

ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТИ

КазҰУ ХАБАРШЫСЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК КазНУ

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№ 2 (94)

Алматы
«Қазақ университеті»
2017

Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного согласия Республики Казахстан, свидетельство № 956-Ж от 25.11.1999 г.
(Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.). Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия

научный редактор – М.А. Бектемесов - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби;
заместитель научного редактора – А.Б. Кыдырбекулы – д. т. н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби;
ответственный секретарь – Г.М. Даирбаева – к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Алексеенко А. – асс. профессор, Университет штата Калифорния в Нортриджсе, США
Алиев Ф.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Азербайджана, Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан
Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., директор Департамента профессионального и технического образования МОН РК, Казахстан
Ахметов М. – доктор Ph.D., профессор, Средне Восточный Технический Университет, Турция
Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Гасников А.В. – д.ф.-м.н., Московский физико-технический институт, Россия
Джусумадилдаев А.С. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК, Институт математики и математического моделирования, Казахстан
Жайнаков А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН КР, Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Кыргызстан
Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия
Калтаев А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Кангужин Б.Е. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Кудайбергенов К. – д.ф.-м.н., Казахстанский институт менеджмента, экономики и прогнозирования, Казахстан
Майнке М. – профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института Аэродинамики, Германия

Малышкин В.Э. – д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия
Мейрманов А.М. – д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, Россия
Милошевич Х. – д.ф.-м.н., профессор, Университет Приштины, Сербия
Мухамбетжсанов С.Т. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Отебаев М.О. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН РК, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан
Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания
Рысбайулы Б. – д.ф.-м.н., профессор, Международный университет информационных технологий, Казахстан
Садыбеков М.А. – д.ф.-м.н., член-корр. НАН РК, Институт математики и математического моделирования МОН РК, Казахстан
Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия
Тукеев У.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Умирбаев У.У. – д.ф.-м.н., профессор, член-корр. НАН РК, Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва, Казахстан
Шиничи Накасука – доктор Ph.D., профессор, Университет Токио, Япония
Шокин Ю.И. – д.ф.-м.н., профессор, академик РАН, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия
Юлдашев З.Х. – д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан

Научное издание

Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика, № 2(94) 2017.

Редактор – Г.М. Даирбаева. Компьютерная верстка – Б.А. Аетова

ИБ № 11126

Подписано в печать 29.07.2017 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 10,4 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ № 4232. Издательский дом “Қазақ университеті”
Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.
Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

1-бөлім**Математика****Раздел 1****Математика****Section 1****Mathematics****МРНТИ 27.33.19**

**Построение решения задачи управляемости для линейных
интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями**

Айсагалиев С.А. – доктор технических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77272211573,
E-mail: Serikbai.Aisagaliев@kaznu.kz

Айсагалиева С.С. – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института математики и механики Казахского национального университета имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Предлагается метод решения задачи управляемости для процессов описываемых линейными интегро-дифференциальными уравнениями с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограничений на значения управления. Путем введения вспомогательных управляющих функций исходная краевая задача погружается в краевую задачу линейного дифференциального уравнения. Определяется множество всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию линейной системы из любой начальной точки в любое желаемое конечное состояние. Такой подход позволяет получить равносильные тождества и свести решения исходной краевой задачи к начальной задаче оптимального управления. Строятся минимизирующие последовательности предельные точки которых являются решениями задачи управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями. Конструктивность предлагаемого метода показана на примере.

Ключевые слова: линейные интегро-дифференциальные уравнения, фазовые и интегральные ограничения, оптимизационная задача, минимизирующие последовательности.

Шектеулері бар сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулері үшін басқарымдылық есебінің шешімін құру

Айсагалиев С.Ә. – техника ғылымдарының докторы, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, дифференциалдық теңдеулер және басқару теориясы кафедрасының профессоры, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliев@kaznu.kz

Айсагалиева С.С. - физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика және механика ғызымы-зерттеу институтының жетекші ғылыми кызметкери, Алматы, Қазақстан Республикасы, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Фазалық және интегралдық, сондай-ақ, басқару мәніне қойылған шектеулері бар шекара-лық шарттарында сызықты интегро-дифференциалдық теңдеумен сипатталатын үдеріс үшін басқарымдылық есебінің шешу әдістері ұсынылады. Қемекші басқарушы функциялардың көмегімен берілген шекаралық есеп сызықты дифференциалдық теңдеудің шекаралық есебіне келтіріледі. Әрбір элементі сызықты жүйенің траекториясын кез келген бастапқы нүктеден кез келген қажетті ақырғы нүктеге қөшіретін барлық басқарулардың жиыны анықталады. Мұндай әдіс тепе-тендікті алуға және бастапқы шекаралық есептің шешімін тиімді басқарудың бастапқы есебінің шешіміне келтіруге мүмкіндік береді. Минимумдаушы тізбектер құрылады. Олардың шектік нүктелері шектеулері бар сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер үшін басқарымдылық есебінің шешімдері болып табылады. Ұсынылған әдістің құрылымдығы мысалда көрсетілген.

Түйін сөздер: сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер, фазалық және интегралдық шектеулер, тиімділік есебі, минимумдаушы тізбектер.

Construction of a solution of the controllability problem for linear integral and differential equations with restrictions

Aisagaliev S.A. – Doctor of Technical Science of Differential equations and Control theory Department, Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan,
+77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Aisagalieva S.S. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher of the Research Institute of Mathematics and Mechanics of al-Farabi Kazakh National University, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

A method of solution of the controllability problem for the processes described by linear integral and differential equations with boundary conditions in the presence of phase and integral constraints with the constraints of the control values is supposed. The origin boundary value problem is immersed to the boundary value problem of a linear differential equation by introducing the auxiliary control functions. The set of all controls are determined, each element of which translates the trajectory of the linear system from any starting point to any desired end state. This approach yields to obtain the equivalent identities and reduce the solutions of the origin boundary value problem to an initial optimal control problem. Minimizing sequences which limit points are the solutions of the controllability problem of linear integral and differential equations with restrictions are constructed. Constructiveness of the proposed method is shown in the example.

Key words: linear integral and differential equations, phase and integral constraints, optimization problem, minimizing sequences.

1 Введение

Рассматривается процесс, описываемый линейным интегро - дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x} = & A(t)x + B(t)u(t) + C(t) \int_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau + \\ & + D(t) \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)x(\lambda)d\lambda + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \end{aligned} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 \subset R^{2n}, \tag{2}$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n / \gamma(t) \leq L(t)x \leq \delta(t), \quad t \in I\}, \tag{3}$$

интегральных ограничений

$$g_j(x, u) \leq c_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad g_j(x, u) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \tag{4}$$

$$g_j(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} [\langle a_j(t), x(t) \rangle + \langle b_j(t), u(t) \rangle] dt, \quad j = \overline{1, m_2}, \tag{5}$$

а также ограничений на значения управлений

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) / u(t) \in U_1(t) \subset R^m \text{ п.в. } t \in I\}, \tag{6}$$

$$v(\tau) \in V(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I_1, R^p) / v(\tau) \in V_1(\tau) \subset R^p \text{ п.в. } \tau \in I_1 = [a, b]\}. \tag{7}$$

Задача 1 Пусть множество $\Sigma \neq \emptyset$. Найти четверку $(u(t), v(\tau), x_0, x_1) \in \Sigma$ т.е. найти управление $u(t) \in U(t)$, $v(\tau) \in V(\tau)$ которые переводят траекторию системы (1), исходящую из точки $x_0 = x(t_0) \in S_0$ в момент времени t_0 в точку $x_1 = x(t_1) \in S_1$, $t_1 > t_0$ при этом решение уравнения (1), функция $x(t) = x(t; t_0, x_0, x_1, u, v)$, $t \in I$, $x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$ находится на множестве $G(t) \subset R^n$, а также вдоль решения системы (1) выполнены интегральные ограничения (4), (5).

Актуальность решения задачи управляемости для интегро-дифференциальных уравнений покажем на одном примере. Рассмотрим задачу изгиба висящего моста состоящего из балки и цепи. Цепь и балка соединены между собой подвесками.

Пусть l – длина упругой балки с закрепленными концами, T_0 – горизонтальная растягивающая сила, начало координат находится на левом конце балки, ось Ox направлена вдоль балки, а ось Oy направлена вниз. Пусть x, ξ , $0 \leq x \leq l$, $0 \leq \xi \leq l$ текущие координаты. К точке $x = a$ приложена сосредоточенная сила P , на балку действует распределенная нагрузка с плотностью $p(\xi) \sin \omega t$ в точке ξ изменяющаяся по времени.

Как следует из (Краснов, 1975) функция влияния имеет вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l - \xi)}{T_0 l}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{(l - x)\xi}{T_0 l}, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

Если $\rho(\xi)$ линейная плотность балки в точке ξ , то сила инерции между точками ξ и $\xi + \Delta\xi$ в момент времени t равна (Краснов, 1975)

$$-\rho(\xi)\Delta\xi \frac{d^2y}{dt^2} = \rho(\xi)y(\xi)\omega^2 \sin \omega t \cdot \Delta\xi,$$

где $y = y(x) \sin \omega t$, $0 \leq x \leq l$. Функция

$$y(x) \sin \omega t = \int_0^l G(x, \xi)[\rho(\xi) \sin \omega t + \omega^2 \rho(\xi)y(\xi) \sin \omega t]d\xi.$$

Отсюда следует, что максимальный изгиб балки $y(x)$ вызванный распределенной нагрузкой $p(\xi)$ и силой инерции определяется по формуле

$$y(x) = \int_0^l G(x, \xi)\rho(\xi)y(\xi)d\xi + \int_0^l G(x, \xi)\rho(\xi)d\xi,$$

где первое слагаемое изгиб балки порожденный силой инерции, второе слагаемое – изгиб из распределенной нагрузки. Так как изгиб балки от сосредоточенной силы P равен $G(x, a)P$, то суммарный изгиб балки

$$w(x) = y(x) + G(x, a)P = G(x, a)P + \int_0^l G(x, \xi)p(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^l G(x, \xi) \rho(\xi) y(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq l.$$

В случае висячего моста часть изгиба балки передается на цепи. Пусть цепь и балки соединены между собой подвесками, H – горизонтальные натяжения цепи, $z(x)$, $0 \leq x \leq l$ – отклонение цепи от горизонтального положения под действием нагрузки на балку. Тогда функция $z(x)$, $0 \leq x \leq l$ является решением дифференциального уравнения (Иманалиев, 1977)

$$H \frac{d^2 z(x)}{dx^2} = -q(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

где $q(x)$ – распределенная нагрузка воспринимая цепью.

Функция $z(x)$, $0 \leq x \leq l$ является линейной относительно изгиба балки $w(x)$. Следовательно, $z(x) = k_0 w(x)$, $k_0 = \text{const}$, $0 < k_0 < 1$. В этом случае, изгиб балки $w_1(x) = (1 - k_0)w(x)$, $0 \leq x \leq l$. Распределенная нагрузка $q(x) = k_1(x)w_1(x) = k_1(x)(1 - k_0)w(x)$, $k_1(x) > 0$, $0 \leq x \leq l$, где $k_1(x)$ – нагрузка соответствующая на единицу изгиба балки. Подставляя значения $z(x)$, $q(x)$, $0 \leq x \leq l$ в уравнение цепи, получим

$$\begin{aligned} Hk_0 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} &= -k_1(x)(1 - k_0)w(x) = -k_1(x)(1 - k_0)[G(x, a)P + \\ &+ \int_0^l G(x, \xi)p(\xi)d\xi + \int_0^l G(x, \xi)\rho(\xi)y(\xi)d\xi], \end{aligned}$$

где $y(x) = w(x) - G(x, a)P$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w(x)}{dx^2} &= B_0(x)u + C_0(x) \int_0^l K(x, \xi)v(\xi)d\xi + D_0(x) \int_0^l \Lambda(x, \xi)w(\xi)d\xi, \\ w(0) &= 0, \quad w(l) = 0, \quad x \in [0, l], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_0(x) &= \frac{k_1(x)(1 - k_0)}{Hk_0} \left[\int_0^l G(x, \xi)\rho(\xi)G(\xi, a)d\xi - G(x, a) \right], \\ C_0(x) &= D_0(x) = -\frac{k_1(x)(1 - k_0)}{Hk_0}, \quad K(x, \xi) = G(x, \xi), \\ \Lambda(x, \xi) &= G(x, \xi)\rho(\xi), \quad u = P, \quad v(\xi) = p(\xi). \end{aligned}$$

После замены x , ξ на t , τ соответственно, обозначая $w(x)$ через $x(t)$, $t \in I = [0, t_1]$, $t_1 = l$ уравнение висячего моста запишем в виде

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = B_0(t)u + C_0(t) \int_0^{t_1} K(t, \tau)v(\tau)d\tau + D_0(t) \int_0^{t_1} \Lambda(t, \tau)x(\tau)d\tau,$$

$$x(0) = 0, \quad x(t_1) = 0, \quad t \in I = [0, t_1].$$

Полагая $x(t) = x_1(t)$, $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, данное уравнение запишем в векторной форме

$$\dot{x} = Ax + B(t)u + C(t) \int_0^{t_1} K(t, \tau)v(\tau)d\tau + D(t) \int_0^{t_1} \Lambda(t, \tau)x(\tau)d\tau,$$

$$x_0 = (x_1(0), x_2(0)) \in S_0, \quad x_1 = (x_1(t_1), x_2(t_1)) \in S_1,$$

$$u \in U = \{u \in R^1 / 0 \leq u \leq p_0\}, \quad v(\tau) \in V(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I, R^1)$$

$$0 \leq v(\tau) \leq \rho_0, \quad \tau \in I = [0, 1],$$

где

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0(t) \end{pmatrix}, \quad C(t) = D(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ C_0(t) \end{pmatrix},$$

p_0 – наибольшее значение сосредоточенной силы, ρ_0 – наибольшее значение распределенной нагрузки. Таким образом, уравнение изгиба висячего моста имеет вид (1.1). Для данного примера, в частности, задача управляемости формулируется так: Найти управление $u \in U$, $v(\tau) \in V(\tau)$, чтобы изгиб балки $(1 - k_0)x_1(t)$, $t \in I$ удовлетворял фазовому ограничению $0 \leq (1 - k_0)x_1(t) \leq \delta$, $\forall t$, $t \in I$, потенциальная энергия при изгибе $(1 - k_0) \int_0^{t_1} x_1(\tau)d\tau \leq c$, где δ , c – заданные числа.

Аналогичные задачи управляемости могут быть сформулированы и в других областях науки для интегро-дифференциальных уравнений из (Вольтерра, 1976), (Беллман, 1987), (Романовский, 1984), (Рубин, 1984), (Иманалиев, 1977), (Глушков, 1983), (Николис, 1979). Современная теория интегральных уравнений и теория экстремальных задач позволяют решать сложные задачи управляемости для интегро-дифференциальных уравнений.

2 Обзор литературы

Математическими моделями многих явлений в различных областях науки являются интегро-дифференциальные уравнения (Вольтерра, 1976), (Беллман, 1987), (Романовский, 1984), (Рубин, 1984), (Иманалиев, 1977), (Глушков, 1983), (Николис, 1979). Вопросы существования, единственности и методы построения приближенных решений интегро-дифференциальных уравнений, когда $u(t) \equiv 0$, $t \in I$, $v(\tau) \equiv 0$, $\tau \in I_1$ отсутствуют фазовые и интегральные ограничения исследованы в (Быков, 1957), (Lakshmikantham, 1995), (Иманалиев, 1981).

Исследование управляемости процессов описываемых интегро-дифференциальными уравнениями при наличии краевых условий, фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов системы является новым направлением в теории интегро-дифференциальных уравнений. Вопросам управляемости, наблюдаемости и устойчивости управляемых процессов описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями посвящены работы (Краснов, 1975), (Калман, 1961 : 521-547), (Красовский, 1968), (Габасов, 1971), (Зубов, 1975), (Ли, 1972), (Ананьевский, 2010 : 319-323),

(Семенов, 2012 : 1263-1277), (Емельянов, 2012 : 1516-1524), (Коровин, 2011 : 606-611), (Варга, 1977), (Айсагалиев, 1991 : 1476-1486), (Айсагалиев, 2005 : 17-34), (Айсагалиев, 2012а : 826-836), (Айсагалиев, 2012б : 20-36), (Айсагалиев, 2015 : 147-160), (Айсагалиев, 2014), (Айсагалиев, 2015). В данной работе делается попытка распространить эти результаты на интегро-дифференциальные уравнения.

В работе (Айсагалиев, 2017 : 3-17) приведено решение задачи: найти необходимое и достаточное условия существования решения задачи управляемости процесса описываемого интегро-дифференциальным уравнением (1) при условиях (2) – (7). Данная статья является продолжением (Айсагалиев, 2017 : 3-17) и она содержит результаты построения решения задачи. Подробный обзор литературы содержится в работе (Айсагалиев, 2017 : 3-17).

3 Материал и методы

В работе (Айсагалиев, 2017 : 3-17) показано, что решение задачи управляемости может быть сведено к решению следующей задачи оптимального управления: минимизировать функционал

$$\begin{aligned} J(u, v, p_1, p_2, p_3, \omega, x_0, x_1, d) = & \int_{t_0}^{t_1} \{ |w_1(t) - u(t)|^2 + \\ & + |\int_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau - w_2(t)|^2 + |\int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)Py(\lambda)d\lambda - w_3(t)|^2 + \\ & + |\omega(t) - L(t)Py(t)|^2 \} dt \rightarrow \inf \end{aligned} \quad (8)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)p_1(t) + C_1(t)p_2(t) + D_1(t)p_3(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad (9)$$

$$p_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad p_2(\cdot) \in L_2(I, R^s), \quad p_3(\cdot) \in L_2(I, R^k), \quad (10)$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 \subset R^{2n}, \quad d \in D_0 = \{d \in R^{m_1} | d \geq 0\}, \quad (11)$$

$$u(t) \in U(t), \quad v(\tau) \in V(\tau), \quad \omega(t) \in \Omega(t), \quad t \in I, \quad (12)$$

3.1 Построение решения задачи управляемости

Введем следующие обозначения

$$F_1(q(t), t) = w_1(t) - u(t), \quad F_2(q(t), t) = \int_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau - w_2(t),$$

$$F_3(q(t), t) = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)Py(\lambda)d\lambda - w_3(t), \quad F_4(q(t), t) = \omega(t) - LPy(t),$$

$$q(t) = (\theta(\cdot, \cdot), z(t, p), z(t_1, p)), \quad t \in I.$$

Теперь функционал (8) запишется в виде

$$\begin{aligned} J(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(q(t), t) dt &= \int_{t_0}^{t_1} (|F_1(q(t), t)|^2 + |F_2(q(t), t)|^2 + \\ &\quad + |F_3(q(t), t)|^2 + |F_4(q(t), t)|^2) dt. \end{aligned}$$

Частные производные равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial u} &= F_{0u}(q(t), t) = 2F_1(q(t), t), \\ \frac{\partial F_0(q, t)}{\partial v} &= F_{0v}(q, t) = -2 \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau) w_2(t) dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b K^*(t, \tau) K(t, \sigma) v(\sigma) d\sigma dt, \\ \frac{\partial F_0(q, t)}{\partial p_1} &= F_{0p_1}(q, t) = 2F_1(q(t), t) - B_1^*(t)\psi(t), \\ \frac{\partial F_0(q, t)}{\partial p_2} &= F_{0p_2}(q, t) = -2F_2(q(t), t) - C_1^*(t)\psi(t), \\ \frac{\partial F_0(q, t)}{\partial p_3} &= F_{0p_3}(q, t) = -2F_3(q(t), t) - D_1^*(t)\psi(t), \\ \frac{\partial F_0(q, t)}{\partial \omega} &= F_{0\omega}(q, t) = 2F_4(q, t), \\ \frac{\partial F_0(q, t)}{\partial x_0} &= F_{0x_0}(q, t) = 2D_0^*(t)F_1(q, t) - 2D_2^*(t)F_2(q, t) + \pi_1^*(t)\bar{F}_3^*(q, t) - \\ &\quad - 2D_3^*(t)F_3(q, t) - 2\pi_1^*(t)P^*L^*F_4(q, t), \\ \frac{\partial F_0(q, t)}{\partial x_1} &= F_{0x_1}(q, t) = 2T_0^*(t)F_1(q, t) - 2T_2^*(t)F_2(q, t) + \pi_2^*(t)\bar{F}_3^*(q, t) - \\ &\quad - 2T_4^*(t)F_3(q, t) - 2\pi_2^*(t)P^*L^*F_4(q, t), \\ \frac{\partial F_0(q, t)}{\partial d} &= F_{0d}(q, t) = 2T_1^*(t)F_1(q, t) - 2T_3^*(t)F_2(q, t) + \pi_3^*(t)\bar{F}_3^*(q, t) - \\ &\quad - 2T_5^*(t)F_3(q, t) - 2\pi_2^*(t)P^*L^*F_4(q, t), \\ \frac{\partial F_0(q, t)}{\partial z} &= F_{0z}(q, t) = \bar{F}_3^*(q, t) - 2P^*L^*F_4(q, t), \\ \frac{\partial F_0(q, t)}{\partial z(t_1)} &= F_{0z(t_1)}(q, t) = 2N_{11}^*(t)F_1(q, t) - 2N_{12}^*F_2(q, t) + N_2^*(t)\bar{F}_3^*(q, t) - \\ &\quad - 2N_{13}^*(t)F_3(q, t) - 2N_2^*(t)P^*L^*F_4(q, t), \end{aligned}$$

где

$$\bar{F}_3(q, t) = -2 \int_{t_0}^{t_1} P^* \Lambda^*(\lambda, t) w_3(\lambda) d\lambda + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} P^* \Lambda^*(\lambda, t) \Lambda(\lambda, \sigma) Py(\sigma) d\sigma d\lambda.$$

Теорема 1 Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определенная. Тогда функционал (8) при условиях (9) – (12) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент

$$J'(\theta) = (J'_u(\theta), J'_v(\theta), J'_{p_1}(\theta), J'_{p_2}(\theta), J'_{p_3}(\theta), J'_\omega(\theta), J'_{x_0}(\theta), J'_{x_1}(\theta), J'_d(\theta)) \in H,$$

в любой точке $\theta \in X$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} J'_u(\theta) &= F_{0u}(q, t), \quad J'_v(\theta) = F_{0v}(q, t), \quad J'_{p_1}(\theta) = F_{0p_1}(q, t), \\ J'_{p_2}(\theta) &= F_{0p_2}(q, t), \quad J'_{p_3}(\theta) = F_{0p_3}(q, t), \quad J'_\omega(\theta) = F_{0\omega}(q, t), \\ J'_{x_0}(\theta) &= \int_{t_0}^{t_1} F_{0x_0}(q, t) dt, \quad J'_{x_1}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{0x_1}(q, t) dt, \quad J'_d(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_{0d}(q, t) dt, \end{aligned} \quad (13)$$

функция $z(t, p)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения (9), а функция $\psi(t)$, $t \in I$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = F_{0z}(q, t) - A_1^*(t)\psi, \quad \psi(t_1) = - \int_{t_0}^{t_1} F_{0z}(q, t) dt. \quad (14)$$

Кроме того, градиент $J'(\theta)$, $\theta \in X$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\| \leq K\|\theta_1 - \theta_2\|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in X, \quad (15)$$

где $K = \text{const} > 0$.

Доказательство. Пусть $\theta(t)$, $\theta(t) + \Delta\theta(t) \in X$, $z(t, p)$, $z(t, p + \Delta p)$, $t \in I$ – решение уравнения (9). Пусть $z(t, p + \Delta p) = z(t, p) + \Delta z(t)$, $t \in I$. Так как

$$z(t, p) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B_1(\tau) p_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) C_1(\tau) p_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) D_1(\tau) p_3(\tau) d\tau,$$

то

$$\Delta z(t, p) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B_1(\tau) \Delta p_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) C_1(\tau) \Delta p_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) D_1(\tau) \Delta p_3(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\Delta z(t, p)| &\leq \int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau)\| \|B_1(\tau)\| |\Delta p_1(\tau)| d\tau + \int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau)\| \|C_1(\tau)\| |\Delta p_2(\tau)| d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t \|\Phi(t, \tau)\| \|D_1(\tau)\| |\Delta p_3(\tau)| d\tau \leq c_1 \|\Delta p_1\| + c_2 \|\Delta p_2\| + c_3 \|\Delta p_3\|, \quad t \in I, \end{aligned}$$

где $c_1, c_2, c_3 = \text{const} > 0$.

Приращение функционала

$$\begin{aligned}\Delta J &= J(\theta + \Delta\theta) - J(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} [F_0(q(t) + \Delta q(t), t) - F_0(q(t), t)] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \{ [|F_1(q + \Delta q, t)|^2 - |F_1(q, t)|^2] + [|F_2(q + \Delta q, t)|^2 - |F_2(q, t)|^2] + \\ &\quad + [|F_3(q + \Delta q, t)|^2 - |F_3(q, t)|^2] + [|F_4(q + \Delta q, t)|^2 - |F_4(q, t)|^2] \} dt.\end{aligned}$$

Отсюда, с учётом того, что:

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad &|F_1(q + \Delta q, t)|^2 - |F_1(q, t)|^2 = -2 \langle w_1 - u, \Delta u \rangle + 2 \langle w_1 - u, \Delta w_1 \rangle + |\Delta w_1 + \Delta u|^2, \\ \Delta w_1 &= \Delta p_1 + D_0(t)\Delta x_0 + T_0(t)\Delta x_1 + T_1(t)\Delta d + N_{11}(t)\Delta z(t_1, p); \\ \text{б)} \quad &|F_2(q + \Delta q, t)|^2 - |F_2(q, t)|^2 = 2 \langle \int_a^b K(t, \tau) \Delta v(\tau) d\tau - \Delta w_2(t), \int_a^b K(t, \tau) v(\tau) d\tau - \\ w_2(t) &> + \left| \int_a^b K(t, \tau) \Delta v(\tau) d\tau + \Delta w_2(t) \right|^2, \Delta w_2 = \Delta p_2 + D_2(t)\Delta x_0 + T_2(t)\Delta x_1 + T_3(t)\Delta d + \\ N_{12}(t)\Delta z(t_1, p); \\ \text{в)} \quad &|F_3(q + \Delta q, t)|^2 - |F_3(q, t)|^2 = 2 \langle \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda) P \Delta y d\lambda - \Delta w_3, \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda) P y d\lambda - w_3 \rangle \\ &+ \left| \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda) P \Delta y d\lambda - \Delta w_3(t) \right|^2, \Delta w_3 = \Delta p_3 + D_3(t)\Delta x_0 + T_4(t)\Delta x_1 + T_5(t)\Delta d + N_{13}(t)\Delta z(t_1, p); \\ \Delta y &= \Delta z(t) + \pi_1(t)\Delta x_0 + \pi_2(t)\Delta x_1 + \pi_3(t)\Delta d + N_2(t)\Delta z(t_1, p); \\ \text{г)} \quad &|F_4(q + \Delta q, t)|^2 - |F_4(q, t)|^2 = 2 \langle \omega - LPy, \Delta \omega - LP\Delta y \rangle + |\Delta \omega - LP\Delta y|^2, \text{ получим}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{t_0}^{t_1} \{ \Delta u^* F_{0u}(q, t) + \Delta v^* F_{0v}(q, t) + \Delta p_1^* [2F_1(q, t)] - \\ &- \Delta p_2^* [2F_2(q, t)] - \Delta p_3^* [2F_3(q, t)] + \Delta \omega^* F_{0\omega}(q, t) + \Delta x_0^* F_{0x_0}(q, t) + \\ &+ \Delta x_1^* F_{0x_1}(q, t) + \Delta d^* F_{0d}(q, t) + \Delta z^*(t) F_{0z}(q, t) + \\ &+ \Delta z^*(t_1) F_{0z(t_1)}(q, t) + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \} dt,\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\text{где } R_1 &= |\Delta w_1 + \Delta u|^2, R_2 = \left| \int_a^b K(t, \tau) \Delta v(\tau) d\tau + \Delta w_2(t) \right|^2, R_3 = \left| \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda) P \Delta y d\lambda - \Delta w_3 \right|^2, \\ R_4 &= |\Delta \omega - LP\Delta y|^2, R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4.\end{aligned}$$

Пользуясь теоремой Фубини о перемене переменных интегрирования имеем:

а)

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1} 2 \langle \int_a^b K(t, \tau) v(\tau) d\tau - w_2(t), \int_a^b K(t, \tau) \Delta v(\tau) d\tau \rangle dt = \\ &= \int_a^b \langle -2 \langle \int_a^b K^*(t, \sigma) w_2(t) dt, \Delta v(\sigma) \rangle d\sigma + \int_a^b \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b K^*(t, \sigma) K(t, \tau) v(\tau) d\tau dt,\end{aligned}$$

$$\Delta v(\sigma) > d\sigma = \langle J'_v(\tau), \Delta v \rangle_{L_2},$$

$$J'_v(\tau) = -2 \int_{t_0}^{t_1} K^*(t, m\tau) w_2(t) dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b K^*(t, \tau) K(t, \sigma) d\sigma dt = F_{0v}(q, t); \quad (17)$$

6)

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} 2 \left\langle \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda) Py d\lambda - w_3, \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda) P \Delta y d\lambda \right\rangle dt = \\ & \int_{t_0}^{t_1} \left\langle -2 \int_{t_0}^{t_1} P^* \Lambda^*(t, \sigma) w_3(t) dt, \Delta y(\sigma) \right\rangle d\sigma + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\langle 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} P^* \Lambda^*(t, \sigma) \Lambda(t, \lambda) Py d\lambda dt, \Delta y(\sigma) \right\rangle d\sigma = \langle J'_y(\sigma), \Delta y \rangle_{L_2}, \end{aligned}$$

$$J'_y(t) = -2 \int_{t_0}^{t_1} P^* \Lambda^*(\lambda, t) w_3(\lambda) d\lambda + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} P^* \Lambda^*(\lambda, t) \Lambda(\lambda, \sigma) Py d\sigma d\lambda = \overline{F}_3(q, t). \quad (18)$$

Рассмотрим последние два слагаемые из (16). Поскольку (см. (14))

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t_1) F_{0z(t_1)}(q, t) dt = \Delta z^*(t_1) \int_{t_0}^{t_1} F_{0z(t_1)}(q, t) dt = -\Delta z^*(t_1) \psi(t_1) = \\ & = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} [\Delta z^*(t) \psi(t)] dt = - \int_{t_0}^{t_1} [\Delta \dot{z}^*(t) \psi(t) + \Delta z^*(t) \dot{\psi}(t)] dt = \\ & = - \int_{t_0}^{t_1} [\Delta z^*(t) A_1^*(t) + \Delta p_1^*(t) B_1^*(t) + \Delta p_2^*(t) C_1^*(t) + \Delta p_3^*(t) D_1^*(t)] \psi(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t) [F_{0z}(q, t) - A_1^*(t) \psi(t)] dt = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta p_1^*(t) B_1^*(t) \psi(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta p_2^*(t) C_1^*(t) \psi(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta p_3^*(t) D_1^*(t) \psi(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t) F_{0z}(q, t) dt, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t) F_{0z(t_1)}(q, t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \Delta z^*(t) F_{0z}(q, t) dt &= - \int_{t_0}^{t_1} \Delta p_1^*(t) B_1^*(t) \psi(t) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \Delta p_2^*(t) C_1^*(t) \psi(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta p_3^*(t) D_1^*(t) \psi(t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (16) с учетом (17) – (19), получим

$$\begin{aligned} \Delta J = &< J'_u(\theta), \Delta u >_{L_2} + < J'_v(\theta), \Delta v >_{L_2} + < J'_{p_1}(\theta), \Delta p_1 >_{L_2} + \\ &+ < J'_{p_2}(\theta), \Delta p_2 >_{L_2} + < J'_{p_3}(\theta), \Delta p_3 >_{L_2} + < J'_\omega(\theta), \Delta \omega >_{L_2} + \\ &+ < J'_{x_0}(\theta), \Delta x_0 >_{R^n} + < J'_{x_1}(\theta), \Delta x_1 >_{R^n} + < J'_d(\theta), \Delta d >_{R^{m_1}} + \\ &+ \bar{R}, |\bar{R}| \leq c_4 \|\theta\|^2, \bar{R} = \int_{t_0}^{t_1} R dt. \end{aligned} \quad (20)$$

Как следует из формулы (20) производная Фреше функционала (8) при условиях (9) – (12) определяется по формуле (13).

Пусть $\theta_1, \theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta \in X$. Так как

$$|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)|^2 \leq L_1 |\Delta q(t)|^2 + L_2 |\Delta \psi(t)|^2 + L_3 |\Delta \theta|^2,$$

где $|\Delta q(t)| \leq L_4 \|\Delta \theta\|$, $|\Delta \psi(t)| \leq L_5 \|\Delta \theta\|$, то $\|J'(\theta_1) - J'(\theta_2)\| \leq K \|\Delta \theta\|$, $\forall \theta_1, \theta_2 \in X$. Теорема доказана.

Используя соотношения (13) – (15) строим последовательность

$$\{\theta_n\} = \{u_n, v_n, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, \omega_n, x_{0n}, x_{1n}, d_n\} \subset X$$

по следующему алгоритму

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P_U[u_n - \alpha_n J'_u(\theta_n)], \quad v_{n+1} = P_V[v_n - \alpha_n J'_v(\theta_n)], \\ p_{1n+1} &= P_{L_2^\alpha}[p_{1n} - \alpha_n J'_{p_1}(\theta_n)], \quad p_{2n+1} = P_{L_2^\alpha}[p_{2n} - \alpha_n J'_{p_2}(\theta_n)], \\ p_{3n+1} &= P_{L_2^\alpha}[p_{3n} - \alpha_n J'_{p_3}(\theta_n)], \quad \omega_{n+1} = P_\Omega[\omega_n - \alpha_n J'_\omega(\theta_n)], \\ x_{0n+1} &= P_{S_0}[x_{0n} - \alpha_n J'_{x_0}(\theta_n)], \quad x_{1n+1} = P_{S_0}[x_{1n} - \alpha_n J'_{x_1}(\theta_n)], \\ d_{n+1} &= P_{D_0^\alpha}[d_n - \alpha_n J'_d(\theta_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

где $0 < \alpha_n < \frac{2}{K + 2\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $K > 0$ – постоянная Липшица из неравенства (15).

Введем множество $\Lambda_0 = \{\theta \in X \mid J(\theta) \leq J(\theta_0)\}$, где $\theta_0 = (u_0, v_0, p_{10}, p_{20}, p_{30}, \omega_0, x_{00}, x_{10}, d_0) \in X$ – начальная точка для последовательности (21).

Теорема 2 Пусть выполнены условия теорем 5, 6, последовательность $\{\theta_n\}$ определяется по формуле (21), $U, V, L_2^\alpha(I, R^m), L_2^\alpha(I, R^s), L_2^\alpha(I, R^k), \Omega, S_0, S_1, D_0^\alpha$ – ограниченные выпуклые замкнутые множества. Тогда:

1. числовая последовательность $\{J(\theta_n)\}$ строго убывает;
2. $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Если, кроме того, множество Λ_0 ограничено, то:

3. последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ является минимизирующей, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} J(\theta_n) = J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta)$;
4. последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ слабо сходится к множеству X_* , $X_* \neq \emptyset$, $\theta_n \xrightarrow{c.l.} \theta_*$ при $n \rightarrow \infty$;
5. справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(\theta_n) - J_* \leq \frac{c_5}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad c_5 = \text{const} > 0.$$

6. задача управляемости определяемая соотношениями (1) – (7) имеет решение тогда и только тогда, когда $J(\theta_*) = 0$.

Доказательство. Утверждения 1), 2) непосредственно следуют из свойства проекции точки на выпуклом замкнутом множестве и алгоритма (21). Так как функционал (8) при условиях (9) – (12) является выпуклым, ограниченное выпуклое замкнутое множество Λ_0 в рефлексивном банаевом пространстве H слабо бикомпактно, $J(\theta) \in C^1(X)$, то $J(\theta)$ – слабо полунепрерывен снизу на Λ_0 . Следовательно, функционал $J(\theta)$ достигает нижней грани на множестве Λ_0 и верно неравенство $0 \leq J(\theta_n) - J(\theta_*) \leq C\|\theta_n - \theta_{n+1}\|$, $c = \text{const} > 0$, $n = 1, 2, \dots$, где $J(\theta_*) = \inf_{\theta \in \Lambda_0} J(\theta) = \min_{\theta \in \Lambda_0} J(\theta)$.

Отсюда с учётом того, что $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ имеем: последовательность $\{\theta_n\}$ является минимизирующей; поскольку $\{\theta_n\} \subset \Lambda_0$, Λ_0 – слабо бикомпактно, то $\theta_n \xrightarrow{\text{c.l.}} \theta_*$ при $n \rightarrow \infty$.

Так как $0 \leq J(\theta_n) - J(\theta_*) \leq C\|\theta_n - \theta_{n+1}\|$, $J(\theta_n) - J(\theta_{n+1}) \geq \varepsilon\|\theta_n - \theta_{n+1}\|^2$, то верно утверждение 5). Как следует из леммы 2, если значение $J(\theta_*) = 0$, то задача управляемости (1) – (7) имеет решение. Заметим, что если $J(\theta_*) \geq 0$, $\forall \sigma, \sigma \in X$. Теорема доказана.

Пусть $t_{1*} > t_0$ – наименьшее значение t_1 , для которого $J(\theta_*) = 0$. Для решения задачи оптимального быстродействия необходимо решить задачу управляемости для значений t_{11}, t_{12}, \dots , где $t_1 > t_{11} > t_{12} > \dots > t_{1*}$.

3.2 Решение примера

Конструктивность предлагаемого метода покажем на одном примере.

Пример. Рассмотрим задачу управляемости следующего вида

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1(t) + \int_1^3 (\cos t\tau)v(\tau)d\tau, \quad \tau \in I_1 = [1, 3], \quad t \in I = [1, 2], \quad (22)$$

$$\dot{x}_2 = u_2(t) + \int_1^2 e^{ts}x_1(s)ds, \quad t \in I, \quad (23)$$

$$g_1(x_1, x_2, u_1) = \int_1^2 [x_1(t) + x_2(t) + u_1(t)] dt \leq c_1, \quad (24)$$

$x(t) \in G(t), \quad G(t) = \{x \in R^2/e \leq x_1(t) \leq e^2, \quad e - 2 \leq x_2(t) \leq e^2 + 2, \quad t \in I\},$

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^2) / -2 \leq u_1(t) \leq 2, \quad -4 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^6}{3} \leq$$

$$\leq u_2(t) \leq e^2 + \frac{1}{3}e^3 + 6, \quad \text{п.в. } t \in I\},$$

$$v(\tau) \in V = \{v(\cdot) \in L_2(I, R^1) / -1 \leq v(\tau) \leq 1 \quad \text{п.в. } \tau \in I_1\},$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix},$$

$$x_0 \in S_0 = \{0 \leq x_1(1) \leq e, \quad e - 2 \leq x_2(1) \leq e + 2\},$$

$$x_1 \in S_1 = \{0 \leq x_1(2) \leq e^2, \quad e^2 - 1 \leq x_2(2) \leq e^2 + 1\}.$$

1. Для данного примера

$$\eta(t) = \int_1^t [x_1(\tau) + x_2(\tau) + u_1(\tau)] d\tau,$$

$$\dot{\eta}(t) = x_1(t) + x_2(t) + u_1(t), \quad \eta(1) = 0, \quad \eta(2) = c_1 - d, \quad d > 0.$$

2. Теперь соотношения (21) – (24) записутся в виде

$$\dot{\xi} = A_1\xi + B_1u + C_1 \int_1^3 (\cos t\tau)v(\tau)d\tau + D_1 \int_1^2 e^{ts}x_1(s)ds, \quad t \in I,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \quad \xi_0 = \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \\ c_1 - d \end{pmatrix},$$

$$\xi_0 = \xi(1), \quad \xi_1 = \xi(2), \quad t \in I.$$

3. Линейная управляемая система имеет вид

$$\dot{y} = A_1y + B_1w_1(t) + C_1w_2(t) + D_1w_3(t), \quad t \in I,$$

$$y(1) = \xi_0, \quad y(2) = \xi_1, \quad w_1(\cdot) \in L_2(I, R^2), \quad w_2(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad w_3(\cdot) \in L_2(I, R^1).$$

фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A_1 \zeta$ определяется по формуле

$$\theta(t) = e^{A_1(t-1)} = \begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t-1 & \frac{(t-1)^2}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{-A_1(t-1)} = \theta^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1-t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-t & \frac{(1-t)^2}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & t-\tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t-\tau & \frac{(t-\tau)^2}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$B_2 = (B_1, C_1, D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то матрица

$$W(1, 2) = \int_1^2 \Phi(1, t) B_2 B_2^* \Phi^*(1, t) dt =$$

$$= \int_1^2 \begin{pmatrix} 4-4t+2t^2 & 2-2t & 4-5t+3t^2-t^3 \\ 2-2t & 2 & (1-t)^2 \\ 4-5t+3t^2-t^3 & (1-t)^2 & \frac{7}{2}-7t+5t^2-2t^3+\frac{t^4}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8/3 & -1 & -1/4 \\ -1 & 2 & 1/3 \\ -1/4 & 1/3 & 4/15 \end{pmatrix},$$

где главные миноры $\Delta_1 = 8/3$, $\Delta_2 = 13/3$, $\Delta = 973/1080$.

Следовательно, матрица $W(1, 2)$ положительно определенная. Обратная матрица

$$W^{-1}(1, 2) = \frac{1080}{973} \begin{pmatrix} 19/45 & 11/60 & 1/6 \\ 11/60 & 467/720 & -23/36 \\ 1/6 & -23/36 & 13/3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $W(t, 2) = W(1, 2) - W(1, t)$, где

$$W(1, t) = \begin{pmatrix} 4t-2t^2+2t^3/3-8/3 & 2t-t^2-1 \\ 2t-t^2-1 & 2t-2 \\ 4t-5t^2/2+t^3-t^4/4-9/4 & t-t^2-t^3/3-1/3 \\ 4t-5t^2/2+t^3-t^4/4-9/4 & t-t^2+t^3/3-1/3 \\ 7t/2-7t^2/2+5t^3/3-t^4/2+t^5/10-19/15 \end{pmatrix}.$$

Вектор

$$a = \Phi(1, 2)\xi_1 - \xi_0 = \begin{pmatrix} x_1(2) - x_2(2) - x_1(1) \\ x_2(2) - x_2(1) \\ -x_1(2) + x_2(2)/2 + c_1 - d \end{pmatrix}.$$

Вектор функция

$$w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \\ w_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1) \\ \Lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1) \\ \Lambda_{13}(t, \xi_0, \xi_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{11}(t)z(2, p) \\ N_{12}(t)z(2, p) \\ N_{13}(t)z(2, p) \end{pmatrix},$$

где

$$p_1(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \\ p_{12}(t) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1) = \begin{pmatrix} \Lambda_{111}(t, \xi_0, \xi_1) \\ \Lambda_{112}(t, \xi_0, \xi_1) \end{pmatrix}, \quad N_{11}(t)z(2, p) = \begin{pmatrix} N_{111}(t)z(2, p) \\ N_{112}(t)z(2, p) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$w_1(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) \\ p_{12}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_{111}(t, \xi_0, \xi_1) \\ \Lambda_{112}(t, \xi_0, \xi_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{111}(t)z(2, p) \\ N_{112}(t)z(2, p) \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

$$w_2(t) = p_2(t) + \Lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1) + N_{12}(t)z(2, p), \quad t \in I,$$

$$w_3(t) = p_3(t) + \Lambda_{13}(t, \xi_0, \xi_1) + N_{13}(t)z(2, p), \quad t \in I,$$

где функция $z(t, p)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 p_1(t) + C_1 p_2(t) + D_1 p_3(t), \quad z(1) = 0, \quad t \in I,$$

$$p_1(\cdot) \in L_2(I, R^2), \quad p_2(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad p_3(\cdot) \in L_2(I, R^1).$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}(t, \xi_0, \xi_1) &= B_1^* \Phi^*(1, t) W^{-1}(1, 2) a, \\ \Lambda_{12}(t, \xi_0, \xi_1) &= C_1^* \Phi^*(1, t) W^{-1}(1, 2) a, \\ \Lambda_{13}(t, \xi_0, \xi_1) &= D_1^* \Phi^*(1, t) W^{-1}(1, 2) a, \\ N_{11}(t)z(2, p) &= -B_1^* \Phi^*(1, t) W^{-1}(1, 2) \Phi(1, 2) z(2, p), \\ N_{12}(t)z(2, p) &= -C_1^* \Phi^*(1, t) W^{-1}(1, 2) \Phi(1, 2) z(2, p), \\ N_{13}(t)z(2, p) &= -D_1^* \Phi^*(1, t) W^{-1}(1, 2) \Phi(1, 2) z(2, p). \end{aligned}$$

Функция

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t, p) \\ z_2(t, p) \\ z_3(t, p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Lambda_{21}(t, \xi_0, \xi_1) \\ \Lambda_{22}(t, \xi_0, \xi_1) \\ \Lambda_{23}(t, \xi_0, \xi_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{21}(t)z(2, p) \\ N_{22}(t)z(2, p) \\ N_{23}(t)z(2, p) \end{pmatrix},$$

где

$$z(t, p) = \begin{pmatrix} z_1(t, p) \\ z_2(t, p) \\ z_3(t, p) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) = \begin{pmatrix} \Lambda_{21}(t, \xi_0, \xi_1) \\ \Lambda_{22}(t, \xi_0, \xi_1) \\ \Lambda_{23}(t, \xi_0, \xi_1) \end{pmatrix}, \quad N_2(t)z(t, p) = \begin{pmatrix} N_{21}(t)z(2, p) \\ N_{22}(t)z(2, p) \\ N_{23}(t)z(2, p) \end{pmatrix}.$$

4. Оптимизационная задача. Для данного примера задача оптимального управления (8) – (12) имеет вид

$$\begin{aligned} J(\theta) = J(u, v, p_1, p_2, p_3, \omega, x_0, x_1, d) &= \int_1^2 \{|w_1(t) - u(t)|^2 + |\int_1^3 \cos(t\tau)v(\tau)d\tau - \\ &- w_2(t)|^2 + |\int_1^2 e^{ts}y_1(s)ds - w_3(t)|^2 + |\omega(t) - LPy(t)|^2\}dt \rightarrow \inf \end{aligned}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_1 z + B_1 p_1(t) + C_1 p_2(t) + D_1 p_3(t), \quad z(1) = 0, \quad t \in I, \\ p_1(\cdot) &\in L_2(I, R^2), \quad p_2(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad p_3(\cdot) \in L_2(I, R^1), \\ (x_0, x_1) &\in S_0 \times S_1, \quad d \in D = \{d \in R^1 / d \geq 0\}, \quad u(t) \in U, \quad v(\tau) \in V \\ \omega(t) &\in \Omega = \{\omega(\cdot) \in L_2(I, R^2) / e \leq \omega_1(t) \leq e^2, \quad e - 2 \leq \omega_2(t) \leq e^2 + 2, \quad \text{п.в. } t \in I\}, \\ P &= (I_2, O), \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad LPy = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Функции $F_1(q, t) = w_1 - u$, $F_2(q, t) = \int_1^3 (\cos t\tau)v(\tau)d\tau - w_2$, $F_3(q, t) = \int_1^2 e^{ts}y_1(s)ds - w_3$, $F_4(q, t) = \omega - LPy$. Для каждого фиксированного $\theta_n = (u_n, v_n, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, \omega_n, x_{0n}, x_{1n}, d) \in X$ градиент функционала вычисляется по формуле (13).

Можно показать, что для данного примера предельные значения минимизирующих последовательностей следующие:

$$\begin{aligned} u_*(t) &= (u_{1*}(t), u_{2*}(t)), \quad u_{1*}(t) = \frac{\sin 3t}{t} + \frac{\sin t}{t}, \quad u_{2*}(t) = e^t - \frac{4 \cos 2t}{t} + \\ &+ \frac{2 \sin 2t}{t^2} - \frac{e^{2(t+1)}}{t+1} + \frac{e^{t+1}}{t+1}, \quad t \in I, \quad v_*(\tau) = \begin{cases} 1, & 1 \leq \tau < 2, \\ -1, & 2 \leq \tau < 3, \end{cases} \\ p_{1*}(t) &= \begin{pmatrix} p_{11*}(t) \\ p_{12*}(t) \end{pmatrix}, \quad p_{11*}(t) = u_{1*}(t), \quad p_{12*}(t) = u_{2*}(t), \\ p_{2*}(t) &= \int_1^3 \cos(t\tau)v_*(\tau)d\tau, \quad p_{3*}(t) = \int_1^2 e^{ts}y_{1*}(s)ds, \quad y_{1*}(t) = x_{1*}(t) = e^t, \\ y_{2*}(t) &= e^t - \frac{2 \sin 2t}{t} = x_{2*}(t), \quad t \in I, \quad \omega_{1*}(t) = x_{1*}(t), \\ \omega_{2*}(t) &= x_{2*}(t), \quad t \in I, \quad x_{0*} = \begin{pmatrix} e \\ e - 2 \sin 2 \end{pmatrix}, \quad x_{1*} = \begin{pmatrix} e^2 \\ e^2 - \sin 4 \end{pmatrix}, \\ &\int_1^2 [x_{1*}(t) + x_{2*}(t) + u_{1*}(t)]dt = c_1 - d_*. \end{aligned}$$

Значение $J(\theta_*) = J(u_*, v_*, p_{1*}, p_{2*}, p_{3*}, \omega_*, x_{0*}, x_{1*}, d_*) = 0$.

4 Результаты и обсуждение

В статье получены следующие результаты: Решение задачи управляемости линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями сведено к начальной задаче оптимального управления; Доказано, что функционал непрерывно дифференцируем по Фреше и градиент функционала удовлетворяет условию Липшица; построена минимизирующая последовательность и получена оценка скорости сходимости; Создана конструктивная теория для решения задачи управляемости интегро-дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными ограничениями.

Актуальными и нерешенными проблемами теории управляемости интегро - дифференциальных уравнений с ограничениями являются: получение необходимых и достаточных условий разрешимости общих задач управляемости, разработка конструктивных методов построения их решений. Целью данной работы является создание общей теории управляемости процессов описываемых интегро-дифференциальными уравнениями с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов системы.

5 Заключение

Теория управляемости динамических систем является одним из направлений в качественной теории дифференциальных уравнений возникшее от потребностей новых областей науки и техники, как освоение космического пространства, сверхзвуковой авиации, управление сложными технологическими процессами, управление ядерными и химическими реакторами, а также необходимостью решения сложных проблем экономики и экологии, естественных и технических наук.

Динамическая система называется управляемой, если существует управляющее воздействие, которое переводит траекторию системы из любого начального состояния в желаемое конечное состояние, определяемое краевыми условиями, при этом вдоль решения системы выполнены фазовые и интегральные ограничения.

Интегро - дифференциальное уравнение связывает воедино настоящее, будущее и прошлое процесса. Такие математические модели явлений более адекватно описывают их свойства. Один из создателей квантовой механики В. Гейзенберг, в своей книги "Физика и философия" делает следующее предположение: "...основное уравнение материи, рассматриваемое как математическое представление всей материи, должно иметь вид сложной системы интегро - дифференциальных уравнений".

Создана конструктивная теория управляемости процесса описываемого линейным интегро-дифференциальным уравнением. Основой предлагаемого метода разрешимости задачи управляемости является возможность сведения ее к одному классу интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Показано, что для построения решения задачи управляемости необходимо строить минимизирующие последовательности для начальной задачи оптимального управления. Решением исходной задачи являются слабо предельные точки минимизирующих последовательностей.

Список литературы

- [1] Айсагалиев С. А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1991. – С. 1476–1486.
- [2] Айсагалиев С. А. Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. – 2005. – С. 17–34.
- [3] Айсагалиев С. А. Теория управляемости динамических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2014. – 158 с.
- [4] Айсагалиев С. А. Конструктивная теория краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алматы: Қазақ университеті, 2015. – 207 с.
- [5] Айсагалиев С. А., Айсагалиева С. С. Существование решения задачи управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями // Вестник КазНУ, сер. мех., мат., инф. – 2017, № 1(92). – С. 3–17.
- [6] Айсагалиев С. А., Белогурев А. П. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. – 2012. – С. 20–36.
- [7] Айсагалиев С. А., Кабидолданова А. А. Оптимальное управление линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 2012. – С. 826–836.
- [8] Айсагалиев С. А., Калимолова М. Н. Конструктивный метод решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2015. – С. 147–160.
- [9] Ананьевский И. М., Анахин Н. В., Овсеевич А. И. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Доклады РАН. – 2010. – С. 319–323.
- [10] Беллман Р. Математические методы в медицине. – М.: Мир, 1987. – 282 с.
- [11] Выков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1957. – 312 с.
- [12] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977. – 585 с.
- [13] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существования. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
- [14] Габасов Р., Кириллов Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 421 с.
- [15] Глушков В.М., Иванов В.В., Яценко В.М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983. – 285 с.
- [16] Емельянов С. В., Крищенко А. П. Стабилизация нерегулярных систем // Дифференциальные уравнения. – 2012. – С. 1516–1524.
- [17] Зубов В. И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 502 с.
- [18] Иманалиев М.И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. – Фрунзе: Илим, 1977. – 302 с.
- [19] Иманалиев М.И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. – Фрунзе: Илим, 1981. – 265 с.
- [20] Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды 4 Конгресса Международная федерации по автоматическому управлению. – АН СССР. – 1961. – С. 521–547.
- [21] Коровин С. К., Капалин И. В., Фомичев В. В. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем // Доклады РАН. – 2011. – С. 606–611.
- [22] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
- [23] Красовский Н. Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
- [24] Ли Э. В., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 575 с.
- [25] Николис Г., Пригожин И. Саморганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 245 с.
- [26] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984. – 290 с.

- [27] Рубин А.Б. Термодинамика биологических процессов. – Изд-во МГУ, 1984. – 352 с.
- [28] Семенов Ю. М. О полной управляемости линейных неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. – 2012. – С. 1263-1277.
- [29] Lakshmikantham V., Rao M.R. Theory of integro-differential equations. – London, 1995. – 402 c.

References

- [1] Aisagaliev S. A., «Upravlyayemost nekotoroy sistemy differentsialnyih uravnennyi» [Controllability of a differential-equation system], *Differentsialnyie uravneniya* (1991) : 1476–1486.
- [2] Aisagaliev S. A., «Obschee reshenie odnogo klassa integralnyih uravnennyi» [The general solution of a class of integral equations], *Matematicheskiy zhurnal* (2005) : 17–34.
- [3] Aisagaliev S. A. *Teoriya upravlyayemosti dinamicheskikh sistem* [Controllability theory of dynamical systems] (Kazakh universiteti, 2014), 158.
- [4] Aisagaliev S. A. *Konstruktivnaya teoriya kraevyih zadach obyiknovennyih differentsialnyih uravnennyi* [Constructive theory of boundary value problems for ordinary differential equations] (Almaty: Kazakh universiteti, 2015), 207.
- [5] Aisagaliev S. A., Aisagalieva S. S., «Suschestvovanie resheniya zadachi upravlyayemosti dlya lineynyih integro-differentsialnyih uravnennyi s ograniceniyami» [The existence of a solution of the controllability problem for linear integral and differential equations with restrictions], *Vestnik KazNU, ser. meh., mat., inf.* (2017) : 3-17.
- [6] Aisagaliev S. A., Belogurov A. P., «Upravlyayemost i byistrodeystvie protsessa, opisyivaemogo parabolicheskim uravneniem s ogranicennym upravleniem» [Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control], *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* (2012) : 20–36.
- [7] Aisagaliev S. A., Kabitoldanova A. A. «Optimalnoe upravlenie lineynyimi sistemami s lineynym kriteriem kachestva i ograniceniyami» [On the optimal control of linear systems with linear performance criterion and constraints], *Differentsialnyie uravneniya* (2012) : 826–836.
- [8] Aisagaliev S. A., Kalimoldaev M. N., «Konstruktivnyiy metod resheniya kraevoy zadachi dlya obyiknovennyih differentsialnyih uravnennyi» [Constructive method for solving a boundary value problem for ordinary differential equations], *Differentsialnyie uravneniya* (2015) : 147–160.
- [9] Ananevskiy I. M., Anahin N. V., Ovseevich A. I., «Sintez ogranicennogo upravleniya lineynyimi dinamicheskimi sistemami s pomoschyu obschey funktsii Lyapunova» [Synthesis of limited control for linear dynamical systems with the using of the general Lyapunov function], *Dokladyi RAN* (2010) : S. 319-323.
- [10] Bellman R. *Matematicheskie metody v meditsine* [Mathematical Methods in Medicine] (M.: Mir, 1987), 282.
- [11] Bykov Ya.V., *O nekotoryih zadachah teorii integro-differentsialnyih uravnennyi* [On some problems of the theory of integro-differential equations] (Frunze: Ilim, 1957), 312.
- [12] Emelyanov S. V., Krischenko A. P., «Stabilizatsiya neregulyarnyih sistem» [Stabilization of irregular systems], *Differentsialnyie uravneniya* (2012) : 1516-1524.
- [13] Gabasov R., Kirillov F. M. *Kachestvennaya teoriya optimalnyih protsessov* [Qualitative theory of optimal processes] (M.: Nauka, 1971), 421.
- [14] Glushkov V.M., Ivanov V.V., Yanenko V.M. *Modelirovanie razvivayuschihsya sistem* [Modeling of developing systems] (M.: Nauka, 1983), 285.
- [15] Imanaliev M.I. *Metodyi resheniya nelineynyih obratnyih zadach i ikh prilozheniya* [Methods for solving nonlinear inverse problems and their applications] (Frunze: Ilim, 1977), 302.
- [16] Imanaliev M.I. *Obobschennye resheniya integralnyih uravnennyi pervogo roda* [Generalized solutions of integral equations of the first kind] (Frunze: Ilim, 1981), 265.
- [17] Kalman R. E., «Ob obschey teorii sistem upravleniya» [On the General Theory of Control Systems]. Trudy 4 Kongressa Mezhdunarodnaya federatsii po avtomaticheskemu upravleniyu, AN SSSR, 1961.
- [18] Korovin S. K., Kapalin I. V., Fomichev V. V., «Minimalnyie stabilizatoryi dlya lineynyih dinamicheskikh sistem» [Minimum stabilizers for linear dynamic systems]. *Dokladyi RAN*, 2011.

- [19] Krasnov M.L. *Integralnyie uravneniya* [Integral equations] (M.: Nauka, 1975), 304.
- [20] Krasovskiy N. N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control] (M.: Nauka, 1968), 475.
- [21] Lakshmikantham V., Rao M.R. *Theory of integro-differential equations* (London, 1995), 402.
- [22] Li E. V., Markus L. *Osnovy teorii optimalnogo upravleniya* [Fundamentals of Optimal Control Theory] (M.: Nauka, 1972), 575.
- [23] Nikolis G., Prigogine I. *Samoorganizatsiya v neravnovesnyih sistemah* [Self-organization in nonequilibrium systems] (M.: Mir, 1979), 245.
- [24] Romanovskiy Yu.M., Stepanova N.V., Chernavskiy D.S. *Matematicheskaya biofizika* [Mathematical Biophysics] (M.: Nauka, 1984), 290.
- [25] Rubin A.B. *Termodinamika biologicheskikh protsessov* [Thermodynamics of biological processes] (Izd-vo MGU, 1984), 352.
- [26] Semenov Yu. M., «O polnoy upravlyayemosti lineyniyih neavtonomnyih sistem» [On the complete controllability of linear nonautonomous systems], *Differentsialnye uravneniya* (2012) : 1263-1277.
- [27] Varga Dzh. *Optimalnoe upravlenie differentsialnyimi i funktsionalnyimi uravneniyami* [Optimal control of differential and functional equations] (M.: Nauka, 1977), 585.
- [28] Volterra V. *Matematicheskaya teoriya borbyi za suschestvovaniya* [The mathematical theory of the struggle for existence] (M.: Nauka, 1976), 320.
- [29] Zubov V. I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on the control theory] (M.: Nauka, 1975), 502.

МРНТИ 27.29.17

Дифференциальные системы при малых возмущениях

Алдабеков Т.М., д.ф.-м.н., и.о. профессора кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77011411069, E-mail: tamash59@mail.ru

Исследуется устойчивость, изменения и границы подвижности обобщенных показателей Ляпунова линейной однородной системы дифференциальных уравнений с непрерывными, со стремящимися к нулю коэффициентами при малых возмущениях, в связи с обобщенными центральными и с обобщенными особыми показателями. Приведен пример неустойчивости обобщенных показателей Ляпунова, при малых возмущениях стремящейся к нулю. Определена точная верхняя граница изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы при малых возмущениях в определенном классе нелинейных систем дифференциальных уравнений применением верхнего обобщенного центрального показателя. Определена точная нижняя граница изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы при малых возмущениях в определенном классе нелинейных систем дифференциальных уравнений использованием верхнего обобщенного особого показателя. Определена нижняя граница изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы при малых возмущениях в определенном классе нелинейных систем дифференциальных уравнений использованием обобщенного нижнего центрального показателя. Определена верхняя граница изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы при малых возмущениях в определенном классе нелинейных систем дифференциальных уравнений использованием обобщенного верхнего особого показателя. Установлено взаимосоотношения обобщенных верхнего и нижнего центральных, обобщенных верхнего и нижнего особых показателей. Дано краткое описание обобщенных показателей Ляпунова, обобщенного верхнего и нижнего центральных показателей, обобщенного верхнего и нижнего особых показателей, как бэрковские функции в определенном метрическом пространстве.

Ключевые слова: устойчивость показателей, линейные дифференциальные системы, малые возмущение дифференциальных систем, точные границы.

Аз әсер алған дифференциалдық жүйелер

Алдабеков Т.М., ф.-м.ғ.д., дифференциалдық теңдеулер және басқару теориясы кафедрасының профессор м.а., әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77017477069, Электрондық пошта: tamash59@mail.ru

Коэффициенттері үзіліссіз, нөлге ұмтылатын сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесі аз әсер алған кездегі жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің орнықтылығы, өзгерісі және шекараларының қозгалысы жалпылама орталық және жалпылама ерекше көрсеткіштерменен байланыста зерттеледі. Нөлге ұмтылатын аз әсер алғанда жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің орнықсыздығын көрсететін мысал келтірілген. Жоғары жалпылама орталық көрсеткіштің қолдануымен сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің жүйелерінің анықталған класында сызықты жүйенің жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің аз әсер алғанда өзгерісінің дәл жоғары шекарасы анықталған. Тәменгі жалпылама орталық көрсеткіштің қолдануымен сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің жүйелерінің анықталған класында сызықты жүйенің жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің аз әсер алғанда өзгерісінің дәл тәменгі шекарасы анықталған. Жоғары жалпылама ерекше көрсеткішті пайдаланып сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің жүйелерінің анықталған класында сызықты жүйенің жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің аз әсер алғанда өзгерісінің жоғары шекарасы анықталған.

Төменгі жалпылама ерекше көрсеткішті пайдаланып сыйықты емес дифференциалдық теңдеулердің жүйелерінің анықталған класында сыйықты жүйенің жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің аз әсер алғанда өзгерісінің төменгі шекарасы анықталған. Жалпылама жогарғы және төменгі орталық, жалпылама жогарғы және төменгі ерекше көрсеткіштердің өзара қатынастары орнатылған. Анықталған метрикалық кеңістікте жалпылама Ляпунов көрсеткіштерінің, жалпылама жогарғы және төменгі орталық көрсеткіштердің, жалпылама жогарғы және төменгі ерекше көрсеткіштердің бәр функциялары ретінде қысқаша сипаттамасы берілген.

Тұйин сөздер: көрсеткіштердің орнықтылығы, сыйықты дифференциалдық жүйе, дифференциалдық жүйенің аз әсерлері, дәл шекаралар.

Differential systems under small perturbations

Aldibekov T.M., Dr.Sci. (Phys-Math.), acting professor of the chair of Differential equations and Control theory, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, +77017477069, E-mail: tamash59@mail.ru

The stability, changes and mobility bounds of generalized Lyapunov exponents of linear homogeneous systems of differential equations with continuous and tending to zero coefficients under small perturbations was studied with respect to the generalized central and generalized singular exponents. An example of the instability of generalized Lyapunov exponents, under small perturbations tends to zero was given. Using the generalized upper central exponents the exact upper limit of change of generalized Lyapunov exponents of linear systems under small perturbations was determined in a certain class of nonlinear systems of differential equations. Using the generalized lower central exponents the exact lower bounds of change of generalized Lyapunov exponents of linear systems under small perturbations was determined in a certain class of nonlinear systems of differential equations. Using a special upper generalized exponent the upper bounds of change of generalized Lyapunov exponents of linear systems under small perturbations was determined in a certain class of nonlinear systems of differential equations. Using the generalized lower special exponent the lower bounds of changes of generalized Lyapunov exponents of linear systems under small perturbations was determined in a certain class of nonlinear systems of differential equations. Mutual relations between generalized upper and lower central exponents, upper and lower generalized singular exponents was established. A brief description of the generalized Lyapunov exponents of the generalized upper and lower central exponents, generalized upper and lower singular exponents as Baire functions in a certain metric space was given.

Key words: linear differential systems, singular exponents, nonlinear differential systems, bound of the solutions

1 Введение

Асимптотические характеристики решений невозмущенной системы считаются устойчивыми, если малые в каком-либо смысле возмущения вызывают малые изменения асимптотических характеристик. Верхнее и нижнее обобщенные центральные показатели, верхнее и нижнее особые показатели линейных систем дифференциальных уравнений являются устойчивыми характеристиками. Верхний обобщенный показатель Ляпунова является устойчивой в классе обобщенных правильных линейных систем дифференциальных уравнений. Вообще говоря, обобщенные показатели Ляпунова неустойчивы при малых возмущениях. В связи с этим рассматриваются следующие задачи. Определить верхние границы подвижности обобщенных показателей Ляпунова по отношению обобщенных центральных показателей при малых возмущениях. Определить

нижние границы подвижности обобщенных показателей Ляпунова по отношению обобщенных центральных показателей при малых возмущениях. Определить верхние границы подвижности обобщенных показателей Ляпунова по отношению обобщенных особых показателей при малых возмущениях. Определить нижние границы подвижности обобщенных показателей Ляпунова по отношению обобщенных особых показателей при малых возмущениях. Дать описание для введенных асимптотических характеристик относительно бэрковской классификации.

2 Обзор литературы

Асимптотическое поведение, устойчивость и другие свойства решений, в том числе возмущенные системы исследовались многими авторами. Поэтому не претендую на полноту отметим следующие работы: (Coddington, 1955), (Levinson, 1949 : 40-45), (Bellman, 1947 : 357-386), (Bihari, 1956 : 71-94), (Massera, 1949 : 705-721), (Conti, 1957 : 588-592), (Atkinson, 1958 : 690-708), (Diliberto, 1956 : 207-236), (Hartman, 1955 : 692-724). Понятие устойчивости показателей возникло в работе (Perron, 1930 : 703-728), где установлена, что показатели Ляпунова могут быть неустойчивыми. Верхняя и нижняя граница изменения показателей Ляпунова линейной системы дифференциальных уравнений с непрерывными и ограниченными коэффициентами найдены в (Виноград, 1957 : 459-461) и доказана неулучшаемость этих границ в случае треугольных систем линейных систем дифференциальных уравнений. Точность этих границ в общем случае доказана в (Миллионщиков, 1969а : 1775-1784), (Миллионщиков, 1969б : 99-104), (Миллионщиков, 1968). В (Миллионщиков, 1983а : 196-220), (Миллионщиков, 1983б : 1344-1356) показатели Ляпунова и центральные показатели рассматриваются в более общих структурах, в частности дается описание, как бэрковские функции на базе векторного расслоения семейства морфизмов и выясняют, что разрушение относительно некоторых свойств показателей в смысле категорий Бэра нетипично.

3 Материал и методы

3.1 Пусть дана линейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1)$$

$$t \in I \equiv [t_0, +\infty), A(t) \in C(I), \|A(t)\| \leq C_A \varphi(t), \\ C_A > 0, \varphi(t) > 0, \varphi(t) \in C(I), \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0, \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(s) ds = +\infty.$$

Определяем функцию $q(t)$ по формуле: $q(t) = \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$. Приведем пример неустойчивости обобщенных показателей Ляпунова, при малых возмущениях стремящейся к нулю. Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{7}{104\sqrt{t}}x_1 \\ \dot{x}_2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} \sin \ln t + \frac{1}{\sqrt{t}} \cos \ln t - \frac{7}{52\sqrt{t}} \right) x_2 \end{cases}$$

Эта линейная система имеет отрицательные обобщенные показатели относительно $q(t) = \sqrt{t}$, т.е., система асимптотически устойчива. Если мы добавим к системе малое возмущение вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{t}e^{-\frac{7}{52\sqrt{t}}} & 0 \end{pmatrix}$$

то возмущенная система уже имеет неограниченное решение:

$$\tilde{x}_1 = e^{-\frac{7}{52\sqrt{t}}}, \quad \tilde{x}_2 = 2e^{\sqrt{t} \sin \ln t - \frac{7\sqrt{t}}{26}} \int \sqrt{t} e^{-\sqrt{t} \sin \ln t} dt$$

и это решение имеет положительный обобщенный показатель Ляпунова. Таким образом, обобщенные показатели Ляпунова данной линейной системы разнятся, т.е., неустойчивы.

Пусть

$$\lambda_k(A, q), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

обобщенные показатели Ляпунова линейной системы (1). Вводим следующий класс векторных функций $f(t, x)$ удовлетворяющих условиям:

$$f(t, x) \in C_{(t, x)}^{(0, 1)}, \quad G = I \times \mathbb{R}^n, \quad f(t, 0) = 0$$

$$|f(t, x)| < \delta(t)|x|, \quad \delta(t) \in C(I), \quad \delta(t) > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\delta(t)}{\varphi(t)} = 0$$

обозначим $L_\delta(\varphi)$. Исследуется изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1) при возмущениях из класса $L_\delta(\varphi)$. Рассматривается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \quad (2)$$

где $f(t, x) \in L_\delta(\varphi)$.

Чтобы найти границы изменения обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1) при малых возмущениях, мы используем разработанные в работах (Aldibekov, 2015 : 39), (Алдабеков, 2015 : 33-41), (Алдабеков, 2016а : 47-54), (Алдабеков, 2016б), (Алдабеков, 2016в : 46-54), устойчивые асимптотические характеристики линейной системы (1): $\omega_0(A, q)$, $\omega(A, q)$, $\Omega(A, q)$, $\Omega_0(A, q)$. Пусть

$$\Omega(A, q) = \inf_{R \in B(A, q)} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^t R_q(\tau) d\tau$$

обобщенный верхний центральный показатель линейной системы (1).

Теорема 1. Обобщенный верхний центральный показатель является верхней границей обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1)

$$\lambda_k(A, q) \leq \Omega(A, q), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

причем эта верхняя граница обобщенных показателей Ляпунова точная в классе $L_\delta(\varphi)$.
Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого ненулевого решения $x(t)$ линейной системы (1), из определения верхнего обобщенного центрального показателя имеем оценку

$$|x(t)| \leq D_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\Omega(A,q)+\varepsilon)(q(t)-q(t_0))}$$

Следовательно, используя определение верхнего обобщенного показателя Ляпунова, если отсюда перейдем к верхнему пределу, то вытекает оценка

$$\chi[x, q] \leq \Omega(A, q) + \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $\chi[x, q] \leq \Omega(A, q)$ поэтому имеем оценку

$$\lambda_k(A, q) \leq \Omega(A, q), k = 1, 2, \dots, n,$$

В классе $L_\delta(\varphi)$ обобщенный верхний центральный показатель линейной системы (1) устойчив вверх, следовательно, это оценка сохраняется при малых возмущениях из этого класса. Достижимость докажем методом поворотов. Для определенности возьмем ненулевое решение $x(t)$ линейной системы (1) с начальным значением $x(t_0) = x_0$, которое определяет старший обобщенный показатель Ляпунова и пусть имеет место неравенство $\chi[x, q] \leq \Omega(A, q)$. Построим возмущенную систему в классе $L_\delta(\varphi)$. Для любого $\varepsilon > 0$ зафиксируем $T > 0$ такое, что

$$e^{\frac{\varepsilon}{2}q(T)} \sin^2 \varepsilon \geq 1, \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(mT)} \sum_{i=1}^{m-1} \ln |(X_A(i+1)T, iT)| \geq \Omega(A, q) - \varepsilon \quad (3)$$

Пусть на отрезке $T_1 < t < T_2, T_1 > T$ выполняется неравенство

$$\frac{|\tilde{x}(T_2)|}{|\tilde{x}(T_1)|} \div \frac{|x(T_2)|}{|x(T_1)|} \geq e^{\frac{\varepsilon}{2}[q(T_2) - q(T_1)]} \quad (4)$$

Строим возмущение $B_\varepsilon(t)$ следующим образом. На отрезке $[t_0, T_1]$ полагаем $B_\varepsilon(t) = 0$. На отрезке $T_1 < t < T_2$ положим $B_\varepsilon(t) = U_\varepsilon^{-1}(t)A(t)U_\varepsilon(t) - U_\varepsilon^{-1}(t)\dot{U}_\varepsilon(t) - A(t)$ где $U_\varepsilon(t)$ ортогональная матрица в преобразовании

$$x(t) = U_\varepsilon(t)\bar{x}(t)$$

Возмущенная система на отрезке $[t_0, T_2]$ имеет вид

$$\dot{\bar{x}}(t) = (A(t) + B_\varepsilon(t))\bar{x}(t) \quad (5)$$

Пусть на промежутке $(T_2, +\infty)$ имеется отрезок $T_3 < t < T_4$, где для некоторого решения возмущенной системы (5), выполняется аналогичное неравенство (4). Тогда аналогично строим возмущение $B_\varepsilon(t)$ исходя из системы (5). Если таких промежутков нет, то возмущение полагаем равным нулю. Таким образом, построенная возмущенная система в силу (3) имеет обобщенный показатель Ляпунова

$$\lambda(A + B_\varepsilon) > \Omega(A, q) - \varepsilon$$

следовательно, в силу произвольности $\varepsilon > 0$ возмущенная система имеет решение с тем же начальным условием $x(t_0) = x_0$, обобщенный показатель Ляпунова которого равен обобщенному верхнему центральному показателю линейной системы (1). Следовательно, оценка точная. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Если имеет место равенство $\lambda_1(A, q) = \Omega(A, q)$, где $\lambda_1(A, q)$ - старший обобщенный показатель Ляпунова линейной системы (1), то старший обобщенный показатель Ляпунова устойчива вверх при малых возмущениях из класса $L_\delta(\varphi)$.

Следствие 2. Если $\lambda_1(A, q) < 0$ и $\lambda_1(A, q) = \Omega(A, q)$, где $\lambda_1(A, q)$ - старший обобщенный показатель Ляпунова линейной системы (1), то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (2) асимптотически устойчиво по Ляпунову. Имеет место более сильное утверждение.

Следствие 3. Если $\lambda_1(A, q) < 0$ и $\lambda_1(A, q) = \Omega(A, q)$, то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (2) слабо экспоненциально устойчиво относительно q .

3.2 Пусть

$$\omega(A, q) = \sup_{R \in H(A, q)} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{q(t)} \int_{t_0}^t r_q(\tau) d\tau$$

-обобщенный нижний центральный показатель линейной системы (1) относительно q .

Теорема 2. Имеет место неравенство

$$\omega(A, q) \leq \lambda_k(A, q), k = 1, 2, \dots, n,$$

т.е., обобщенный нижний центральный показатель является нижней границей обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1). Кроме того эта нижняя граница обобщенных показателей Ляпунова в классе $L_\delta(\varphi)$ является точным.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого ненулевого решения $x(t)$ линейной системы (1), из определения нижнего обобщенного центрального показателя имеем оценку

$$d_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\omega(A, q) - \varepsilon)(q(t) - q(t_0))} \leq |x(t)|$$

Следовательно, используя определение верхнего обобщенного показателя Ляпунова, если отсюда перейдем к верхнему пределу, то вытекает оценка

$$\omega(A, q) - \varepsilon \leq \chi[x, q]$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\omega(A, q) \leq \chi[x, q].$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\omega_0(A, q) \leq \lambda_k(A, q), k = 1, 2, \dots, n,$$

Чтобы показать, что эта нижняя граница обобщенных показателей Ляпунова в классе $L_\delta(\varphi)$ является точным, переходим к сопряженной системе дифференциальных уравнений. Тогда нижний класс обобщенных нижних функций линейной системы (1) переходит в верхний класс обобщенных верхних функций сопряженной системы. Теперь как

в теореме 1 построим возмущенную систему. По построению имеем достижимую обобщенную верхнюю функцию, тогда сопряженная функция с отрицательным знаком является достижимой обобщенной нижней функцией. Следовательно, будем иметь решение возмущенной системы с обобщенным показателем Ляпунова совпадающим с нижним обобщенным центральным показателем. Теорема 2 доказана.

Следствие 4. Обобщенный показатель Ляпунова $\chi[x, q]$ любого ненулевого решения $x(t)$ нелинейной системы дифференциальных уравнений (2) относительно q , где $f(t, x) \in L_\delta(\varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(A, q) \leq \chi(x, q) \leq \Omega(A, q), k = 1, 2, \dots, n,$$

где $\omega(A, q), \Omega(A, q)$ соответственно обобщенное нижнее и обобщенное верхнее центральные показатели линейной системы (1).

Пусть

$$\Omega_0(A, q) = \inf_{N_q \in B_0(A, q)} N_q$$

обобщенный верхний особый показатель относительно q системы (1).

Теорема 3. Обобщенный верхний особый показатель является верхней границей обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1)

$$\lambda_k(A, q) \leq \Omega_0(A, q), k = 1, 2, \dots, n,$$

причем эта оценка сохраняется при малых возмущениях в классе $L_\delta(\varphi)$.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого ненулевого решения $x(t)$ линейной системы (1), из определения верхнего обобщенного особого показателя имеем оценку

$$|x(t)| \leq D_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\Omega_0(A, q) + \varepsilon)(q(t) - q(t_0))}.$$

Следовательно, используя определение верхнего обобщенного показателя Ляпунова, если отсюда перейдем к верхнему пределу, то вытекает оценка

$$\chi[x, q] \leq \Omega_0(A, q) + \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $\chi[x, q] \leq \Omega_0(A, q)$ поэтому имеем оценку

$$\lambda_k(A, q) \leq \Omega_0(A, q), k = 1, 2, \dots, n,$$

Теперь в силу того, что обобщенный верхний особый показатель устойчив вверх в классе $L_\delta(\varphi)$ имеем, что оценка сохраняется при малых возмущениях в классе $L_\delta(\varphi)$. Теорема 3 доказана.

Пусть

$$\omega_0(A, q) = \sup_{n_q \in B_0(A, q)} n_q$$

—обобщенный нижний особый показатель относительно q системы (1).

Теорема 4. Обобщенный нижний особый показатель является нижней границей обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1)

$$\omega_0(A, q) \leq \lambda_k(A, q) k = 1, 2, \dots, n,$$

причем эта оценка сохраняется при малых возмущениях из классе $L_\delta(\varphi)$. Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого ненулевого решения $x(t)$ линейной системы (1), из определения верхнего обобщенного особого показателя имеем оценку

$$d_\varepsilon |x(t_0)| e^{(\omega_0(A,q) - \varepsilon)(q(t) - q(t_0))} \leq |x(t)|$$

Следовательно, используя определение верхнего обобщенного показателя Ляпунова, если отсюда перейдем к верхнему пределу, то вытекает оценка

$$\omega_0(A, q) - \varepsilon \leq \chi[x, q]$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\omega(A, q) \leq \chi[x, q].$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\omega_0(A, q) \leq \lambda_k(A, q), k = 1, 2, \dots, n,$$

Теперь в силу того, что обобщенный нижний особый показатель устойчив вниз в классе $L_\delta(\varphi)$, вытекает, что оценка сохраняется при малых возмущениях в классе $L_\delta(\varphi)$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Имеет место следующие неравенства

$$\omega_0(A, q) \leq \omega(A, q), \Omega(A, q) \leq \Omega_0(A, q)$$

Доказательство. Так как $H_0(A, q)$ множество обобщенных нижних постоянных относительно q содержится в множестве обобщенных нижних функций, то из определения обобщенного нижнего особого показателя и обобщенного нижнего центрального показателя линейной системы (1), следует первое неравенство. Так как $B_0(A, q)$ множество обобщенных верхних постоянных относительно q содержится в множестве обобщенных верхних функций линейной системы (2), то из определения обобщенного верхнего особого показателя и обобщенного верхнего центрального показателя линейной системы (1) вытекает второе неравенство. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Обобщенный показатель Ляпунова $\chi[x, q]$ любого ненулевого решения $x(t)$ нелинейной системы дифференциальных уравнений (2) относительно q , где $f(t, x) \in L_\delta(\varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$\omega_0(A, q) \leq \chi[x, q] \leq \Omega_0(A, q)$$

где $\omega_0(A, q), \Omega_0(A, q)$ - соответственно обобщенное нижнее и обобщенное верхнее особые показатели линейной системы (1).

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 5. Теорема 6 доказана. Сегмент $[\omega_0(A, q), \Omega_0(A, q)]$ является более широкое граница подвижности обобщенных показателей Ляпунова линейной системы (1). Отметим, что эти границы являются в некоторых случаях тоже достижимы при малых возмущениях. В этих случаях они являются точными границами подвижности обобщенных показателей Ляпунова. Имеются классы дифференциальных систем, где: 1) $\Omega_0(A, q) = \Omega(A, q)$, 2) $\omega_0(A, q) = \omega(A, q)$, 3) имеет место одновременно 1) и 2).

3.3 Множество линейных однородных систем дифференциальных уравнений удовлетворяющих условиям линейной системы (1) превратим в метрическое пространство $M_I^n(\varphi)$, введя метрику:

$$\rho(A, B) = \sup_I \frac{\|A(t) - B(t)\|}{\varphi(t)}$$

Отметим, на этом метрическом пространстве: $\lambda_k(A, q), k = 1, 2, \dots, n$; - обобщенные показатели Ляпунова линейной системы (1) являются бэрзовскими функциями второго класса. Следующие асимптотические характеристики линейной системы (1): $\omega_0(A, q)$ - обобщенное нижнее особый показатель, $\omega(A, q)$ - обобщенное нижнее центральный показатель, $\Omega(A, q)$ - обобщенное верхнее центральный показатель, $\Omega_0(A, q)$ - обобщенное верхнее особый показатель являются бэрзовскими функциями первого класса. Из бэрзской теории следует, что множество точек непрерывности всех этих функционалов в метрическом пространстве $M_I^n(\varphi)$ образует всюду плотное множество G_δ .

4 Результаты и обсуждение

Определены верхние границы подвижности обобщенных показателей по отношению обобщенных центральных показателей при малых возмущениях. Определены нижние границы подвижности обобщенных показателей по отношению обобщенных центральных показателей при малых возмущениях. Определены верхние границы подвижности обобщенных показателей по отношению обобщенных особых показателей при малых возмущениях. Определены нижние границы подвижности обобщенных показателей по отношению обобщенных особых показателей при малых возмущениях. Дано описание для введенных асимптотических характеристик относительно бэрзской классификации. В исследовании наряду общими методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, используются методы асимптотической теории дифференциальных систем, методы теории характеристических показателей линейных дифференциальных систем и методы теории функций. Рассмотренные характеристики дифференциальных систем имеют большое теоретическое и прикладное значения. Приведены история рассматриваемых вопросов и связанные с ними литературы (Atkinson, 1958 : 690-708), (Bellman, 1947 : 357-386), (Bihari, 1956 : 71-94), (Виноград, 1957 : 459-461), (Diliberto, 1956 : 207-236), (Coddington, 1955), (Conti, 1957 : 588-592), (Levinson, 1949 : 40-45), (Massera, 1949 : 705-721), (Миллионщиков, 1969а : 1775-1784), (Миллионщиков, 1968), (Миллионщиков, 1969б : 99-104), (Миллионщиков, 1983а : 196-220), (Миллионщиков, 1983б : 1344-1356), (Perron, 1930 : 703-728), (Hartman, 1955 : 692-724).

5 Заключение

Точной верхней границей подвижности обобщенных показателей при малых возмущениях дифференциальной системы является верхнее обобщенное центральный показатель. Точной нижней границей подвижности обобщенных показателей при малых возмущениях дифференциальной системы является нижнее обобщенное центральный показатель. Доказано, что верхнее обобщенное особое показатель оценивает сверху обобщенных показателей, а нижнее обобщенное особое показатель оценивает снизу обобщенных показа-

телей при малых возмущениях дифференциальной системы. Дано описание обобщенных показателей, обобщенных центральных показателей и обобщенных особых показателей относительно бэрковской классификации.

6 Благодарность

Работа выполнена при поддержке PhD Алдажаровой М.М.

Список литературы

- [1] *Aldibekov T., Moldabek Zh.* Some characteristics of the differential system //International conference on Advancement in Mathematical Sciences. Antalya, Turkey. – 2015. – P. 39.
- [2] *Atkinson F.V.* On stability and asymptotic equilibrium. Ann. Math. – 1958. – Vol. 68, № 3. –P. 690-708.
- [3] *Bellman R.* On the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations (6, 8) Trans. Amer. Math. Soc. –1947. – Vol. 62. – P. 357-386.
- [4] *Bihari I.A* generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations (3, 6), Acta Math. Acad Sci. Hung. – 1956. – Vol. 7. – P. 71-94.
- [5] *Coddington E.A. and Levinson N.* Theory of differential equations. McGraw-Hill. – 1955. – P. 429.
- [6] *Conti R.* Systemi differenziali asintoticamente equivalenti. Rend. Lincei. – 1957. – ser. VIII. – Vol. 22, № 5. –P. 588-592.
- [7] *Diliberto S.P. and Hufford G.* Perturbation theorems for non-linear ordinary differential equations. Ann. Math. Studies. – 1956. – Vol. 8, № 36. – P. 207-236.
- [8] *Hartman P., Wintner A.* Asymptotic integrations of ordinary nonlinear differential equations, ibid. – 1955. – Vol. 77 [VIII.3; X.4, 8, 11, 13]. – P. 692-724 .
- [9] *Levinson N.* On stability of nonlinear systems of differential equations. Colloq. Math. – 1949. – Vol. 6, No. 2. – P. 40–45.
- [10] *Massera J.L.* On Lyapunov's conditions of stability (6, 7). Ann. Math. – 1949. – Vol. 2, No. 50. – P. 705-721.
- [11] *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Z. – 1930. – No. 32. – P. 703-728.
- [12] *Алдабеков Т.М., Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М.* Об устойчивых асимптотических характеристиках дифференциальных систем // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2015. – № 2(85). – С. 33-41.
- [13] *Алдабеков Т.М., Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М., Молдабек Ж.Т.* Обобщенные особые показатели линейной системы дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2016. – №1(88). – С. 47-54.
- [14] *Алдабеков Т.М.* Об оценках решений дифференциальных систем/ Международная научная конференция "Современные проблемы математики, механики и информатики посвященная 25-летию Независимости Республики Казахстан. Караганда, 9–10 декабря 2016 г.
- [15] *Алдабеков Т.М., Молдабек Ж.Т.* О равномерной оценке снизу решений нелинейной системы дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2016. – №4 (92). – С. 46-54
- [16] *Виноград Р.Э.* Оценка скачка характеристического показателя при малых возмущениях // Доклады АН СССР. – 1957. – Т. 114, № 3. – С. 459-461.
- [17] *Милионщиков В.М.* Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, № 10. – С. 1775-1784.
- [18] *Милионщиков В.М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1968. – Т. 23, № 1. – С. 213.
- [19] *Милионщиков В.М.* Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем дифференциальных уравнений // Сиб. математический журнал. – 1969. – Т. 10, № 1. – С. 99-104.
- [20] *Милионщиков В.М.* Бэрковские классы функций и показатели Ляпунова. XII // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 2. – С. 196-220.

References

- [1] Aldibekov T., Moldabek Z.T. "Some characteristics of the differential system". Int.conf. on Advancement in Math. Sciences, Antalya, Turkey (2015) : 39.
- [2] Atkinson F.V. "On stability and asymptotic equilibrium". Ann. Math., vol. 68 (1958) : 690-708.
- [3] Bellman R. "On the boundedness of solutions of nonlinear differential and difference equations (6, 8)"'. Trans. Amer. Math. Soc., vol 62 (1947) : 357-386.
- [4] Bihari I. "A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations (3, 6)". Acta Math. Acad Sci. Hung., vol 7 (1956) : 71-94.
- [5] Coddington E.A. and Levinson N. Theory of differential equations (McGraw-Hill, 1955), 149
- [6] Conti R. "Systemi differenziali asintoticamente equivalenti". Rend. Lincei., Ser. VIII, vol. 22, No 5 (1957) : 588-592.
- [7] Diliberto S.P. and Hufford G. "Perturbation theorems for non-linear ordinary differential equations". Ann. Math. Studies, Vol. 8 (1956) : 207-236.
- [8] Hartman P., Wintner A. "Asymptotic integrations of ordinary nonlinear differential equations". IBID, vol. 77 [VIII.3; X.4, 8, 11, 13] (1955) : 692-724
- [9] Levinson N. "On stability of nonlinear systems of differential equations". Colloq. Math., vol. 6 (1949) : 40-45.
- [10] Massera J.L. "On Lyapunov's conditions of stability (6, 7)". Ann. Math., vol. 2 (1949) : 705-721.
- [11] O. Perron. "Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen". Math. Z., vol. 32 (1930) : 703-728.
- [12] Aldibekov T.M., Mirzakulova A.E., Aldazharova M.M. "Ob ustoychivyykh asimptoticheskikh harakteristikakh differentialsalnykh sistem. [Stable asymptotical characteristics of differential systems]" Bulletin of KazNU. Math., Mech., Inf. Series, vol. 2 (2015) : 33-41.
- [13] Aldibekov T.M. "Obobshennye osobyie pokazateli lineinykh sistem differentialsalnykh uravnenii. [Generalized special performance linear system of differential equations]". Bulletin of KazNU. Math., Mech., Inf. Series, vol. 1 (2016) : 47-54.
- [14] Aldibekov T.M. "Ob ochenyah reshenii differentialsalnykh sistem. [Estimates of solutions of differential systems]". International scientific conference "Modern problems of Mathematics, Mechanics and Informatics" dedicated to the 25th anniversary of Independence of the Republic of Kazakhstan. Karaganda, December 9-10, 2016.
- [15] Aldibekov T.M., Moldabek Z.T., Mirzakulova A.E., Aldazharova M.M. "O ravnomenoi otsenke snizu dlya reshenii nelineinykh sistem differentialsalnykh uravnenii [The uniform lower bound for solutions of nonlinear system of differential equations]". Bulletin of KazNU. Math., Mech., Inf. Series, vol. 4 (2016) : 46-54
- [16] Vinograd R.E. "Otsenka skachka pri malykh vozmusheniakh [Bounds of the jump function on small perturbations]". Doklady AN SSR, vol. 114 (1957) : 459-461.
- [17] Millionschikov V.M. "Grubye svoistva differentzialnykh uravnenii [Rough characters of differential equations]". Diff. uravn, vol. 5 (1969) : 1775-1784.
- [18] Millionschikov V.M. "Dokazatelstva dostizhimosti tsentralnykh pokazatelei lineinykh sistem diff. ur. [Proof of the approachability of central exponents]". Uspehi mat. nauk, vol. 23 (1968).
- [19] Millionschikov V.M. "Dokazatelstva dostizhimosti tsentralnykh pokazatelei lineinykh sistem diff. ur. [Proof of the approachability of central exponents]". Sib.mat.jur., vol. 10 (1969) : 99-104.
- [20] Millionschikov V.M. "Berovskie klassy funktsii i pokazateli Lyapunova. XII [Baire classes of functions and Lyapunov exponents. XII]". Diff.uravn., vol. 19 (1983) : 196-220.

IRSTI 519.21

On the probabilistic solution of the Cauchy problem for parabolic equations

Akanbay N. – assoc. prof., al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan,
+77077731463, E-mail: noureke1953@gmail.com

Suleimenova Z. – doctoral student, senior lecturer, al-Farabi Kazakh National University,
Republic of Kazakhstan, +77078329346, E-mail: suleymenova2474@gmail.com

The questions about finding (conditional) mathematical expectations, the joint and marginal distribution of different functionals from the trajectories of random processes, expressed through the process itself, the ordinary stochastic integral and the stochastic Ito integral (stochastic integrals are understood as integrals in the mean square sense) are among the important issues of both the theory itself random processes and its numerous applications. But it is not always possible to find (joint) distributions of the indicated functionals by direct computations, therefore, they usually resort to some methods of finding the required characteristics. One of such methods is the so-called method of differential equations, which reduces the problem of finding joint distributions of functionals from random processes to solving (connected with these functionals) partial differential equations.

The aim of the present paper is to find a joint distribution of the above-mentioned types of functionals and the integrands present in the definitions of these functionals depend both on the time and on the spatial coordinates.

To do this, we first derive an equation for the joint characteristic function of the functionals under consideration and show that in some special cases the determination of the Laplace transformation of the solution of this equation can be reduced to the solution of an ordinary differential equation with constant coefficients. As an application, explicit distributions of some functionals of the Wiener process are found and some of their possible applications are discussed.

Key words: Wiener process, stochastic integral, conditional mathematical expectation along the trajectories of the process, joint distribution, joint characteristic function, Laplace transformation.

Параболалық теңдеулер үшін Коши есебінің ықтималдықтық шешуі туралы

Ақанбай Н. – физ.-мат.ғылым. канд., профессор м.а., әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-нің, Қазақстан Республикасы, +77077731463, E-mail: noureke1953@gmail.com

Сулейменова З.И. – әл-Фараби атындағы ҚазҰУ-нің ага оқытушысы, докторант, Қазақстан Республикасы, +77078329346, E-mail: suleymenova2474@gmail.com

Кездейсоқ процестер теориясында және оның көптеген қолданылымдарындағы маңызды сұрақтардың бірі – ол кездейсоқ процестердің өздері, әдеттегі стохастикалық интегралдық және Итоның стохастикалық интегралдары (стохастикалық интегралдары орташа квадраттық мағынадағы интегралдар ретінде түсініледі) өрнектелген функционалдарының процестердің траекториялары бойынша алынған (шартты) математикалық күтімдерін, бірлескен және маргиналды үлестірімдерін табу туралы сұрақтар. Бірақ берілген функционалдардың (бірлескен) үлестірімдерін тікелей есептеулер арқылы табу үнемі мүмкін бола бермейді, сондықтан керек сипаттамаларды табу үшін басқа қандай да бір әдістерді қолдануға тұра келеді. Мұндай әдістердің бірі – дифференциалдық теңдеулер әдісі деп аталады. Бұл әдіс бойынша кездейсоқ процестердің функционалдарының бірлескен үлестірімін табу есебі (берілген функционалдарға байланысты) дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешуге келтіріледі.

Бұл жұмыстың мақсаты – функционалдар анықтамаларындағы интеграл астындағы функциялар уақыттан және кеңістіктең кординаттан да тәуелді болатын жағдай үшін жогарыда аталған функционалдардың бірлескен үлестірімін табу. Ол үшін алдымен қарастырылып отырған функционалдардың бірлескен сипаттамалық функциясы үшін сәйкес теңдеу алынады да кейбір дербес жағдайларда бұл теңдеу шешімінің Лаплас түрлендіруі коэффициенттері тұрақты әдеттегі дифференциалдық теңдеулерді шешуге келтіруге болатыны көрсетіледі. Қолданылу мысалы ретінде Винер процесінің функционалы ретінде анықталған кейбір функционалдардың үлестірімдерінің айқын түрлері табылған және оның қолданылуарының мүмкін болатын кейбір мәселелері талқыланған.

Түйін сөздер: Винер процесі, стохастикалық интеграл, процесс траекториялары бойынша шартты математикалық күтім, бірлескен үлестірім, бірлескен сипаттамалық функция, Лаплас түрлендіруі.

О вероятностном решении задачи Коши для параболических уравнений

Аканбай Н. – канд.физ.-мат.наук, и.о. профессора, КазНУ им. аль-Фараби, Республика Казахстан,
+77077731463, E-mail: noureke1953@gmail.com

Сулейменова З.И. – старший преподаватель, докторант КазНУ им. аль-Фараби, Республика
Казахстан, +77078329346, E-mail: suleymenova2474@gmail.com

Вопросы о нахождении (условных) математических ожиданий, совместных и маргинальных распределении различных функционалов от траекторий случайных процессов, выражаемых через самого процесса, обычного стохастического интеграла и стохастического интеграла Ито (стохастические интегралы понимаются как интегралы в среднеквадратичном смысле) относятся к числу важных вопросов как самой теории случайных процессов, так и ее многочисленных приложений. Но не всегда удается найти (совместных) распределений указанных функционалов прямыми вычислениями, поэтому обычно прибегают к тем или иным способам нахождения нужных характеристик. Одним из таких методов является так называемый метод дифференциальных уравнений, который сводит задачу о нахождении совместных распределений функционалов от случайных процессов к решению (связанных с данными функционалами) дифференциальных уравнений в частных производных.

Целью настоящей работы является нахождение совместного распределения указанных выше видов функционалов, причем присутствующие в определениях этих функционалов по-длинтегральные функции зависят как от временной, так и от пространственной координат. Для этого сначала выводится уравнение для совместной характеристической функции рассматриваемых функционалов и показывается, что в некоторых частных случаях нахождение преобразования Лапласа решения этого уравнения можно свести к решению обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. В качестве приложения найдены явные виды распределения некоторого функционалов от винеровского процесса и обсуждены некоторые их возможные приложения.

Ключевые слова: Винеровский процесс, стохастический интеграл, условное математическое ожидание по траекториям процесса, совместное распределение, совместная характеристическая функция, преобразование Лапласа.

1 Introduction

In the theory of random processes it is well known that the solution of the Cauchy problem for parabolic partial differential equations is closely related to the finding of conditional mathematical expectations on the trajectories (associated with the initial equation) of diffusion processes. Thus, if A – is an infinitesimal (generating) operator (Gikhman, 1977) of the diffusion process ξ_t , $t \geq 0$ – then this operator is definite on all finite twice continuously differentiable functions differential operator of not higher than second order and this operator can contain only derivatives of the first and second orders (for example, for multidimensional Wiener process $W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^n)$ its generating operator is defined on all bounded

and uniformly continuous with its frequent derivatives of the first and second order functions f and on them it is equal to $\frac{1}{2}\Delta f$, where Δ – the Laplace transformer). Then the probabilistic solution of the Cauchy problem

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = Au(t, x) + C(x)u(t, x) + h(x), u(0, x) = u_0(x), \quad (1)$$

can be written in the form (Gikhman, 1977)

$$u(t, x) = M_x \left[\exp \left\{ \int_0^t c(\xi_s) ds \right\} u_0(\xi_t) + \int_0^t \exp \left\{ \int_0^s c(\xi_u) du \right\} h(\xi_s) ds \right], \quad (2)$$

where the sign M_x means taking a conditional mathematical expectation over all output at the initial time $t = 0$ from the point $x(\xi_0 = x)$ trajectories of the process ξ_t (it is clear that in this case it will be necessary to impose certain conditions on the functions c, g, u_0 and on the domain of the operator A).

Further, the representation (2) can be used to find the joint characteristic functions, hence the joint distribution, of the functionals of the form $h(\xi_t), \int_0^t g(\xi_s) ds, h(\xi_\tau), \int_0^\tau g(\xi_s) ds$, where τ – is the moment of the first attainment of some set.

In (Gikhman, 1977), (Wentzel, 1996) this method (the method of differential equations) was applied to find the joint characteristic function of the functionals $I_1(t) = \Phi(W_t), I_2(t) = \int_0^t g(W_s) dW_s, I_3(t) = \int_0^t f(W_s) ds$, where $W_t, t \geq 0$ – (one-dimensional) Wiener process, $I_2(t)$ – is a stochastic integral of Ito, $I_3(t)$ – is a stochastic integral of a random function (integrals are understood as mean-square integrals).

In this paper we generalize the results of [(Skorokhod, 1970), (Akanbai, 2014 : 8)] and refine and correct some results of (Akanbai, 2014 : 8) on the cases when the functions g and f also depend on time: $g = g(t, x), f = f(t, x), t \geq 0, x \in R'$. Namely, first we obtain a parabolic equation for the function $u(t, x) = M_x \left[I_1(t) \exp \left\{ I_2(t) + I_3(t) \right\} \right]$, where now

$I_2(t) = \int_0^t g(t-s, W_s) dW_s, I_3(t) = \int_0^t f(t-s, W_s) ds$. Furthermore we will use the this equation to find the joint characteristic function of functionals $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$. In the particular case, when $g = g(t, x), f = f(t, x)$ we arrive to the results of (Skorokhod, 1970), and passing to the Laplace transformation of the found joint characteristic function, we reduce the problem to the solution of an ordinary differential equation with constant coefficients. After this, by making an inverse Laplace transformation, we obtain the final result (the joint distribution of the considered functionals). In conclusion, as an example, the distribution of the functional $I_2(t)$ is found in the case when the function $g(t, x) = \text{sign}x$.

2 Literature Review

Finding the distribution of functionals from random processes, expressed by ordinary (stochastic) integrals and Ito stochastic integrals, are very important problems in the

theory of random processes (Gikhman, 1977 : 568). It is also well known that obtaining a probabilistic solution of the Cauchy problem for parabolic equations reduces to finding conditional mathematical expectations along trajectories with appropriately constructed random processes. In particular, in Wentzel (1996: 320), in terms of infinitesimal operators of the process and conditional mathematical expectations on the trajectories of processes, formulas are given that give probabilistic solutions of Cauchy problems for various parabolic equations with coefficients depending only on the spatial coordinates. In (Skorokhod, 1970 : 304) solved the problem of finding a joint distribution of functionals of the Wiener process W_t , $t \geq 0$, species, $\Phi(W_t)$, $\int_0^t f(W_s)ds$ and $\int_0^t g(W_s)dW_s$, where $\Phi(x)$ is a sufficiently smooth function, functions $f(x)$, $g(x)$ are piecewise continuous and bounded functions on each finite interval, and it is shown that the joint characteristic function of these quantities can be found as the solution of some parabolic equation. In (Akanbay, 2014 : 8), these results were generalized to a wider class of functions f and g .

In the paper, the results of the last two papers will be generalized, and the results (Akanbay, 2014 : 8) will be refined to the case when the functions f and g also depend additionally on the time, and the distributions of certain functionals of the Wiener process will be found as applications.

3 Methods of research

3.1 Derivation of the differential equation for conditional mathematical expectation

$$u(t, x) = M \left[\Phi(W_t) \exp \left\{ I_2(t) \right\} \exp \left\{ I_3(t) \right\} \right]$$

Consider a function (conditional mathematical expectation)

$$u(t, x) = M_x \left[\Phi(W_t) e^{0 \int_0^t g(t-s, W_s) dW_s} \cdot e^{0 \int_0^t f(t-s, W_s) ds} \right] \quad (3)$$

where W_t – is Wiener process, the sign M_x means the conditional mathematical expectation by all trajectories of a Wiener process that go from the point $x \in R$ in the initial moment $t = 0$: $M_x(\dots) = M(\dots)/W_0 = x$, and the integrals which are in the power of exponents are, respectively, the Ito stochastic integral in the Wiener process and the usual stochastic integral from the random functions (Gikhman, 1977), (Wentzel, 1996), where the integrals will be understood as the RMS limits of the corresponding integral sums.

Furthermore one can assume that the given functions $f(t, x)$, $g(t, x)$ and $\Phi(x)$ are continuous by t and x and limited with their derivatives up to second order functions.

Our goal here is to prove that the function $u(t, x)$ defined by (3) is a probability representation of the solution of the Cauchy problem for the parabolic equation

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + g(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \left[\frac{1}{2} g^2(t, x) + f(t, x) \right] u(t, x), \quad (4)$$

where $t \geq 0$, $x \in R = (-\infty, +\infty)$, $u(0, x) = \Phi(x)$.

It is noted that the formula (3) can be rewritten in another form, in the form of unconditional mathematical expectation

$$u(t, x) = M \left[\Phi(W_t + x) e^{\int_0^t g(t-s, W_s + x) dW_s + \int_0^t f(t-s, W_s) ds} \right]. \quad (3')$$

The formula (3') is derived from the following equations:

$$\begin{aligned} & M_x \left[\Phi(W_t) e^{\int_0^t g(t-s, W_s) dW_s + \int_0^t f(t-s, W_s) ds} \right] = \\ & = M \left[\Phi((W_t - W_0) + W_0) \cdot e^{\int_0^t g(t-s, (W_s - W_0) + W_0) dW_s + \int_0^t f(t-s, (W_s - W_0) + W_0) ds} / W_0 = x \right] = \\ & = M \left[\Phi(\tilde{W}_t + x) \cdot e^{\int_0^t g(t-s, \tilde{W}_s + x) d\tilde{W}_s + \int_0^t f(t-s, \tilde{W}_s + x) ds} \right], \\ & \tilde{W}_t = W_t(0) = W_t - W_0. \end{aligned}$$

In the equation this fact was used: the process $\tilde{W}_t = W_t - W_0$ is also (not dependent on W_0) Wiener process (in (3') we have again designated this process \tilde{W}_t as W_t).

The performing of the initial condition $u(0, x) = \lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = \Phi(x)$ follows directly from the formula (1):

$$u(0, x) = M_x \Phi(W_0) = M(\Phi(W_0) / W_0 = x) = M(\Phi(x) / W_0 = x) = \Phi(x),$$

The existence of continuous derivatives $u'_x(t, x)$, $u''_{xx}(t, x)$ follows from the possibility of differentiating of the right side of (3') by x twice under the sign of expectation. Introducing the function

$$h(t, x) = \int_0^t g(t-s, W_s + x) dW_s + \int_0^t f(t-s, W_s + x) ds, \quad v(t, x) = e^{h(t, x)},$$

we get

$$\begin{aligned} u(t, x) &= M \left[\Phi(W_t + x) v(t, x) \right], \\ u'_x(t, x) &= M \left[\Phi'_x(W_t + x) v(t, x) + \Phi(W_t + x) v'_x(t, x) \right] = \\ &= M \left[\Phi'_x(W_t + x) v(t, x) + \Phi(W_t + x) v(t, x) h'_x(t, x) \right], \\ u''_{xx}(t, x) &= M \left[\Phi''_{xx}(W_t + x) v(t, x) + 2\Phi'_x(W_t + x) v(t, x) h'_x(t, x) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Phi'(W_t + x)v(t, x)(h'_x(t, x))^2 + \Phi(W_t + x)v(t, x)h''_{xx}(t, x) \Big] = \\
& = M \left\{ v(t, x) \left[\left(\Phi''_{xx}(W_t + x) + 2\Phi'_x(W_t + x) \times \right. \right. \right. \\
& \times \left(\int_0^t g'_x(t-s, W_s + x) dW_s + \int_0^t f'_x(t-s, W_s + x) ds \right)^2 + \\
& + \Phi(W_t + x) \left(\int_0^t g'_x(t-s, W_s + x) dW_s + \int_0^t f'_x(t-s, W_s + x) ds \right)^2 + \\
& \left. \left. \left. + \Phi(W_t + x) \left(\int_0^t g''_{xx}(t-s, W_s + x) dW_s + \int_0^t f''_{xx}(t-s, W_s + x) ds \right) \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Further, by defining a new Wiener process: $W_s(\Delta t) = W_{s+\Delta t} - W_{\Delta t}$, we can write

$$u(t + \Delta t, x) = M \left[\Phi(W_s(\Delta t) + W_{\Delta t} + x)v(t + \Delta t, x) \right],$$

where

$$\begin{aligned}
v(t + \Delta t, x) &= \exp \left\{ h(t + \Delta t, x) \right\} = \\
&= \exp \left\{ \int_0^{\Delta t} g(t + \Delta t - s, W_s) dW_s + \int_0^{\Delta t} f(t + \Delta t - s, W_s) ds + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t g(t - s, W_s(\Delta t) + W_{\Delta t}) dW_s(\Delta t) + \int_0^t f(t - s, W_s(\Delta t) + W_{\Delta t}) ds \right\} \tag{5}
\end{aligned}$$

As it is known from (Gikhman, 1977), (Wentzel, 1996), the process $W_s(\Delta t)$ is not dependent on $W_{\Delta t}$, and sigma algebra $\mathcal{F}_{\leq \Delta t} = \sigma \left\{ W_s : 0 \leq s \leq \Delta t \right\}$ ($\mathcal{F}_{\leq \Delta t}$ – is the smallest σ – algebra containing all events of the form $\{W_s \in B, 0 \leq s \leq \Delta t, B \in \beta(R)\}$, $\beta(R)$ – is Borel σ – algebra on R) Wiener process.

Next, using the measurability of exponent of $\mathcal{F}_{\leq \Delta t}$, which is in the right-hand side of (5) and contains the integrals from 0 to Δt independence of integrals from 0 to t of exponents of $\mathcal{F}_{\leq \Delta t}$ and properties of conditional expectations with respect to the sigma-algebra, one can write:

$$u(t + \Delta t, x) = M \left[M(\Phi(x + W_s(\Delta t) + W_{\Delta t})v(t + \Delta t, x) / \mathcal{F}_{\leq \Delta t}) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= M \exp \left\{ \int_0^{\Delta t} g(t + \Delta t - s, x + W_s) dW_s + \int_0^{\Delta t} f(t + \Delta t - s, x + W_s) ds \right\} \\
&\cdot M \Phi(x + W_s(\Delta t) + W_{\Delta t}) \exp \left\{ \int_0^t g(t + \Delta t - s, W_s(\Delta t)) dW_s(\Delta t) + \int_0^t f(t + \Delta t - s, W_s(\Delta t)) ds \right\}.
\end{aligned}$$

The presentation of (3') shows that the latter expectation is equal to $u(t, x + W_{\Delta t})$. Thus, we find that

$$\begin{aligned}
u(t + \Delta t, x) &= \\
&= M \left[\exp \left\{ \int_0^{\Delta t} g(t + \Delta t - s, x + W_s) dW_s + \int_0^{\Delta t} f(t + \Delta t - s, x + W_s) ds \right\} u(t, x + W_{\Delta t}) \right] \quad (6)
\end{aligned}$$

Now, referring to the conditions on the functions $f(t, x)$, $g(t, x)$ and to the fact that at small Δt ($\Delta t \rightarrow 0$),

$$\begin{aligned}
W_{\Delta t} &\sim \sqrt{\Delta t}, \quad W_{\Delta t}^2 \sim \Delta t, \quad \int_0^{\Delta t} g(t + \Delta t - s, x + W_s) dW_s \sim g(t, x) W_{\Delta t}, \\
\int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} g(t + \Delta t - s_1, x + W_{s_1}) g(t + \Delta t - s_2, x + W_{s_2}) dW_{s_1} dW_{s_2} &\sim g^2(t, x) \cdot W_{\Delta t}^2, \\
\int_0^{\Delta t} f(t + \Delta t - s, x + W_s) ds &\sim f(t, x) \Delta t,
\end{aligned}$$

let's expand the right-hand side of (6) by the accuracy up to $o(\Delta t)$. Then we can write

$$u(t + \Delta t, x) = M \left[(1 + g(t, x) W_{\Delta t} + f(t, x) \Delta t + \frac{1}{2} g^2(t, x) W_{\Delta t}^2 + o(\Delta t)) u(t, x + W_{\Delta t}) \right] \quad (6')$$

In its turn

$$u(t, x + W_{\Delta t}) = u(t, x) + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \cdot W_{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \cdot W_{\Delta t}^2 + o(\Delta t).$$

Putting this found expression in the right side of the (6') and similarly, leaving only the terms up to order Δt , we get

$$\begin{aligned}
u(t + \Delta t, x) &= M \left[u(t, x) + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \cdot W_{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \cdot W_{\Delta t}^2 + g(t, x) u(t, x) \cdot W_{\Delta t} + \right. \\
&\quad \left. + g(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \cdot W_{\Delta t}^2 + f(t, x) u(t, x) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g^2(t, x) u(t, x) \cdot W_{\Delta t}^2 + o(\Delta t) \right].
\end{aligned}$$

In the latter ratio we calculate the required expectations. Then taking into account that $MW_{\Delta t} = 0$, $MW_{\Delta t}^2 = \Delta t$, we obtain

$$\begin{aligned} u(t + \Delta t, x) &= u(t, x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \cdot \Delta t + g(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \cdot \Delta t + \\ &+ f(t, x)u(t, x) \cdot \Delta t + \frac{1}{2}g^2(t, x)u(t, x) \cdot \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

thus

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + g(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \left[\frac{1}{2}g^2(t, x) + f(t, x) \right] u(t, x). \quad (7)$$

From this relation (7) implies the existence of a right derivative of $u(t, x)$ with respect to t . Since it is continuous, there exists a two-sided derivative which coincides with the right one. Eventually we obtain the theorem.

Theorem 1 *Let $f(t, x)$, $g(t, x)$ and $\Phi(x)$ are continuous with respect to x and t and limited, together with their derivatives up to the second order (inclusive) functions.*

Then defined by formula (3) (or the formula (3')) function $u(t, x)$ in $t > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ satisfies the differential equation (4).

Comment 1 *One should note that in (Skorokhod, 1970) a similar theorem was proved for the case when the functions $f(t, x)$ and $g(t, x)$ do not depend on time, and the first theorem is proved in the case of $g(x) = 0$, after that the final result is obtained by replacing the original function. We also note that in (Akanbai, 2014 : 8) another, but not completely rigorous, proof of this theorem is given.*

3.2 The equation for the joint characteristic function

The proven theorem allows us to find the joint characteristic function of the functionals $I_1(t) = W_t$, $I_2(t) = \int_0^t g(t-s, W_s) dW_s$, $I_3(t) = \int_0^t f(t-s, W_s) ds$, as a solution of some parabolic partial differential equation.

In fact, let $\varphi(t, x, z_1, z_2, z_3)$ is a (conditional) joint characteristic function of the functionals $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ ($z_1, z_2, z_3 \in R^1$):

$$\varphi(t, x, z_1, z_2, z_3) = M_x(e^{iz_1 I_1(t) + iz_2 I_2(t) + iz_3 I_3(t)}). \quad (8)$$

If in theorem there are $\bar{\Phi}(x) = e^{iz_1 x}$ instead $\Phi(x)$, the function $\bar{g}(t, x) = iz_2 g(t, x)$ instead of $g(t, x)$, the function $\bar{f}(t, x) = iz_3 f(t, x)$ instead of $f(t, x)$, then according to the proven theorem, the conditional characteristic function $\varphi(t, x, z)$ (see (8)) where $z = (z_1, z_2, z_3)$, can be found as a solution of the equation:

$$\frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi(t, x, z)}{\partial x^2} + iz_2 g(t, x) \frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial x} + (iz_3 f(t, x) - \frac{z_2^2}{2} g^2(t, x)) \varphi(t, x, z), \quad (9)$$

$$\varphi(0, x, z) = e^{ixz_1}.$$

It is clear, that the function of $\varphi(t, 0, z) = \varphi(t, 0, z_1, z_2, z_3)$ is what we need (unconditional) joint characteristic function of $I_1(t), I_2(t), I_3(t)$. In the general case it is not possible to find a solution of equation (9). Therefore, we consider the particular case of equation (9). We will assume that the functions g and f are independent of t : $g(t, x) = g(x)$, $f(t, x) = f(x)$. Then, using the Laplace transformation with respect to t , the solution of the particular case of equation (9) can be reduced to the solution of an ordinary differential equation. To do this, we multiply both sides of the new equation by $e^{-\lambda t}$ ($\lambda > 0$), then integrate with respect to t from zero to infinity.

If we denote the Laplace transformation $\varphi(t, x, z)$ with respect to t by $\tilde{\varphi}(\lambda, x, z)$ we obtain the equation for this function

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(\lambda, x, z)}{\partial x^2} + iz_2 g(x) \frac{\partial \tilde{\varphi}(\lambda, x, z)}{\partial x} + (iz_3 f(x) - \frac{z_2^2}{2} g^2(x) - \lambda) \tilde{\varphi}(\lambda, x, z) = -e^{ixz_1}. \quad (10)$$

The solution of the equation (10) should be restricted to the entire real axis, and since $|\varphi(t, x, z)| \leq 1$, it shall be $|\tilde{\varphi}(t, x, z)| \leq \frac{1}{\lambda}$.

In this case, the equation (10) is performed at all points of continuity of $f(x)$ and $g(x)$, and at points of discontinuity of these functions its derivative is continuous $\frac{\partial \tilde{\varphi}(t, x, z)}{\partial x}$.

Comment 2 *With the passage to the limit, one can make himself sure that the equation (10) holds for piecewise constant and bounded on every finite interval function of $f(x)$ and $g(x)$.*

3.3 Finding the distribution of the functional $I(t) = \int_0^t \text{sign}W_s dW_s$

In our equation (4) $g(x) = \text{sign}x$, $f(x) = 0$, and thus the equation (4) is written as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \text{sign}x \cdot \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2}u(t, x), \\ u(0, x) &= 1. \end{aligned}$$

Further,

$$\varphi(t, x, z) = M_x \left(e^{iz \int_0^t \text{sign}W_s dW_s} \right), \quad \tilde{\varphi}(\lambda, x, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(t, x, z) dt$$

and the equation (10) has the form

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(\lambda, x, z)}{\partial x^2} + iz \text{sign}x \cdot \frac{\partial \tilde{\varphi}(\lambda, x, z)}{\partial x} - \left(\frac{z^2}{2} + \lambda \right) \tilde{\varphi}(\lambda, x, z) = -1. \quad (11)$$

The equation (11) can be written separately for the cases of $x > 0$ and $x < 0$.

In the case $x > 0$ the equation (11) is transformed into the equation with constant (i.e. independent of x) coefficients

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(\lambda, x, z)}{\partial x^2} + iz \cdot \frac{\partial \tilde{\varphi}(\lambda, x, z)}{\partial x} - \left(\frac{z^2}{2} + \lambda \right) \tilde{\varphi}(\lambda, x, z) = -1, \quad (12)$$

and in the case of $x < 0$ in the equation with constant coefficients

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}(\lambda, x, z)}{\partial x^2} - iz \cdot \frac{\partial \tilde{\varphi}(\lambda, x, z)}{\partial x} - \left(\frac{z^2}{2} + \lambda \right) \tilde{\varphi}(\lambda, x, z) = -1. \quad (13)$$

The roots of the characteristic equation of the homogeneous part of the equation (12) are $s_1 = iz + \sqrt{2\lambda}$, $s_2 = -iz - \sqrt{2\lambda}$, and the particular solution (12) is a function $\tilde{\varphi}_1(\lambda, x, z) = \frac{1}{z^2 + \lambda} = \frac{2}{2\lambda + z^2}$. In a similar way we solve (13). As a result, we find that the general solutions of the equations (12) and (13) are the functions (respectively)

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\lambda, x, z) &= C_1 e^{(-iz+\sqrt{2\lambda})x} + C_2 e^{(-iz-\sqrt{2\lambda})x} + \frac{2}{2\lambda + z^2}, \quad x > 0; \\ \tilde{\varphi}(\lambda, x, z) &= C_3 e^{(iz+\sqrt{2\lambda})x} + C_4 e^{(iz-\sqrt{2\lambda})x} + \frac{2}{2\lambda + z^2}, \quad x < 0, \end{aligned}$$

where C_1, C_2, C_3, C_4 – are constant.

Since the function $\tilde{\varphi}(\lambda, x, z)$ is bounded, we get that $C_1 = 0$, $C_4 = 0$, from the continuity of $\tilde{\varphi}(\lambda, x, z)$ with respect to x it follows that $C_2 = C_3$.

In this way

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\lambda, x, z) &= C_2 e^{(-iz-\sqrt{2\lambda})x} + \frac{2}{2\lambda + z^2}, \quad x > 0; \\ \tilde{\varphi}(\lambda, x, z) &= C_2 e^{(iz+\sqrt{2\lambda})x} + \frac{2}{2\lambda + z^2}, \quad x < 0. \end{aligned}$$

Further, using continuity of $\frac{\partial \tilde{\varphi}(\lambda, x, z)}{\partial x}$ by x we get that $C_2 = 0$.

Thus, the solution of the equation (9) is the function

$$\tilde{\varphi}(\lambda, x, z) = \tilde{\varphi}(\lambda, 0, z) = \frac{2}{2\lambda + z^2} = \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{z^2}{2\lambda}\right)}.$$

Now the goal is to represent $\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z)$ as a Laplace transformation of some function $\varphi(t, 0, z)$. i.e. as a representation of $\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z)$ as

$$\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(t, 0, z) dt. \quad (14)$$

For this purpose we expand the function $\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z)$ in the domain $\left| \frac{z^2}{2\lambda} \right| < 1$ in the series:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\lambda, 0, z) &= \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{z^2}{2\lambda}\right)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{2^n \lambda^n} = \\ &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot z^{2n}}{2^n} \cdot \frac{e^{-\lambda t} \cdot t^n}{n!} dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi(t, 0, z) dt. \end{aligned}$$

We used the well-known relation

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda tn} \cdot t^n}{n!} dt = \frac{1}{\lambda^{n+1}}.$$

Further we can write:

$$\tilde{\varphi}(\lambda, 0, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \cdot (tz^2)^n}{2^n \cdot n!} \right) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\frac{tz^2}{2}} dt.$$

Thus, the characteristic function of a functional $I(t) = \int_0^t signW_s dW_s$ is a function $\varphi(t, 0, z) = e^{-\frac{tz^2}{2}}$, i.e. $I(t)$ is a normal random variable with zero mathematical expectation and a variance equal to t : $I(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$. ((We note that another erroneous result was obtained in (Akanbai, 2014 : 8)). However, this result could be obtained directly from the relation (see formula (14)) $\frac{2}{2\lambda + z^2} = \int_0^\infty \exp\left\{-\lambda t - \frac{tz^2}{2}\right\} dt$.

3.4 Finding the distribution of the functional $W_t + \int_0^t signW_s dW_s$

Next we consider the functional

$$I_1(t) = \int_0^t g_{0,1}(W_s) dW_s,$$

where $g_{0,1}(x) = \frac{1 + signx}{2} = 1, x > 0; g_{0,1}(x) = 0, x < 0$. Then

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(W_t + \int_0^t signW_s dW_s),$$

as a sum of normal random variables, $I_1(t)$ – is a normal random variable. Let us find the distribution parameters $I_1(t)$.

Obviously $M I_1(t) = 0$, variance

$$DI_1(t) = \frac{1}{4}(t + 2cov(W_t, \int_0^t signW_s dW_s) + t) = \frac{1}{2}(t + cov(W_t, \int_0^t signW_s dW_s)).$$

for simplify the notation, we denote below $f(x) = signx$. Then

$$\begin{aligned} cov(W_t, \int_0^t f(W_s) dW_s) &= M(W_t \int_0^t f(W_s) dW_s) = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n M[f(W_{s_{i-1}})(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})W_t], \end{aligned} \tag{15}$$

where the points of division $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n = t$, $\max_i(s_i - s_{i-1}) \rightarrow 0$.

Denoting, as before, through $\mathcal{F}_s = \sigma\{W_u : u \leq s\}$ the smallest σ -algebra generated by a Wiener process up to the moment s and using the properties of the conditional mathematical expectation, for the i -th summand of formula (15) we can write:

$$\begin{aligned} M[f(W_{s_{i-1}})(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})W_t] &= MM[f(W_{s_{i-1}})(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})W_t / \mathcal{F}_{s_i}] = \\ &= M[f(W_{s_{i-1}})(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})M(W_t / \mathcal{F}_{s_i})] = M[f(W_{s_{i-1}})(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})W_{s_i}], \end{aligned}$$

because the random variable $f(W_{s_{i-1}})(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})$ is measurable with respect to the σ -algebra \mathcal{F}_{s_i} , and the Wiener process forms a martingale with respect to the family of the σ -algebra $\mathcal{F}_s : M(W_t / \mathcal{F}_{s_i}) = W_s$, $0 \leq s \leq t$.

Further, since $W_{s_{i-1}}$ is measurable with respect to $\mathcal{F}_{s_{i-1}}$, and $W_{s_i} - W_{s_{i-1}}$ does not depend on $\mathcal{F}_{s_{i-1}}$, we obtain

$$\begin{aligned} M[f(W_{s_{i-1}})(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})W_{s_i}] &= \\ &= M[f(W_{s_{i-1}})(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})^2 + f(W_{s_{i-1}})W_{s_{i-1}} \cdot (W_{s_i} - W_{s_{i-1}})] = \\ &= M[M(f(W_{s_{i-1}})(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})^2 / \mathcal{F}_{s_i})] + MM(|W_{s_{i-1}}|(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}) / \mathcal{F}_{s_i}) = \\ &= Mf(W_{s_{i-1}})M(W_{s_i} - W_{s_{i-1}})^2 + M|W_{s_{i-1}}| \cdot M(W_{s_i} - W_{s_{i-1}}) = \\ &= Mf(W_{s_{i-1}})(s_i - s_{i-1}) = Mf(W_{s_{i-1}})\Delta s_i = 0 \end{aligned}$$

Thus

$$cov(W_t, \int_0^t signW_s dW_s) = M \int_0^t (W_t signW_s) dW_s = 0.$$

So,

$$DI_1(t) = \frac{1}{2}t, \quad \text{t.e. } I_1(t) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}t).$$

Then,

$$I_2(t) = W_t + \int_0^t signW_s dW_s = 2I_1(t) \sim \mathcal{N}(0, 2t).$$

4 Results and discussion

Using the methods of the theory of Markov processes, it is proved that the function $u(t, x)$ defined by (3) gives a probabilistic solution of equation (4).

Further, from (4) we obtain an equation for the joint characteristic function of the functionals under consideration and show that in one particular case the solution of this equation can be reduced to the solution of an ordinary differential equation. As an application of the results obtained, the distributions of the functionals $I(t) = \int_0^t signW_s dW_t$ and $I_1(t) = W_t + I(t)$ are found.

Apparently, in what follows it will be possible to introduce some concrete functions f and g so that the solution of equation (9), or even equations (10), can be found explicitly. In turn, this would allow us to find a distribution in a more complicated way of certain functionals from the Wiener process. For example, if instead of the Wiener process W_t , $t \geq 0$, consider the process $\tilde{W}_t = W_t + ct$, where c is a nonzero constant (\tilde{W}_t is a Wiener process with drift), then the infinitesimal operator \tilde{W}_t would be the operator $A_c = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + c \frac{d}{dx}$, and equation (4) would be written in terms of this operator. Further, to solve the analogue of equation (4), we could apply the method of this paper.

5 Conclusion

In this paper, we found the joint characteristic function of the functionals of the Wiener process $I_1(t) = \Phi(W_t)$, $I_2(t) = \int_0^t g(t-s, W_s) dW_s$, $I_3(t) = \int_0^t f(t-s, W_s) ds$, where the integrals are understood as mean-square integrals ($I_2(t)$ – is a integral Ito, $I_3(t)$ – is the integral of a random function), and the functions Φ, g, f satisfy certain smoothness conditions. It is further shown that when the functions g and f do not depend on the time variable, then finding the Laplace transformation of the joint characteristic function reduces to solving an ordinary differential equation. Unfortunately, it is possible to solve this last equation explicitly only in certain special cases.

As an application of the results obtained, the distributions of some functionals of the Wiener process are found explicitly.

References

- [1] Gikhman I.I., Skorokhod A.V. *Introduction to the theory of random processes* (Moscow: Nauka, 1977).
- [2] Wentzel A.D. *A course in the theory of random processes* (Moscow: Nauka, 1996).
- [3] Skorokhod A.V. and Slobodenyuk N.P. *Limit theorems for random walks* (Kiev, Naukova Dumka, 1970).
- [4] Akanbay N., Tulebaev B.B. and Ismayilova J.A., «One of the probabilistic solutions of the equation and its application», *Vestnik of KazNRTU*, No 4, vol. 104 (2014) : 375-382.

2-бөлім	Раздел 2	Section 2
Информатика	Информатика	Computer science

IRSTI 82.01.85

Application of the cloud-based service of business intelligence in the information infrastructure of the higher education institution

Mutanov G.M. – Doctor of Technical Sciences, professor, Rector of al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77273773320, E-mail: info@kaznu.kz,
Mamykova J.D. – Ph.D., Director of the Institute of Information Technologies and Innovative Development, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77273773326,
E-mail: Zhanl.mamykova@kaznu.kz,
Nadirbaeva G.M. – Head of the Department for the Development of Information Business Logic of the al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77017550998,
E-mail: g.nadirbaeva@kaznu.kz,
Kopnova O.L. – doctoral student, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77056503104, E-mail: Oxana.Kopnova@kaznu.kz,
Zhaydarova A.M. – Head of Information Systems Development Department, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77057616645, E-mail: Aleksandra.Zhaidarova@kaznu.kz,
Kistaubaev E.B. – head of planning and monitoring of IT resources, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77073763125, E-mail: Erlan.Kistaubayev@kaznu.kz

In this article, an approach to solving the problem of strategic management of a university using an information-analytical system is proposed. The purpose of this article is to describe the roles and ways users interact with the information and analysis system. Methodological basis of the research was made by the technologies of data mining, table and graphic methods of information visualization and also business intelligence tools. As a tool for solving practical problems, the Power BI service is used that allows creating interactive panels and reports on the most important metrics. The practical importance of the materials presented in this article is the definition of the main information flows, the role of the quality management system and the place of the analytical service in the management organization of the university. Methods of storing and transferring data using cloud technologies and data cubes are described. The place of the information-analytical system in the unified corporate information system of the university is determined. The examples of the implementation of the information-analytical system of Al-Farabi KazNU on Power BI cloud platform are presented. **Keywords:** effective ways of university management, scientific and educational activity, information-analytical system, Power BI.

ЖКОО ақпараттық инфрақұрылымында бизнес-аналитика бүлт қызметін қолдану
Мутанов Г.М. – т.ғ.д., профессор, ректор, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77273773320, E-mail: info@kaznu.kz,
Мамыкова Ж.Д. – т.ғ.к., директор, Ақпараттық технологиялар және инновациялық даму институты, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77273773326,
E-mail: Zhanl.mamykova@kaznu.kz,
Надирбаева Г.М. – Ақпараттық бизнес-логика дамуы басқармасының басшысы, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77017550998, E-mail:
g.nadirbaeva@kaznu.kz,
Копнова О.Л. – докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77056503104, E-mail: Oxana.Kopnova@kaznu.kz,
Жайдарова А.М. – Ақпараттық жүйелерді дамыту белгі бастығы, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77057616645, E-mail:
Aleksandra.Zhaidarova@kaznu.kz,

Кистаубаев Е.Б. – ИТ ресурстарды жоспарлау және бақылау бөлімі бастығы, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Казакстан Республикасы, +77073763125, E-mail: Erlan.Kistaubayev@kaznu.kz

Мақалада акпараттық-аналитикалық жүйелерді колдана отырып жоғары оқу орнын тиімді басқару жолын ұсынады. Мақаланың мақсаты акпараттық-аналитикалық жүйелер мен қолданушылардың өзара байланыс тәсілдерін сипаттау болып табылады. Зерттеудің әдіснамалық негізін мәліметтердің интеллектуалды анализ технологиялары, акпаратты визуализациялаудың кестелік және графикалық әдістері, сонымен қатар, бизнес-аналитика құралдары құрады. Практикалық тапсырмаларды орындау құралы ретінде Power BI қызметі қолданылады, ол интербелсенді панельдер мен маңызды метрикалар есебін құруға мүмкіндік береді. Мақалада келтірілген материалдардың практикалық маңызы негізгі акпарат ағындағын, сапаны бақылау жүйесінің рөлін және жоо басқаруды үйімдастырудагы аналитикалық қызметтің маңызын анықтау болып табылады. Бұлтты технологиялар мен мәліметтер кубтары арқылы мәліметтерді сақтау және тасымалдау әдістері сипатталды. Жоо корпоративті акпараттық жүйесіндегі акпараттық-аналитикалық жүйенің орны анықталды. Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ акпараттық-аналитикалық жүйесінің Power BI бултты платформасында жүзеге асырылу мысалдары келтірлді.

Түйін сөздер: ЖОО тиімді басқару жолдары, ғылыми және білім беру қызметі, акпараттық-аналитикалық жүйе, Power BI.

Применение облачной службы бизнес-аналитики в информационной инфраструктуре ВУЗа

Мутанов Г.М. – д.т.н., профессор, ректор, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273773320, E-mail: info@kaznu.kz,

Мамыкова Ж.Д. – к.т.н., директор Института информационных технологий и инновационного развития, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273773326, E-mail: Zhanl.mamykova@kaznu.kz,

Надирбаева Г.М. – начальник управления по развитию информационной бизнес-логики Казахского национального университета имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77017550998, E-mail: g.nadirbaeva@kaznu.kz,

Копнова О.Л. – докторант, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77056503104, E-mail: Oxana.Kornova@kaznu.kz,

Жайдарова А.М. – начальник отдела по развитию информационных систем, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77057616645, E-mail: Aleksandra.Zhaidarova@kaznu.kz,

Кистаубаев Е.Б. – начальник отдела планирования и мониторинга ИТ ресурсов, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77073763125, E-mail: Erlan.Kistaubayev@kaznu.kz

В данной статье предложен подход решения задачи стратегического управления вузом с использованием информационно-аналитической системы. Цель данной статьи заключается в описании ролей и способов взаимодействия пользователей с информационно-аналитической системой. Методологическую основу исследования составили технологии интеллектуального анализа данных, табличные и графические приемы визуализации информации, а также средства бизнес-аналитики. В качестве инструментария для решения практических задач используется служба Power BI, позволяющая создавать интерактивные панели и отчеты о наиболее важных метриках. Практическая значимость материалов, представленных в данной статье является определение основных информационных потоков, роль системы менеджмента качества и место аналитической службы в организации управления вузом. Описаны методы хранения и передачи данных с помощью облачных технологий и кубов данных. Определено место информационно-аналитической системы в единой корпоративной информационной системе вуза. Представлены примеры реализации информационно-аналитической системы КазНУ на облачной платформе Power BI.

Ключевые слова: эффективные способы управления вузом, научно-образовательная деятельность, информационно-аналитическая система, Power BI.

1 Introduction

A management of the university, an improvement of the quality of the scientific and educational process is a complex task that requires systematic and timely analysis of comprehensive and reliable information on the status and problems of the university activities, that is possible only as a result of the introduction of modern information technologies in the management of the university and their continuous improvement. Therefore, higher education institutions are constantly searching for effective ways of managing scientific and educational activities (SEA), in this regard, the information infrastructure of the university is developing.

Information infrastructure is represented as a set of solutions of the university's own developments, which are mainly aimed at automating educational activities, using distance education technologies, information sites and individual local developments, with third-party solutions, such as: automation of financial and economic activities, electronic document management systems, use of management software for administration of key resources and services, training software and software solutions for managing IT resources.

The university strategy should be linked with a set of activity goals that describe what should be done well to implement the strategy. Each of the activities of the university, taking into account the tasks to be implemented, can be characterized by a set of indicators that allow to record the state of work in this direction and the dynamics of its development. The most significant are the indicators that characterize the state of the main resources of the university.

Goals of the university should be developed based on the status of indicators, and the formation on their basis of an indicative plan for the development of the university for the future period. The expression of the targets in the form of indicators that characterize the socially and scientifically significant results of the university SEA will allow to evaluate and plan the desired state of development of the educational system, create a monitoring system that includes the process of collecting, monitoring and making management decisions in real time, that will solve the problem of measuring the achievement of the goal through the result.

Along with the performance of analytical functions, indicators are a strong instrument of control action. The indicators record what is controlled in the managed system, what changes in the characteristics of the system become the subject of reporting and, accordingly, the primary focus of the management bodies. Through the target values of indicators, the vector of development of the system is set: some changes in the characteristics of the system are encouraged, while others, on the contrary, are punished.

Today, the requirements to the management of the university are increasing, which causes the inclusion of information and analytical systems in the management loop. The information and analytical system in the management system of the scientific and educational activities of the university should not only provide the administrative management of the university information on the current and prospective state, but also identify problem areas for the functioning of the university SEA, and develop corrective actions to strengthen the work in this direction.

2 Literature review

Information-analytical systems, like business intelligence, are quite a new direction in the study of the company's development prospects. The main sources that reveal the theoretical aspects of data organization for storage and analysis are the works of Alekseeva T.V., Ameridi Yu.V., Luzhetskyi MG (As of May 19, 2017 Alekseyeva T.V., Electronic book), Kornipaev I. (Kornipayev I., 2013: 118), Hull E., Jackson K. , Dick D. (Hull E., 2011: 229), Laffenguell D., Weidrig D. (Laffenguell, 2016: 418), Khimonin Y.U. (Khimonin Y., 2009), Moss L. (Moss Larissa T., 2003: 576) presenting in their works the basic principles of work and requirements for software. The methodology for constructing business models and describing the functional requirements for the system is described in the papers of Ranjan J. (Ranjan J., 2005: 60-70), Kobern A. (Kobern A., 2002: 263), Cooper A. (Cooper Alan, 2004: 328), Minto B. (Minto Barbara, 2008: 272), Wigert K. (Karl E. Wigert, 2014: 736), Osterwalder A., Pigneur Y. (Osterwalder Alexander, 2011: 288), Barilenko V.I. (Barilenko V.I., 2009: 414), Schmits D. (Schmitz Dominik, 2010: 346). Practical implementation of information and analytical solutions platforms is described in the works of Ethan M. Rasiel I.M., Friga P.N. (Ethan M., 2009: 224), Paklin N.B., Oreshkov V.I. (Paklin N. B., 2013: 704), Ralston B. (Ralston Barry, 2011: 277), Larson B. (Larson Brian, 2009: 741), and a group of authors led by Desmeister B. (Desmeijter Browne, 2010: 549). The main qualities that should be paid attention and developed for the analyst are described in the works of Pererva A.D., Ivanova V., Yepishina E.V. (Pererva A., 2012: 304), Goel S. (Goel S., 2013: 11), Robert A(As of May 20 2017, Robert Alvin, electronic book), in the analytical report of Oracle (The project analytics framework Oracle Business, 2012: 18), Daly M. (As of May 16 2017, Daly Marshall, electronic book), Eckerson W., Hackathorn R., McGivern M., Twogood C., Watson G (Eckerson W., 2009: 40-48).

Analyzing these sources, the main goals and tasks of automation of the information and analytical system were identified; the implementation environment and hierarchy of levels of access to data were chosen. As a system of data sources, corporate information systems have been adopted, such as "Univer" "Science" 1C System of electronic documentation (SED) "Directum System of access control (SAC) "Perco Excel spreadsheets. As a platform for implementation is selected a subsystem of cloud access Power BI.

3 Materials and methods

3.1 Formulation of the problem

The Information and Analytical System (IAS) is a modern, highly effective tool for supporting the adoption of strategic, tactical and operational management decisions based on a visual and timely provision of the entire set of data to users responsible for analyzing the state of affairs and making management decisions (As of May 19, 2017 Alekseyeva T.V., Electronic book).

The complex of information and analytical systems affects the entire management vertical: corporate reporting, financial and economic planning and strategic planning.

The main purpose of the IAS is dynamic representation and multidimensional analysis of historical and current data, analysis of trends, modeling and forecasting the results of various

managerial decisions (As of May 19, 2017 Alekseyeva T.V., Electronic book).

The purpose of IAS development in the corporate information system (CIS) loop of the university is to create an aggregating system for extracting data from various sources of CIS, transforming them and unloading them into the storage, in order to build up operational and intellectual data analysis for their effective consumer perception.

The corporate information management system of the university CIS is a set of programs aimed at automation and management of various business processes of the university, based on the process approach that allows to systematically develop each direction of the university activity and organize work on the creation and maintenance of software development by the staff of information departments of the university (Mutanov G.M., 2012: 164), . (Mutanov G.M., 2013: 276), (Mutanov G.M., 2014: 158).

The result of the use of IAS tools are (As of May 19, 2017 Alekseyeva T.V., Electronic book):

- Regulatory analytical reports focused on the needs of users of different categories;
- means of interactive analysis of information and rapid construction of reports by non-programmers using the usual domain concepts

The presence of IAS in the university CIS circuit will help to solve such problems as: 1) compilation of consolidated reports and provision of consolidated information on the activity of the university (key performance indicators, the dynamics of their changes and trends); 2) carrying out a comprehensive assessment of the university activities based on the constant monitoring of its four most important aspects (educational process, research activities, educational process, international activity, finance, relations with the outside world, innovations); 3) operational monitoring of the main activities of the university and decision-making.

Nowadays cloud technologies are rapidly spreading into business structures, IDC analysts confirm that cloud technologies help businesses grow faster. Cloud platforms for business intelligence make it possible to make the results of data processing and analysis available, to quickly introduce the results of analysis into the business processes of the organization. Thus, we believe that for the development of IAS in the outline of the university information infrastructure, it is necessary to use a cloud-based business intelligence service, like Microsoft Power BI.

3.2 Architecture of cloud-based business intelligence service

Power BI is a set of business intelligence tools for analyzing data and providing valuable information. Power BI information panels are a single center with real-time data update available on all devices, in which business users get a complete view of the most important metrics (link to BI site). Benefits of Power BI (As of May 12 2017, Chto takoye Power BI?, electronic resource):

- All organization data on the same dashboard.
- Creating excellent interactive reports (table presentation, visualization, the ability to share reports)

- Coordinated analysis throughout the organization (reliable reusable data models to ensure consistency in reports and analytics in your organization).
- Convenient embedding of business intelligence directly into the application (the ability to embed on the pages of the site, PowerPoint presentations).
- Ubiquitous access to data (connect to hundreds of data sources, regardless of their location and type).

Power BI can combine all organization data, both cloud and local. Using Power BI gateways, you can connect SQL Server databases, Analysis Services models and many other data sources to the same information panels in Power BI. With Power BI you can safely publish reports to your organization and configure automatic updates to ensure that all users receive up-to-date information (As of May 12 2017, Chto takoye Power BI?, electronic resource).

The figure 1. shows the architecture of Power BI cloud platform.

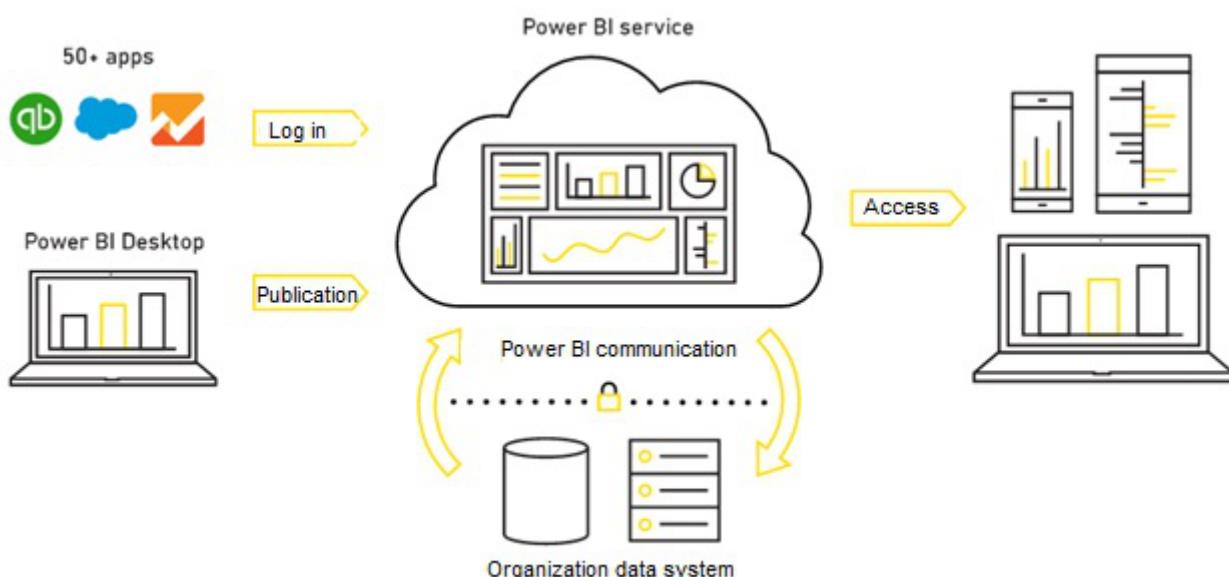


Figure 1 – Architecture of Power BI cloud platform.

To use the Power BI cloud platform in the university CIS framework, you must adhere to the following principles: (As of May 19, 2017 Alekseyeva T.V., Electronic book):

- consolidation of all information processes of the university;
- embedding the system in the already established organizational structure of the university;
- coordination of efforts of all divisions in the performance of assigned tasks;
- openness of the system for further development;
- integrated use of all available methods of analysis;

- information ethics - "from everyone - to the common safe and from it to everyone".

Currently in Al-Farabi Kazakh National University (further KazNU) information systems are used in the information infrastructure: systems of in-house development (IS "UNIVER" – the system of automation of the educational process, "Science" the system of accounting for research activities, System of indicative planning and rating based on IS "UNIVER"); System of electronic documentation "Directum"; System of accounting and personnel records ("1C: Enterprise 8.2"); System of access control "Perco 2.0"; System of statistical reporting of the contact center "VoIPTime Contact Center".

These information systems were integrated with Power BI cloud platform, with the aim of building IAS in the KazNU CIS contour (figure 2).

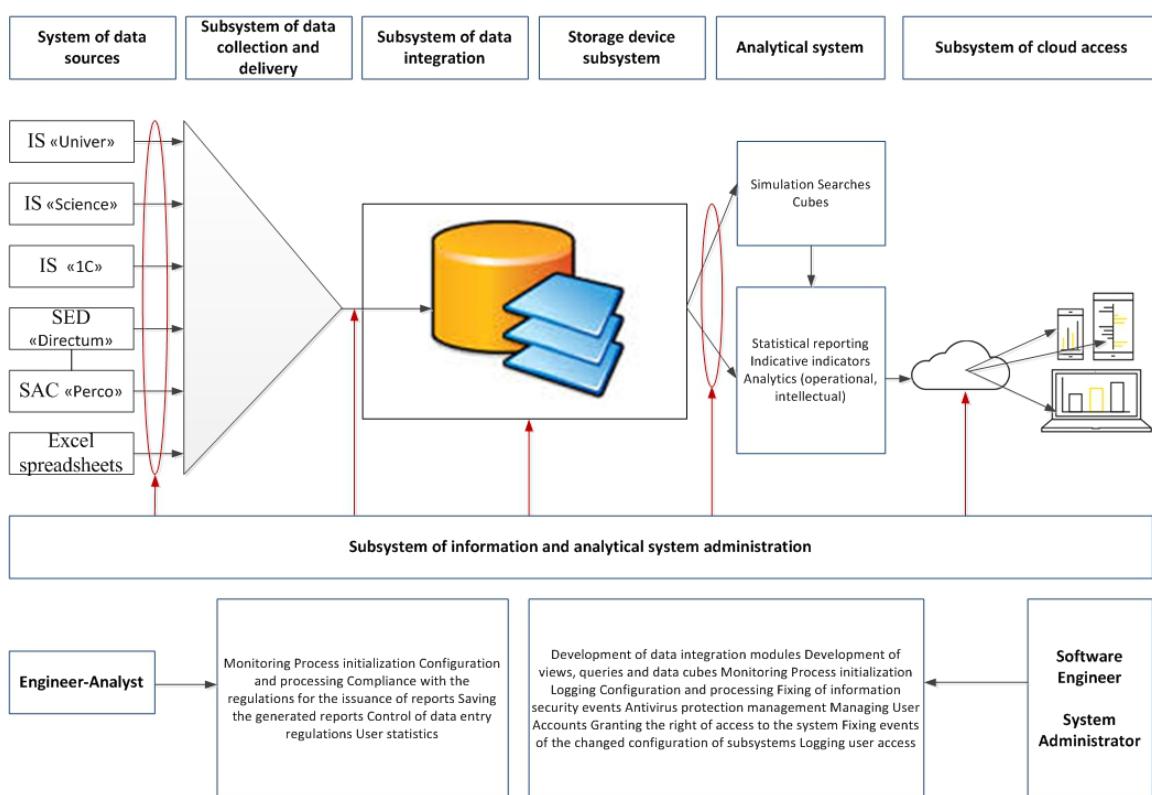


Figure 2 – IAS architecture of KazNU CIS.

As you can see from figure 2, at the level of the administration subsystem, work is carried out: on the configuration of business intelligence services, the development of presentations at the data presentation level. In this IAS architecture (figure 2), roles are clearly positioned:

- The role of a software engineer: the Development of data integration modules; Development of views, queries and data cubes; Monitoring of data representations; Process initialization; Logging of system processes; Configuration and processing of data scenarios; Fixing information security events; Fixing events of the changed configuration of subsystems.
- The role of the system administrator: Managing antivirus protection; User account management; Granting users the right to access the system; Log user access.

- The role of the analyst engineer: Monitoring of data representation; Process initialization; Configuration and processing of data scenarios; Implementation of regulations for the issuance of reports; Saving generated reports; Control of the data entry regulations; User statistics.

For proper organization of data, and configuration of dashboards, as well as the formation of data processing scenarios, it is very important to understand the data structure model in the university IAS (figure 3). Such a hierarchical representation of the data model is based on the fact that there is a system of indicative planning and a rating system in the outline of the university CIS. It is aimed at assessing the activities of teaching staff, departments and faculties. In addition, in the IS "UNIVER" and "SCIENCE" are implemented systems for automating the statistical reporting of the educational process and accounting for research activities. From such systems as: "1C: Enterprise 8.2" "Directum" "Perco 2.0" "VoIPTime Contact Center" primary data are being unloaded to build forms of operational reporting. For each data category from figure 3, a methodology for calculating the indicator should be provided, in order to configure data processing scenarios and build dashboards for the cloud-based business intelligence service (Mamykova ZH.D, 2013: 64-70).

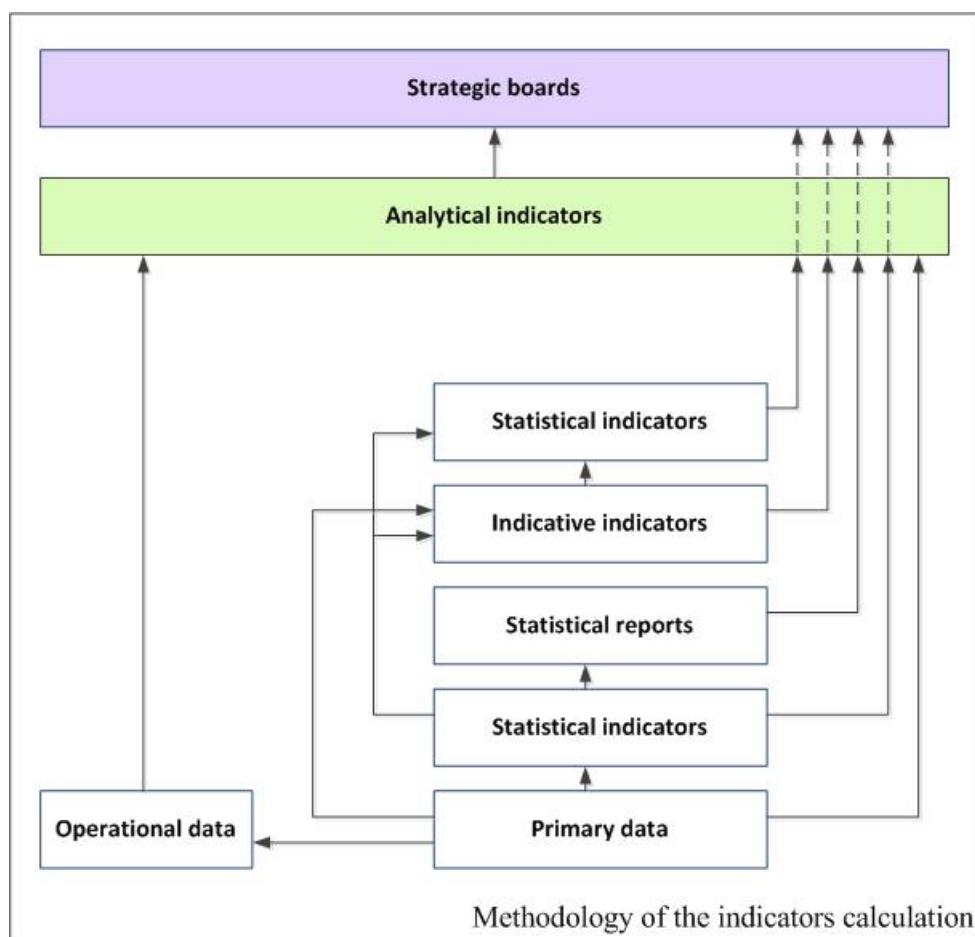


Figure 3 – Model of the data structure in KazNU IAS.

As a system of indicators for building a cloud business intelligence service, the following categories of indicators were used: statistical indicators (educational process, research work,

social work, international activity); Financial and economic indicators, personnel records; Indicators of indicative planning and rating; Indicators of administrative and organizational activities (work time records, workflow indicators, QMS indicators, indicators of IT services provision); Indicators of the accreditation of the university; Indicators of the University Strategy; Indicators of operational monitoring of production and economic activities and security services.

4 Results and discussion

4.1 The role of the analytical service in the management of the university

In Al-Farabi KazNU the Center for Situational Management (CSM) was established. Tasks of the CSM: 1) information and analytical support of the university; 2) monitoring of the educational process; 3) prompt response to the emergence of extraordinary situations.

Figure 4 shows the model of the CSM analytical service work that works closely with the working groups of departments (in the areas of the educational process, research work, educational process, financial and business and production activities, administrative and organizational management, international activities and strategic management, QMS, IT services). The analytical service should be guided by the normative and methodological documents of the university (these are the Provisions of departments, QMS procedures, instructions, regulatory documentation of the departmental ministry, strategic documents of the university). Engineers-analysts of the analytical service of the CSM have access to databases of key subsystems of the university CIS. To organize the work of the analytical service, a methodology for collecting reports on indicators and methodology for constructing analytical reporting have been developed.

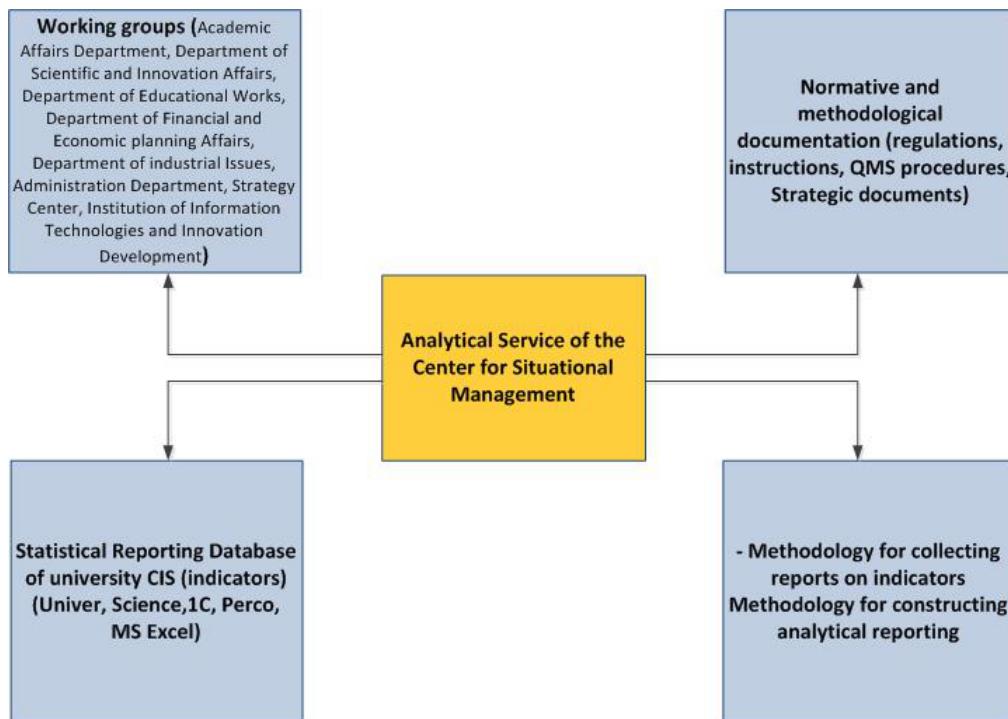


Figure 4 – The state model of the analytical service.

Figure 5 presents the model of access of the university management to visual data representations, according to the university system of indicators. As you can see from figure 5, the data is processed, according to the following steps: data collection from the departments (automatically from the CIS information systems, by preparing MS Excel files); Reporting (configuring dashboards); Monitoring of activities; Delivery reporting (role model access). What are the benefits of the pro-rector in the areas of activity: operational monitoring of activities; Monitoring of the development strategy of the university in the main areas. For the rector of the university all indicators for monitoring are available, in order to monitor the state of development of the university. The Director of the CSM can carry out operational monitoring in all areas of the university activities, as well as promptly respond to the emerged extraordinary situations.

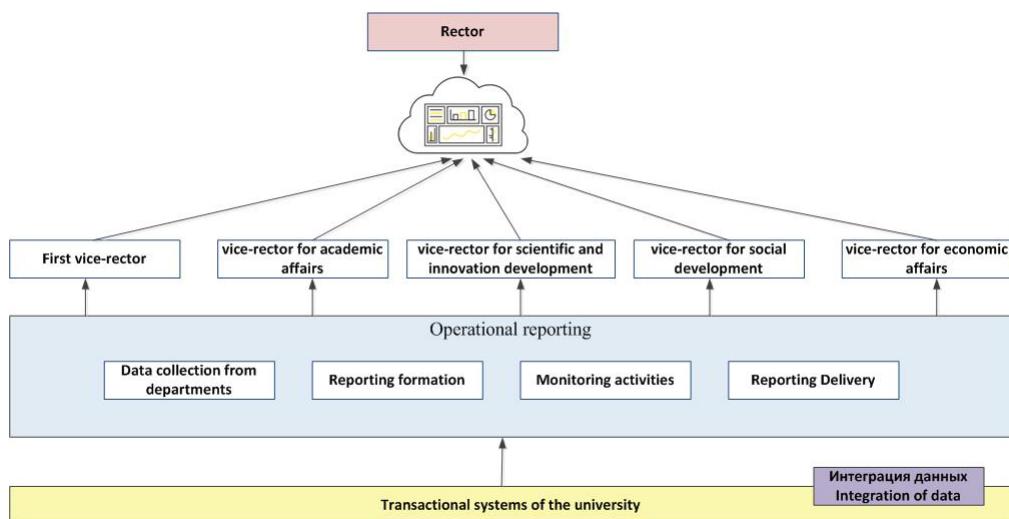


Figure 5 – The model of access to the data of the university management.

During the implementation of the project on the use of cloud services in business intelligence in the university CIS, we came to the conclusion that it is necessary to organize new business processes (figure 6), as: Analysis of models and monitoring of the performance indicators of the university; Development of a set of measures to develop the activities of the university; Assessment of the effectiveness of the university. To solve this task, a working group was formed with the participation of QMS specialists to develop the above-mentioned business processes. The organization of these business processes will require the development of certain procedures and instructions for the quality work of users.

Each department of the university, in organizing its processes, should allocate performance indicators and primary data, specify where the data is generated (in which system, in which reports, at what intervals). This information should be reflected in the documented procedures of the unit and the business process. In addition, each unit should identify the person responsible for collecting, analyzing and recording data for a particular line of business.

At the QMS level, it is necessary to develop a documented procedure "Collection, analysis of primary data and analysts on the main activity of the university with the goal of consolidating a single indicator bank and creating a system of role access to data categories, a reliable data source. An analysis of the work done allows us to talk about the need for a culture of "data collection and analysis the development of the "situation-action map" methodology.

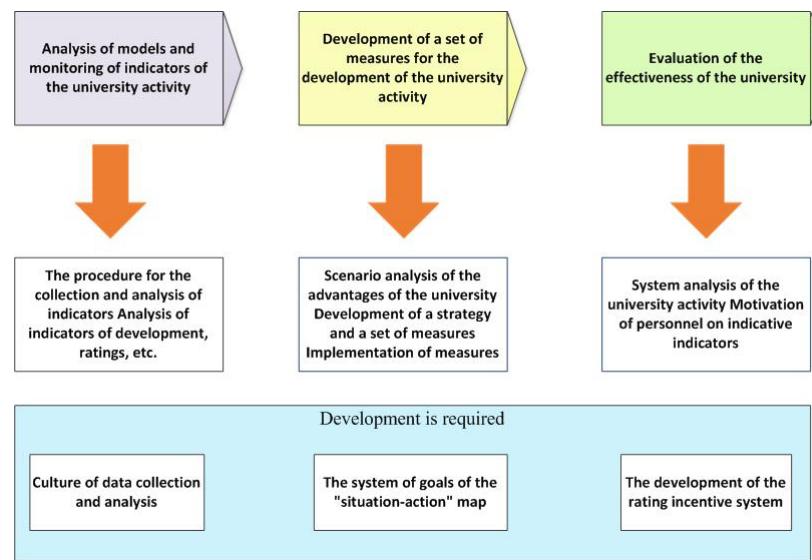


Figure 6 – Organization of new processes in the business process map of the university.

In figure 7. the results of the implementation of IAS KazNU on Power BI cloud platform are presented.

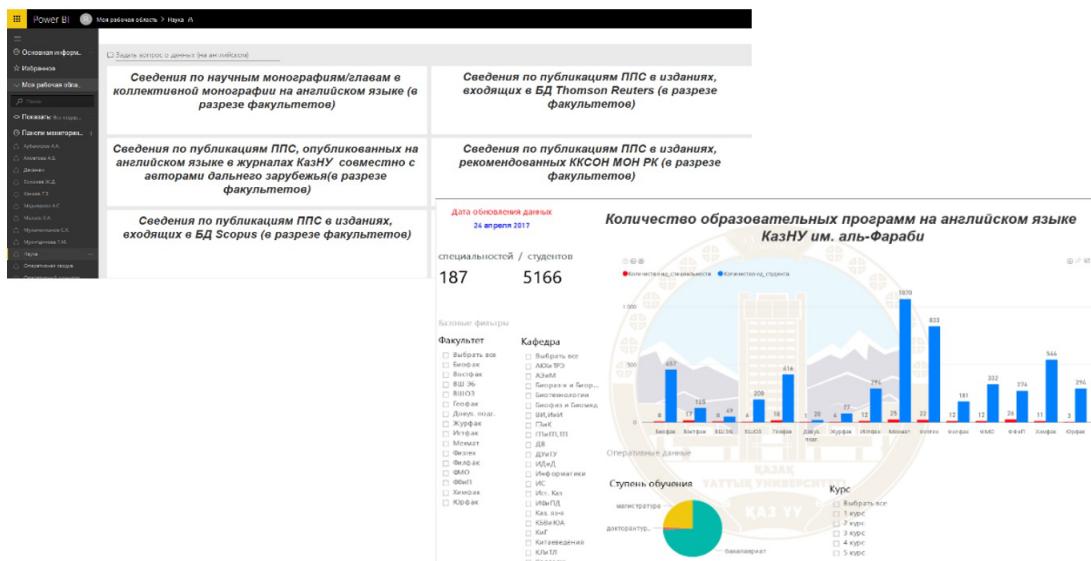


Figure 7 – Power BI dashboard, report visualization.

5 Conclusion

Summarizing the results of this article, we will list the advantages of introducing IAS into the corporate information system of the university:

- 1) IAS that created on the basis of PowerBI business intelligence system allows you to provide operational and statistical data consolidated from various sources of data.
 - 2) IAS allows you to visualize the performance indicators of the university and, as a consequence, evaluate the effectiveness of the university.

3) The role of QMS in this system is to develop unified procedures for collecting primary data for further analysis and decision making.

4) The role of the analytical service is to organize interaction with the working groups of departments for the operational collection, reporting and monitoring of the activities of the units and structures of the institution.

5) The role of a software engineer is to develop views, queries and data cubes, as well as control the integrity of the information presented.

6) Via to the implementation of cloud storage of information and the provision of reports, the process of obtaining data by decision-makers is simplified.

Thus, the use of cloud technologies for analyzing, storing and transferring data can easily be embedded in the information infrastructure of the university thereby ensuring ease in obtaining the necessary information. This approach to presenting data seriously saves time in making strategic decisions to the head of the organization, providing a complete picture of the scientific, educational and financial activities of the institution.

References

- [1] Alekseyeva T.V., Ameridi YU.V., Luzhetskiy M.G., "Informatsionno-analiticheskiye sistemy. [Information-analytical systems. Moscow: - Moscow Financial-Industrial Academy] (Moskovskaya finansovo-promyshlennaya akademiya, 2005) accessed May 19 2017, http://www.e-biblio.ru/book/bib/01_informatika/IAS/Book.html
- [2] Barilenko V.I. i dr. *Analiz khozyaystvennoy deyatel'nosti: ucheb. Posobiye* [Analysis of economic activity: training. Allowance] (Izdatel'stvo "Omega-L 2009), 414
- [3] *Chto takoye Power BI? [What is Power BI?]*, accessed May 12 2017, <https://powerbi.microsoft.com/ru-ru/what-is-power-bi/>
- [4] Cooper Alan *The Inmates are Running the Asylum: Why High-tech Products Drive Us Crazy and How to Restore the Sanity* Paperback (2nd Edition, Kindle Edition, 2004), 328
- [5] Daly Marshall The Modern Approach to Business Intelligence Ellie Fields – Vice President, Product Marketing, accessed May 16 2017, <http://www.accountingpdfbooks.com/the-modern-approach-to-business-intelligence-ellie-fields-vice-president-product-marketing-marshall-daly-product-marketing/>
- [6] Desmeijter Browne Brecht, Rodrigo Frealdo Dumont, Armin Kamal, John Leahy, Scott Masson, Ksenija Rusak, Shinsuke Yamamoto, Martin Keen, "IBM Cognos Business Intelligence V10.1 Handbook, (International Technical Support Organization ibm.com, 2010) 549
- [7] Eckerson W., Hackathorn R., McGivern M., Twogood C., Watson G., "BI Experts' perspective: Data Warehousing Appliances."Business Intelligence Journal. Vol. 14 Issue 1(2009): 40-48.
- [8] Elizabeth Hull, Ken Jackson, Jeremy Dick. *Requirements Engineering*, (SpringerVerlag London Limited, 2011) 229
- [9] Ethan M. Rasiel, Paul N. Friga, "The McKinsey Mind Understanding and Implementing the Problem-Solving Tools and Management Techniques of the World's Top Strategic Consulting Firm (McGraw-Hill, 2009) 224.
- [10] Goel S. "Using Microsoft Business Intelligence Dashboards and Reports in the Federal Government. A White Paper on Leveraging Existing Investments in Microsoft Technology for Analytics and Reporting (Dev Technology Group, June 2013) 11
- [11] Karl E. "Wiegers Software Requirements Second Edition Practical techniques for gathering and managing requirements throughout the development cycle, Two-time winner of the Software Development Productivity Award (Microsoft Press, 2014) 736
- [12] Khimonin Y.U. "Sbor i analiz trebovaniy k programmnomu produktu (Versiya 1.03)"[Collection and analysis of requirements for the software product (Version 1.03)]. https://pmi.ru/profes/Software_Requirements_Khimonin.pdf.
- [13] Kobern A., *Sovremennyye metody opisaniya funktsional'nykh trebovaniy k sistemam, [Modern methods of describing functional requirements for systems]* (Izdatel'stvo "Lori 2002) 263

- [14] Kornipayev I. *Trebovaniya dlya programmnogo obespecheniya: rekomendatsii po sboru i dokumentirovaniyu* [Requirements for software: recommendations for collection and documentation], (Izdatel'stvo "Kniga po Trebovaniyu" 2013) 118
- [15] Laffenguell D., Weidrig D. "Agile Software Requirements: Lean Requirements Practices for Teams, Programs, and the Enterprise"(Agile Software Development Series) Scaling "Software Agility Best Practices for Large Enterprises"(A Addison-Wesley, 2016) 418
- [16] Larson Brian, *Delivering Business intelligence with Microsoft SQL Server 2008* (MC Graw Hill, 2009) 741
- [17] Mamykova ZH.D., Mutanov G.M., Bobrov L.K. "Elektronnyy kampus v sotsial'no oriyentirovannoy modeli Smart-obshchestva"[Campus in a Socially-Oriented Model of the Smart Society], Idei i idealy: nauchnyy zhurnal. - Novosibirsk: Izdatel'stvo "NGUEU" Tom 2.- № 2(16), (2013). 64-70.
- [18] Minto Barbara. *The Pyramid principle logic in writing and thinking* (Ausgabe - 18, November 2008) 272
- [19] Moss Larissa T. "Business Intelligence Roadmap: The Complete Project Lifecycle for DecisionSupport"(Addison-Wesley Professional, 2003) 576
- [20] Mutanov G.M., "Nauchno-metodologicheskiye osnovy razrabotki i vnedreniya informatsionno-kommunikatsionnykh tekhnologiy v obrazovatel'nuyu sistemu: otchet o NIR (pomezhutochnyy)"[Scientific and methodological basis for the development and implementation of information and communication technologies in the educational system: report on research (interim)] (NII MM KazNU im. al'-Farabi: ruk. Mutanov G.M.; ispoln.: Mamykova ZH.D. №0212RK01116/GR 0112RK01488. Almaty, 2012. 164)
- [21] Mutanov G.M., "Nauchno-metodologicheskiye osnovy razrabotki i vnedreniya informatsionno-kommunikatsionnykh tekhnologiy v obrazovatel'nuyu sistemu: otchet o NIR (pomezhutochnyy)"[Scientific and methodological bases for the development and implementation of information and communication technologies in the educational system: report on research (intermediate)] (NII MM KazNU im. al'-Farabi: ruk. Mutanov G.M.; ispoln.: Mamykova ZH.D.-№0213RK02558/GR 0112RK01488. Almaty, 2013. 276)
- [22] Mutanov G.M., "Nauchno-metodologicheskiye osnovy razrabotki i vnedreniya informatsionno-kommunikatsionnykh tekhnologiy v obrazovatel'nuyu sistemu: otchet o NIR (zaklyuchitel'nyy)"[Scientific and methodological basis for the development and implementation of information and communication technologies in the educational system: report on research (final)], (NII MM KazNU im. al'-Farabi: ruk. Mutanov G.M.; ispoln.: Mamykova ZH.D. № 0214RK01254/GR 0112RK01488. Almaty, 2014. 158)
- [23] Osterwalder Alexander, Pigneur Yves *Business Model Generation, A Handbook for Visionaries, Game Changers, and Challengers*, (Written by John Wiley & Sons, 2011) 288
- [24] Paklin N. B., Oreshkov V.I. *Biznes analitika: ot dannykh k znaniyam: Uchebnoye posobiye* [Business analysis: from data to knowledge: Textbook]. (2 izd., ispr. SPb.: Piter, 2013) 704
- [25] Pererva A., Ivanova V. *Put' analitika. Prakticheskoye rukovodstvo IT-spetsialista* [The Way of the Analyst. Practical guidance of the IT specialist]. (Piter, 2012) 304
- [26] Ralston Barry. *PowerPivot for Business Intelligence Using Excel and Sharepoint Business Intelligence Solutions for the Desktop* (Apress, 2011) 277
- [27] Ranjan J., "Business intelligence: concepts, components, techniques and benefits Journal of Theoretical and Applied Information Technology. Vol 9. No 1., 2005): 60 - 70.
- [28] Robert Alvin, "Content Marketing Insights for IT Marketers Copyright B2B Marketers Start Here. NetLine Corporation. All rights reserved, Accessed May 20 2017. <http://www.netline.com/netline002n/?d=hrcontentguide17&k=170303nlwhrgd>.
- [29] Schmitz Dominik. *Managing Dynamic Requirements Knowledge An Agent-Based Approach, Tag der mundlichen Prufung: 20. Dezember, 2010* 346
- [30] *The project analytics framework Oracle Business Intelligence by Sid Goel* (KPI Partners, 2012) 12

МРНТИ 004.435:004.623:004.624

Подходы и проблемы обмена данными между информационными системами

Габбасов М.Б. – канд. физ.-мат. наук, доцент, генеральный директор Компании системных исследований "Фактор", Республика Казахстан, +77019082511,
E-mail: mars@factor.kz

Куанов Т.Д. – заведующий отделом Компании системных исследований "Фактор",
Республика Казахстан, +77013006556,
E-mail: tolybay@factor.kz

Обмен данными между двумя и более информационными системами всегда являлся актуальной и сложной задачей. За последние три десятилетия данная задача прошла свой эволюционный путь от ручного способа обмена до возможности автоматического обмена данными между системами. В данной работе рассматриваются различные современные технологии для организации обмена данными между информационными системами, в том числе между OLTP- и OLAP-системами. Приведено описание технологий ETL, MDM и технологий, основанных на пространствах имен, в том числе "Синхронизатор ТОФИ", разрабатываемый в Компании системных исследований "Фактор". Подробно излагается формальное понятие "данных", используемое в технологии ТОФИ, пространство имен ТОФИ и функциональные возможности синхронизатора ТОФИ по обмену данными и метаданными. Функционально синхронизатор осуществляет сопоставление метаданных различных информационных систем на основе систем кодирования, автоматически (по расписанию) или вручную производит формирование метаданных, обмен метаданными с другими системами, формирование данных для передачи другой системе, прием и передачу набора данных из/в другой(-ую) информационной(-ую) системы(-у) и т.д. Обмен данными, основанный на пространстве имен ТОФИ, может осуществляться в автоматическом режиме на основе синхронизации метаданных. **Ключевые слова:** данные, метаданные, обмен данными, OLTP, OLAP, пространство имен.

Ақпараттық жүйелер арасында мәліметтермен алмасу жолдары мен проблемалары
Габбасов М.Б. – ф.-м.ғ.к., доцент, "Фактор" жүйелік зерттеулер компаниясының бас директоры,
Казақстан Республикасы, +77019082511, e-mail: mars@factor.kz

Куанов Т.Ж. – "Фактор" жүйелік зерттеулер компаниясының бөлім меншерушісі, Казақстан
Республикасы, +77013006556, e-mail: tolybay@factor.kz

Екі немесе одан да көп ақпараттық жүйелердің өзара мәліметтермен алмасу процесі күрделі және қажетті есеп болып табылады. Соңғы үш онжылдықта бұл есеп қолмен енгізу әдісінен бастап жүйелердің өзара автаматтандырылған турде мәліметтермен алмасу деңгейіне дейін өзінің эволюциялық жолын өтті. Бұл жұмыста ақпараттық жүйелер арасындағы өзара мәліметтермен алмасуды үйімдастырудың қазіргі замандағы әртүрлі технологиялары қарастырылады, соның ішінде OLTP- мен OLAP-жүйелерінің арасындағы алмасу процесстері қамтылған. ETL, MDM сияқты технологиялардың және есімдер кеңістігіне негізделген технологиялардың сипаттамалары көлтірілген, соның ішінде "Фактор" жүйелік зерттеулер компаниясында жасалып жатқан "ТОФИ синхронизаторы" жайлы сез қозғалған. ТОФИ технологиясында қолданылатын "мәліметтер" түсінігі, ТОФИ есімдер кеңістігі және ТОФИ синхронизаторының функционалды мүмкіншіліктегі жан-жақты зерттелген. Функционалды аспап ретінде синхронизатор кодтау жүйелері негізінде әртүрлі ақпараттық жүйелердің метамәліметтерін сәйкестендіреді, автоматты түрде (белгіленген кесте бойынша) метамәліметтерді дайындауды, басқа ақпараттық жүйелермен метамәліметтермен алмасады, басқа жүйелерге беру үшін мәліметтерді дайындауды, басқа жүйелерден мәліметтер жиынтығын қабылдайды және басқа да жұмыстар атқарады. ТОФИ есімдер кеңістігіне негізделген мәліметтермен алмасу құбылысы метамәліметтерді сәйкестендіру арқасында автоматтандырылған турде жүрүі мүмкін.

Түйін сөздер: мәліметтер, метамәліметтер, мәліметтермен алмасу, OLTP, OLAP, есімдер кеңістігі.

Approaches and problems of data exchange between information systems

Gabbassov M.B. – Ph.D., General director of System Research Company "Factor", Republic of Kazakhstan, +77019082511, e-mail: mars@factor.kz

Kuanov T.D. – Head of Department of System Research Company "Factor", Republic of Kazakhstan, +77013006556, e-mail: tolybay@factor.kz

The exchange of data between two or more information systems has always been an urgent and complex task. Over the past three decades, this task has passed its evolutionary path from a manual mode of exchange to the possibility of automatic data exchange between systems. In this paper, various modern technologies are considered for the organization of data exchange between information systems, including between OLTP and OLAP-systems. The description of technologies ETL, MDM and technologies based on namespaces, including "The synchronizer TOFI", developed in the System Research Company "Factor". The formal notion of "data" used in TOFI technology, the TOFI namespace and the functionality of the TOFI synchronizer for data and metadata exchange are described in detail. Functionally, the synchronizer compares the metadata of various information systems based on coding systems, automatically (on schedule) or manually generates metadata, exchanges metadata with other systems, generates data for transmission to another system, receives and transmits a data set from / to another (s) Information system (s), etc. Data exchange based on the TOFI namespace can be performed in an automatic mode based on metadata synchronization.

Key words: data, metadata, data exchange, OLTP, OLAP, namespace.

1 Введение

Обмен данными между двумя и более информационными системами всегда являлся актуальной и сложной задачей. За последние три десятилетия данная задача прошла свой эволюционный путь от ручного способа обмена до возможности автоматического обмена данными между системами. В данной работе рассматриваются различные современные технологии для организации обмена данными между информационными системами. Термины "данные" и "информационная система" понимаются в смысле стандартов (ISO/IEC 2382-1:1993:1-20) и (ISO/IEC 2382:2015:1-30) соответственно, а именно: данные – поддающиеся многократной интерпретации представление информации в формализованном виде, пригодном для передачи, связи и обработки; информационная система – система, предназначенная для хранения, поиска и обработки информации, и соответствующие организационные ресурсы (человеческие, технические, финансовые т.д.), которые обеспечивают и распространяют информацию.

2 Обзор литературы

Существуют множество классификации информационных систем, для наших целей мы поделим все информационные системы на два класса: OLTP-системы (On-Line Transaction Processing) и OLAP-системы (On-Line Analytical Processing). OLTP-системы предназначены для автоматизации операционных бизнес процессов, в которых, как правило, используются структурированные, повторяющиеся задачи обработки данных. OLAP системы, или системы складирования данных, предназначены для аналитической обработки больших объемов данных. Термин OLAP ввёл Эдгар Кодд в публикации в журнале Computerworld в 1993 году (Codd Edgar F., 1993 : 56), в которой он предложил

12 принципов аналитической обработки, по аналогии с 12-ю правилами для реляционных баз данных, сформулированными им же десятилетием ранее (Codd Edgar F., 1970 : 377-387). Главный принцип концепции складирования данных состоит в том, что к данным, сохраняемым для анализа, может быть обеспечен наиболее эффективный доступ только при условии выделения их из операционной (транзакционной) системы. Такое разделение систем привело к появлению задачи миграции данных из одного типа систем в системы другого типа.

Такая классификация информационных систем выделяет следующие возможные типы обмена данными между ними:

- 1) обмен данными между OLTP-системами;
- 2) миграция данных из OLTP-систем в OLAP-системы;
- 3) обмен данными между OLAP-системами.

3 Материалы и методы

3.1 Обмен данными между OLTP-системой и OLAP-системой

Исторически первой появилась задача миграции данных из OLTP-систем в OLAP-системы, основным инструментом для решения которой является ETL-приложение (extraction, transformation, loading – извлечение, преобразование и загрузка данных). Приложения ETL извлекают информацию из одного или нескольких источников, преобразуют ее в формат, поддерживаемый системой хранения и обработки, которая является получателем данных, а затем загружают в нее преобразованную информацию. Изначально ETL-системы использовались для переноса информации из более ранних версий различных информационных систем в новые. В настоящее время ETL-системы все более широко применяются именно для консолидации данных с целью их дальнейшего анализа. Очевидно, что поскольку ХД могут строиться на основе различных моделей данных (многомерных, реляционных, гибридных), то и процесс ETL должен разрабатываться с учетом всех особенностей используемой в ХД модели.

Независимо от особенностей построения и функционирования ETL-система должна обеспечивать выполнение трех основных этапов процесса переноса данных (ETL-процессы):

- извлечение данных. На этом этапе данные извлекаются из одного или нескольких источников и подготавливаются к преобразованию. Следует отметить, что для корректного представления данных после их загрузки в хранилище данных из источников должны извлекаться не только сами данные, но и информация, описывающая их структуру, из которой будут сформированы метаданные для хранилища;
- преобразование данных. Производится преобразование форматов и кодировки данных, а также их обобщение и очистка;
- загрузка данных - запись преобразованных данных в соответствующую систему хранения.

Перемещение данных в процессе ETL можно разбить на последовательность процедур, представленных следующей функциональной схемой (рисунок 1):

- 1) извлечение. Данные извлекаются из источников и загружаются в промежуточную область;
- 2) поиск ошибок. Производится проверка данных на соответствие спецификациям и возможность последующей загрузки в ХД;
- 3) преобразование. Данные группируются и преобразуются к виду, соответствующему структуре ХД;
- 4) распределение. Данные распределяются на несколько потоков в соответствии с особенностями организации процесса их загрузки в ХД;
- 5) вставка. Данные загружаются в хранилище-получатель.

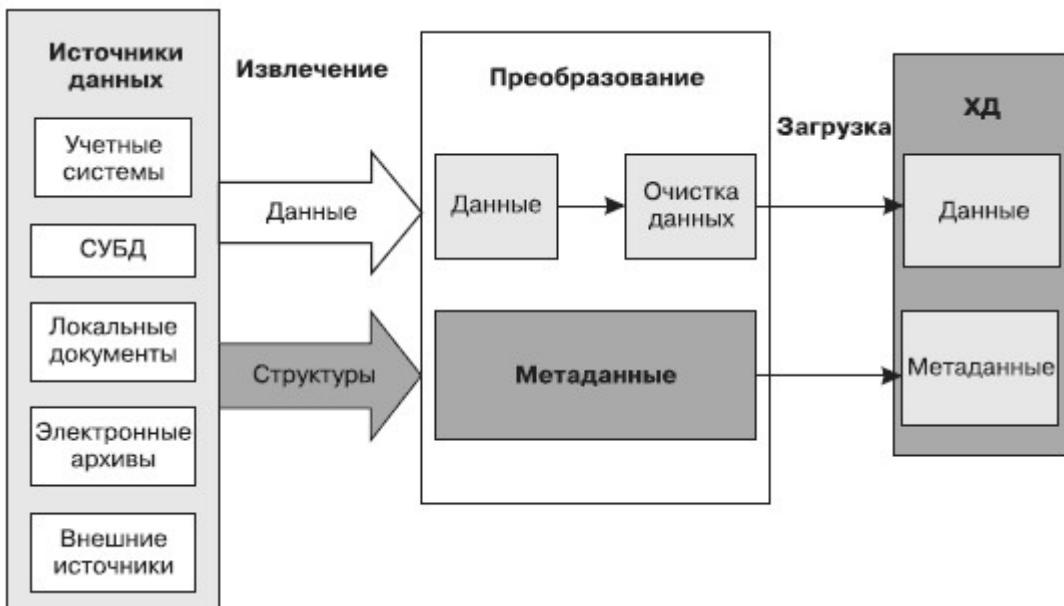


Рисунок 1 – Обобщенная схема процессов ETL.

3.2 Обмен данными между OLTP-системами

Довольно часто возникают задача обмена данными между OLTP-системами, например, системой управления кадрами и системой финансового учета. В последние годы для таких целей предлагается использовать новый класс корпоративных систем – MDM (Master Data Management – управление мастер-данными). Мастер-данные - это данные, содержащие ключевую информацию о бизнесе, в том числе о клиентах, о продуктах, о работниках, о технологиях и материалах (Черняк, 2007 : 54-62). Мастер-данные специфичны тем, что относительно редко изменяются и по своей природе не являются транзакционными. В определенных случаях мастер-данные поддерживают транзакционные процессы и операции, но в большей степени они используются для аналитической деятельности и подготовки отчетов.

Иногда для MDM используется альтернативное название – управление справочными данными (Reference Data Management, RDM). Предназначение MDM состоит в обеспечении целостного взгляда на основные компоненты бизнеса, так как такие системы обеспечивают синхронизированные справочники для обмена данными между OLTP-системами. Подлинная сложность мастер-данных заключается не в них самих, а в опи-

сывающих их метаданных. Метаданные, описывающие мастер-данные, могут претерпевать от нескольких единиц до сотен изменений в месяц, отслеживать все эти изменения в стихийно сложившейся системе MDM практически невозможно. Решение проблемы сложности состоит в создании отдельной единой среды MDM, которая будет выполнять обе функции – и сбор, и представление данных для последующей обработки средствами бизнес-аналитики. Создание такой среды может быть реализовано в трех вариантах (Черняк, 2007 : 56-60): 1) федеративный, 2) интегрированный, 3) гибридный. При федеративном подходе концентратор мастер-данных (master data hub) в соответствии с установленными правилами осуществляет асинхронный обмен данными, чтобы обеспечить согласованность мастер-данных. Основной предмет деятельности заключается в формулировании этих правил. Преимуществом этого подхода является невмешательство в действия существующих систем и сохранение контекста, а недостатком – то, что он эффективен лишь при относительно небольшом разнообразии мастер-данных и не выдерживает нагрузки при усложнении среды мастер-данных. Интегрированное решение заключается в создании автономной системы MDM, способной самостоятельно собирать изменения в мастер-данных. В таком случае все эти данные хранятся в централизованном репозитарии. Данный подход обеспечивает наиболее полное и адекватное представление мастер-данных. Гибридный подход является промежуточным между первым и вторым подходами.

3.3 Обмен данными между OLAP-системами

В последнее десятилетие в информационных технологиях с развитием интернета сформировались новые подходы к автоматизации обмена данными между системами, основанные на пространствах имен, более ориентированный на обмен данными между OLAP-системами. При этом, создается пространство имен, в котором описывается некоторый формат данных и, возможно, метаданные в этом формате. Загрузку и выгрузку данных и метаданных берет на себя система, которая участвует в обмене данными, или разрабатывается специальная система, которая синхронизирует метаданные и обеспечивает автоматизированный обмен данными. Отличие от MDM систем заключается в том, что метаданные определяются пространством имен и от конкретной системы не зависит.

В Соединенных штатах Америки с 2005 года разрабатывается проект NIEM (National Information Exchange Model) – Национальная модель обмена информацией (Официальный сайт проекта NIEM). NIEM – это спонсируемая правительством США инициатива, направленная на облегчение обмена информацией между государственными и частными организациями. Первоначально акцент делался на правоохранительные органы, органы государственной безопасности и Агентство по чрезвычайным ситуациям, но область применения стандарта постоянно расширяется (Присцилла Уолмсли, 2010). Новые XML-инициативы в рамках департамента юстиции, департамента национальной безопасности и в других органах власти США предусматривают применение NIEM в качестве базовой модели данных и методологии для обеспечения взаимодействия данных и программного обеспечения, сокращения времени разработки приложений обмена информацией и многократного использования интеллектуального капитала и знаний в разных проектах.

Модель XML-данных NIEM обеспечивает блоки для описания общих объектов. Од-

нако сама модель NIEM не определяет всю информацию для обмена сообщениями. Она не содержит никаких конкретных типов сообщений или корневых элементов XML-документов. Чтобы использовать NIEM, необходимо построить документацию пакета обмена информацией NIEM, или сокращенно IEPD NIEM (NIEM Information Exchange Package Documentation). IEPD извлекает необходимые компоненты из моделей ядра NIEM и доменов, дополняет их для создания системы обмена информацией. IEPD содержит несколько артефактов: - XML-схемы, определяющие часть модели NIEM для данной системы, так называемая "схема подмножества"(subset schema);

- схема, определяющая корневой элемент системы обмена, или схема обмена (exchange schema);
- схема, определяющая расширения к модели NIEM - схема расширения (extension schema);
- документация по системе обмена, такая как диаграммы UML, примеры, описания.

Задача создателя IEPD – составить схему обмена, определив корневой элемент и базовую структуру сообщений (Присцилла Уолмсли, 2010). NIEM становится важнейшим стандартом обмена XML-информацией для госучреждений США и их информационных партнеров, хотя она не является готовой системой обмена информацией.

Если NIEM строит систему обмена данными, основываясь на готовой модели предметной области, что сильно упрощает создание такой системы, другой путь заключается в создании универсального формата данных, на основе которых создаются модели предметной области каждым субъектом самостоятельно. Тогда мы получим те же самые модели, но возникает проблема синхронизации этих моделей друг с другом. Для условий нашей страны второй путь более предпочтителен, так как у нас нет критической массы построенных моделей.

Промежуточным вариантом является инициатива SDMX (Statistical Data and Metadata eXchange), поддерживаемая Банком международных расчётов, Европейским Центральным Банком, Евростатом, Международным Валютным Фондом и иными организациями, включая статистические подразделения ООН (Официальный сайт формата обмена данными SDMX). Последняя версия стандарта была выпущена в апреле 2011 года. В 2013 году SDMX был утвержден ISO в качестве международного стандарта. Данный стандарт имеет спецификации для ряда предметных областей, таких как экономика, социальное обслуживание населения, демография и др. Использование данного стандарта предполагает централизованную архитектуру обмена статистическими данными, так как все статистические показатели и объекты закодированы специальным образом, и обмен данными происходит в утвержденных стандартом кодах. Пользователи системы обмена данными не могут добавить новые показатели или объекты самостоятельно, все должно происходить централизованно. Другим недостатком SDMX является его ориентация только на статистические данные.

Существуют множество других форматов обмена данными для автоматизации процесса обмена информацией для различных предметных областей. Приведем классификацию этих форматов согласно работе (Акаткин, 2014 : 35) в таблице 1.

Таблица 1. – Классификация моделей данных для обмена информацией.

Вид модели	Название модели
Государственное управление	Национальная модель обмена информацией NIEM. www.niem.gov
Управление воздушным движением	Модель обмена аэронавигационной информацией AIXM. www.aixm.aero
	Модель обмена метеорологической информацией WXXM. www.wxxm.aero
	Модель обмена информацией о полете FIXM. www.fixm.aero
Статистика	Открытый формат обмена статистическими данными SDMX. www.sdmx.org
Управление ЧС	Язык обмена данными о чрезвычайных ситуациях EDXL. www.oasis-open.org/committees
Сбор налогов	Стандарт автоматического обмена информацией финансового счета. www.oesd.org
Таможня	Модель данных всемирной торговой организации (ВТО). WCO DATA MODEL. www.wcoomd.org
Управление инфраструктурой ИКТ	Общая информационная модель CIM. www.xml.coverpages.org
Управление вооруженным противостоянием	Объединенная модель данных по обмену информацией для управления, контроля и консультирования НАТО (STANAG 5525) и США (JC3IEDM). www.lib.znate.ru
Подготовка государственных услуг к переводу в электронный вид	Модель информационной системы, реализующей перевод государственных услуг в электронный вид, путем организации неразрывного, связного и целостного процесса их подготовки и последующего применения полученных результатов (метаданных, моделей, процессов) для исполнения государственных услуг в автоматизированном режиме. www.kbpm.ru
Управление жизненным циклом изделия	Стандарт обмена данными модели изделия STEP. www.wikipedia.org/wiki/step

В приведенной таблице отсутствует протокол обмена финансовыми данными FIX (Financial Information eXchange) – протокол передачи данных, являющийся международным стандартом для обмена данными между участниками биржевых торгов в режиме реального времени. Протокол FIX изначально создан в 1992 г. для передачи информации о торгах акциями между компаниями Fidelity Investments и Salomon Brothers. В

настоящее время широко используется торговыми системами для обмена финансовыми данными и совершения транзакций (Официальный сайт протокола FIX). Протокол FIX поддерживается большинством крупнейших банков и электронными трейдинговыми системами, а также крупнейшими биржами мира. Отличительной чертой протокола является то, что в нем закодированы не только структура передаваемых данных, то и действия, которые получающая сторона должна выполнить.

Основными недостатками приведенных стандартов, как отмечалось выше, являются:

- обеспечение обмена только отраслевыми данными;
- поддержка только централизованной архитектуры обмена данными.

3.4 Обмен данными с помощью синхронизатора ТОФИ

Для решения проблемы обмена данными и метаданными различных форматов на основе стандарта с использованием различных архитектур организации процесса обмена данными и метаданными возникает необходимость в разработке нового единого формата обмена и информационной системы поддержки процесса обмена. Разрабатываемый формат должен удовлетворять следующим требованиям (Габбасов, 2015 : 12):

1. Для возможности передачи "больших" данных формат должен иметь компактный синтаксис;
2. Должна быть возможность передавать как все метаданные, так и части метаданных;
3. Формат должен обеспечивать многоязычную поддержку;
4. Инструментарий должен поддерживать механизм веб-сервисов и других технологических механизмов взаимодействия систем;
5. Структуры данных и метаданных должны обрабатываться одинаково, схема не должна накладывать дополнительные требования к обработке;
6. Формат должен обеспечивать распознавание органа, поддерживающего метаданные, то есть поддерживать описание ссылочных метаданных;
7. Формат должен позволять описывать свойства, не зависящие от времени;
8. Формат должен позволять описывать нечисловые свойства;
9. Формат должен поддерживать структуры, основанные на кубах.

Перечисленный набор требований является очень сложным и противоречивым для реализации. Разрабатываемая в Компании системных исследований "Фактор" концепция обмена данными основана на формализованной модели данных технологии ТОФИ, которая позволяет описывать произвольные данные в виде определенной структуры. Систему обмена данными предлагается сделать в виде системы обмена сообщениями, что совокупно с форматом данных ТОФИ позволяет выдерживать перечисленные выше требования.

Модель данных ТОФИ (Габбасов, 2013 : 14-16) дает более формальный абстрактный аппарат, для представления и обработки данных не привязываясь к определенной структуре хранения. В частности, модель данных ТОФИ может быть переведена в реляционную и другую структуру. Данные в технологии ТОФИ описываются формулой

$$(O, P, [s], [q], [T]) = V([T]), \quad (1)$$

где O (Owner) – владелец данных, P (Property) – свойство, s (Status) – статус данных, q (Author, Provider) – поставщик данных, T (Time) – период или актуальный интервал данных, V (Value) – значение данных. Необязательные элементы в формуле (1) заключены в квадратные скобки.

В базе данных информационно-аналитической системы хранятся "данные". Данные всегда являются значением некоторого свойства какого-либо объекта в некоторый период времени. Поэтому указание объекта (к которому относятся данные), свойства (определяющего тип данных), статуса и поставщика данных и временного интервала должно однозначно идентифицировать данные. В случае технологии ТОФИ в качестве объектов данных выступают объекты или отношения между объектами (элементы сущностей "Тип объектов" и "Отношения между типами объектов" соответственно). В качестве свойства выступают экземпляры сущности "свойство". Свойство характеризуется типом свойства. В технологии ТОФИ существуют 8 типов свойств: 1) свойство на основе факторов; 2) свойство на основе измерителей; 3) свойство на основе атрибутов; 4) свойство на основе типов объектов; 5) свойство на основе отношений между типами объектов; 6) свойство на основе единиц измерения; 7) комплексное свойство; 8) группа свойств. Данные являются значениями соответствующих свойств. Каждое свойство может принимать несколько значений для каждого фиксированного периода и фиксированного объекта, которые (значения) отличаются статусом и/или поставщиком данных.

Если убрать все необязательные элементы формула (1) выглядит как $(O, P) = V$, что выражает тот факт, что любые данные являются значением некоторого свойства для некоторого объекта (владельца). Например, если – конкретный человек, – свойство "пол человека", то V равно одному из значений "мужской" или "женский". Заметим, что все свойства можно разделить на две группы: свойства, которые принимают значения в зависимости от конкретных периодов, и свойства, значения которых не зависят от регулярных периодов. В первом случае мы говорим, что значение свойства зависит от типа периода, а во втором случае – не зависит от типа периода. Если значение свойства зависит от типа периода, то оно меняется регулярно от одного периода к другому, например, ежемесячно или ежегодно. Если же значение свойства не зависит от типа периода, то значение свойства с течением времени может меняться, но это изменение не носит регулярный характер, а меняется случайно в любой момент времени. Следовательно, в этом случае у этого значения есть актуальный интервал жизни. Таким образом, в формуле (1) буквой V в левой части обозначен конкретный период (имеющий тип периода), а в правой части – актуальный интервал жизни значения данных (произвольный интервал времени, не привязанный к типу периода). Соответственно, если значение свойства P зависит от типа периода, то формула (1) записывается в виде $(O, P, [s], [q], T) = V$, то есть в этом случае в левой части является обязательным атрибутом (совпадает с конкретным периодом), а в правой части отсутствует. Если же значение свойства P не зависит от типа периода, то формула (1) записывается в виде $(O, P, [s], [q]) = V()$, то

есть в левой части отсутствует, а в правой части является обязательным атрибутом (актуальный интервал значения данных). Момент времени есть интервал времени, у которого начало и конец совпадают.

Если убрать все необязательные элементы, то формула (1) записывается либо в виде $(O, P, T) = V$, либо в виде $(O, P) = V()$. Но при заданных владельце, свойстве и периоде значение данных может определяться неоднозначно. Скажем, валовый внутренний продукт (свойство) какой-либо страны (владелец) за определенный год (период) имеет несколько значений: оперативное значение и окончательное значение. Эти значения отличаются статусами данных. Статусами данных могут быть такие значения как плановое и фактическое, предварительное и окончательное, утвержденное и скорректированное и т.д. Статус данных в формуле (1) обозначен буквой s . Возможные значения статуса данных являются атрибутом свойства. В технологии ТОФИ в качестве статуса данных выступает значения факторов. Кроме статуса у значения данных могут быть поставщики данных. Поставщики данных – это субъекты, которые регистрируют или измеряют данные. У одного и того же данного могут быть несколько поставщиков. Поставщик данных в формуле (1) обозначен буквой q . Возможные поставщики данных являются атрибутом свойства. Атрибуты данных в левой части формулы (1), а именно владелец данных, свойство, статус, поставщик, период, называются **координатами данных**, а правая часть V называется **значением данных**. Значение данных может иметь различные типы, такие как число, строка, дата, фактор, объект, файл и т.д. Тип значения данных также определяется свойством. Для числовых данных у значения появляется еще одна координата, называемая единицей измерения. Тогда обобщенную формулу (1) можно написать в виде

$$(O, P, [m], [s], [q], [T]) = V([T]), \quad (2)$$

где m (Measure) – единица измерения. Как отметили выше, здесь в левой части – период, в правой части – актуальный интервал данных и обязательно присутствует в одной части формулы. Формула (1) или (2) определяет конкретное значение данных или конкретное данное. Для организации автоматического обмена данными необходимо, чтобы передающие и принимающие системы однозначно распознавали координаты данных, не теряя семантики отношений между координатами. Таким образом, задача автоматического обмена данными сводится к синхронизации координат данных между системами. Поэтому разрабатываемая система и называется "синхронизатор ТОФИ", так как главной задачей является синхронизация метаданных (координат данных) обменивающихся систем, основанная на модели данных ТОФИ. Синхронизация координат данных является сложной задачей, которая должна производиться человеком. Задачей синхронизатора ТОФИ является частичная автоматизация этого процесса. Для этого должны быть описаны структуры координат данных и системы их кодирования.

Каждая из перечисленных координат определена в базе данных в таблицах измерений. При этом каждая из них, как правило, является элементом некоторой более общей сущности, которую назовем "контейнером координаты". То есть, владелец данных, является элементом контейнера владельцев, свойство является элементом контейнера свойств, интервал времени (или период) является элементом контейнера интервалов времени (периодов). Причем один контейнер координат может быть вложен (являться элементом) в другой контейнер координат.

Мы предполагаем, что любая координата данных имеет одну из следующих структур, или, другими словами, является элементом одной из следующих структур:

1. Элемент;
2. Список;
3. Иерархия;
4. Куб.

Такие структуры присутствуют во всех информационных системах, так как объекты (владельцы данных), свойства, периоды и другие координаты являются, как описано выше, элементами более сложных структур в информационной модели. Совокупность всех элементов координат данных и их контейнеров (структур) назовем метаданными конкретной базы данных. Одной из главных функций синхронизатора является автоматизированный обмен и синхронизация метаданных. Таким образом, метаданные представляют собой описание различных структур координат данных и связей между ними. Например, владельцем данных обычно является некоторый объект, который сам является экземпляром некоторого класса объектов, при этом объекты в этом классе могут иметь структуру списка или иерархии. Тогда метаданные содержат описание класса с определенной структурой объектов и описание всех объектов этого класса.

В общем виде каждый экземпляр метаданных можно написать формально в виде $D_1(D_2(\dots D_k(E)\dots))$, где D_i – контейнеры координат вложенных друг в друга, – координата данных. Каждый контейнер координат и координата Е имеет свою структуру и тип. В технологии ТОФИ контейнерами координат "владелец данных" являются классы объектов, типы объектов, отношения между типами объектов, которые соответственно имеют структуру иерархия, иерархия и куб. Контейнерами координат "свойство данных" являются свойства на основе измерителя и группы свойств, которые имеют структуру куб и список соответственно. Контейнерами координат "статус данных" являются фактор, который имеет структуру список. Контейнерами координат "поставщик данных" является класс объектов и тип объектов, которые имеют структуру список или иерархия. Контейнерами координат "период" является тип периодов, который имеет структуру списка.

На основе концепции данных ТОФИ разработано пространство имен ТОФИ, в котором описаны формальные структуры данных (Габбасов, 2016 : 45). Пространство имен ТОФИ состоит из следующих XML-схем:

- base.xsd – хранит базовые классы;
- metadata.xsd – хранит классы для работы с метаданными;
- data.xsd – хранит классы для работы с данными;
- message.xsd – хранит классы для работы с сообщениями;

Каждый файл хранит в себе описание простых типов, глобальных элементов и составных типов. Синхронизатор ТОФИ является отдельным веб-приложением, который может быть интегрирован с платформой ТОФИ как ее модуль.

Функционально синхронизатор осуществляет сопоставление метаданных различных информационных систем на основе систем кодирования, автоматически (по расписанию) или вручную производит формирование метаданных, обмен метаданными с другими системами, синхронизацию метаданных, формирование данных для передачи другой системе, прием и передачу набора данных из/в другой(-ую) информационной(-ую) системы(-у) и т.д.

4 Результаты и обсуждения

Обмен данными с использованием синхронизатора ТОФИ основан на синхронизации метаданных обменивающихся систем. Если другие системы обмена данными, основанные на пространствах имен являются предметно-ориентированными, то пространство имен ТОФИ, в этом смысле, является универсальным. Но сложность внедрения предлагаемого подхода заключается в необходимости кодировать каждый экземпляр сущности информационной системы. Эффект от внедрения пространства имен ТОФИ может быть получен в случае принятия его в качестве стандарта в отрасли или государстве.

5 Заключение

В статье приведены обзор существующих методов обмена данными между информационными системами. Подробно описана технология обмена данными и метаданными с использованием синхронизатора ТОФИ. Сравнение его возможностей с другими технологиями позволяет сделать вывод о перспективности разрабатываемого подхода.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 4502/ГФ4.

Список литературы

- [1] ISO/IEC 2382-1:1993, Information technology. – Vocabulary. – Part 1: Fundamental terms. – 1993.
- [2] ISO/IEC 2382:2015 Information technology. – Vocabulary. – 2015.
- [3] Codd, Edgar F. Providing OLAP to User-Analysts: An IT Mandate // Computerworld. – 1993. – V. 27, No 30. – 26 p.
- [4] Codd Edgar F. A relational model of data for large shared data banks. Comm. ACM. – 1970. V. 13, No 6. – Pp. 377-387.
- [5] Черняк Л. Задачи управления мастер-данными // Открытые системы. – 2007. № 5. – С. 54-62.
- [6] Официальный сайт проекта NIEM [Электронный ресурс]. – 2006. – URL: www.niem.gov.
- [7] Присцилла Уолмсли. Создание IEPD NIEM. Моделирование системы обмена информацией NIEM [Электронный ресурс]. – 2010. – URL: www.ibm.com.
- [8] Официальный сайт формата обмена данными SDMX [Электронный ресурс]. – 2006. – URL: www.sdmx.org.
- [9] Акматкин Ю., Дроэксинов В., Конявский В. Стандарты моделей данных для обмена информацией как инструмент импортозамещения в стратегических информационных системах // PC Week. – 2014. – № 16 (871). – С. 26-52.
- [10] Официальный сайт протокола FIX [Электронный ресурс]. – 2006. – URL: <http://www.fixtradingcommunity.org>.
- [11] Разработка синхронизатора ТОФИ для обмена данными и метаданными между информационными системами: отчет о НИР (промежуточный) // АО "Нац. центр научно-техн. информ.": рук. Габбасов М.Б.; исполн: Куанов Т.Д., Абилькаева Ж.Н. и др. – Астана, 2015. – 88 стр. – № ГР 0115PK02743/

- [12] Габбасов М.Б. Онтология технологии ТОФИ // Сборник трудов по информационной безопасности. – Астана. – 2013. – С. 53-63.
- [13] Разработка синхронизатора ТОФИ для обмена данными и метаданными между информационными системами: отчет о НИР (промежуточный) // АО "Нац. центр научно-техн. информ.": рук. Габбасов М.Б.; исполн: Куанов Т.Д., Абилькаева Ж.Н. и др. – Астана, 2016. – 125 стр. – № ГР 0115PK02743.

References

- [1] ISO/IEC 2382-1:1993, Information technology. Vocabulary. Part 1: Fundamental terms (1993).
- [2] ISO/IEC 2382:2015 Information technology. Vocabulary (2015).
- [3] Codd, Edgar F. Providing OLAP to User-Analysts: An IT Mandate // Computerworld. – V. 27, No 30 (1993) : 26.
- [4] Codd Edgar F. «A relational model of data for large shared data banks», Comm. ACM, V. 13, No 6 (1970) : 377-387.
- [5] Chernyak L. Zadachi upravleniya master-dannyimi [Master data management tasks], Otkryтие системи, No 5 (2007) : 54-62.
- [6] Ofitsialnyiy sayt proekta NIEM [Official website of the project NIEM. Electronic resource], 2006. <http://www.niem.gov>.
- [7] Pristsilla Uolmsli. Sozdanie IEPD NIEM. Modelirovaniye sistemy obmena informatsiey NIEM [Create IEPD NIEM. Modeling the information exchange system NIEM. Electronic resource], 2010. <http://www.ibm.com>.
- [8] Ofitsialnyiy sayt formata obmena dannyimi SDMX [Official website of the Data Exchange Format SDMX. Electronic resource], 2006. <http://www.sdmx.org>.
- [9] Akatkin Yu., Drozhzhinov V., Konyavskiy V. «Standartyi modeley dannyih dlya obmena informatsiey kak instrument importozamescheniya v strategicheskikh informatsionnyih sistemah [Standards of data models for information exchange as an instrument for import substitution in strategic information systems]», No 16 (871), (2014) : 26-52.
- [10] Ofitsialnyiy sayt protokola FIX [Official website of the protocol FIX. Electronic resource], 2006. <http://www.fixtradingcommunity.org>.
- [11] «Razrabotka sinhronizatora TOFI dlya obmena dannyimi i metadannyimi mezhdu informatsionnyimi sistemami: otchet o NIR (promezhutochnyyiy) [Development of the TOFI synchronizer for data and metadata exchange between information systems: Report on research work (interjacent)]», AO "Nats. tsentr nauchno-tehn. inform.": ruk. Gabbasov M.B.; ispoln: Kuanov T.D., Abilkaeva Zh.N. i dr. Astana, No GR 0115RK02743 (2015).
- [12] Gabbasov M.B. «Ontologiya tehnologii TOFI [Collection of works on information security]», Sbornik trudov po informatsionnoy bezopasnosti. Astana, (2013).
- [13] «Razrabotka sinhronizatora TOFI dlya obmena dannyimi i metadannyimi mezhdu informatsionnyimi sistemami: otchet o NIR (promezhutochnyyiy) [Development of the TOFI synchronizer for data and metadata exchange between information systems: Report on research work (interjacent)]», AO "Nats. tsentr nauchno-tehn. inform.": ruk. Gabbasov M.B.; ispoln: Kuanov T.D., Abilkaeva Zh.N. i dr. Astana, No GR 0115RK02743 (2016).

IRSTI 20.19.19

Dictionary extraction based on statistical data

Mussina A., bachelor of Technics and Technologies, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77759295274, E-mail: mussina.aigerim95@gmail.com

Aubakirov S., PhD, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77002200051, E-mail: aubakirov.sanzhar@gmail.com

Automatic text summarization is an actual problem when working with a large amount of information. Most of the algorithms that work on the basis of statistical data build a summary text content by counting the similarity of text units and units importance. Text unit could be a word, sentence or paragraph, in our case unit is a sentence. Similarity is considered the presence of key-words in the sentences. Key-words are words that indicate the topic of the text. In this research work we will describe an automatic extraction of key-words dictionary, where key-words are N-grams with N from 1 to 5. Two algorithms were implemented: getting of words that occur only in one of two different corpora and getting of words with high importance. Importance of N-gram denotes its belonging to the topic of the text. Used text languages are Russian and Kazakh. The algorithms show important results, both of them make sense in constructing of full key-words dictionary.

Key words: automatic extraction, key-words, N-gram.

Извлечение словаря на основе статистических данных

Мусина А.Б., бакалавр техники и технологий, Казахский национальный университет имени аль-Фараби,

г. Алматы, Республика Казахстан, +77759295274, E-mail: mussina.aigerim95@gmail.com Аубакиров С.С., PhD, Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77002200051, E-mail: aubakirov.sanzhar@gmail.com

Автоматическое реферирование текста это актуальная проблема при работе с большим количеством информации. Большинство алгоритмов, которые работают на основе статистических данных, подсчитывают схожесть текстовых единиц и их важность при составлении краткого содержания. Текстовой единицей может быть слово, предложение или параграф, в нашем случае это предложение. Сходство считается наличием ключевых слов в предложениях. Ключевые слова - это слова, которые указывают на тематику текста. В этой исследовательской работе мы опишем автоматическое извлечение ключевых слов, где ключевыми словами являются N-граммы с N от 1 до 5. Реализованы два алгоритма: получение слов, которые встречаются только в одном из двух разных корпусов и получение слов с высокой степенью важности. Важность N-gram обозначается его принадлежностью к тематике текста. Использованы тексты на русском и казахском языках. Алгоритмы показывают важные результаты, оба могут быть использованы в создании полного словаря ключевых слов.

Ключевые слова: автоматическое извлечение, ключевые слова, N-gram

Статистикалық деректер негізінде дайындау сөздік

Мусина А.Б., техника және технологиялар бакалавры, әл-Фараби атындағы Қазақ Үлттүк университеті,

Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77759295274, E-mail: mussina.aigerim95@gmail.com Аубакиров С.С., PhD, әл-Фараби атындағы Қазақ Үлттүк университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77002200051, E-mail: aubakirov.sanzhar@gmail.com

Мәтінді автоматты реферерлеу - бұл ақпараттың үлкен санымен жұмыс істеу кезіндегі өзекті мәселе. Статистикалық деректердің негізінде жұмыс істейтін алгоритмдердің көшілігі мәтіндік бірліктердің үқастығын және олардың қысқаша мазмұн жасау кезіндегі маңыздылығын есептейді. Мәтіндік бірлік ретінде сөз, сөйлем немесе бөлім болуы мүмкін, біздің жағдайда бұл- сөйлем. Сөйлемдерде кілт сөздердің болуы, үқастық болып саналады. Кілт сөздер - олар мәтіннің мазмұнымен болмысына нұскайтын сөздер. Осы зерттеу жұмысында біз авттоматты түрде кілт сөздерді алуды сиппаттаймыз, бұл жерде N - грамматалар N 1-ден бастан 5-ке дейін кілт сөздер болып табылады. Қазіргі таңда еki алгоритм іске асырылды олар - әр түрлі еki корпустардың тек қана бірінде кездесетін сөздерді алу және жоғары дәрежелі маңыздылығы бар сөздерді алу. N -грамматалардың маңыздылығы оның мәтіннің мазмұнына тиістілігіне қарай белгіленеді. Қазақ және орыс тілдеріндегі мәтіндер қолданылды. Алгоритмдер маңызды нәтижелер көрсетуде, екеуі де толық кілт сөздер сөздігін құру барысында пайдаланылуы мүмкін.

Түйін сөздер: автоматты шыгарып алу, кілтті сөздер, N-gram

1 Introduction

The amount of information is extremely growing up, data processing is becoming time and resource consuming. The solution could be the usage of text summarization, which is the object of study. Getting only meaningful part of the text will give approximately the same knowledge as full text does. During the research on this technology, we are faced with the need to use key-words dictionary. Without the knowledge about semantic and syntactic meaning of words and phrases it is very hard to find out key-words of the text topic. The only thing we have to use is statistical data as frequency of occurrence. Dictionary extraction is the subject of our study. The goal of this research work is to extract topic dictionary of key-words. Our final goal is to develop automatic summarizer that will effectively work on our corpora.

2 Related works

The article (Chuleerat 2003: 9-16) presents an algorithm for extracting the most significant paragraphs from the text in Thai, where the significance of the paragraph depends on the local and global properties of the paragraph. The main emphasis is on the knowingly correct distribution of paragraphs, Thai language is very different from European languages and is more similar to Chinese and Japanese in terms of fuzzy division of words and sentences. We use the Russian and Kazakh languages, which have a clear sentence structure. However, if the text of the message is large enough, this algorithm can be used to identify significant paragraphs. The (Mandar 1997: 39-46, Fukumoto 1997: 291-298) works propose that each word in text can have weight and depending on this weight it is possible to denote the important part of information. However, article (Fukumoto 1997: 291-298) uses words weight among a paragraph and the extraction unit in this work is a paragraph. The works (Federico 2016: 65-72, Yacko 2002) mainly depict one view of summarization methods. Authors suppose that each sentence has connection with other sentences and this connection is their similarity. In the work (Federico 2016: 65-72) TextRank algorithm presented, which is the most popular in text summarization. It uses the similarity of sentences in words to identify informative sentences. The main feature is denoted in construction of a graph with sentences as vertex(tops) and similarity connections as edges, where each edge has its value calculated from similarity function. In work (Yacko 2002) similarity of sentences defined in common words, sentence with more connections recognized as informative. The way of constructing a

graph seems the most preferable since it operates with sentences, and similarity functions use statistical data as word frequency. Comparing of all words may cause distortion of results, to prevent this it is useful to consider only important words, key-words. In work (Iain 2016) a method of identifying the most important words using the corpora of texts from songs of a certain genre is proposed. The author defines the coefficient M_w as an indicator of belonging to the genre. The coefficient is calculated by the formula

$$M_w = \log \frac{N_w^{metal}}{N_w^{brown}}$$

where N_w^{metal} is the frequency of occurrence of the word w in the body of lyrics and N_w^{brown} is the frequency of occurrence of the word w in the Brown corpus (Wikipedia Brown Corpus). To calculate the "emergency" of the word, we decided to use the above formula, in our case N_w^{metal} is replaced by $N_w^{emergency_news}$ - the frequency of occurrence of the word w in the emergency message body and N_w^{brown} is replaced by N_w^{news} is the frequency of occurrence of the word w in the news bulletin. According to these data, a list of the most and least "emergency" words is constructed. Applications of many algorithms and methods of text analysis depends on statistical information about text (Riedl 2012: 47-70), statistics about N-grams are an important building block in knowledge discovery and information retrieval (Berberich 2013: 101-112). In this project work, segmentation of text is considered according to words of different lengths within a single sentence. In the English literature, the term tokenization (The Art of Tokenization) is used. To denote a segment, we use the term N-Gram. N-Gram are sequences of adjacent words or tokens in a text document or line, where N is the length of the sequence (Berberich 2013: 101-112). A sequence of two consecutive elements is often called a bi-gram, a sequence of three elements is called a trigram. At least four or more elements are designated as N-grams, N is replaced by the number of consecutive elements (Wikipedia N-grams). For the calculation of N-grams already developed technologies such as Elasticsearch (Elasticsearch engine guide) and SRILM (The SRI Language Modeling Toolkit) (Srilm project). In (Ngram count), calculation of repetitions of N-grams in the body of texts or in a sentence using a finite automaton is shown. The summary evaluation process described in (Federico 2016: 65-72, Sandeep 2009: 521-529) and they involve usage of ROUGE. Recall-Oriented Understudy for Gisting Evaluation (Chin-Yew Lin 2004: 74-81) is a set of metrics used in automatically generated summary evaluation and in machine translation. This kind of evaluation does not useful for us, because it assumes comparison of automatically produced summary and human generated summary, "ideal summary". This project work d not assume interaction with human. The hypothesis from work (Sandeep 2009: 521-529) stays that the summary must act as the full document, such that their probability distributions are very close to each other. Authors propose application of KL (Kullback-Leibler) Divergence, the calculation of entropy of summary, in evaluation process.

3 Source and methods

In this research work we will consider the case of processing the information about emergence situations along the news data. We have used corpora of news articles from web. For this purpose web crawler was implemented. It parses 21 state web-sites and 22 news portals. We categorize news articles to «News», that are news messages about general human life,

and «Emergency News», that are messages with notifications about some danger and/or unfavorable situations.

3.1 Tools used

To preprocess text, index and extract N-gram we used the following tools: Apache Lucene, Elasticsearch and Apache OpenNLP. Apache Lucene is a library from the Apache Software Foundation for full-text search, it is also used in computational linguistics. Apache Lucene provides many tools for building indexes based on the TF-IDF model. Using Apache Lucene, we removed all stop-words from the texts, extract all N-gram from 1-gram to 5-gram and built indexes. Elasticsearch is a search tool based on Apache Lucene. The main feature of Elasticsearch is the ability to perform high-speed search in the database with a large number of documents using indexes. Apache OpenNLP is a tool for working with natural language, it can perform various operations with text, such as tokenization, division of text into sentences. The tokenization of OpenNLP has been replaced by ShingleFilter's tokenization, since the latter is able to extract N-gram from sentences of different lengths at once, while OpenNLP alone can only split sentences into separate words. The used corpora is classified and marked with meta data (message title, publication date, TF-IDF, tags). Data are classified into "News" and "Emergency News".

3.2 Implementation of algorithms

We have implemented the algorithm for extracting the emergency N-gram dictionary and calculating the "emergency" of N-grams. At this stage, $N = 5$ (phrases of up to 5 words). Both algorithms extract and count the N-gram frequency.

Algorithm 1: Extract and calculate the frequency of occurrence of N-gram: 1. We retrieve all messages of the given class. Proceed to step 2. 2. We form a common text from the title lines and the main text of the messages. Proceed to step 3. 3. We divide the text into sentences. We proceed to step 4. 4. We extract all possible N-gram and perform the calculation of frequency.

Algorithm 2: Extracting the vocabulary of extreme words. 1. We extract the N-gram with the frequency of occurrence according to the algorithm 1. Proceed to step 2. 2. Write the N-gram from the text, that classified as "Emergency News" to emergency dictionary if the N-gram is missing from messages classified as "News".

The calculation of "emergency" performed, according to the formula presented in section 2, Related works. Two types of N-gram are considered for which calculation is performed. The first type is N-gram with minFreq greater than 1 in two types of messages. The second type is N-gram with minFreq greater than 5 in two types of messages.

Algorithm 3: calculation of "emergency" N-gram. 1. We extract the N-gram with the frequency of occurrence according to the algorithm 1. Proceed to step 2. 2. We check that N-gram from «Emergency News» is not among the N-gram from "News". If it occurs in both, proceed to step 3. 3. If the N-gram occurs in messages of the class "News" and "Emergency News" more or equal to minFreq (the minimum frequency of occurrence), then calculate for its "emergency". Proceed to step 2.

In the work (Iain 2016), the author highlight the possible distortion of the results of the third algorithm, caused by rare words. As a decision, only words that occur at least 5 times

in both cases are taken into account. In this paper we denote this solution by minFreq. If the frequency of occurrence of N-gram in both classes is greater than or equal to minFreq, then "emergency" is calculated for it.

4 Results and discussion

Table 1 - Source data for dictionary extraction

	Amount
News articles classified as «Emergency News»	2592
News articles classified as «News»	75.901

In Table 1 presented data about corpora, amount of news articles classified as «Emergency News» and «News». General news is nearly 30 times more than emergency.

Table 2 - Algorithm 1 results

	Amount
N-grams from «Emergency News»	483.052
N-grams from «News»	26.774.077

Amount of N-grams by algorithm 1 presented in Table 2. There are more news articles classified as «News», because of this amount of N-grams is also more, almost 55.4 times.

Table 3 - Algorithm 2 results

	Amount
Dictionary of emergency N-gram	202.884

Table 3 shows that about 280 thousand N-gram occurs in news articles of both classes. The rest is the dictionary of emergency N-gram.

Table 4 - Top-10 most frequent from the dictionary of emergency N-gram

	Dictionary key-words N-gram	Frequency
1	явлений погоды (weather phenomena)	160.0
2	прогноз важнейших явлений погоды (forecast of the most important weather phenomena)	158.0
3	важнейших явлений погоды (the most important weather phenomena)	158.0
4	явлений погоды информации (weather phenomena information)	116.0
5	погоды информации (weather information)	116.0
6	прогноз важнейших явлений погоды информации (forecast of the most important weather information)	115.0
7	важнейших явлений погоды информации (the most important weather information)	115.0
8	погоды информации филиала ргп (weather information of the branch of the PPP)	98.0
9	важнейших явлений погоды информации филиала (the most important weather information of the branch)	98.0
10	погоды информации филиала (weather information of branch)	98.0

All the phrases, from Table 4, within the current corpora are found only in messages of the class "Emergency News". The top 10 emergency words are presented on the frequency of their occurrence. All ten N-grams which are on the top connected with each other. Probably the one very common sentence repeats in most of emergency news.

Table 5 - Algorithm 3 results

	Amount
N-gram with computed «emergency», in case of minFreq=1	280.168
N-gram with computed «emergency», in case of minFreq=5	19.293

The number of N-gram for which the "emergency" was calculated by algorithm 3 is shown in Table 5. The calculations were carried out with minFreq equal to 1 and 5. As can be seen with minFreq = 1, the amount of N-gram equals the number of N-grams not included in the dictionary of emergency words by algorithm 2.

Table 6 - Results of algorithm 3, minFreq = 1

	“emergency” > 0	“emergency” < 0	“emergency” = 0
N = 1	669	24018	1071
N = 2	5852	41059	19030
N = 3	7619	26843	31499
N = 4	7554	20337	35338
N = 5	6887	16480	35912

The number of N-grams with “emergencies” greater than 0, less than 0 and equal to 0 in case of minFreq = 1 presented in Table 6. When “emergency” is equal to 0, it means that N-gram occurred in the “NOTIFICATION” messages the same time as in “NEWS” message, since in formula 1 we use logarithm. Here we can notice that amount of uni-grams is more less than other N-grams.

Table 7 - Results of algorithm 3, minFreq = 5

	“emergency” > 0	“emergency” < 0	“emergency” = 0
N = 1	223	6364	31
N = 2	1040	4080	302
N = 3	1141	1760	407
N = 4	967	954	355
N = 5	776	587	306

The number of N-grams with “emergencies” greater than 0, less than 0 and equal to 0 in case of minFreq = 5 presented in Table 7. Here bi-grams and tri-grams occur more than other N-grams.

Table 8 - Top-10 N-gram with high «emergency» in case of minFreq=1

	“emergency” N-grams	“emergency” value
1	подземных толчков (tremors)	4.532599493153256
2	землетрясение магнитудой (earthquake of magnitude)	4.436751534363128
3	сведений ощущимости (sensibility data)	3.8918202981106265
4	алматы границе (almaty border)	3.8501476017100584
5	методическая экспедиция (methodical expedition)	3.713572066704308
6	сейсмологическая (seismological)	3.713572066704308
7	опытно методическая (expertly methodical)	3.713572066704308
8	сейсмологическая опытно методическая экспедиция (seismological experimental expedition)	3.713572066704308
9	сейсмологическая опытно методическая (seismological experimental methodological)	3.713572066704308
10	опытно методическая экспедиция (experimental expedition)	3.713572066704308

The top 10, shown in Table 8, mainly consists of N-gram about earthquake. Indeed, these words and phrases can rarely be found in the usual news. However, the result is slightly

distorted due to words that usually appear together, for example, the phrases from 5 th to 10 th are from the same sentence and their “emergency” is also equal. Probably the whole phrase is presented by 8 th N-gram. This means that usually people use the same sentence construction when they write about earthquake.

Table 9 - Top-10 N-gram with low «emergency» in case of minFreq=1

	“emergency ” N-grams	“emergency” value
1	де (particle)	-9.167328481382892
2	бойынша (according to)	-9.105757331783742
3	туралы (about)	-8.835210463664092
4	бір (one)	-8.668711839055147
5	кг (kg)	-8.426173793029069
6	болады (will be)	-8.352554369474591
7	мемлекеттік (the state)	-8.345455428161928
8	жол (road)	-8.339261982923576
9	болды (was)	-8.328934041955529
10	бұл (this)	-8.294216292881348

The low "emergency" of N-gram at minFreq = 1 is presented in Table 9. These words and phrases are more common in probably all news article, but they appear more in general news. For example, 6 th and 9 th presents the time form of the same auxiliary verb, 4 th is a number, 5 th the measure abbreviation. All N-grams, or more concrete uni-gram, are in Kazakh language.

Table 10 - Top-10 N-gram with high «emergency» in case of minFreq=5

	“emergency ” N-grams	“emergency” value
1	магнитудой (magnitude)	3.040184036124825
2	объявлено штормовое (storm announced)	2.929287174145838
3	объявлено штормовое предупреждение (storm warning announced)	2.929287174145838
4	прогноз важнейших явлений (forecast of the most important phenomena)	2.8965256234705428
5	важнейших явлений (most important phenomena)	2.8965256234705428
6	горных районах алматинской (mountainous areas of Almaty)	2.70805020110221
7	км юго запад (southwest km)	2.662587827025453
8	землетрясение (earthquake)	2.631089159966082
9	прогноз важнейших (forecast of the most important)	2.608843551018762
10	эпицентр землетрясения (earthquake epicenter)	2.5508646175797978

Comparing the results from Table 8 and Table 10, you can see that the N-gram about earthquake mostly appears in “Emergency News”. In table 10, where minimum frequency value is equal to 5 in both classified news articles corpora, predominantly represented N-grams about storm. We can say that “News” articles also often use N-grams about storms.

Table 11 - Top-10 N-gram with low «emergency» in case of minFreq=5

	“emergency” N-grams	“emergency” value
1	мен (I)	-7.959683517398391
2	және (and)	-6.909709889225459
3	сборной (team)	-6.692827882439268
4	үшін (for)	-6.665220379421287
5	жана (new)	-6.664153885765531
6	встречи (meetings)	-6.5789733956449306
7	суммы (amount)	-6.354080143708786
8	имеет (has)	-6.350594807621779
9	наших (our)	-6.344173302776835
10	мажилиса (mazhilis)	-6.306275286948016

Table 11 shows words and phrases rarely found in emergency news. These N-gram more characterize the news of the class "News".

The main distortion in results caused by list of stop-words, which is not full, because of that dictionary contains abbreviations and not meaningful N-grams. Another problem connected with absence of stemming support. The results could be more clear and effective with applying of Russian and Kazakh stemming algorithm. Some N-grams, mostly unigrams, has equally popular variations. Here variations are N-grams with changed affix part. Generally, they are the same, but dictionary extraction algorithm takes them as different N-grams. For example: “сейсмологических”, “сейсмологический”, “сейсмологическая”. All previous words translated to English as “seismological”, they have difference only in affixes that denote the number and gender of noun to which those adjectives connected. We should take into account the existence of N-grams with place names, for example “Пожар в “Абу Даби Плаза””. The “Абу Даби Плаза” is a name of building, but since such N-gram, “Пожар в “Абу Даби Плаза””, does not appear in “NEWS” messages, it was written to dictionary. Finally, during tests we have noticed that some notification N-grams do not appear in dictionary, for example “Подземные толчки”. Each word exists in dictionary separately, but not together. This situation is possible because such N-gram does not appear in “NEWS” messages corpora and as a result the “emergency” could not be calculated. We should take into account such N-grams.

5 Conclusion

Table "Top 10" show that N-gram associated with accidents, assurance and search and rescue (SAR) operations are most often found in the emergency messages body. To get mostly full dictionary we can replenish results of Algorithm 2 (Extracting the vocabulary of extreme words) with words and phrases from results of Algorithm 3 (calculation of N-gram's emergency) with "emergency" above some defined threshold value. We need to calculate this threshold value since the results of Algorithm 3 showed that N-gram, most suitable for one particular class, can occur in texts of both classes.

Future work. The results of extracting the vocabulary of emergency words and calculating the "emergency" of words in the future will be used in identification of important part of text. The importance of text unit will be defined via its local properties, the presence of N-gram from dictionary, and global properties, the presence of nearby text units with high values of local properties. It is planned to use this importance identification in automatic document summarization.

This work was partially supported by the grant of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project 3350/GF4 MON RK).

References

- [1] Berberich K. and Bedathur S., "Computing n-gram statistics in MapReduce," *ICPS - International Conference Proceedings Series* (2013): 101-112
- [2] Chin-Yew Lin, "ROUGE: A Package For Automatic Evaluation Of Summaries," *ACL Anthology Network* (2004): 74–81, accessed October 20, 2016
- [3] Chuleerat Jaruskulchai and Canasai Kruengkrai, "A Practical Text Summarizer by Paragraph Extraction for Thai,"(paper presented at the Proceedings of the Sixth International Workshop on Information Retrieval with Asian Languages, Sapporo, Japan, July 7, 2003)
- [4] CraigTrim. "The Art of Tokenization." Accessed June 30, 2015, <https://www.ibm.com/developerworks/community/blogs/nlp/entry/tokenization?lang=en>.
- [5] Elasticsearch. "Elasticsearch engine guide." Accessed October 25, 2015, <https://www.elastic.co/guide/en/elasticsearch/reference/1.4/index.html>.
- [6] Federico Barrios, Federico Lopez, Luis Argerich, Rosita Wachenchauzer, "Variations of the Similarity Function of TextRank for Automated Summarization," *Cornell University Library* (2016): 65-72, accessed November 14, 2016, arXiv:1602.03606.
- [7] Fukumoto F., Suzuki Y., Fukumoto J., "An Automatic Extraction of Key Paragraphs Based on Context Dependency," *Natural language processing* Vol. 4 (1997): 89-109, DOI:10.5715/jnlp.4.2_89.
- [8] Iain. "Heavy Metal and Natural Language Processing - Part 1." Accessed September 20, 2016, <http://www.degeneratestate.org/posts/2016/Apr/20/heavy-metal-and-natural-language-processing-part-1/>.
- [9] Mandar Mitrat, Amit Singhal, Chris Buckleytt, "Automatic Text Summarization by paragraph Extraction," *Intelligent Scalable Text Summarization* (1997):39-46.
- [10] Ngram count. "Ngram count." Accessed October 25, 2016, <http://www.ling.ohio-state.edu/~bromberg/ngramcount/ngramcount.html>.
- [11] Riedl M. and Biemann C., "Text segmentation with topic models," *Journal for Language Technology and Computational Linguistics* Vol.27 (2012):47-70
- [12] Sandeep S. and Jagadeesh J., "Summarization Approaches Based on Document Probability Distributions,"(paper presented at Proceedings of the 23rd Pacific Asia Conference on Language, Information and Computation, Hong Kong, China, December 3-5, 2009).

- [13] Srilm project. "Srilm project." Accessed October 25, 2015,
<http://www.speech.sri.com/projects/srilm/>.
- [14] Wikipedia. "Brown Corpus." Accessed September 20, 2016,
https://en.wikipedia.org/wiki/Brown_Corpus.
- [15] Wikipedia. "N-grams." Accessed September 20. 2015,
<https://en.wikipedia.org/wiki/N-gram>.
- [16] Yacko V.A., "Simmetrichnoe referirovanie: teoreticheskie osnovy i metodika," *Nauchno-tehnicheskaya informaciya* Ser.2 (2002): 18-28

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Айсагалиев Серикбай Абдиғалиевич* - профессор Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук
2. *Айсагалиева София Серикбаевна* - главный научный сотрудник НИИ математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
3. *Ақанбай Нұрсадық* - и.о профессора Казахского национального университета имени аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
4. *Алдібеков Тамаша* - и.о профессора Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор физико-математических наук
5. *Аубакиров Санжар* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби
6. *Габбасов Марс Беккалиевич* - генеральный директор Компании системных исследований "Фактор г. Астана, кандидат физико-математических наук
7. *Жайдарова Александра* - начальник отдела по развитию информационных систем, Институт информационных технологий и инновационного развития, Казахский национальный университет имени аль-Фараби
8. *Куанов Т.Д.* - заведующий отделом Компании системных исследований "Фактор г. Астана
9. *Копнова Оксана Леонидовна* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби
10. *Кистаубаев Ерлан* - начальник отдела планирования и мониторинга ИТ ресурсов, Институт информационных технологий и инновационного развития, Казахский национальный университет имени аль-Фараби
11. *Мутанов Галимқаир Мутановиич* - ректор Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук, профессор, академик НАН РК
12. *Мамыкова Жаныл Дақсуманғалиевна* - директор Института информационных технологий и инновационного развития, Казахский национальный университет имени аль-Фараби
13. *Мусина Айгерим Болатовна* - бакалавр техники и технологий Казахского национального университета им. аль-Фараби
14. *Сулейменова Зоя Изтелеуовна* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набраные только в текстовом формате $\text{\LaTeX}2\epsilon$ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat.dairbayeva@gmail.com (ответственному секретарю редакции, Даирбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX}2\epsilon$ или формат eps [см. п.7]. Указывается код по УДК. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисуточными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 6 страниц.

Структура статьи.

Первая страница:

- 1) Первая строка - номер УДК, выравнивание - по левому краю, шрифт - полужирный.
- 2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 3) Автор(ы) статьи - с указанием имени и фамилии, ученой степени, ученого звания, занимаемой должности, места работы, город, страна, контактный телефон, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
- 4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.
- 5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.

Последующая страница (новая):

- 6) Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором

аспекте.

7) Материал и Методы - должны состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала - один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

8) В секции обзор литературы - должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

9) В разделе Результаты и Обсуждение - приводится анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводится выводу по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) Заключение, выводы - обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый - в оригинале, второй - романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) – (год в круглых скобках) – название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossiiskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4.(2011): pp. 8-30.

Список литературы представляется в алфавитном порядке, и ТОЛЬКО те работы, которые цитируются в тексте. Стиль оформления списка литературы на русском и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления"(требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления Романизированного списка литературы, а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений - Chicago Style (www.chicagomanualofstyle.org).

В данном разделе необходимо учесть:

- а) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.
- б) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
- в) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
- г) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.

- 12) Ссылки на цитируемые работы в тексте даются в скобках, с указанием первого автора работы, год издания: номер страниц(-ы). Например, (Залесский 1991: 25). В случае, наличия в списке литературы нескольких работ одного и того же автора, изданных в один год, то дополнительно к году издания добавляется буква "а" "б" и т.д. Например, (Садуова, 2001а: 15), (Садуова, 2001б, 22).
6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов L^AT_EX2ε и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами amsmath и amssymb. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.
- Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.
7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps , либо выполнеными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета Latexcad. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера Conversion Artist. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.
- Редакция вправе отказатьься от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта""ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятий и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМҰНЫ - СОДЕРЖАНИЕ**1-бөлім****Математика***Aйсагалиев С.А., Айсагалиева С.С.*

Построение решения задачи управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями 3

Алдабеков Т.М.

Дифференциальные системы при малых возмущениях 23

Akanbay N., Suleimenova Z.

On the probabilistic solution of the Cauchy problem for parabolic equations 34

Раздел 1**Математика****2-бөлім****Информатика***Mutanov G.M., Mamykova J.D., Nadirbaeva G.M., Kornova O.L., Zhaydarova A.M., Kistaubaev E.B.*

Application of the cloud-based service of business intelligence in the information infrastructure of the higher education institution 46

Раздел 2**Информатика***Габбасов М.Б., Куанов Т.Д.*

Подходы и проблемы обмена данными между информационными системами 60

Mussina A., Aubakirov S.

Dictionary extraction based on statistical data 73

Сведения об авторах 84

К сведению авторов 85

CONTENS
Section 1
Mathematics

<i>Aisagalieva S.A., Aisagalieva S.S.</i>	
Construction of a solution of the controllability problem for linear integral and differential equations with restrictions	3
<i>Aldibekov T.M.</i>	
Differential systems under small perturbations	23
<i>Akanbay N., Suleimenova Z.</i>	
On the probabilistic solution of the Cauchy problem for parabolic equations	34

Section 2
Computer science

<i>Mutanov G.M., Mamykova J.D., Nadirbaeva G.M., Kopnova O.L., Zhaydarova A.M., Kistaubaev E.B.</i>	
Application of the cloud-based service of business intelligence in the information infrastructure of the higher education institution	47
<i>Gabbassov M.B., Kuanov T.D.</i>	
Approaches and problems of data exchange between information systems	60
<i>Mussina A., Aubakirov S.</i>	
Dictionary extraction based on statistical data	73
Сведения об авторах	84
К сведению авторов	85