Наука, 1989. -С. 368.
- [16] Онуфриев, А.Т. Теория движения вихревого кольца под действием силы тяжести. Подъем облака атомного взрыва // ПМТФ. 1967. № 2. -С. 3-15.
- [17] Физика взрыва / под ред. Орленко Л.П. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - Изд. 3-е, переработанное. - Т. 1. -С. 832.
- [18] Действие ядерного оружия / под ред. Е.М. Соминского. – М: Военное издательство министерства обороны СССР, 1965. -С. 679.
- [19] Якуш С.Е. Гидродинамика и горение газовых и двухфазных выбросов в открытой атмосфере: Дис. ... док. физ.-мат. наук / Институт проблем механики РАН. - Москва, 2000. -С. 336.

References

- [1] Tekhnicheskiye pravila vedeniya vzryvnykh rabot na dnevnoy poverkhnosti / pod red. F.A. Avdeyeva.- M: Nedra. 1972. -P. 239.
- [2] Ershin. Sh.A.. Sakipov. Z.B. Issledovaniye nachalnogo uchastka turbulentnoy strui szhimayemogo gaza // Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. – 1959. – Vol. 2.No.1. - P. 21-23.
- [3] Ferziger and Peric, Computational Methods for Fluid Dynamics. - 3., rev. ed. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002. ISBN 3-540-42074-6,-P.251-253.
- [4] Fizika vzryva / pod red. L.P. Orlenko. – М.: FIZMATLIT. 2002. - Izd. 3-e. pererabotannoye. - Vol. 1. -P. 832.
- [5] Garnier, E., Adams, N., and Sagaut, P.: Large Eddy Simulation for Compressible Flows, doi:10.1007/978-90-481-2819-8, Springer, the Netherlands, 2009. -P.276.
- [6] Gostintsev Yu.A.. Solodovnik A.F. Moshchnyy turbulentnyy termik v ustoychivo stratifitsirovannoy atmosfere. Chislennoye modelirovaniye // PMTF. 1987. Vol.1. -P.47.
- [7] Issa, R.I., Gosman, A.D., and Watkins, A.P. The Computation of Compressible and Incompressible Recirculating Flow by a Non-Iterative Implicit Scheme, Journal of Computational Physics, 1986, -Vol.62. -P.66-82.
- [8] Lapin, Yu.V.. Strelets, M.Kh. Vnutrenniye techeniya gazovykh smesey. – М.: Nauka. 1989, -P.368.

- [9] Moin, P., Squires, K., Cabot, W., and Lee, S.: A dynamic subgrid scale model for compressible turbulence and scalar transport, *Phys. Fluids A-Fluid*, 1992. Vol.3, -P.2746, doi:10.1063/1.858164.
- [10] Machta L. Entrainment and the maximum height of an atomic cloud // *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 1950. -Vol. 31. № 6. -P. 215–216.
- [11] Nicoud, F. and Ducros, F.: Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor, *Flow Turbul. Combust.*, 1999. -Vol. 62. P. 183–200, doi:10.1023/A:1009995426001.
- [12] Onufriyev, A.T. Teoriya dvizheniya vikhrevogo koltsa pod peystviyem sily tyazhesti. Podyem oblaka atomnogo vzryva // *PMTF*. 1967. №2. -P.3-15.
- [13] Piscaglia, F., Montorfano, A., and Onorati, A.: Towards the LES simulation of IC engines with parallel topologically changing meshes, *SAE Int. J. Engines*, 6, 926–940, doi:10.4271/2013-01-1096, 2013.
- [14] *Deystviye yadernogo oruzhiya / pod red. E.M. Sominskogo. – M: Voennoye izdatelstvo ministerstva oborony SSSR. 1965. –P. 679.*
- [15] Sutton O.G. The Atom bomb as an experiment in convection // *Weather*. 1947. Vol.2. №4. -P. 20.
- [16] Vulis. L.A. Terekhina. N.A. Rasprostraneniye turbulentnoy strui gaza v srede inoy plotnosti // *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*. 1956. – Vol. 26. № 6. -P. 22-23.
- [17] Veremey, N.E., Dovgalyuk, Yu.A., Stankova, E.N. Chislennoye modelirovaniye konvektivnykh oblakov. razvivayushchikhsya v atmosfere pri chrezvychaynykh situatsiyakh // *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeanov*. 2007.- Vol.43. №6. -P. 792-806.
- [18] Yakush, S.E. Gidrodinamika i goreniye gazovykh i dvukhfaznykh vybrosov v otkrytoy atmosfere: Dis. ... dok. fiz.-mat. nauk / Institut problem mekhaniki RAN. - Moskva. 2000. – 336 s.
- [19] Zatevakhin, M.A. Turbulent Thermal in a Humid Atmosphere // *High Temperature*. 2001. V. 39. N 4. P. 532–539.

ГРНТИ 517.9

Практическая идентифицируемость математических моделей биомедицинских процессов

- Кабанихин С.И., д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, директор Института
вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация, +7(383) 3308353, E-mail: kabanikhin@sscc.ru
- Бектемесов Ж.М., докторант, Казахский национальный университет имени
аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +7(702)9062830,
E-mail: jolaman252@gmail.com
- Криворотко О.И., канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., Институт вычислительной
математики и математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация, +7(383) 3308460, E-mail: olga.krivorotko@sscc.ru
- Воронов Д.А., мл. науч. сотр., Институт вычислительной математики и
математической геофизики СО РАН,
г. Новосибирск, Российская Федерация, +7(383) 3306046, E-mail: voronov-dima@mail.ru

Работа посвящена численному исследованию единственности и устойчивости задач определения параметров динамических систем, возникающих в фармакокинетике, иммунологии, эпидемиологии, социологии и т.п. по неполным измерениям некоторых состояний системы в фиксированные моменты времени. Значимость параметров, труднодоступных для измерения, очень велика во многих областях, так как их определение позволит медикам и врачам составить эффективный план лечения и подобрать оптимальный набор лекарств. В силу того, что рассматриваемые задачи некорректны, необходимо исследовать степень некорректности до ее численного решения. Один из эффективных способов – это исследование практической идентифицируемости систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которое позволит установить набор идентифицируемых параметров для дальнейшего численного решения обратных задач. В работе приведены три метода исследования практической идентифицируемости: метод Монте-Карло, метод корреляции матрицы и метод доверительных интервалов. На примере двух математических моделей фармакокинетики С-пептида определены неидентифицируемые параметры с помощью программных пакетов PottersWheel и AMIGO. Показано сходство результатов, а также продемонстрированы преимущества каждого из пакетов. Данное исследование позволит построить регуляризированное единственное решение обратной задачи.

Ключевые слова: практическая идентифицируемость, динамические системы, метод доверительных интервалов, обратная задача.

Биомедициналық процестердің математикалық модельдерінің практикалық сәйкестендірілімі

- Кабанихин С.И., физ.-мат ғылымдарының д-ры, РҒА корреспондент мүшесі, РҒА СБ есептеу
математикасы және математикалық геофизика институтының директоры,
Новосибирск қ., Ресей Федерациясы, +7(383) 3308353, E-mail: kabanikhin@sscc.ru
- Бектемесов Ж.М., докторант, әл-Фараби атындағы қазақ Ұлттық университеті, Алматы қ.,
Қазақстан Республикасы, +7(702)9062830, E-mail: jolaman252@gmail.com
- Криворотко О.И., физ.-мат. ғылымдарының канд., РҒА СБ есептеу математикасы және
математикалық геофизика институтының ғылыми қызметкері,
Новосибирск қ., Ресей Федерациясы, +7(383) 3308460, E-mail: olga.krivorotko@sscc.ru
- Воронов Д.А., РҒА СБ есептеу математикасы және математикалық геофизика институтының кіші
ғылыми қызметкері,
Новосибирск қ., Ресей Федерациясы, +7(383) 3306046, E-mail: voronov-dima@mail.ru

Негізгі жұмыс фармакокинетика, иммунология, эпидемиология, социология және ұқсас динамикалық жүйелердің параметрлерін анықтау тұрақтылығы және жалғыздық сандық зерттеуі мәселелеріне арналған, сонымен бірге тіркелген уақытта жүйенің кейбір күйлерінің толықсыз өлшемдерін қолданған. Өлшеуі қиын параметрлердің маңыздылығы көптеген салаларда өте үлкен, өйткені олардың анықтауы дәрігерлерге тиімді емдеу жоспарын жасау және дәрі-дәрмек оңтайлы жинағын таңдауға мүмкіндік береді. Тиімді жолдарының бірі – ол сызықсыз қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің практикалық сәйкестендірілімдіктің зерттеуі, сәйкестендірілімдік параметрлердің жинағын анықтап одан әрі кері есептердің сандық шешімін табуға арналған. Осы мақалада практикалық сәйкестендірілімдіктің үш зерттеу әдістері келістірілген, олар: Монте-Карло әдісі, матрицаның өзара байланыстылық әдісі және сенімділік интервалдар әдісі. AMIGO және PottersWheel бағдарламалық пакеттер арқылы C-пептидтің фармакокинетикасының математикалық модельдердің мысалында сәйкестендірілімейтін параметрлері анықталған. Нәтижелердің ұқсастығымен сондай-ақ әр пакеттің артықшылықтары көрсетілген. Бұл зерттеу кері есептің тұрақтандырылған жалғыз шешімін құрастыруға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: практикалық сәйкестендірілімдік, динамикалық жүйелер, сенімділік интервалдар әдісі, кері есеп.

Practical identifiability of mathematical models of biomedical processes

Kabanikhin S.I., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Corresponding Member of RAS, Director of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of SB RAS,

Novosibirsk, Russian Federation, +7(383) 3308353, E-mail: kabanikhin@sscc.ru

Bektemessov Z.M., doctoral student, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty,

Republic of Kazakhstan, +7(702)9062830, E-mail: jolaman252@gmail.com

Krivorotko O.I., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, researcher of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of SB RAS,

Novosibirsk, Russian Federation, +7(383) 3308460, E-mail: olga.krivorotko@sscc.ru

Voronov D.A., researcher of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation, +7(383) 3306046, E-mail: voronov-dima@mail.ru

The paper is devoted to a numerical study of the uniqueness and stability of problems of determining the parameters of dynamical systems arising in pharmacokinetics, immunology, epidemiology, sociology, *etc.* by incomplete measurements of certain states of the system at fixed time. Significance of parameters difficult to measure is very high in many areas, as their definition will allow physicians and doctors to make an effective treatment plan and to select the optimal set of medicines. Due to the fact that the problems under consideration are ill-posed, it is necessary to investigate the degree of ill-posedness before its numerical solution. One of the most effective ways is to study the practical identifiability of systems of nonlinear ordinary differential equations that will allow us to establish a set of identifiable parameters for further numerical solution of inverse problems. The paper presents three methods for investigating practical identifiability: the Monte Carlo method, the matrix correlation method, and the confidence intervals method. It is presented two mathematical models of the pharmacokinetics of the C-peptide and unidentifiable parameters were determined using the PottersWheel and AMIGO software packages. The similarity of results is shown, and also the advantages of each of the packages are demonstrated. This investigation will allow us to construct a regularized unique solution of the inverse problem.

Key words: practical identifiability, dynamic systems, confidence interval method, inverse problem.

1 Введение

Употребление лекарств стало частью нашей повседневной жизни. Поэтому их свойства необходимо улучшить, а сами лекарства должны быть как можно безопасней. Некоторые лекарства усваиваются человеческим организмом не полностью, лишь половина или даже меньше и остальная часть выходит из организма или теряется в нем, причиняя

ему вред. Поэтому возникает вопрос: как создать лекарственный препарат в таблетках, который бы был абсолютно полезный и без излишеств? Для создания такого лекарства необходимо знать все свойства препарата, что зачастую очень сложно. Тысячи экспериментов необходимо проводить и еще больше на это тратить денег. По этим причинам математическое моделирование процесса распространения лекарств внутри организма может в этом помочь. Математические модели фармакокинетики основываются на законе баланса масс и часто описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Но коэффициенты этих систем не всегда известны, так как характеризуют параметры всасывания лекарств в разных «камерах» организма, скорости переходов препарата между органами человека, что зачастую бывает труднодоступно для измерения. Анализ идентифицируемости является первым шагом к определению неизвестных параметров.

Запишем динамическую систему в общем виде:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), \theta), \quad (1)$$

$$y(t) = h(x(t), u(t), \theta). \quad (2)$$

Здесь $x(t)$ – n -мерный вектор переменных, $y(t)$ – k -мерная функция экспериментальных данных, $u(t)$ – функция входных данных, θ – s -мерный вектор параметров.

Зачастую возникает вопрос о том, единственный ли набор параметров $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s]$ удовлетворяющий экспериментальным данным. С другой стороны, по имеющимся измеренным данным невозможно определить, характеризующий рассматриваемый процесс, набор параметров θ . Тогда анализ идентифицируемости может по данным на входе и на выходе определить единственность искомого набора параметров.

В статье представлены методы исследования обратной задачи (1)-(2) на идентифицируемость такие, как метод Монте-Карло, метод корреляции матрицы и метод доверительных интервалов. На примере двух математических моделей фармакокинетики С-пептида вида (1) перечисленными методами определены неидентифицируемые параметры. Приведены результаты численных экспериментов и их анализ.

2 Обзор литературы

Исследование идентифицируемости моделей получило развитие в 80-е годы XX века. К первым публикациям по идентифицируемости относятся работы (Габасов 1970: 1-508), (Glover 1974: 640-646), (Bellman 1970: 65-74), основные понятия и определения введены в работе (Grewal 1976: 833-837), а наиболее важные первые результаты получены в статьях (Vajda 1979: 39-43), (Reid 1977: 242-246), (Cobelli 1980: 369-380), (Tunali 1987: 146-154). Среди отечественных ученых можно отметить следующих авторов: Щербак В.Ф. (Щербак 1983: 105-108), Леваков А.А. (Леваков 1983: 1074-1078), Карелин В.В. (Карелин 1982: 75-80), среди зарубежных: С. Cobelli (Cobelli 1976: 115-140), (Cobelli, Saccomani 1992: 18-23), Mori J.D. (Mori 1979: 893-900), DiStefano J. (DiStefano 1976: 131-141), R. Brown (Brown 1980: 31-41), (Brown 1982: 31-41). В настоящее время этой областью активно занимаются ученые за рубежом: М. Eisenberg (Eisenberg 2009: 61-72) (Университет Мичиган, США); М. Saccomani (Bellu, Saccomani 2007: 52-61), (Saccomani

2011: 1734-1753), С. Cobelli (Университет Падуи, Италия); N. Meshkat (Meshkat 2012: 117-123), (Meshkat 2014a: 46-67), (Meshkat 2014b: 57-66) (Университет Калифорнии, Лос-Анджелес); E. Carson (Carson 2001: 1-421), (Carson 2008: 1-324) (Лондонский городской университет, Великобритания); Audoly S. (Audoly 1983: 10-17) (Университет Кальяри, Италия).

Введем понятие идентифицируемости. Динамическая система, заданная уравнениями (1)–(2) называется *идентифицируемой*, если набор параметров θ можно определить единственным или конечным образом по входным данным $u(t)$ и данным измерений $y(t)$, иначе система называется *неидентифицируемой*.

Система называется *глобально идентифицируемой*, если для любых допустимых входных данных $u(t)$ и двух векторов параметров θ_1 и θ_2 в параметрическом пространстве θ , $y(u, \theta_1) = y(u, \theta_2)$ тогда и только тогда, когда $\theta_1 = \theta_2$.

Система называется *локально идентифицируемой*, если для любых θ в открытой окрестности некоторой точки θ^* в параметрическом пространстве θ , $y(u, \theta_1) = y(u, \theta_2)$ тогда и только тогда, когда $\theta_1 = \theta_2$.

Понятие идентифицируемости делится на две части: структурная идентифицируемость и практическая идентифицируемость. Структурная идентифицируемость – это точно определенное и бинарное понятие. Практическая идентифицируемость менее ясна и может быть определена как способность оценивать данный набор параметров с точностью, которая считается удовлетворительной в соответствии с контекстом исследования. Очень четкое объяснение различий между этими понятиями дано в Petersen et al. (2001): «структурная идентификация основана на структуре модели и доступных измеряемых данных, и дает указание на максимальное количество информации, которая может быть получена из теоретического эксперимента. С другой стороны, практическая идентифицируемость зависит не только от структуры модели, но и от условий эксперимента». Следовательно, даже если структурная идентифицируемость определена, то практическая идентифицируемость может быть не допустима.

В практической идентифицируемости к уравнению (2) добавляется ошибка измерений (погрешность) $\varepsilon(t)$:

$$y(t) = h(x(t), u(t), \theta) + \varepsilon(t). \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon(t)$ имеет среднее квадратичное значение 0 и дисперсию, равную $\sigma^2(t)$. Тогда для определения практической идентифицируемости применяется ряд методов, такие как метод Монте-Карло, метод размножения выборки, метод корреляции матрицы основанный на матрице информации Фишера, метод доверительного интервала.

3 Методы исследования практической идентифицируемости

3.1 Метод Монте-Карло

Этот метод основывается на выборке с использованием случайных чисел и распределений вероятностей. Более конкретно, метод Монте-Карло сначала определяет возможные входные значения (например, уровень шумов измерения), затем произвольно генерирует входные значения в соответствии с определенными вероятностными распределениями

(например, нормальное распределение с нулевым средним значением), а затем использует входные значения для выполнения определенных расчетов (например, добавлять случайные ошибки к данным) и, наконец, агрегировать отдельные результаты вычислений (например, среднюю ошибку в оценках параметров). Это не только полезно для практического анализа идентифицируемости, но также полезно для экспериментального проектирования.

Как только параметры или подмножество параметров модели определены, как структурно идентифицируемы, можно использовать метод Монте-Карло, чтобы оценить, можно ли определить структурно идентифицируемые параметры с приемлемой точностью из зашумленных данных. Очевидно, что для оценки практической идентифицируемости должны быть доступны статистические методы оценки, такие как метод наименьших квадратов.

Метод Монте-Карло позволяет моделировать различные сценарии с различным числом наблюдений при разных уровнях шума или погрешности измерений для различных экспериментальных проектов, хотя такие проекты могут оказаться невозможными для практических экспериментов. Данные моделирования могут использоваться для оценки достоверности параметров модели или подмножество параметров при различных условиях. В общем случае процедуру моделирования методом Монте-Карло можно охарактеризовать следующим образом:

1. Определить номинальные значения параметров θ_0 для имитационных исследований, которые могут быть получены путем подгонки модели к экспериментальным данным, если таковые имеются. В противном случае его можно получить из литературы или других ресурсов.
2. Использовать номинальные значения параметров, чтобы численно решить модель ОДУ и получить решение выходных или измеренных переменных в экспериментальных временных точках проектирования.
3. Сгенерировать N (к примеру, 1000 и/или больше) набор смоделированных данных из выходных или измеренных данных модели (3) с заданной ошибкой.
4. Подогнать ОДУ модель для каждого набора из N смоделированных данных для определения оценки параметра $\tilde{\theta}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$.
5. Вычислить среднюю относительную ошибку оценки (average relative estimation error - ARE) для каждого элемента θ , следующим образом

$$ARE = 100\% \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\theta_0^{(k)} - \tilde{\theta}_i^{(k)}|}{\theta_0^{(k)}}, \quad (4)$$

где $\theta_0^{(k)}$ – k -тый элемент θ_0 , а $\tilde{\theta}_i^{(k)}$ – k -тый элемент $\tilde{\theta}_i$.

ARE можно использовать для определения допустимости оценки параметров. Так при очень маленьких значениях погрешности, оценки параметров должны быть близки к истине и тогда значение ARE должно быть близко к 0. Когда значение погрешности

возрастает, то и ARE оценки параметров тоже увеличивается. Тем не менее, ARE может значительно увеличиваться для одних оценок параметров и совсем немного для других. Однако для допустимого или практического уровня погрешности, если ARE оценки параметров недопустимо высок, тогда можно утверждать, что этот параметр не является практически или статистически идентифицируемым. Некоторые параметры могут быть не чувствительны к погрешностям и всегда хорошо просчитываются, ну а другие параметры могут быть весьма чувствительны к погрешностям, и их ARE являются большими даже для небольшой погрешности, и в то же время некоторые параметры могут быть средними.

Однако не существует четкого правила о том, насколько высока потребность в ARE до того, как они утверждаются «неприемлемыми» для конкретной задачи. Таким образом, практическая идентифицируемость основывается на задаче и суждении исследователей. Также отметим, что различные подходы статистической оценки могут быть использованы для получения оценок параметров, и ARE может зависеть от методов оценки.

3.2 Метод корреляции матрицы

Метод основан на корреляции между параметрами модели. Сама матрица корреляции параметров модели может быть вычислена, основываясь на матрицу информации Фишера, и имеет вид:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_1) & r_{12}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \cdots & r_{1q}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_q) \\ r_{21}(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) & r_{22}(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_2) & \cdots & r_{2q}(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_q) \\ \vdots & & & \\ r_{q1}(\hat{\theta}_q, \hat{\theta}_1) & r_{q2}(\hat{\theta}_q, \hat{\theta}_2) & \cdots & r_{qq}(\hat{\theta}_q, \hat{\theta}_q) \end{bmatrix}.$$

Здесь r_{ij} — коэффициент корреляции между оценками параметров $\hat{\theta}_i$ и $\hat{\theta}_j$. Если он близок к единице, то между данными оценками параметров есть сильная положительная корреляция, и они называются практически не различимыми. Это означает, что один параметр сильно зависит от другого и их нельзя вычислять отдельно. Для нахождения коэффициента корреляции r_{ij} необходимо использовать следующую формулу:

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}}, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Здесь $C = FIM^{-1}$, основываясь на теорему Крамера-Рао. В свою очередь FIM есть матрица информации Фишера, которая определяется по следующей формуле:

$$FIM = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \hat{\theta}} \right)^T V^{-1} \left(\frac{\partial \hat{y}_i}{\partial \hat{\theta}} \right).$$

3.3 Метод доверительного интервала

Данный метод, как и метод корреляции матрицы, включает в себя функцию правдоподобия

$$L(\theta, y) = \prod \rho(y_i, \theta),$$

где $L(\theta)$ – это функция правдоподобия по параметру θ .

Рассмотрим функцию

$$\chi^2(\theta) = \sum_k^n \sum_l^m \frac{(y_k(\theta, t_l) - h(t_l, \theta))^2}{\sigma_{kl}^2} = \text{const} - 2 \log(L(\theta)).$$

Затем мы минимизируем функцию $\chi^2(\theta)$

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin} [\chi^2(\theta)]$$

для дальнейшего расчета доверительного интервала $[\sigma_i^-, \sigma_i^+]$.

Доверительный интервал $[\sigma_i^-, \sigma_i^+]$ оценки параметра $\hat{\theta}_i$ до уровня доверия α означает, что истинное значение θ_i^* находится в пределах этого интервала с вероятностью α . Доверительные интервалы делятся на асимптотические и конечного объема выборки.

Асимптотические доверительные интервалы. Доверительные интервалы могут быть получены из кривизны правдоподобия, т.е. матрицы Гесса $\mathbf{H} = \nabla^T \nabla \chi^2|_{\hat{\theta}_i}$. Используя ковариантную матрицу $\mathbf{C} = 2\mathbf{H}^{-1}$ оценки параметров, получаем асимптотические доверительные интервалы следующим образом:

$$\sigma_i^\pm = \hat{\theta}_i \pm \sqrt{\chi^2(\alpha, df) \cdot C_{ii}},$$

где $\chi^2(\alpha, df)$ есть α квантиль χ^2 -распределения с df степенями свободы.

Асимптотические доверительные интервалы являются не подходящими, из-за того, что даже для простейшей реакционной сети, наблюдаемые измерения y_i нелинейно зависят от θ , а количество и качество экспериментальных данных часто неудовлетворительны.

Поэтому, рассмотрим доверительные интервалы *конечного объема выборки*. Эти так называемые доверительные интервалы на основе функции правдоподобия определяются областью доверия

$$\{\theta \mid \chi^2(\theta) - \chi^2(\hat{\theta}) < \Delta_\alpha\}, \quad \Delta_\alpha = \chi^2(\alpha, df).$$

4 Результаты и обсуждение

Анализ практической идентифицируемости и определение доверительных интервалов неизвестных параметров был проведен с помощью программного пакета PottersWheel. Программа PottersWheel была разработана для обеспечения интуитивно понятной и в то же время мощной структуры для моделирования на основе данных динамических систем. Его ключевая функциональность – это подгонка множественных экспериментов, где несколько экспериментальных наборов данных из разных лабораторных условий устанавливаются одновременно, чтобы улучшить оценку неизвестных параметров

модели и проверить ее достоверность. Новые эксперименты могут быть разработаны интерактивно. Модели создаются либо на основе программного текста, либо с помощью дизайнера визуальной модели. Динамически сгенерированные и скомпилированные С-файлы обеспечивают быстрое моделирование и подгонку процедур. К каждой функции можно получить доступ, используя графический интерфейс пользователя или через командную строку, что позволяет выполнять пакетную обработку в пользовательских сценариях Matlab. PottersWheel представляет собой набор инструментов Matlab, состоящий из 250 000 строк кода Matlab и языка программирования С. Подробное описание установки и ознакомительные видеоролики можно найти на сайте www.potterswheel.de.

Результаты численных экспериментов приведем для двух примеров задач фармакокинетики: упрощенной и развернутой двухкамерной кинетической модели С-пептида.

4.1 Упрощенная двухкамерная модель С-пептида

Исследуем практическую идентифицируемость упрощенной двухкамерной кинетической модели С-пептида с 3 параметрами k_{21} , k_{12} и k_{01}

$$\begin{cases} \dot{CP}_1(t) = -(k_{01} + k_{21})CP_1(t) + k_{12}CP_2(t) + SR(t)/V_C, \\ \dot{CP}_2(t) = k_{21}CP_1(t) - k_{12}CP_2(t), \\ CP_1(0) = CP_{10}, \quad CP_2(0) = CP_{20}, \end{cases} \quad (5)$$

измерения в которой заданы для первой камеры. Здесь камера 1 представляет плазму крови, а камера 2 – ткани. Соответственно, $CP_1(t)$ – концентрация С-пептида в крови, $CP_2(t)$ – концентрация С-пептида в тканях, $SR(t)$ – поджелудочная секреция (в целях упрощения она равна нулю), V_C – объем распределения камеры 1. Параметры k_{21} и k_{12} обозначают скорость передачи между двумя камерами, k_{01} – убыток из камеры 1.

После определения модели и начальных данных методом доверительных параметров была реализована и просчитана обратная задача для математической модели (5), также определена структурная и практическая идентифицируемость. Для каждого из параметров и измеренной концентрации первой камеры были выведены доверительные интервалы Рисунок 1.

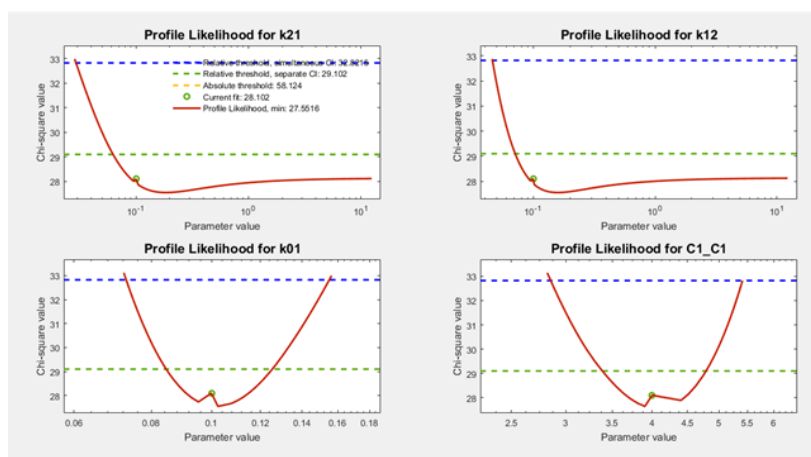


Рисунок 1 - Профили функции правдоподобия для каждого из параметров.

Как видно из графиков, профили функции правдоподобия параметров k_{21} и k_{12} не достигают отдельных доверительных интервалов (зеленая пунктирная линия). Это означает, что параметры структурно идентифицируемы, но практически неидентифицируемы. Что касается параметра k_{01} , то он является практически идентифицируемым, как показано на Рисунок 2.

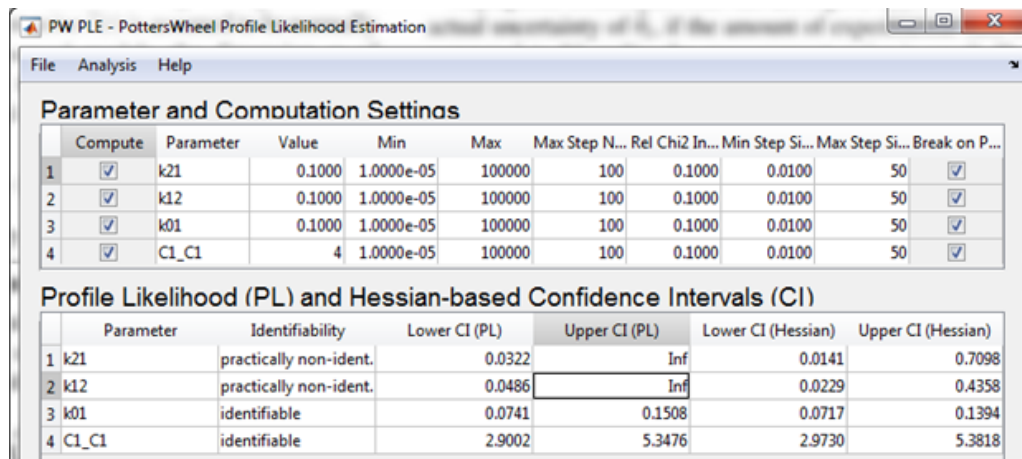


Рисунок 2 - Расчетные показатели параметров с определениями идентифицируемости.

Программный пакет PottersWheel после расчетов выдал следующие наглядные результаты, среди которых ковариантная матрица, матрица корреляции и график ее собственных значений и другие Рисунок 3

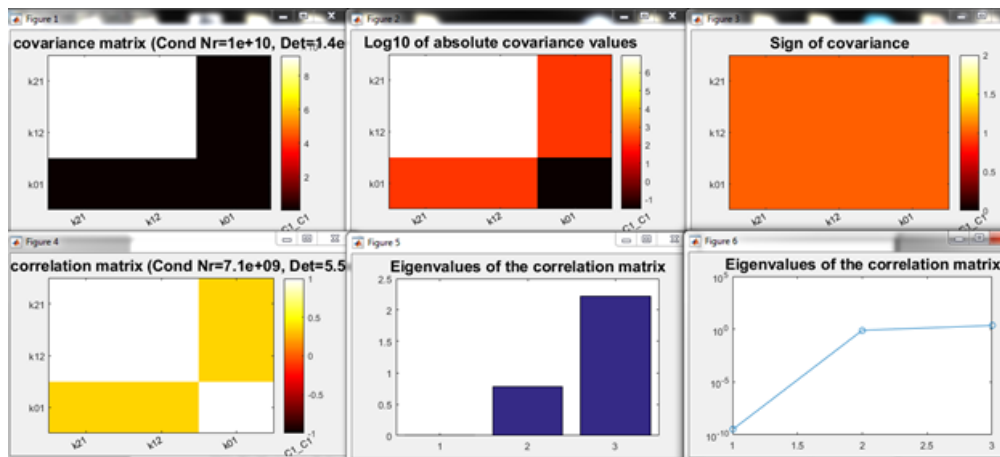


Рисунок 3 - Ковариантная матрица, матрица корреляции, ее собственные значения и сингулярные числа для упрощенной двухкамерной кинетической модели С-пептида

Матрица корреляции (левый нижний угол) показывает сильную положительную корреляцию между параметрами k_{21} и k_{12} , близкую по значению к 1, что означает, что данные два параметра практически неотличимы. Сильная положительная корреляция между двумя параметрами указывает на то, что один параметр сильно зависит от другого параметра и эти два параметра не могут быть оценены отдельно.

4.2 Развернутая двухкамерная модель С-пептида

В качестве второго примера рассмотрим развернутую двухкамерную кинетическую модель С-пептида с 7 параметрами k_{21} , k_{12} , k_{01} , α , β , m и h

$$\begin{cases} \dot{cp}_1(t) = -(k_{01} + k_{21})cp_1(t) + k_{12}cp_2(t) + mx(t), \\ \dot{cp}_2(t) = k_{21}cp_1(t) - k_{12}cp_2(t), \\ \dot{x}(t) = -mx(t) + y(t), \\ \dot{y}(t) = -\alpha(y(t) - \beta[G - h]), \\ cp_1(0) = 0, \quad cp_2(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь камера 1 представляет плазму крови, а камера 2 – ткани. Соответственно, $cp_1(t)$ – концентрация С-пептида в крови, $cp_2(t)$ – концентрация С-пептида в тканях. Параметры k_{21} и k_{12} обозначают скорость передачи между двумя камерами, k_{01} – убыток из камеры 1. Модель содержит 7 неизвестных параметров. Три из них относятся к кинетике С-пептида (показателя, отражающего уровень секреции инсулина): k_{21} , k_{12} и k_{01} ; остальные относятся к секреции поджелудочной железы: α , β , m и h .

Далее основываясь на методе корреляции матрицы, представим расчеты, используя программный пакет AMIGO, позволяющий также проводить анализ идентифицируемости.

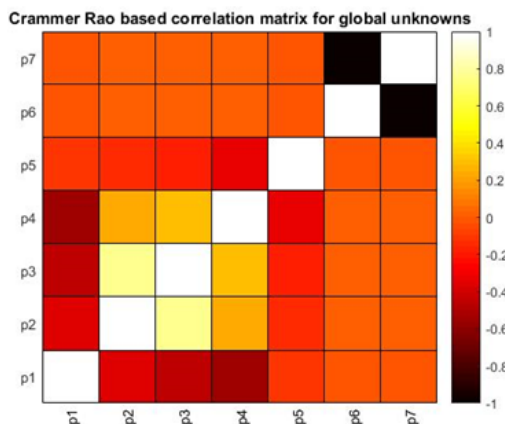


Рисунок 4 - Матрица корреляции для развернутой двухкамерной кинетической модели С-пептида (5)

Как видно из Рисунок 4 наиболее близкие к 1 показатели корреляции у параметров p_2 и p_3 , что в свою очередь являются параметрами k_{01} и k_{12} , следовательно, эти параметры зависимы друг от друга.

Анализируя с матрицей корреляции полученной программным пакетом PottersWheel Рисунок 5, можно заметить что в отличии от AMIGO сильную положительную корреляцию показывают параметры k_{21} и k_{12} , и параметры α и β . Но сходство оба программных пакета показывают, что параметры β и h имеют сильно отрицательную корреляцию.

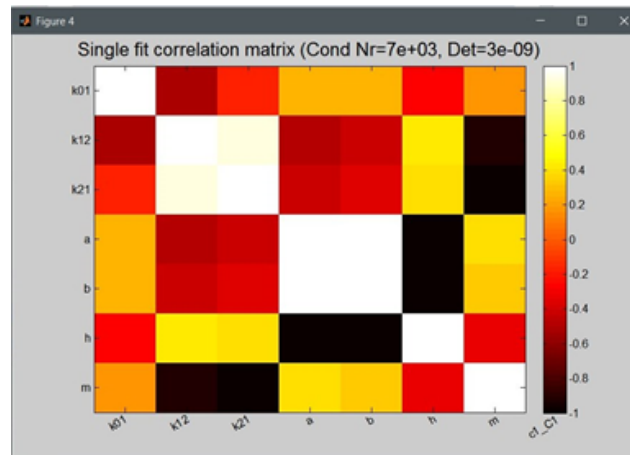


Рисунок 5 - Матрица корреляции для развернутой двухкамерной кинетической модели С-пептида (6), полученная с помощью PottersWheel.

С помощью приложения PottersWheel удалось получить следующие результаты Рисунок 6: параметр k_{01} является практически идентифицируемым, а остальные параметры k_{12} , k_{21} , α , β , m и h – практически неидентифицируемые.

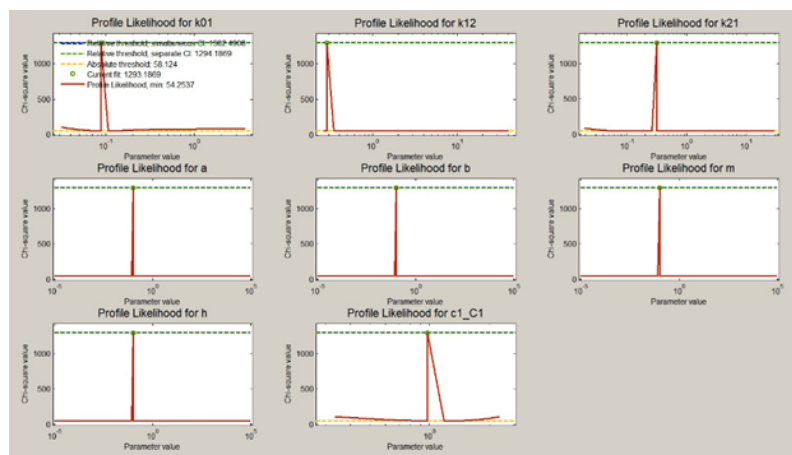


Рисунок 6 - Профили функции правдоподобия для развернутой двухкамерной кинетической модели С-пептида (6), полученные с помощью PottersWheel.

5 Заключение

Работа была проведена в ИВМиМГ СО РАН, город Новосибирск, где были рассмотрены и применены методы практической идентифицируемости параметров для двух вариантов кинетической модели С-пептида с тремя и семью параметрами соответственно (Кабанихин 2015: 738-744). В первом случае два параметра были определены как структурно идентифицируемы, когда третий параметр был определен как практически идентифицируемый. Это означает, что добавление шума не оказало негативного влияния на вычисления идентифицируемости третьего параметра. Также матрица корреляции показала, что параметры определенные как структурно идентифицируемые, схожи и имеют близкие к 1 коэффициенты. Такая сильная положительная корреляция между

двумя параметрами означает, что оба параметра сильно зависят друг от друга и они не могут быть рассчитаны раздельно. Во втором эксперименте из 7 параметров лишь один определен как практически идентифицируемый, тогда как остальные параметры – структурно. Что интересно практически идентифицируемым в обоих случаях стал один и тот же параметр. Как показала матрица корреляции рассчитанная на программном пакете AMIGO, только два параметра имеют корреляционные коэффициенты близкие к единице, что интересно один из этих коэффициентов является практически идентифицируемым, а другой структурно, но при этом они довольно сильно зависят друг от друга. Сравнение матриц корреляций программных пакетов PottersWheel и AMIGO выявило схожесть в сильной отрицательной корреляции двух структурно идентифицируемых параметров. Дальнейшее изучение методов и применение программных пакетов позволит более детально описать тот или иной параметр и определить его идентифицируемость.

6 Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (4.1.3 Совместные лаборатории НГУ-ННЦ), РФФИ в рамках научного проекта 16-31-00382 мол_а, гранта Президента РФ (номер гранта МК-1214.2017.1) и Министерством образования и науки Республики Казахстан (проект № 1746/ГФ4 «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач естествознания».)

Список литературы

- [1] *Audoly S.* On the identifiability of linear compartmental system: a revisited transfer function approach based on topological properties // *Mathematical Biosciences.* - 1983. - Vol. 10, № 5. - P. 10–17.
- [2] *Bellman R.* On structural identifiability // *Mathematical Biosciences.* - 1970. - Vol. 30, № 4. - P. 65–74.
- [3] *Bellu G., Saccomani M.P.* DAISY: A new software tool to test global identifiability of biological and physiological systems // *Comput.methods programs biomed.* - 2007. - Vol. 88. - P. 52–61.
- [4] *Brown R.* Compartmental system analysis: state of the art // *IEEE Transactions on Biomedical Engineering.* - 1980. - Vol. 14, № 3. - P. 31–41.
- [5] *Brown R.* Identifiability: role in design of pharmacokinetic experiments // *IEEE Transactions on Biomedical Engineering.* - 1982. - Vol. 14, № 3. - P. 31–41.
- [6] *Carson E., Cobelli C.* Modelling methodology for physiology and medicine. - New-York: Academic Press, 2001. - 421 p.
- [7] *Carson E., Cobelli C.* Introduction to modelling in physiology and medicine. - New-York: Academic Press, 2008. - 324 p.
- [8] *Cobelli C., Lepschy G.* Identifiability of compartmental systems and related structural properties // *Mathematical Biosciences.* - 1976. - Vol. 132, № 2. - P. 115–140.
- [9] *Cobelli C., DiStefano J.* Parameter and structural identifiability concepts and ambiguities: a Critical review and analysis // *Amer. J. Physiology-Regulatory, Integrative and Comparative Physiology.* - 1980. - Vol. 3, № 3. - P. 369–380.
- [10] *DiStefano J.* Tracer experiment design for unique identification of nonlinear physiological systems // *Amer. J. Physiology.* - 1976. - Vol. 6, № 3. - P. 131–141.
- [11] *Glover K., Willems J.* Parametrization of linear dynamical systems: canonical forms and identifiability // *IEEE Trans. on Automatic Control.* - 1974. - Vol. 19. - P. 640–646.
- [12] *Grewal M., Glover K.* Identifiability of linear and nonlinear dynamical systems // *IEEE Trans. on Automatic Control.* - 1976. - Vol. 21, № 6. - P. 833–837.

- [13] *Meshkat N.* Identifiable reparametrizations of linear compartment models // *J. Symbolic Computation*. - 2014. - Vol. 63. - P. 46–67.
- [14] *Meshkat N., Anderson J.D.* Alternative to Ritt's Pseudodivision for finding the input-output equations of multi-output models // *Mathematical Biosciences*. - 2012. - Vol. 239, № 1. - P. 117–123.
- [15] *Meshkat N., Kuo C.E., DiStefano J.* On finding and using identifiable parameter combinations in nonlinear dynamic systems biology models and COMBOS: A novel web implementation // *Plos One*. - 2014. - Vol. 9, №. 10.
- [16] *Meshkat N., Eisenberg M., DiStefano J.* An algorithm for finding globally identifiable parameter combinations of nonlinear ODE models using Groebner Bases // *Mathematical Biosciences*. - 2009. - Vol. 222. - P. 61–72.
- [17] *Mori J.D.* Optimal nonuniform sampling interval and test input design for identification of physiological systems from very limited data // *IEEE Trans Aut Control*. - 1979. - Vol. 24. - P. 893–900.
- [18] *Reid J.G.* Structural identifiability in linear time invariant systems // *IEEE Trans. on Automatic Control*. - 1977. - Vol. 22, № 2. - P. 242–246.
- [19] *Saccomani M.* An effective automatic procedure for testing parameter identifiability of HIV/AIDS models // *Bulletin of Mathematical Biology*. - 2011. - Vol. 73, № 8. - P. 1734–1753.
- [20] *Saccomani M., Cobelli C.* Qualitative experiment design in physiological system identification // *IEEE Control System*. - 1992. - Vol. 12, № 6. - P. 18–23.
- [21] *Tunali T.T.* New results for identifiability of nonlinear systems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. - 1987. - Vol. 32, № 2. - P. 146–154.
- [22] *Vajda S.* Identifiability of first order reaction systems // *Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis*. - 1979. - Vol. 11, № 1. - P. 39–43.
- [23] *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. - Москва: Наука, 1971. - 508 с.
- [24] *Кабанихин С.И., Воронов Д.А., Гродзь А.А., Криворотько О.И.* Идентифицируемость математических моделей медицинской биологии // *Вавиловский журнал генетики и селекции*. - 2015. - № 19(6). - С. 738–744. DOI 10.18699/VJ15.097
- [25] *Карелин В.В.* Алгоритм для оценки вектора параметров линейных динамических систем с дискретно-измеряемыми функциями // *Вопросы механики и процессов управления*. - 1982. - Т. 359, № 5.
- [26] *Леваков А.А.* Идентификация нелинейных систем // *Дифференциальные уравнения*. - 1983. - Т. 19, № 6. - С. 1074–1078.
- [27] *Шербак В.Ф.* Условия идентифицируемости динамических систем // *Математическая физика*. - 1983. - Т. 34. - С. 105–108.

References

- [1] Audoly S., "On the Identifiability of Linear Compartmental System: a Revisited Transfer Function Approach Based on Topological Properties." *Mathematical Biosciences* 10(1983): 308.
- [2] Bellman R., "On Structural Identifiability." *Mathematical Biosciences* 30(1970): 437.
- [3] Bellu G. and Saccomani M.P., "DAISY: A New Software Tool to Test Global Identifiability of Biological and Physiological Systems." *Comput.methods programs biomed* 88(2007): 94.
- [4] Brown R., "Compartmental System Analysis: State of the Art." *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 14(1980): 58.
- [5] Brown R., "Identifiability: role in design of pharmacokinetic experiments." *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 14(1982): 67.
- [6] Carson E. and Cobelli C., *Modelling Methodology for Physiology and Medicine*. (New-York: Academic Press, 2001), 421.
- [7] Carson E. and Cobelli C., *Introduction to Modelling in Physiology and Medicine*. (New-York: Academic Press, 2008), 324.

- [8] Cobelli C. and Lepschy G., "Identifiability of Compartmental Systems and Related Structural Properties." *Mathematical Biosciences* 132(1976): 156.
- [9] Cobelli C. and DiStefano J., "Parameter and Structural Identifiability Concepts and Ambiguities: a Critical Review and Analysis" *Amer. J. Physiology-Regulatory, Integrative and Comparative Physiology* 239(1980): 380.
- [10] DiStefano J., "Tracer Experiment Design for Unique Identification of Nonlinear Physiological Systems" *Amer. J. Physiology* 6(1976): 397.
- [11] Gabasov R. and Kirillova F.M. *Qualitative Theory of Optimal Processes*. (Moscow: Science, 1970), 508.
- [12] Glover K. and Willems J., "Parametrization of Linear Dynamical Systems: Canonical Forms and Identifiability." *IEEE Trans. on Automatic Control* 19(1974): 943.
- [13] Grewal M. and Glover K., "Identifiability of Linear and Nonlinear Dynamical Systems." *IEEE Trans. on Automatic Control* 21(1976): 837.
- [14] Kabanikhin S.I., Voronov D.A., Grodz A.A. and Krivorotko O.I., "Identifiability of Mathematical Models of Medical Biology." *Vavilovsky Journal of Genetics and Breeding* 19(2015): 870, accessed December 18, 2016, doi:10.18699/VJ15.097
- [15] Karelin V.V., "Algorithm for the Estimation of the Vector of Parameters of Linear Dynamical Systems with Discrete-Measurable Functions." *Questions of mechanics and control processes* 359(1982).
- [16] Levakov A.A., "Identification of Nonlinear Systems." *Differential Equations* 19(1983): 1078.
- [17] Meshkat N., "Identifiable Reparametrizations of Linear Compartment Models." *J. Symbolic Computation* 63(2014): 116.
- [18] Meshkat N. and Anderson J.D. "Alternative to Ritt's Pseudodivision for Finding the Input-Output Equations of Multi-Output Models." *Mathematical Biosciences* 239(2012): 218.
- [19] Meshkat N., Kuo C.E. and DiStefano J., "Finding and Using Identifiable Parameter Combinations in Nonlinear Dynamic Systems Biology Models and COMBOS: A Novel Web Implementation." *Plos One*. 9(2014).
- [20] Meshkat N., Eisenberg M. and DiStefano J., "An Algorithm for Finding Globally Identifiable Parameter Combinations of Nonlinear ODE Models using Groebner Bases." *Mathematical Biosciences* 222(2009): 72.
- [21] Mori J.D., "Optimal Nonuniform Sampling Interval and Test Input Design for Identification of Physiological Systems from Very Limited Data." *IEEE Trans Aut Control* 24(1979): 990.
- [22] Reid J.G., "Structural Identifiability in Linear Time Invariant Systems." *IEEE Trans. on Automatic Control* AC-22(1977): 281.
- [23] Saccomani M., "An Effective Automatic Procedure for Testing Parameter Identifiability of HIV/AIDS Models." *Bulletin of Mathematical Biology* 73(2011): 1968.
- [24] Saccomani M. and Cobelli C., "Qualitative Experiment Design in Physiological System Identification." *IEEE Control System* 12(1992): 37.
- [25] Shcherbak V.F., "Conditions for the Identifiability of Dynamic Systems." *Mathematical Physics* 34(1983): 180.
- [26] Tunali T.T., "New Results for Identifiability of Nonlinear Systems." *IEEE Transactions on Automatic Control* 15(1987): 192.
- [27] Vajda S., "Identifiability of First Order Reaction Systems." *Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis* 11(1979): 95.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Айсағалиев Серікбай Абдіғалиевич* - профессор Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук
2. *Аязбаева Асем* - младший научный сотрудник НИИ математики и механики КазНУ им. аль-Фараби
3. *Абдибекова Айгерім Уалихановна* - старший преподаватель, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Ph.D.
4. *Аширова Г.А.* - магистрант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби
5. *Бектемесов Мактағали Абдімажитович* - декан механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор физико-математических наук, профессор
6. *Бектемесов Жоламан Мактағалиевич* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби
7. *Башеева Айнуір Орынбасаровна* - докторант Евразийского Национального университета им. Л.Н.Гумилева
8. *Большакова Наталья Александровна* - начальник отдела геоинформационных систем, Научно-исследовательский центр "Гарыш-Экология"
9. *Воронов Дмитрий* - младший научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
10. *Гасников Александр Владимирович* - ведущий научный сотрудник ИПФИ РАН, Московский физико-технический институт, доктор физико-математических наук
11. *Даирбаева Гүлзәзат* - и.о. профессора, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, кандидат физико-математических наук, доцент
12. *Ешкеев Айбат Рафкатович* - профессор Карагандинского государственного университета имени Е.А. Букетова, доктор физико-математических наук
13. *Жакебаев Даурен Бақытбекович* - заведующий кафедрой, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Ph.D.
14. *Жубат Қуаныш Жайлаубайұлы* - заместитель начальника отдела геоинформационных систем, Научно-исследовательский центр "Гарыш-Экология"
15. *Зенина Асель Сакеновна* - ведущий научный сотрудник отдела геоинформационных систем, "Научно-исследовательский центр "Гарыш-Экология"
16. *Кабанихин Сергей Игоревич* - директор Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, доктор физико-математических наук, профессор, чл.-корр. РАН
17. *Криворотько Ольга И.* - научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, кандидат физико-математических наук
18. *Каржаубаев Каиржан Каналбекович* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби
19. *Касамбетова Майра Техниковна* - старший преподаватель Карагандинского государственного университета имени Е.А. Букетова

20. *Логуновская А.А.* - инженер Московского физико-технического института
21. *Ордабаева Ж.М.* - студент, Казахский национальный университет имени аль-Фараби
22. *Ульбрихт Ольга Ивановна* - старший преподаватель Карагандинского государственного университета имени Е.А. Букетова

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набранные только в текстовом формате $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat.dairbayeva@gmail.com (ответственному секретарю редколлегии, Дайрбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ или формат eps [см. п.7]. Указывается код по УДК. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисуночными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 6 страниц.
Структура статьи.
Первая страница:
 - 1) Первая строка - номер УДК, выравнивание - по левому краю, шрифт - полужирный.
 - 2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
 - 3) Автор(ы) статьи - с указанием имени и фамилии, ученой степени, ученого звания, занимаемой должности, места работы, город, страна, контактный телефон, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
 - 4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.
 - 5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.
Последующая страница (новая):
 - 6) Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором

аспекте.

7) Материал и Методы - должны состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала - один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

8) В секции обзор литературы - должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

9) В разделе Результаты и Обсуждение - приводится анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) Заключение, выводы - обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50 необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый - в оригинале, второй - романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) – (год в круглых скобках) – название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossiiskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4.(2011): pp. 8-30.

Список литературы представляется в алфавитном порядке, и ТОЛЬКО те работы, которые цитируются в тексте. Стиль оформления списка литературы на русском и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления" (требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления Романизированного списка литературы, а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений - Chicago Style (www.chicagomanualofstyle.org).

В данном разделе необходимо учесть:

- а) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.
- б) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
- в) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
- г) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.

- 12) Ссылки на цитируемые работы в тексте даются в скобках, с указанием первого автора работы, год издания: номер страниц(-ы). Например, (Залесский 1991: 25). В случае, наличия в списке литературы нескольких работ одного и того же автора, изданных в один год, то дополнительно к году издания добавляется буква "а", "б" и т.д. Например, (Садуова, 2001а: 15), (Садуова, 2001б, 22).
6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов L^AT_EX2_ε и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате `.eps`, либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета Latexcad. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат `.eps` с помощью Adobe Photoshop или конвертера Conversion Artist. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ

1-бөлім

Математика

Айсағалиев С.А., Аязбаева А.М.

Несобственные интегралы в теории устойчивости многомерных регулируемых систем 3

Башеева А.О.

w - независимые базисы квазитожеств дифференциальных группоидов 21

Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т., Ульбрихт О.И.

О йонсоновских парах абелевых групп в обогащённом языке 32

2-бөлім

Қолданылмалы математика

Бектемесов М.А., Гасников А.В., Лагуновская А.А., Ордабаева Ж.М.

Алгоритмические модели поведения человека и стохастическая оптимизация 50

Большакова Н.А., Жубат К.Ж., Зенина А.С., Каржаубаев К.К.

Создание базы данных входных параметров для моделирования динамики облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя 69

Даирбаева Г., Аширова Г.А.

Задача Коши для уравнений Стокса 78

Жакебаев Д.Б., Каржаубаев К.К., Жубат К.Ж., Абдибекова А.У.

Численное моделирование эволюции облака при наземном взрыве ракеты-носителя 90

Кабанихин С.И., Бектемесов Ж.М., Криворотько О.И., Воронов Д.А.

Практическая идентифицируемость математических моделей биомедицинских процессов 105

Сведения об авторах 119

К сведению авторов 120

Раздел 1

Математика

Раздел 2

Прикладная математика

CONTENTS

Section 1

Mathematics

Aisagaliev S.A., Ayazbayeva A.M.

Improper integrals for stability theory of multidimensional regulated systems..... 3

Basheyeva A.O. w -independent quasi-equational basis of differential groupoids 21*Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T., Ulbrikht O.I.*

On the Jonsson pairs of Abelian groups in the enriched language 32

Section 2

Applied
Mathematics*Bektemessov M.A., Gasnikov A.V., Lagunskaya A.A., Ordabayeva Zh.M.*

Algorithmic models of human behavior and stochastic optimization..... 50

Bolshakova N.A., Zhubat K.Zh., Zenina A.S., Karzhaubayev K.K.

Creation of the input parameters database for modeling of dynamics of the cloud formed at carrier rocket surface explosion 69

Daierbaeva G., Ashirova G.A.

The Cauchy problem for the Stokes Equations..... 78

Zhakebayev D.B., Karzhaubayev K.K., Zhubat K.Zh., Abdibekova A.U.

Numerical simulation of the clouds evolution in the ground explosion of the carrier-rocket..... 90

Kabanikhin S.I., Bektemessov Z.M., Krivorotko O.I., Voronov D.A.

Practical identifiability of mathematical models of biomedical processes..... 105

Сведения об авторах 119

К сведению авторов 120