

ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ҚазҰУ ХАБАРШЫСЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК КазНУ

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science

№ 1 (93)

Алматы
«Қазақ университеті»
2017

Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного
согласия Республики Казахстан, свидетельство № 956-Ж от 25.11.1999 г.
(Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.). Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия

научный редактор – М.А. Бектемесов - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби;
заместитель научного редактора – А.Б. Кыдырбекулы – д. т. н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби;
ответственный секретарь – Г.М. Даирбаева – к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби.

Айсагалиев С.А. – д.т.н., профессор, КазНУ
им.аль-Фараби, Казахстан

Алексеев А. – асс. профессор, Университет
штата Калифорнии в Нортридж, США

Алиев Ф.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик НАН
Азербайджана, Институт прикладной матема-
тики Бакинського государственного университе-
та, Азербайджан

Ахмед-Заки Д.Ж. – д.т.н., директор Департа-
мента профессионального и технического обра-
зования МОН РК, Казахстан

Ахметов М. – доктор Ph.D., профессор, Средне
Восточный Технический Университет, Турция

Бадаев С.А. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ
им.аль-Фараби, Казахстан

Гасников А.В. – д.ф.-м.н., Московский физико-
технический институт, Россия

Джумадылдаев А.С. – д.ф.-м.н., профессор, ака-
демик НАН РК, Институт математики и ма-
тематического моделирования, Казахстан

Жайнаков А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, академик
НАН КР, Кыргызский государственный техниче-
ский университет им. И.Раззакова, Кыргызстан

Кабанихин С.И. – д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр.
РАН, Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН, Россия

Калтаев А.Ж. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ
им.аль-Фараби, Казахстан

Кангузин Б.Е. – д.ф.-м.н., профессор, КазНУ
им.аль-Фараби, Казахстан

Кудайбергенов К. – д.ф.-м.н., Казахстанский ин-
ститут менеджмента, экономики и прогнози-
рования, Казахстан

Майнке М. – профессор, Департамент Вычисли-
тельной гидродинамики Института Аэродина-
мики, Германия

Малышкин В.Э. – д.т.н., профессор, Новоси-
бирский государственный технический универ-
ситет, Россия

Мейрманов А.М. – д.ф.-м.н., профессор, Белго-
родский государственный университет, Россия

Милошевич Х. – д.ф.-м.н., профессор, Универси-
тет Приштины, Сербия

Мухамбетжанов С.Т. – д.ф.-м.н., профессор,
КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан

Отелбаев М.О. – д.ф.-м.н., профессор, академик
НАН РК, Евразийский национальный универси-
тета им. Л.Н. Гумилева, Казахстан

Ружанский М. – д.ф.-м.н., профессор, Имперский
колледж Лондона, Великобритания

Рысбайулы Б. – д.ф.-м.н., профессор, Междуна-
родный университет информационных техноло-
гий, Казахстан

Садыбеков М.А. – д.ф.-м.н., член-корр. НАН РК,
Институт математики и математического
моделирования МОН РК, Казахстан.

Тайманов И.А. – д.ф.-м.н., профессор, академик
РАН, Институт математики им. С.Л. Соболе-
ва СО РАН, Россия

Тукеев У.А. – д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-
Фараби, Казахстан

Умирбаев У.У. – д.ф.-м.н., профессор, член-корр.
НАН РК, Евразийский национальный универси-
тет им. Л. Н. Гумилёва, Казахстан

Шиничи Накасука – доктор Ph.D., профессор,
Университет Токио, Япония

Шокин Ю.И. – д.ф.-м.н., профессор, академик
РАН, Институт вычислительных технологий
СО РАН, Россия

Юлдашев З.Х. – д.ф.-м.н., профессор, Националь-
ный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан

Научное издание

Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика, № 1(93) 2017.

Редактор – Г.М. Даирбаева. Компьютерная верстка – Б.А. Аетова

ИБ N 10758

Подписано в печать 29.03.2017 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная. Печать цифровая. Объем 10,4 п.л.

Тираж 500 экз. Заказ N 1333. Издательский дом “Қазақ университеті”

Казахского национального университета им. аль-Фараби. 050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома “Қазақ университеті”.

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

УДК 517.968.72

**Существование решения задачи управляемости для линейных
интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями**

Айсағалиев С.А. – д.т.н., профессор, Қазақстан ұлттық университеті атындағы
Алматы-Фараби, г. Алматы, Республика Қазақстан, +77272211573,
E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Айсағалиева С.С. – к.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник,
Научно-исследовательский институт математики и механики Казахского
национального университета имени аль-Фараби, г. Алматы,
Республика Казахстан, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Рассматривается управляемый процесс, описываемый линейным интегро-дифференциальным уравнением с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов управления. Исследование управляемости интегро-дифференциальных уравнений является новым направлением в теории интегро-дифференциальных уравнений. Проблема управляемости, возникшая от потребности решения актуальных задач в области естественных наук, медицине, экономике, технических наук, ставит более сложные задачи для интегро-дифференциальных уравнений. В предыдущих работах автора исследованы проблемы управляемости процессов описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов управления. В данной работе делается попытка распространить эти результаты на интегро-дифференциальные уравнения. Получены необходимые и достаточные условия управляемости процессов для линейных интегро-дифференциальных уравнений путем неособого преобразования и построения общего решения одного класса интегральных уравнений.

Ключевые слова: управляемость, интегро-дифференциальные уравнения, оптимальное управление, минимизирующие последовательности.

**Шектеулері бар сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулері үшін
басқарымдылық есебінің шешімінің бар болуы**

Айсағалиев С.Ә. – т. ғ. д., профессор, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы,
Қазақстан Республикасы, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Айсағалиева С.С. - ф.-м. ғ. к., доцент, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Математика
және механика ғылыми-зерттеу институтының бас ғылыми қызметкері, Алматы, Қазақстан
Республикасы, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

Фазалық және интегралдық, сондай-ақ, басқару мәніне қойылған шектеулері бар шекаралық шарттарында сызықты интегро-дифференциалдық теңдеумен сипатталатын басқарылатын үдеріс қарастырылады. Интегро-дифференциалдық теңдеулердің басқарымдылығын зерттеу интегро-дифференциалдық теңдеулер теориясындағы жаңа бағыт болып табылады. Жаратылыстану ғылымы, медицина, экономика, техникалық ғылымы аясындағы актуалды есептерді шешуді қажетсінуден туындаған басқарымдылық есебі интегро-дифференциалдық теңдеулер үшін неғұрлым күрделі есептерді қарастыруға мүмкіндік береді.

Автордың алдыңғы жұмыстарында фазалық және интегралдық, сонымен қатар, басқару мәніне қойылған шектеулері бар шекаралық шарттарында қарапайым дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын үдерістің басқарымдылық есебі зерттелінген. Бұл жұмыста да сол нәтижелерді интегро-дифференциалдық теңдеулеріне қолдану әрекет етіледі. Сызықты интегро-дифференциалдық теңдеулер үшін ерекше емес түрлендіру және бір классты интегралдық теңдеулердің жалпы шешімін құру жолымен үдерістердің басқарымдылығының қажетті және жеткілікті шарттары алынған.

Түйін сөздер: басқарымдылық, интегро-дифференциалдық теңдеулер, тиімді басқару, минимумдаушы тізбектер.

The existence of a solution of the controllability problem for linear integral and differential equations with restrictions

Aisagaliev S.A. – Dr.Sci.(Tech.), Al-Farabi Kazakh National university, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77272211573, E-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Aisagalieva S.S. – Can. Sci.(Phys-Math.), Associate Professor, Chief Researcher, Research Institute of Mathematics and Mechanics of the al-Farabi Kazakh National University, +77273773223, E-mail: a_sofiya@mail.ru

A controlled process described by linear integral and differential equation with boundary conditions in the presence of phase and integral constraints with the limited control resources is considered. Research of controllability of integral and differential equations is a new direction in the theory of integral and differential equations. The controllability problem that arose from the need to solve urgent problems in the field of natural sciences, medicine, economics, technical sciences sets more sophisticated problems for integral and differential equations. In the previous works, the author studied the controllability problems of the processes described by ordinary differential equations with boundary conditions in the presence of phase and integral constraints with the limited control resources. In this paper an attempt is made to extend these results to the integral and differential equations. The necessary and sufficient conditions for the controllability processes for linear integral and differential equations by non-singular transformation and construction of the general solution of a class of integral equations are obtained.

Key words: controllability, integral and differential equations, optimal control, minimizing sequences.

1 Введение

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый линейным интегро - дифференциальным уравнением следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + C(t) \int_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau + \\ + D(t) \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)x(\lambda)d\lambda + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$(x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 \subset R^{2n}, \quad (2)$$

при наличии фазовых ограничений

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n / \gamma(t) \leq L(t)x \leq \delta(t), \quad t \in I\}, \quad (3)$$

интегральных ограничений

$$g_j(x, u) \leq c_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad g_j(x, u) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad (4)$$

$$g_j(x, u) = \int_{t_0}^{t_1} [\langle a_j(t), x(t) \rangle + \langle b_j(t), u(t) \rangle] dt, \quad j = \overline{1, m_2}, \quad (5)$$

а также ограничений на значения управлений

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) / u(t) \in U_1(t) \subset R^m \text{ п.в. } t \in I\}, \quad (6)$$

$$v(\tau) \in V(\tau) = \{v(\cdot) \in L_2(I_1, R^p) / v(\tau) \in V_1(\tau) \subset R^p \text{ п.в. } \tau \in I_1 = [a, b]\}. \quad (7)$$

Здесь $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ – матрицы с кусочно-непрерывными элементами размерностей $n \times n$, $n \times m$, $n \times s$, $n \times k$ соответственно, матрицы $K(t, \tau) = \|K_{ij}(t, \tau)\|$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, p}$, $t \in I$, $\tau \in I_1 = [a, b]$, $\Lambda(t, \lambda) = \|\Lambda_{ij}(t, \lambda)\|$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$ с элементами из L_2 на множествах $E_0 = \{(t, \tau) \in R^2 / t_0 \leq t \leq t_1, a \leq \tau \leq b\}$, $E_1 = \{(t, \lambda) \in R^2 / t_0 \leq t, \lambda \leq t_1\}$,

$$\int_a^b \int_{t_0}^{t_1} |K_{ij}(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty, \quad \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} |\Lambda_{ij}(t, \lambda)|^2 dt d\lambda < \infty,$$

функция $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$ – заданная, $L(t)$, $t \in I$ – заданная матрица порядка $s_1 \times n$ с непрерывными элементами. Полагаем, что S_0 , S_1 – заданные выпуклые замкнутые множества, определяющие ограничения на начальное и конечное состояния фазовых переменных. Векторы $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_{s_1}(t))$, $\delta(t) = (\delta_1(t), \dots, \delta_{s_1}(t))$, $t \in I$ – являются заданными функциями с непрерывными элементами, величины c_j , $j = \overline{1, m_2}$ – заданные постоянные, $a_j(t) = (a_{1j}(t), \dots, a_{nj}(t))$, $b_j(t) = (b_{1j}(t), \dots, b_{mj}(t))$, $j = \overline{1, m_2}$ – заданные вектор функции с непрерывными элементами, $U_1(t) \subset R^m$, $V_1(\tau) \subset R^p$ – заданные выпуклые замкнутые множества.

Определение 1 Процесс описываемый уравнением (1) называется управляемым в момент времени t_0 , если существуют управления $u(t) \in U(t)$, $v(\tau) \in V(\tau)$ которые проводят траекторию системы (1) из точки $x_0 = x(t_0) \in S_0$ в точку $x_1 = x(t_1) \in S_1$ при фиксированных t_0 , t_1 , $t_1 > t_0$ и условиях (3) – (5).

Определение 2 Четверка $(u(t), v(\tau), x_0, x_1) \in U \times V \times S_0 \times S_1$ называется допустимой, если функция $x(t; t_0, x_0, x_1, u, v)$, $t \in I$ решение интегро - дифференциального уравнения (1) удовлетворяет условиям (2) – (7). Множество всей допустимой четверки обозначим через Σ , т.е. $(u(t), v(\tau), x_0, x_1) \in \Sigma \subset U \times V \times S_0 \times S_1$.

Таким образом, процесс описываемый интегро-дифференциальным уравнением (1) является управляемым, если множество $\Sigma \neq \emptyset$, $\emptyset$ – пустое множество. В дальнейшем, процесс порожденный соотношениями (1) – (7) назовем задачей управляемости.

Задача 1 Найти необходимое и достаточное условия управляемости для процесса описываемого интегро-дифференциальным уравнением (1) при условиях (2) – (7).

Иными словами, найти необходимое и достаточное условия, чтобы множество Σ было не пусто.

Задача 2 Пусть множество $\Sigma \neq \emptyset$. Найти четверку $(u(t), v(\tau), x_0, x_1) \in \Sigma$ т.е. найти управления $u(t) \in U(t)$, $v(\tau) \in V(\tau)$ которые переводят траекторию системы (1), исходящую из точки $x_0 = x(t_0) \in S_0$ в момент времени t_0 в точку $x_1 = x(t_1) \in S_1$, $t_1 > t_0$ при этом решение уравнения (1), функция $x(t) = x(t; t_0, x_0, x_1, u, v)$, $t \in I$, $x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$ находится на множестве $G(t) \subset R^n$, а также вдоль решения системы (1) выполнены интегральные ограничения (4), (5).

Решения проблем управляемости динамических систем, математической теории оптимальных процессов, краевых задач дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными ограничениями, а также задач управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями сводятся к разрешимости и построению общего решения интегрального уравнения

$$\Gamma w = \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t_0, t) w(t) dt = a, \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (8)$$

где $\Gamma(t_0, t) = \|\Gamma_{ij}(t_0, t)\|$, $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{1, n_2}$ – известная матрица порядка $n_1 \times n_2$ с кусочно непрерывными элементами по t при фиксированных t_0, t_1 , $t_1 > t_0$, $w(\cdot) \in L_2(I, R^{n_2})$ – искомая функция, $a \in R^{n_1}$ любой вектор, $\Gamma : L_2(I, R^{n_2}) \rightarrow R^{n_1}$ – оператор.

Задача 3 Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения (8) для любых $a \in R^{n_1}$.

Задача 4 Найти общее решение интегрального уравнения (8) для любого $a \in R^{n_1}$.

Решения задач 3, 4 для любого $a \in R^{n_1}$ налагают жесткие требования на ядро интегрального уравнения (8) и они необходимы для случаев, когда S_0, S_1 заданные множества из R^n . Для случая, когда множества S_0, S_1 содержат единственные точки требуются решения следующих задач:

Задача 5 Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения (8) при заданном $a \in R^{n_1}$;

Задача 6 Найти общее решение интегрального уравнения (8) при заданном $a \in R^{n_1}$.

Решения задач 3 – 6 имеют многочисленные приложения в математике. В данной работе эти результаты имеют вспомогательные значения.

Цель работы – создание нового метода решения задачи управляемости для линейного интегро-дифференциального уравнения при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограничений на значения управления.

2 Обзор литературы

Математическими моделями многих явлений в различных областях науки: в биологии (Вольтерра, 1976 : 320), в медицине (Беллман, 1987 : 282), в биофизике (Романовский, 1984 : 290), в термодинамике биологических процессов (Рубин, 1984 : 352), в механике и электродинамике (Иманалиев, 1977 : 302), в экономике (Глушков, 1983 : 285), в синергетике (Николис, 1979 : 245) являются интегро-дифференциальные уравнения.

Общей теории интегро-дифференциальных уравнений, обобщенных решений интегральных уравнений посвящены монографии (Быков, 1957 : 312), (Lakshmikantham, 1995 : 304), (Иманалиев, 1981 : 265), (Краснов, 1975 : 304). В указанных работах рассматриваются вопросы существования, единственности и методы построения приближенных решений интегро-дифференциальных уравнений.

Исследование управляемости процессов описываемых интегро- дифференциальными уравнениями при наличии краевых условий, фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов системы является новым направлением в теории интегро-дифференциальных уравнений. Проблема управляемости возникшая от потребности решения актуальных задач в области естественных наук, медицине, экономике, технических наук ставит более сложные задачи для интегро-дифференциальных уравнений. В работах автора (Айсагалиев, 1991 : 11), (Айсагалиев, 2005 : 17), (Айсагалиев, 2012а : 11), (Айсагалиев, 2012б : 17), (Айсагалиев, 2015а : 15), (Айсагалиев, 2014 : 158), (Айсагалиев, 2015б : 207) исследованы проблемы управляемости процессов описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений с учетом ограниченности ресурсов управления. В данной работе делается попытка распространить эти результаты на интегро-дифференциальные уравнения.

Теория управляемости берет свое начало с работы Р.Е. Калмана (Калман, 1961 : 26). Им построено управление с минимальной нормой и получен ранговый критерий управляемости для линейных систем с постоянными коэффициентами. Решение задачи управляемости на основе l – проблемы моментов было предложено Н.Н. Красовским (Красовский, 1968 : 475). Отдельные вопросы управляемости исследованы в работах (Габасов, 1971 : 502), (Зубов, 1975 : 502).

Вопросам управляемости, наблюдаемости и устойчивости управляемых систем посвящена работа (Ли, 1972 : 575). В последние годы опубликован ряд научных статей, посвященных проблемам управляемости и оптимального быстрогодействия динамических систем. Синтезу ограниченного управления на основе функций Ляпунова посвящена работа (Ананьевский, 2010 : 4). Геометрический подход к проблеме управляемости неавтономных линейных систем исследован в (Семенов, 2012 : 14).

Проблема управляемости тесно связана с решением проблем стабилизации динамических систем. В работе (Емельянов, 2012 : 8) рассматривается задача стабилизации нулевого положения равновесия билинейных и аффинных систем канонического вида. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем исследованы в (Коровин, 2011 : 5). Аналитическому исследованию проблем управляемости и оптимального управления посвящена монография (Варга, 1977 : 585). Следует отметить, что в указанных работах (Калман, 1961 : 26), (Красовский, 1968 : 475), (Габасов, 1971 : 502), (Зубов, 1975 : 502), (Ли, 1972 : 575), (Ананьевский, 2010 : 4), (Семенов, 2012 : 14), (Еме-

льянов, 2012 : 8), (Коровин, 2011 : 5), (Варга, 1977 : 585) исследованы частные случаи общей задачи управляемости и быстродействия динамических систем без фазовых и интегральных ограничений.

В работе (Айсагалиев, 1991 : 11) приведен метод построения множества управлений каждый элемент которого переводит траекторию линейной системы из любой начальной точки в любое желаемое конечное состояние. В (Айсагалиев, 2005 : 17) найдены условия разрешимости и построения общего решения интегрального уравнения для решения проблем управляемости динамических систем. Решения задачи оптимального управления с краевыми условиями и фазовыми и интегральными ограничениями на основе решения проблем управляемости содержатся в (Айсагалиев, 2012а : 11). Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением исследованы в (Айсагалиев, 2012б : 17). В работах (Айсагалиев, 2015а : 15), (Айсагалиев, 2014 : 158), (Айсагалиев, 2015б : 207) рассмотрены методы решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений на основе решения проблем управляемости динамических систем.

Данная работа является продолжением научных исследований работ (Айсагалиев, 1991 : 11), (Айсагалиев, 2005 : 17), (Айсагалиев, 2012а : 11), (Айсагалиев, 2012б : 17), (Айсагалиев, 2015а : 15), (Айсагалиев, 2014 : 158), (Айсагалиев, 2015б : 207).

3 Материал и методы

Суть предлагаемого метода состоит в том, что на первом этапе исследования путем преобразования интегральные ограничения (4), (5) приводятся к дифференциальным уравнениям с краевыми условиями и введением фиктивного управления. Исходная задача погружается в краевую задачу линейного дифференциального уравнения. Далее, используя результаты исследования интегрального уравнения (8) находим все множества управлений, каждый элемент которого переводит траекторию линейной системы из любой начальной точки множества S_0 в конечное состояние из множества S_1 . Такой подход позволяет получить равносильные тождества к исходной задаче управляемости и свести решения задач 1, 2 к начальной задаче оптимального управления. Необходимое и достаточное условия разрешимости исходной задачи управляемости определяются требованием на значение нижней грани функционала и строятся решения на основе предельной точки минимизирующих последовательностей.

3.1 Преобразования

Пусть матрицы A_0 , $B_0(t)$, $t \in I$ такие, что

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} a_1^*(t) \\ \cdots \\ a_{m_2}^*(t) \end{pmatrix}, \quad B_0(t) = \begin{pmatrix} b_1^*(t) \\ \cdots \\ b_{m_2}^*(t) \end{pmatrix},$$

$$a_j(t) = \begin{pmatrix} a_{1j}(t) \\ \cdots \\ a_{n_j}(t) \end{pmatrix}, \quad b_j(t) = \begin{pmatrix} b_{1j}(t) \\ \cdots \\ b_{m_j}(t) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, m_2}.$$

где $(*)$ – знак транспонирования. Введем вектор функцию

$$\eta(t) = \int_{t_0}^t [A_0(\lambda)x(\lambda) + B_0(\lambda)u(\lambda)]d\lambda, \quad t \in I,$$

Тогда интегральные ограничения (4), (5) могут быть представлены в виде

$$\dot{\eta}(t) = A_0(t)x(t) + B_0(t)u(t), \quad t \in I, \quad (9)$$

$$\eta(t_0) = 0, \quad \eta(t_1) = \bar{c} \in Q, \quad (10)$$

$$Q = \{\bar{c} \in R^{m_2} / \bar{c}_j = c_j - d_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad \bar{c}_j = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad d_j \geq 0, \quad j = \overline{1, m_1}\}, \quad (11)$$

где $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{m_2})$, $d = (d_1, \dots, d_{m_1})$, $g_j(x, u) = c_j - d_j$, $j = \overline{1, m_1}$, $d \geq 0$ – неизвестный вектор. Теперь задача управляемости (1) – (7) запишется в виде (см. (9) – (11))

$$\dot{\xi} = A_1(t)\xi + B_1(t)u(t) + C_1(t) \int_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau + D_1(t) \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)P\xi(\lambda)d\lambda + \bar{\mu}(t), \quad t \in I, \quad (12)$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 = S, \quad x(t) \in G(t), \quad u(t) \in U(t), \quad v(t) \in V(t), \quad (13)$$

$$\xi(t_0) = \xi_0 = (x_0, O_{m_2 1}) \in S_0 \times O_{m_2 1}, \quad \xi(t_1) = \xi_1 = (x_1, \bar{c}) \in S_1 \times Q, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O_{nm_2} \\ A_0(t) & O_{m_2 m_2} \end{pmatrix}, \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} B(t) \\ B_0(t) \end{pmatrix}, \\ C_1(t) &= \begin{pmatrix} C(t) \\ O_{m_2 s} \end{pmatrix}, \quad D_1(t) = \begin{pmatrix} D(t) \\ O_{m_2 k} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mu}(t) = \begin{pmatrix} \mu(t) \\ O_{m_2 1} \end{pmatrix}, \\ x(t) &= P\xi(t), \quad P = (I_n, O_{nm_2}), \end{aligned}$$

O_{nq} – прямоугольная матрица порядка $r \times q$ с нулевыми элементами. I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

3.2 Интегральное уравнение

Рассмотрим решения задач 3, 4 для интегрального уравнения (8). Для решения задач 1, 2 необходимы следующие теоремы о существовании и общем виде решения интегрального уравнения (8).

Теорема 1 *Интегральное уравнение (8) при любом фиксированном $a \in R^{n_1}$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t_0, t)\Gamma^*(t_0, t)dt, \quad t_1 > t_0 \quad (15)$$

порядка $n_1 \times n_1$ является положительно определенной, где $(*)$ – знак транспонирования.

Теорема 2 Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ из (15) положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (8) при любом $a \in R^{n_1}$ имеет вид

$$w(t) = \Gamma^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)a + p(t) - \Gamma^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t_0, \eta)p(\eta)d\eta, \quad t \in I, \quad (16)$$

где $p(\cdot) \in L_2(I, R^{n_2})$ – произвольная функция, $a \in R^{n_1}$ – любой вектор.

Рассмотрим решения задач 5, 6 для интегрального уравнения (8). Возникает вопрос: если матрица $W(t_0, t_1)$ не является положительно определенной, имеет ли решение интегральное уравнение (8)? В этом случае интегральное уравнение (8) может иметь решение, однако не для любого вектора $a \in R^{n_1}$. Условие $W(t_0, t_1) > 0$ является жестким условием на ядро интегрального уравнения. Аналогом данного условия является существование обратной матрицы A^{-1} для линейного алгебраического уравнения $Ax = b$, гарантирующая существование решения для любого $b \in R^n$. Алгебраическое уравнение $Ax = b$ может иметь решение и в случае, когда не существует обратной матрицы, однако не для любого вектора $a \in R^n$ ($\text{rank} A = \text{rank}(A, b)$).

Для решения задач 5, 6 необходимо исследовать экстремальную задачу: минимизировать функционал

$$J(w) = |a - \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t_0, t)w(t)dt|^2 \rightarrow \inf \quad (17)$$

при условии

$$w(\cdot) \in L_2(I, R^{n_2}), \quad (18)$$

где $a \in R^{n_1}$ – заданный вектор.

Теорема 3 Пусть ядро оператора $\Gamma(t) = \Gamma(t_0, t)$ измеримо и принадлежит классу L_2 . Тогда:

1) функционал (17) при условии (18) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала $J'(w) \in L_2(I, R^{n_2})$ в любой точке $w(\cdot) \in L_2(I, R^{n_2})$ определяется по формуле

$$J'(w) = -2\Gamma^*(t_0, t)a + 2 \int_{t_0}^{t_1} \Gamma^*(t_0, t)\Gamma(t_0, \sigma)w(\sigma)d\sigma, \quad t \in I; \quad (19)$$

2) градиент функционала $J'(w) \in L_2(I, R^{n_2})$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'(w+h) - J'(w)\| \leq l\|h\|, \quad \forall w, \quad w+h \in L_2(I, R^{n_2}); \quad (20)$$

3) функционал (17) при условии (18) является выпуклым, т.е.

$$J(\alpha w + (1-\alpha)u) \leq \alpha J(w) + (1-\alpha)J(u), \quad \forall w, u \in L_2(I, R^{n_2}), \quad \forall \alpha, \quad \alpha \in [0, 1]; \quad (21)$$

4) вторая производная Фреше равна

$$J''(w) = 2\Gamma^*(t_0, \sigma)\Gamma(t_0, t), \quad \forall \sigma, t \in I; \quad (22)$$

5) если выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \xi^*(\sigma)\Gamma^*(t_0, \sigma)\Gamma(t_0, t)\xi(t)dtd\sigma &= \left[\int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t_0, t)\xi(t)dt \right]^2 \geq \\ &\geq \mu \int_{t_0}^{t_1} |\xi(t)|^2 dt, \quad \mu > 0, \quad \forall \xi, \xi(t) \in L_2(I, R^{n_2}), \end{aligned} \quad (23)$$

то функционал (17) при условии (18) является сильно выпуклым.

Теорема 4 Пусть для экстремальной задачи (17), (18) построена последовательность $\{w_n(t)\} \subset L_2(I, R^{n_2})$ по алгоритму (см. (19) – (23))

$$w_{n+1}(t) = w_n(t) - \alpha_n J'(w_n), \quad g_n(\alpha_n) = \min_{\alpha > 0} g_n(\alpha),$$

$$g_n(\alpha) = J(w_n - \alpha J'(w_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда числовая последовательность $\{J(w_n)\}$ монотонно убывает, предел $\lim_{n \rightarrow \infty} J'(w_n) = 0$.

Если, кроме того, множество $M(w_0) = \{w(\cdot) \in L_2(I, R^{n_2}) / J(w) \leq J(w_0)\}$ ограничено, то:

1) последовательность $\{w_n(t)\}$ является минимизирующей, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} J(w_n) = J_* = \inf J(w), w(\cdot) \in L_2(I, R^{n_2})$;

2) $w_n \xrightarrow{c.l.} w_*$ при $n \rightarrow \infty$, где $w_* = w_*(t) \in W_* = \{w_*(\cdot) \in L_2(I, R^{n_2}) / J(w_*) = \min_{w \in M(w_0)} J(w) = J_* = \inf_{w \in L_2(I, R^{n_2})} J(w)\}$;

3) справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(w_n) - J(w_*) \leq \frac{m_0}{n}, \quad m_0 = \text{const} > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

4) для того, чтобы интегральное уравнение (8) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $J(w_*) = 0$, $w_* \in W_*$. В этом случае $w_* \in W_*$ – решение интегрального уравнения (8).

5) если значение $J(w_*) > 0$, то интегральное уравнение (8) не имеет решения для данной правой части $a \in R^{n_1}$;

6) если выполнено неравенство (23), то $\|w_n - w_*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство теорем 1 – 4 аналогичны доказательствам теорем из [23].

3.3 Существование решения задачи управляемости

Наряду с линейным интегро-дифференциальным уравнением (12) с условиями (13), (14) рассмотрим линейную систему дифференциального уравнения

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)w_1(t) + C_1(t)w_2(t) + D_1(t)w_3(t) + \bar{\mu}(t), \quad t \in I, \quad (24)$$

$$y(t_0) = \xi_0 = \xi(t_0), \quad y(t_1) = \xi_1 = \xi(t_1), \quad (25)$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad w_2(\cdot) \in L_2(I, R^s), \quad w_3(\cdot) \in L_2(I, R^k) \quad (26)$$

где $\xi_0 = (x_0, O_{m_2}) \in S_0 \times O_{m_2}$, $\xi_1 = (x_1, \bar{c}) \in S_1 \times Q$. Заметим, что

$$\int_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau \in L_2(I, R^s), \quad \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)x(\lambda)d\lambda \in L_2(I, R^k).$$

Пусть матрица $B_2(t) = (B_1(t), C_1(t), D_1(t))$ порядка $(n + m_2) \times (m + s + k)$, вектор функция $w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \in L_2(I, R^{s+m+k})$. По исходным данным (24) – (26), определим следующие матрицы и векторы

$$a = \Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\bar{\mu}(t)dt, \quad W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_2(t)B_2^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt,$$

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Phi(t_0, \tau)B_2(\tau)B_2^*(\tau)\Phi^*(t_0, \tau)d\tau, \quad W(t, t_1) = W(t_0, t_1) - W(t_0, t), \quad t \in I,$$

$$\Lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) = B_2^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)a, \quad N_1(t) = -B_2^*(t)\Phi^*(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} -B_1^*(t)\Phi^*(t_0, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1) \\ -C_1^*(t)\Phi^*(t_0, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1) \\ -D_1^*(t)\Phi^*(t_0, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{11}(t) \\ N_{12}(t) \\ N_{13}(t) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) =$$

$$= \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)\xi_0 + \Phi(t, t_0)W(t, t_1)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1)\xi_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\bar{\mu}(\tau)d\tau - \Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\bar{\mu}(t)dt,$$

$$N_2(t) = -\Phi(t, t_0)W(t_0, t)W^{-1}(t_0, t_1)\Phi(t_0, t_1), \quad t \in I,$$

где $\Phi(t, \tau) = \kappa(t)\kappa^{-1}(\tau)$, $\kappa(\tau)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A_1(t)\zeta$.

Теорема 5 Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определенная. Тогда управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{s+m+k})$ переводит траекторию системы (24) из любой начальной точки $\xi_0 \in R^{n+m_2}$ в любое заданное конечное состояние $\xi_1 \in R^{n+m_2}$, тогда и только тогда, когда

$$w(t) \in \Sigma_1 = \{w(\cdot) \in L_2(I, R^{s+m+k}) / w(t) = p(t) + \Lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) + N_1(t)z(t_1, p), \forall p(\cdot) \in L_2(I, R^{s+m+k}), t \in I\}, \quad (27)$$

где $p(\cdot) \in L_2(I, R^{s+m+k})$ – произвольная функция, а функция $z(t) = z(t, p)$, $t \in I$ – решение дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_2(t)p(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I. \quad (28)$$

Решение дифференциального уравнения (24), соответствующее управлению $w(t) \in \Sigma_1$ имеет вид

$$y(t) = z(t, p) + \Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) + N_2(t)z(t_1, p), \quad t \in I. \quad (29)$$

Доказательство. Доказательство теоремы следует из теорем 1, 2. Действительно, из решения уравнения (24) при условиях (25), (26) имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B_2(t) w(t) dt = a. \quad (30)$$

Данное интегральное уравнение относительно искомой функции $w(t) \in L_2(I, R^{s+m+k})$ является частным случаем (8), где $\Gamma(t_0, t) = \Phi(t_0, t)B(t)$. Для существования решения интегрального уравнения (30) необходимо и достаточно, чтобы матрица $W(t_0, t_1)$ была положительно определенной. Далее, путём замены $\Gamma(t_0, t)$ на $\Phi(t_0, t)B_2(t)$ из (15) получим

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B_2(t) B_2^*(t) \Phi^*(t_0, t) dt.$$

Из (16) следует (27). Дифференциальное уравнение (28) и соотношение (29) непосредственно следуют из формул

$$z(t, p) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B_2(\tau) p(\tau) d\tau, \quad z(t_1, p) = \Phi(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t) B_2(t) p(t) dt.$$

Легко убедиться в том, что $y(t_0) = \xi_0$, $y(t_1) = \xi_1$. Теорема доказана.

Заметим, что компоненты вектор функции $w(t) \in \Sigma_1$ равны:

$$w_1(t) = p_1(t) + B_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) a + N_{11}(t) z(t_1, p), \quad t \in I, \quad (31)$$

$$w_2(t) = p_2(t) + C_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) a + N_{12}(t) z(t_1, p), \quad t \in I, \quad (32)$$

$$w_3(t) = p_3(t) + D_1^*(t) \Phi^*(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_1) a + N_{13}(t) z(t_1, p), \quad t \in I, \quad (33)$$

где $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$, $p_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $p_2(\cdot) \in L_2(I, R^s)$, $p_3(\cdot) \in L_2(I, R^k)$.

Из (29), (31) – (33) с учетом того, что $a = \Phi(t_0, t_1)\xi_1 - \xi_0 - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)\bar{\mu}(t)dt$, получим

$$w_1(t) = p_1(t) + D_0(t)x_0 + T_0(t)x_1 + T_1(t)d + \mu_{11}(t) + N_{11}(t)z(t_1, p), \quad t \in I, \quad (34)$$

$$w_2(t) = p_2(t) + D_2(t)x_0 + T_2(t)x_1 + T_3(t)d + \mu_{12}(t) + N_{12}(t)z(t_1, p), \quad t \in I. \quad (35)$$

$$w_3(t) = p_3(t) + D_3(t)x_0 + T_4(t)x_1 + T_5(t)d + \mu_{13}(t) + N_{13}(t)z(t_1, p), \quad t \in I. \quad (36)$$

$$y(t) = z(t, p) + \pi_1(t)x_0 + \pi_2(t)x_1 + \pi_3(t)d + \mu_{14}(t) + N_2(t)z(t_1, p), \quad t \in I. \quad (37)$$

где $\mu_{11}(t)$, $\mu_{12}(t)$, $\mu_{13}(t)$, $\mu_{14}(t)$, $t \in I$ – известные функции.

Лемма 1 Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определенная. Тогда задача управляемости определяемая соотношениями (12) – (14) (либо (1) – (7)) равносильна тождествам

$$w_1(t) = u(t), \quad w_2(t) = \int_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau, \quad w_3(t) = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)Py(\lambda)d\lambda, \quad t \in I, \quad (38)$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)p_1(t) + C_1p_2(t) + D_1(t)p_3(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad (39)$$

$$p_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad p_2(\cdot) \in L_2(I, R^s), \quad p_3(\cdot) \in L_2(I, R^k),$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 \subset R^{2n}, \quad d \in D_0 = \{d \in R^{m_1} | d \geq 0\},$$

$$u(t) \in U(t), \quad v(\tau) \in V(\tau), \quad Py(t) = x(t) \in G, \quad t \in I,$$

где $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$, $y(t)$, $t \in I$ определяются формулами (34) – (37) соответственно.

Доказательство. Если выполнены тождества (38), то функция $y(t)$, $t \in I$ является решением дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & A_1(t)y(t) + B_1(t)u(t) + C_1(t) \int_a^b K(t, \tau)v(\tau)d\tau + D_1(t) \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)Py(\lambda)d\lambda + \\ & + \bar{\mu}(t), \quad t \in I, \quad y(t_0) = \xi_0, \quad y(t_1) = \xi_1. \end{aligned}$$

Как следует из формулы (29) функция $y(t) = z(t, p) + \Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) + N_2(t)z(t_1, p)$, $t \in I$, где $z(t) = z(t, p)$, $t \in I$ удовлетворяет тождеству (39) для любых $p_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $p_2(\cdot) \in L_2(I, R^s)$, $p_3(\cdot) \in L_2(I, R^k)$. В частности, $\xi_0 = (x_0, O_{m_21}) \in S_0 \times O_{m_21}$, $\xi_1 = (x_1, \bar{c}) \in S_1 \times Q$. Далее, из включений $d \in D_0$, $u(t) \in U(t)$, $v(\tau) \in V(\tau)$ следует, что $y(t) \equiv \xi(t)$, $t \in I$, где $Py(t) = P\xi(t) = x(t) \in G(t)$, $t \in I$. Итак, при выполнении тождеств (38) – (39) верны соотношения (12) – (14). Лемма доказана.

Из теоремы 3 и леммы 1 следует, что решение задачи управляемости может быть сведено к решению следующей задачи оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u, v, p_1, p_2, p_3, \omega, x_0, x_1, d) = \int_{t_0}^{t_1} \{|w_1(t) - u(t)|^2 +$$

$$+ |\int_a^b K(t, \tau) v(\tau) d\tau - w_2(t)|^2 + |\int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda) P y(\lambda) d\lambda - w_3(t)|^2 +$$

$$+ |\omega(t) - L(t) P y(t)|^2\} dt \rightarrow \inf \quad (40)$$

при условиях

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)p_1(t) + C_1(t)p_2(t) + D_1(t)p_3(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad (41)$$

$$p_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad p_2(\cdot) \in L_2(I, R^s), \quad p_3(\cdot) \in L_2(I, R^k), \quad (42)$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 \subset R^{2n}, \quad d \in D_0 = \{d \in R^{m_1} | d \geq 0\}, \quad (43)$$

$$u(t) \in U(t), \quad v(\tau) \in V(\tau), \quad \omega(t) \in \Omega(t), \quad t \in I, \quad (44)$$

где множество

$$\Omega(t) = \{\omega(\cdot) \in L_2(I, R^{s_1}) / \gamma(t) \leq \omega(t) \leq \delta(t) \text{ п.в. } t \in I\}, \quad (45)$$

матрица $P = (I_n, O_{nm_2}, \cdot)$ функции $w_1(t), w_2(t), w_3(t), y(t), t \in I$ определяются формулами (34) – (37) соответственно.

Введем следующие обозначения

$$\theta = \theta(\cdot, \cdot) = (u(t), v(\tau), p_1(t), p_2(t), p_3(t), \omega(t), x_0, x_1, d) \in X =$$

$$= U(t) \times V(\tau) \times L_2^\alpha(I, R^m) \times L_2^\alpha(I, R^s) \times L_2^\alpha(I, R^k) \times \Omega(t) \times S_0 \times S_1 \times D_0^\alpha \subset H =$$

$$= L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^p) \times L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^s) \times L_2(I, R^k) \times$$

$$\times L_2(I, R^{s_1}) \times R^n \times R^n \times R^{m_1},$$

$$L_2^\alpha(I, R^m) = \{p_1(\cdot) \in L_2(I, R^m) / \|p_1\| \leq \alpha\},$$

$$L_2^\alpha(I, R^s) = \{p_2(\cdot) \in L_2(I, R^s) / \|p_2\| \leq \alpha\},$$

$$L_2^\alpha(I, R^k) = \{p_3(\cdot) \in L_2(I, R^k) / \|p_3\| \leq \alpha\},$$

$$D_0^\alpha = \{d \in R^{m_1} / |d| \leq \alpha\},$$

где $\alpha > 0$ – достаточно большое число $\alpha < \infty$.

Теперь оптимизационная задача (40) – (45) запишется в виде: минимизировать функционал

$$J(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(\theta(\cdot, \cdot), z(t, p), z(t_1, p), t) dt \rightarrow \inf, \quad \theta \in X \subset H, \quad (46)$$

где

$$F_0 = |w_1 - u|^2 + \left| \int_a^b K(t, \tau) v(\tau) d\tau - w_2 \right|^2 + \left| \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda) Py(\lambda) d\lambda - w_3 \right|^2 + |\omega - LPy|^2.$$

Заметим, что $U(t)$, $V(\tau)$, $L_2^\alpha(I, R^m)$, $L_2^\alpha(I, R^s)$, $L_2^\alpha(I, R^k)$, $\Omega(t)$ – ограниченные выпуклые замкнутые множества в рефлексивном банаховом пространстве. Так как D_0^α , S_0 , S_1 – ограниченные выпуклые замкнутые множества, то множество X – слабобикомпактно в H . Следует отметить, что функционал $J(\theta)$, $\theta \in X$ является непрерывным выпуклым функционалом в слабобикомпактном множестве X . Следовательно, множество $X_* = \{\theta_* \in X / J(\theta_*) = J_* = \inf_{\theta \in X} J(\theta)\}$ – не пусто. Иными словами, слабополунепрерывный снизу функционал $J(\theta)$ достигает нижней грани на слабобикомпактном множестве X .

Лемма 2 Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определенная. Для того, чтобы задача управляемости (1) – (7) имело решение необходимо и достаточно, чтобы значение $J(\theta_*) = 0$, где $\theta_* = (u_*(t), v_*(\tau), p_{1*}(t), p_{2*}(t), p_{3*}(t), \omega_*(t), x_{0*}, x_{1*}, d_*) \in X_* \subset X$ оптимальное управление в задаче (46).

Доказательство. Необходимость. Пусть задача управляемости (1) – (7) (либо (12) – (14)) имеет решение. Пусть $x_*(t) = x_*(t; t_0, x_0^*, x_1^*, u_*, v_*)$, $t \in I$ – решение интегродифференциального уравнения (1).

Покажем, что значение $J(\theta_*) = 0$. Как следует из леммы 1 соотношения (1) – (7) равносильны тождествам (38) – (39). Следовательно, $w_{1*}(t) = u_*(t) \in U(t)$, $w_{2*}(t) = \int_a^b K(t, \tau) v_*(\tau) d\tau$, $v_*(\tau) \in V(\tau)$, $\tau \in I_1$, $w_{3*}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda) Py_*(\lambda) d\lambda$, $y_*(t) = z(t, p_*) + \Lambda_2(t, \xi_0^*, \xi_1^*) + N_2(t)z(t_1, p_*) = \xi_*(t)$, $\xi_0^* = (x_{0*}, O_{m_2 1})$, $\xi_1^* = (x_{1*}, \bar{c}_*)$, $\bar{c}_* = (\bar{c}_1^*, \dots, \bar{c}_{m_2}^*)$, $\bar{c}_j^* = c_j - d_j^*$, $j = \overline{1, m_1}$, $P\xi_*(t) = x_*(t) = x_*(t; t_0; x_{0*}, x_{1*}, u_*, v_*)$, $t \in I$, $\omega_*(t) = L(t)Py_*(t)$, $t \in I$, где

$$\begin{aligned} w_{1*} &= p_{1*}(t) + D_0(t)x_{0*} + T_0(t)x_{1*} + T_1(t)d_* + \mu_{11} + N_{11}(t)z(t_1, p_*), \\ w_{2*} &= p_{2*}(t) + D_2(t)x_{0*} + T_2(t)x_{1*} + T_3(t)d_* + \mu_{12} + N_{12}(t)z(t_1, p_*), \\ w_{3*} &= p_{3*}(t) + D_3(t)x_{0*} + T_4(t)x_{1*} + T_5(t)d_* + \mu_{13} + N_{13}(t)z(t_1, p_*), \\ y_*(t) &= z(t, p_*) + \pi_1(t)x_{0*} + \pi_2(t)x_{1*} + \pi_3(t)d_* + \mu_{14} + N_2(t)z(t_1, p_*), \quad t \in I, \\ Py_*(t) &= x_*(t), \quad \omega_*(t) = L(t)Py_*(t) = L(t)x_*(t), \quad t \in I. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J(\theta_*) &= \int_{t_0}^{t_1} [|w_{1*}(t) - u_*(t)|^2 + |\int_a^b K(t, \tau) v_*(\tau) d\tau - w_{2*}(t)|^2 + \\ &+ |\int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda) Py_*(\lambda) d\lambda - w_{3*}(t)|^2 + |\omega_*(t) - L(t)Py_*(t)|^2] dt = 0 \end{aligned}$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть значение $J(\theta_*) = 0$, $\theta_* \in X_* \subset X$. Покажем, что задача управляемости (1) – (7) имеет решение. В самом деле, значение $J(\theta_*) = 0$ тогда и только тогда, когда $w_{1*}(t) = u_*(t)$, $\int_a^b K(t, \tau)v_*(\tau)d\tau = w_{2*}(t)$, $\int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, \lambda)Py_*(\lambda)d\lambda = w_{3*}(t)$, $\omega_*(t) = L(t)Py_*(t)$, $t \in I$, где $u_*(t) \in U(t)$, $v_*(\tau) \in V(\tau)$, $\omega_*(t) \in \Omega(t)$, $t \in I$, $x_{0*} \in S_0$, $x_{1*} \in S_1$, $d_* \in D_0$. Тогда $y_*(t) = \xi_*(t) = (x_*(t), \eta_*(t))$, $t \in I$. Отсюда следует, что $x_*(t)$, $t \in I$ – решение интегро - дифференциального уравнения (1). Достаточность доказана. Теорема доказана.

4 Результаты и обсуждение

В статье получены следующие результаты: путем преобразования интегральные ограничения приводятся к дифференциальным уравнениям с краевыми условиями; введением фиктивного управления исходная задача погружается в краевую задачу линейного дифференциального уравнения; найдены все множества управлений, каждый элемент которого переводит траекторию линейной системы из любой начальной точки заданного множества в конечное состояние из известного множества; получены равносильные тождества к исходной задаче управляемости; решение задачи управляемости сведено к начальной задаче оптимального управления; найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи управляемости в виде требования на значение нижней грани функционала.

Интегро-дифференциальное уравнение связывает воедино настоящее, будущее и прошлое процесса. Такие математические модели явлений более адекватно описывают их свойства. Один из создателей квантовой механики, В. Гейзенберг, в своей книге "Физика и философия" делает следующие предположение: "... основное уравнение материи, рассматриваемое, как математическое представление всей материи, должно иметь вид сложной системы интегро-дифференциальных уравнений".

5 Заключение

Создание общей теории краевых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений со сложными краевыми условиями при наличии фазовых и интегральных ограничений является актуальной проблемой с многочисленными приложениями в естественных науках, экономики и экологии.

Получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений при наличии фазовых и интегральных ограничений.

Принципиальное отличие предлагаемого метода от известных методов состоит в том, что исходная краевая задача в начале погружается в задачу управляемости с фиктивными управлениями из функциональных пространств, с последующим сведением к начальной задаче оптимального управления.

Список литературы

- [1] Lakshmikantham V., Rao M.R. Theory of integro-differential equations. – London, 1995. – 402 с.
- [2] Айсагалиев С. А., Кабидолданова А. А. Оптимальное управление линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения. – 2012. Т. 48, Вып. 6. – С. 826–836.
- [3] Айсагалиев С. А. Конструктивная теория краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алматы: Қазақ университеті, 2015. – 207 с.
- [4] Айсагалиев С. А., Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. – 2005. Т. 5, Вып. 4. – С. 17–34.
- [5] Айсагалиев С. А. Теория управляемости динамических систем. – Алматы: Қазақ университеті, 2014. – 158 с.
- [6] Айсагалиев С. А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 1991. Т. 27, Вып. 9. – С. 1037–1045.
- [7] Айсагалиев С. А., Белогуров А. П. Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал. – 2012. Т. 53, Вып. 1. – С. 13–28.
- [8] Айсагалиев С. А., Калимолдаев М. Н. Конструктивный метод решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – 2015. Т. 51, Вып. 2. – С. 149–162.
- [9] Ананьевский И. М., Анохин Н. В., Овсеевич А. И. Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Доклады РАН. – 2010. Т. 434, Вып. 3. – С. 319–323.
- [10] Беллман Р. Математические методы в медицине. – М.: Мир, 1987. – 282 с.
- [11] Быков Я. В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1957. – 312 с.
- [12] Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. – М.: Наука, 1977. – 585 с.
- [13] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существования. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
- [14] Габасов Р., Кириллов Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1971. – 421 с.
- [15] Глушков В. М., Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983. – 285 с.
- [16] Емельянов С. В., Крищенко А. П. Стабилизация нерегулярных систем // Дифференциальные уравнения. – 2012. Т. 48, Вып. 11. – С. 1515–1524.
- [17] Зубов В. И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 502 с.
- [18] Иманалиев М. И. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения. – Фрунзе: Илим, 1977. – 302 с.
- [19] Иманалиев М. И. Обобщенные решения интегральных уравнений первого рода. – Фрунзе: Илим, 1981. – 265 с.
- [20] Калман Р. Е. Об общей теории систем управления // Труды Конгресса ИФАК. – М.: АН СССР. – 1961. Т. 2. – С. 521–547.
- [21] Коровин С. К., Капалин И. В., Фомичев В. В. Минимальные стабилизаторы для линейных динамических систем // Доклады РАН. – 2011. Т. 441, № 5. – С. 606–611.
- [22] Краснов М. Л. Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
- [23] Красовский Н. Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 475 с.
- [24] Ли Э. В., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 575 с.
- [25] Николис Г., Пригожин И. Саморганизация в неравновесных системах. – М.: Мир, 1979. – 245 с.
- [26] Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984. – 290 с.
- [27] Рубин А. Б. Термодинамика биологических процессов. – Изд-во МГУ, 1984. – 352 с.
- [28] Семенов Ю. М., О полной управляемости линейных неавтономных систем // Дифференциальные уравнения. – 2012. Т. 48, Вып. 9. – С. 1265–1277.

References

- [1] Lakshmikantham V., Rao M.R. *Theory of integro-differential equations* (London, 1995), 402.
- [2] Aisagaliev S. A., Kabidoldanova A. A. «Optimalnoe upravlenie lineynymi sistemami s lineynym kriteriem kachestva i ogranicheniyami [On the optimal control of linear systems with linear performance criterion and constraints]», *Differentsialnye uravneniya*, vol. 48, Issue 6 (2012) : 826–836.
- [3] Aisagaliev S. A. *Konstruktivnaya teoriya kraevykh zadach obyknovennykh differentsialnykh uravneniy* [Constructive theory of boundary value problems for ordinary differential equations] (Almaty: Kazakh universiteti, 2015), 207.
- [4] Aisagaliev S. A., «Obshee reshenie odnogo klassa integralnykh uravneniy [The general solution of a class of integral equations]», *Matematicheskii zhurnal*, vol. 5, No 4 (2005) : 17–34.
- [5] Aisagaliev S. A. *Teoriya upravlyaemosti dinamicheskikh sistem* [Controllability theory of dynamical systems] (Kazakh universiteti, 2014), 158.
- [6] Aisagaliev S. A., «Upravlyaemost' nekotoroy sistemy differentsialnykh uravneniy» [Controllability of a differential-equation system], *Differentsialnye uravneniya*, vol. 27, Issue 9 (1991) : 1037–1045.
- [7] Aisagaliev S. A., Belogurov A. P., «Upravlyaemost' i bystrodeystvie protsessa, opisyvayemogo parabolicheskimi uravneniyami s ogranicheniyami upravleniya [Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control]», *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, vol. 53, Issue 1 (2012) : 13–28.
- [8] Aisagaliev S. A., Kalimoldaev M. N., «Konstruktivnyi metod resheniya kraevoy zadachi dlya obyknovennykh differentsialnykh uravneniy [Constructive method for solving a boundary value problem for ordinary differential equations]», *Differentsialnye uravneniya*, vol. 51, Issue 2 (2015) : 149–162.
- [9] Ananetskiy I. M., Anahin N. V., Ovseevich A. I., «Sintez ogranichenogo upravleniya lineynymi dinamicheskimi sistemami s pomoshchyu obshchey funktsii Lyapunova [Synthesis of limited control for linear dynamical systems with the using of the general Lyapunov function]», *Doklady RAN*, vol. 434, No 3 (2010) : 319–323.
- [10] Bellman R. *Matematicheskie metody v meditsine* [Mathematical Methods in Medicine] (M.: Mir, 1987), 282.
- [11] Byikov Ya. V., *O nekotorykh zadachakh teorii integro-differentsialnykh uravneniy* [On some problems of the theory of integro-differential equations] (Frunze: Ilim, 1957), 312.
- [12] Varga Dzh. *Optimalnoe upravlenie differentsialnymi i funktsionalnymi uravneniyami* [Optimal control of differential and functional equations] (M.: Nauka, 1977), 585.
- [13] Volterra V. *Matematicheskaya teoriya borby za suschestvovaniya* [The mathematical theory of the struggle for existence] (M.: Nauka, 1976), 320.
- [14] Gabasov R., Kirillov F. M. *Kachestvennaya teoriya optimalnykh protsessov* [Qualitative theory of optimal processes] (M.: Nauka, 1971), 421.
- [15] Glushkov V. M., Ivanov V. V., Yanenko V. M. *Modelirovaniye razvivayushchisya sistem* [Modeling of developing systems] (M.: Nauka, 1983), 285.
- [16] Emelyanov S. V., Krischenko A. P., «Stabilizatsiya neregulyarnykh sistem [Stabilization of irregular systems]», *Differentsialnye uravneniya*, vol. 48, Issue 11 (2012) : 1515–1524.
- [17] Zubov V. I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on the control theory] (M.: Nauka, 1975), 502.
- [18] Imanaliev M. I. *Metody resheniya nelineynykh obratnykh zadach i ikh prilozheniya* [Methods for solving nonlinear inverse problems and their applications] (Frunze: Ilim, 1977), 302.
- [19] Imanaliev M. I. *Obobshchennyye resheniya integralnykh uravneniy pervogo roda* [Generalized solutions of integral equations of the first kind] (Frunze: Ilim, 1981), 265.
- [20] Kalman R. E., «Ob obshchey teorii sistem upravleniya [On the General Theory of Control Systems]». Trudyi Kongressa IFAK. Vol. 2. – M.: AN SSSR, 1961.
- [21] Korovin S. K., Kapalin I. V., Fomichev V. V., «Minimalnyye stabilizatory dlya lineynykh dinamicheskikh sistem [Minimum stabilizers for linear dynamic systems]». *Doklady RAN*, vol. 441, No 5. 2011.
- [22] Krasnov M. L. *Integralnye uravneniya* [Integral equations] (M.: Nauka, 1975), 304.

- [23] Krasovskiy N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control] (M.: Nauka, 1968), 475.
- [24] Li E. V., Markus L. *Osnovy teorii optimalnogo upravleniya* [Fundamentals of Optimal Control Theory] (M.: Nauka, 1972), 575.
- [25] Nikolis G., Prigozhin I. *Samoorganizatsiya v neravnovesnykh sistemakh* [Self-organization in nonequilibrium systems] (M.: Mir, 1979), 245.
- [26] Romanovskiy Yu.M., Stepanova N.V., Chernavskiy D.S. *Matematicheskaya biofizika* [Mathematical Biophysics] (M.: Nauka, 1984), 290.
- [27] Rubin A.B. *Termodinamika biologicheskikh protsessov* [Thermodynamics of biological processes] (Izd-vo MGU, 1984), 352.
- [28] Semenov Yu.M., «O polnoy upravlyaemosti lineynykh neavtonomnykh sistem [On the complete controllability of linear nonautonomous systems]», *Differentsialnye uravneniya*, vol 48, Issue 9 (2012) : 1265-1277.

UDC 517.956.22+517.984+519.21

Initial length scale estimate for the Schrödinger operator with a random fast oscillating potential in a multi-dimensional layer

Borisov D.I., Dr. Sci.(Phys.-Math.), leading scientific researcher, Institute of Mathematics, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia, University of Hradec Králové, Hradec Králové, Czech Republic, +73472725936, E-mail: borisovdi@yandex.ru

We consider the Dirichlet Laplacian in a multi-dimensional layer located between two parallel hyperplanes of codimension one. Such operator is perturbed by a fast oscillating random potential. Namely, the layer is partitioned into periodicity cells by a given periodic lattice and in each cell we consider a fast oscillating potential depending on a random variable multiplied by a global small parameters. All random variables associated with the periodicity cells are assumed to be independent and identically distributed. The fast oscillating potential introduced in the way standard for the homogenization theory. Namely, it depends on slow and fast variables, is compactly supported w.r.t. the slow variables and is periodic w.r.t. the fast ones. The main obtained result is the initial length scale estimate for the considered operator. Such estimate is the induction base for proving the spectral localization at the bottom of the spectrum by the multiscale analysis.

Key words: random Hamiltonian, fast oscillating potential, initial length scale estimate, small parameter, multi-dimensional layer.

Көп өлшемді қабаттағы кездейсоқ тез тербелуші шамамен Шрёдингер операторына арналған бастауыш өлшемдерді бағалау

Борисов Д. И., – ф.-м.ғ.д., жетекші ғылыми қызметкер, РҒА Уфимский ғылыми орталығының математика Институты, Россия Градец Кралове қаласының Университеті, Градец Кралове, Чехия Республикасы +73472725936, E-mail: borisovdi@yandex.ru

Бір мөлшерлестік екі қатар гипержазықтығының арасында оналасқан көп өлшемді қабатта Дирихле шартымен Лапласиан қарастырылады. Аталмыш оператор кездейсоқ тез тербелуші шамамен қозғалады. Атап айтқанда, қабат кейбір периодтық ұяшықтарына бөлінеді және әр ұяшықта ғаламдық кіші параметрге көбейтілген кездейсоқ тұрақсыз шамалар тәуелсіз және бірдей бөлінгендермен бағамдалады. Тез тербелуші шама орташалау теориясына әдеттегідей енгізіледі. Атап айтқанда, ол жылдам және баяу тұрақсыз шамасына тәуелді, баяу тұрақсыз шамасы бойынша финитен жылдам тұрақсыз шамасы бойынша мерзімді. Қол жеткізілген негізгі нәтиже-қарастырылатын операторға бастауыш өлшемдерді бағалау. Осы баға көп масштабты талдау арқылы спектрдің төменгі қырындағы спектрлік оқшаулауды дәлелдеу мақсатындағы индукция базасы болып табылады.

Түйін сөздер: кездейсоқ гамильтониан, тез тербелуші шам, бастауыш өлшемдерді бағалау, кіші параметр, көп өлшемді қабат.

Оценка начальных масштабов для оператора Шрёдингера со случайным быстро осциллирующим потенциалом в многомерном слое

Борисов Д. И., д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Институт математики, Уфимский научный центр РАН, Университет г. Градец Кралове, Градец Кралове, Чешская Республика, +73472725936, E-mail: borisovdi@yandex.ru

Рассматривается Лапласиан с условием Дирихле в многомерном слое, заключенном между двумя параллельными гиперплоскостями коразмерности один. Такой оператор возмущается быстро осциллирующими случайным потенциалом. А именно, слой делится на периодические ячейки некоторой периодической решеткой и в каждой ячейке рассматривается быстро осциллирующий потенциал, зависящий от случайной переменной, умноженной на глобальный малый параметр. Все случайные переменные, соответствующие ячейкам периодичности, предполагаются независимыми и одинаково распределенными. Быстро осциллирующий потенциал вводится обычным для теории усреднении образом. А именно, он зависит от быстрых и медленных переменных, финитен по медленным переменным и периодичен по быстрым переменным. Главный полученный результат – оценка начальных масштабов для рассматриваемого оператора. Такая оценка является базой индукции для доказательства спектральной локализации на нижнем краю спектра с помощью многомасштабного анализа.

Ключевые слова: случайный гамильтониан, быстро осциллирующий потенциал, оценка начальных масштабов, малый параметр, многомерный слой

1 Introduction

Random Hamiltonians are elliptic operators depending on countably many random variables. Such operators attract a lot of interest since they are often used for describing waves in disordered media and they possess many interesting mathematical properties. One of such properties is the spectral Anderson localization. It is known that the spectrum of many Random Hamiltonians is almost surely a fixed deterministic set. And spectral localization says that some part of this spectrum is pure point. Such property was found for many particular examples, see, for instance, (Martinelli, 1984 : 197-217), (Fröhlich, 1983 : 151-184), (Baker, 2008 : 397-415), (Borisov, 2011 : 58-77), (Borisov, 2013 : 2877-2909), (Bourgain, 2009 : 969-978), (Erdős, 2012a : 900-923), (Erdős, 2012b : 507-542), (Ghribi, 2007 : 123-138), (Ghribi, 2010 : 127-149), (Hislop, 2002 : 12-47), (Kleespies, 2000 : 1345-1365), (Klopp, 1993 : 810-841), (Klopp, 1995a : 265-316), (Klopp, 1995b : 553-569), (Klopp, 2002 : 711-737), (Klopp, 2012 : 587-621), (Klopp, 2009 : 1133-1143), (Klopp, 2003 : 795-811), (Kostykin, 2006 : 267-392), (Lenz, 2008 : 121-161), (Lenz, 2009 : 219-254), (Lenz, 2004 : 733-752), (Leonhardt, 2015), (Stolz, 2000 : 173-183), (Ueki, 1994 : 10), (Ueki, 2000 : 473-498), (Ueki, 2008 : 565-608), (Veselić, 2002 : 199-214), and the references therein. One of main ways for proving the spectral localization is the multiscale analysis, (Martinelli, 1984 : 197-217), (Fröhlich, 1983 : 151-184). It is based on a certain induction whose basis is the initial length scale estimate.

In papers (Borisov, 2016 : 2341-2377), (Borisov, 2017), a general approach was developed for proving initial length scale estimate for operators with small random perturbations. The main advantage of the obtained result is that the perturbations were described by abstract symmetric operators covering many particular examples considered before. The core of the approach was an original technique based on a non-symmetric version of the Birman-Schwinger principle, which gave an opportunity to prove an important deterministic estimate. Such technique allowed the authors to consider perturbations non-monotone w.r.t. the random variables and this was an important step in studying random Hamiltonians.

The present paper can be considered as an example of random perturbation, to which general results of work (Borisov, 2017) can be applied. A non-trivial feature of this example is that it is described by a compactly supported fast oscillating potential. Such perturbation is singular and does not fit the assumptions made for the perturbation in (Borisov, 2017). However, here we employ a special transformation of the operator proposed in (Borisov, 2015 : 33-54) so that this transformation preserves the spectrum and reduces the considered

operator to one fitting the assumptions of (Borisov, 2017). Finally, this allows us to prove the initial length scale estimate for the considered model.

2 Problem and main results

Let $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $x = (x', x_{n+1})$ be Cartesian coordinates in $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^{n+1}$, respectively, $n \geq 1$, $\Pi := \{x : 0 < x_{n+1} < d\}$ be a multidimensional layer of width $d > 0$, Γ be a periodic lattice in $\mathbb{R}^n$ with a basis $e_1, \dots, e_n$ and a periodicity cell $\square' := \{x : x' = \sum_{j=1}^n a_j e_j, a_j \in (0, 1)\}$.

Denote $\square := \square' \times (0, d)$.

By $W_0 = W_0(x, \xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, we denote a real-valued function defined on $\mathbb{R}^{2n+2}$. We assume that this function is 1-periodic w.r.t. each variable ξ_i , $i = 1, \dots, n+1$, has a zero mean

$$\int_{(0,1)^{n+1}} W_0(x, \xi) d\xi = 0 \quad \text{for each } x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (1)$$

and is a compactly supported as a function of x :

$$\text{supp } W_0(\cdot, \xi) \subseteq M \Subset \square \quad \text{for each } \xi \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (2)$$

where M is some fixed set independent of ξ . The function W_0 is supposed to have the following smoothness:

$$\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|} W_0}{\partial x^\alpha \partial \xi^\beta} \in C(\mathbb{R}^{2n+2}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^{n+1}, \quad |\alpha| \leq 3, \quad |\beta| \leq 1. \quad (3)$$

By ε we denote a small positive parameter and we introduce one more function:

$$\begin{aligned} W(x, \varepsilon) &:= \varepsilon^{-b} W\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \\ W(x, 0) &:= 0, \quad \varepsilon = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

where $b < 1$ is a given fixed number.

Let $\zeta = (\zeta_k)_{k \in \Gamma}$ be a sequence of independent identically distributed random variables with the values in segment $[0, 1]$; the associated distribution measure is denoted by μ . We assume that this measure is defined on $[0, 1]$. By $\mathbb{P} := \bigotimes_{k \in \Gamma} \mu$ we denote the product of the measures on space $\Omega := \times_{k \in \Gamma} [0, 1]$. The elements of the latter space are sequences $(\zeta_k)_{k \in \Gamma}$. By $\mathbb{E}(\cdot)$ we denote the expectation value of a random variable w.r.t. the probability $\mathbb{P}$.

In this paper we consider the following perturbed random operator:

$$\mathcal{H}^\varepsilon(\zeta) := -\Delta + \sum_{k \in \Gamma} W(x' - k, x_{n+1}, \varepsilon \zeta_k) \quad (5)$$

in $L_2(\Pi)$ subject to the Dirichlet boundary condition. The domain of the operators $\mathcal{H}^\varepsilon(\zeta)$ is the space $\dot{W}_2^2(\Pi, \partial\Pi)$, where $\dot{W}_2^2(Q, S)$ is the Sobolev space of the functions in $W_2^2(Q)$ vanishing on a surface $S \subset Q$, Q is a domain. This operator is self-adjoint.

The main aim of this paper is to prove the initial length scale estimate for $\mathcal{H}^\varepsilon(\zeta)$. In order to formulate this estimate, we need to introduce additional notations. First we introduce an auxiliary operator

$$\mathcal{H}_\square^\varepsilon := -\Delta + W(x, \delta), \quad \delta \in [\delta_0, \delta_0], \quad (6)$$

in $L_2(\square)$ subject to the Dirichlet boundary condition on $\partial\square \cap \partial\Pi$ and to the periodic boundary condition on the lateral boundaries γ of $\square$, and δ_0 is a fixed number. The domain of $\mathcal{H}_\square^\varepsilon$ consists of the functions in $\dot{W}_2^2(\square, \partial\square \cap \partial\Pi)$ satisfying periodic boundary conditions on γ . Operator $\mathcal{H}_\square^\delta$ is self-adjoint.

Let Λ_δ be the smallest eigenvalue of $\mathcal{H}_\square^\delta$, $\Psi_\delta = \Psi_\delta(x)$ be the associated eigenfunction normalized in $L_2(\square)$. On the lateral surface of the cell $\square$ we define the function

$$\rho_\delta := \frac{1}{\Psi_\delta} \frac{\partial \Psi_\delta}{\partial \nu}, \quad (7)$$

where ν is the outward normal.

Given $\alpha \in \Gamma$, $N \in \mathbb{N}$, the symbols $\Pi_{\alpha,N}$ and $\Gamma_{\alpha,N}$ denote a piece of Π and a piece of Γ :

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha,N} &:= \left\{ x : x' = \alpha + \sum_{i=1}^n a_i e_i, \ a_i \in (0, N), \ 0 < x_{n+1} < d \right\}, \\ \Gamma_{\alpha,N} &:= \left\{ x' \in \Gamma : x' = \alpha + \sum_{i=1}^n a_i e_i, \ a_i = 0, 1, \dots, N-1 \right\}. \end{aligned}$$

By $\mathcal{H}_{\alpha,N}^\varepsilon(\zeta)$ we denote a kind of “restriction” of the operator $\mathcal{H}^\varepsilon(\zeta)$ on $\Pi_{\alpha,N}$. Namely,

$$\mathcal{H}_{\alpha,N}^\varepsilon(\zeta) := -\Delta + \sum_{k \in \Gamma_{\alpha,N}} W(x' - k, x_{n+1}, \varepsilon \zeta_k) \quad (8)$$

is the operator in $L_2(\Pi_{\alpha,N})$ subject to the Dirichlet condition on $\partial\Pi_{\alpha,N} \cap \partial\Pi$ and to the Robin condition

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} - \rho_\varepsilon \right) u = 0 \quad \text{on} \quad \gamma_{\alpha,N}, \quad (9)$$

where $\gamma_{\alpha,N}$ is the lateral boundary of $\Pi_{\alpha,N}$. The domain of the operator $\mathcal{H}_{\alpha,N}^\varepsilon(\zeta)$ consists of the functions in $\dot{W}_2^2(\Pi_{\alpha,N}, \partial\Pi_{\alpha,N} \cap \partial\Pi)$ satisfying condition (9). The operator $\mathcal{H}_{\alpha,N}^\varepsilon(\zeta)$ is self-adjoint.

Let $\Lambda_{\alpha,N}^\varepsilon$ be the smallest eigenvalue of the operator $\mathcal{H}_{\alpha,N}^\varepsilon(\zeta)$.

Our first result provides a lower bound for the gap between $\Lambda_{\alpha,N}^\varepsilon(\zeta)$ and Λ_ε .

Theorem 1 *There exist constants $N_1 \in \mathbb{N}$ and $c_0 > 0$, $\eta > 0$ such that for all $\alpha \in \Gamma$, $N \geq N_1$, $\varepsilon \leq c_0 N^{-4}$ the inequality*

$$\Lambda_{\alpha,N}^\varepsilon(\zeta) - \Lambda_\varepsilon \geq \frac{\varepsilon^{2-2b}}{\eta N^n} \sum_{k \in \Gamma_{\alpha,N}} (1 - \zeta_k^{1-b}) \quad (10)$$

holds true for all ζ .

The next result is the Combes-Thomas estimate.

Theorem 2 *Let $\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ be such that $B_1 := \Pi_{\beta_1, m_1} \subset \Pi_{\alpha, N}$, $B_2 := \Pi_{\beta_2, m_2} \in \Pi_{\alpha, N}$. There exists $N_2 \in \mathbb{N}$ such that for $N \geq N_2$ the estimate*

$$\|\chi_{B_1}(\mathcal{H}_{\alpha, N}^\varepsilon(\zeta) - \lambda)^{-1}\chi_{B_2}\| \leq \frac{C_1}{\delta} e^{-C_2 \delta \text{dist}(B_1, B_2)}$$

holds true, where C_1, C_2 are positive constants independent of $\varepsilon, \alpha, N, B_1, B_2, m_1, m_2, \lambda$ and $\delta := \text{dist}(\lambda, \sigma(\mathcal{H}_{\alpha, N}^\varepsilon(\zeta))) > 0$, $\sigma(\cdot)$ is the spectrum of an operator, $\chi_\cdot$ is the characteristic function of a set, $\|\cdot\|$ is the norm of an unbounded operator in $L_2(\Pi_{\alpha, N})$.

Two above theorems are in fact deterministic results since they are valid for each ζ . The next two theorems provide probabilistic results. The first of them reads as follows.

Theorem 3 *Let $\gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \geq 17$. Then for $N \geq N_1$, where N_1 was defined in Theorem 1, the interval*

$$J_N := \left[\frac{2^{\frac{2}{1-b}}}{\eta^{\frac{1}{1-b}} (\mathbb{E}(\zeta_0^{\frac{1-b}{2}}))^{\frac{2}{1-b}} N^{\frac{8}{1-b}}}, \frac{c_0}{N^{\frac{8}{\gamma(1-b)}}} \right]$$

is non-empty and for $N \geq N_3$, where N_3 is a some constant depending on $\gamma, N_1, N_2, \eta, c_0, \mathbb{E}(\zeta_0^{\frac{1-b}{2}})$, and for $\varepsilon \in J_N$ the estimate

$$\mathbb{P}(\xi \in \Omega : \Lambda_{\alpha, N}^\varepsilon(\xi) - \Lambda^\varepsilon \leq N^{-\frac{1}{2}}) \leq N^{n(1-\frac{1}{\gamma})} e^{-c_1 N^{\frac{n}{\gamma}}}$$

holds true, where constant c_1 depends on measure μ only.

And the second probabilistic result is the initial length scale estimate.

Theorem 4 *Let $\alpha \in \Gamma$, $\gamma \geq 17$, $\beta_1, \beta_2 \in \Gamma_{\alpha, N}$, $m_1, m_2 > 0$ be such that $B_1 := \Pi_{\beta_1, m_1} \in \Pi_{\alpha, N}$, $B_2 := \Pi_{\beta_2, m_2} \in \Pi_{\alpha, N}$. There exists a constant $c_2 > 0$ independent of $\varepsilon, \alpha, N, \beta_1, \beta_2, m_1, m_2$ such that for $N \geq N_3$, $\varepsilon \in J_N$*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\forall \lambda \leq \Lambda_\varepsilon + \frac{1}{2\sqrt{N}} : \|\chi_{B_1}(\mathcal{H}_{\alpha, N}^\varepsilon(\xi) - \lambda)^{-1}\chi_{B_2}\| \leq 2\sqrt{N} e^{-c_2 \frac{\text{dist}(B_1, B_2)}{\sqrt{N}}} \right) \\ & \geq 1 - N^{n(1-\frac{1}{\gamma})} e^{-c_1 N^{\frac{n}{\gamma}}}, \end{aligned}$$

where the same notations were used as in Theorem 3.

Let us discuss briefly the main results. Theorem 1 says that the minimum of the eigenvalue $\Lambda_{\alpha, N}^\varepsilon(\zeta)$ w.r.t. ζ is attained when all ζ_k takes their maximal values $\zeta_k = 1$. Moreover, it provides an effective lower bound for the distance from $\Lambda_{\alpha, N}^\varepsilon(\zeta)$ to its minimum. The second theorem gives a standard Combes-Thomas estimate, which states in fact the exponential decay of the Green function for the operator $\mathcal{H}_{\alpha, N}^\varepsilon$. These two theorems are main tools in proving further deterministic results. The first of them, Theorem 3 states that the probability of close location of $\Lambda_{\alpha, N}^\varepsilon(\zeta)$ is exponentially small as N grows. And this allows us to prove then the initial length scale estimate in Theorem 4. As it was mentioned in the Introduction, such estimate is the induction base for proving Anderson localization by the multiscale analysis.

3 Proof of the main result

The proof of Theorems 1, 2, 3, 4 is based on the general results obtained in (Borisov, 2017). First we describe briefly these results.

Let $\mathcal{L}(t)$, $t \in [0, t_0]$, be a family of linear operators

$$\mathcal{L}(t) = t\mathcal{L}_1 + t^2\mathcal{L}_2 + t^3\mathcal{L}_3(t), \quad (11)$$

where $\mathcal{L}_i$ are bounded symmetric operators from $W_2^2(\square)$ into $L_2(\square)$. The operator $\mathcal{L}_3(t)$ is assumed to be bounded uniformly in t and Lipschitz continuous:

$$\|(\mathcal{L}_3(t_2) - \mathcal{L}_3(t_1))u\|_{L_2(\square)} \leq C|t_2 - t_1|\|u\|_{W_2^2(\square)} \quad (12)$$

for all $t_1, t_2 \in [0, t_0]$, $u \in W_2^2(\square)$ with a constant C independent of t_1, t_2, u .

Let $\mathcal{H}_\square^\delta$ be the operator

$$\mathcal{H}_\square^\delta := -\Delta + \mathcal{L}(\delta)$$

in $L_2(\square)$ subject to the Dirichlet condition on $\partial\square \cap \partial\Pi$ and to the periodic boundary condition on γ . As $\delta = 0$, the operator $\mathcal{H}_\square^\delta$ becomes just a pure Laplacian subject to the above described boundary conditions. The domain of $\mathcal{H}_\square^\delta$ consists of the functions in $\dot{W}_2^2(\square, \partial\square \cap \partial\Pi)$ satisfying periodic boundary condition on γ .

The smallest eigenvalue Λ_0 of $\mathcal{H}_\square^\delta$ is the smallest eigenvalue of the operator $-\frac{d^2}{dx_{n+1}^2}$ on $(0, d)$ subject to the Dirichlet condition. The associated eigenfunction $\hat{\Psi}_0$ is supposed to be normalized as

$$\|\Psi_0\|_{L_2(0,d)} = \frac{1}{\sqrt{|\square'|}}. \quad (13)$$

The first assumption made in (Borisov, 2017) was as follows.

(A1). The identity $(\mathcal{L}_1\Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)} = 0$ holds true.

This assumption implies that the equation

$$(\mathcal{H}_\square^0 - \Lambda_0)\Psi_1 = -\mathcal{L}_1\Psi_0 \quad (14)$$

is solvable and has a unique solution orthogonal to Ψ_0 in $L_2(\square)$. Hereafter by the symbol Ψ_1 we denote exactly such solution.

The second assumption was

(A2). The inequality $\Lambda_2 := (\Psi_1, \mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)} + (\mathcal{L}_2\Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)} < 0$ holds true.

By $\Phi_1 \in \dot{W}_2^2(\square, \partial\square \cap \partial\Pi)$ we denote the solution to the problem

$$(-\Delta - \Lambda_0)\Phi_1 = -\mathcal{L}_1\Psi_0 \quad \text{in } \square, \quad \Phi_1 = 0 \quad \text{on } \partial\square \cap \partial\Pi, \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial\nu} = 0 \quad \text{on } \gamma, \quad (15)$$

orthogonal to Ψ_0 in $L_2(\square)$. It was shown in (Borisov, 2017) that this problem is uniquely solvable.

The next assumptions made in (Borisov, 2017) was

(A3). The inequality $\eta := -\Lambda_2 + (\operatorname{Re}(\Phi_1 - \Psi_1), \operatorname{Re} \mathcal{L}_1 \Psi_0)_{L_2(\square)} \geq 0$ holds true.

There was one more assumption in (Borisov, 2017). It was shown that this fourth assumption is satisfied provided the operator $\mathcal{L}(t)$ is real-valued in the sense that $\mathcal{L}(t)u$ is a real-valued function for real-valued u .

In our case the multiplication by the potential $W(x, t)$ can not be represented as some operator $\mathcal{L}(t)$ defined by (11). This is why we employ the approach proposed in (Borisov, 2015 : 21).

Let $W_1 = W_1(x, \xi)$ be the solution to the equation

$$\Delta_\xi W_1(x, \xi) = W_0(x, \xi), \quad \xi \in (0, 1)^{n+1} \quad (16)$$

subject to periodic boundary conditions obeying the orthogonality condition:

$$\int_{(0,1)^{n+1}} W_1(x, \xi) d\xi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (17)$$

It was shown in (Borisov, 2015 : 21) that this problem is uniquely solvable. We introduce extra two functions:

$$W_*(x, \varepsilon) := \varepsilon^{-b} W_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad W_*(x, 0) := 0, \quad \varepsilon = 0, \quad (18)$$

and

$$Q_{\alpha, N}(x, \varepsilon, \zeta) := 1 + \sum_{k \in \Gamma_{\alpha, N}} (\varepsilon \zeta_k)^{2-b} W_*(x' - k, x_{n+1}, \varepsilon \zeta_k). \quad (19)$$

By $\mathcal{V}_{\alpha, N}^\varepsilon(\zeta)$ we denote the operator of multiplication by $Q_{\alpha, N}(x, \varepsilon, \zeta)$. It was shown in (Borisov, 2015 : 21) that

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}_{\alpha, N}^\varepsilon(\zeta))^{-1} \mathcal{H}_{\alpha, N}^\varepsilon(\zeta) \mathcal{V}_{\alpha, N}^\varepsilon(\zeta) = & -\Delta + \sum_{k \in \Gamma_{\alpha, N}} (\varepsilon \zeta_k)^{1-b} \left(\sum_{j=1}^{n+1} A_j(x' - k, x_{n+1}, \varepsilon \zeta_k) \frac{\partial}{\partial x_j} + \right. \\ & \left. + A_0(x' - k, x_{n+1}, \varepsilon \zeta_k) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

The operator in the right hand side of this identity is considered in $L_2(\Pi_{\alpha, N})$ subject to the same boundary conditions as $\mathcal{H}_{\alpha, N}^\varepsilon(\zeta)$. The coefficients A_j , A_0 are given by the formulae

$$\begin{aligned} A_j(x, \varepsilon) &:= -\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^{2-b} W_*(x, \varepsilon)} \frac{\partial W_*}{\partial x_j}(x, \varepsilon), \\ A_0(x, \varepsilon) &:= -\frac{1}{1 + \varepsilon^{2-b} W_*(x, \varepsilon)} \left(2 \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_j \partial \xi_j} \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) + \varepsilon (\Delta_x W_1) \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{1-b} W_1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon} \right) W_*(x, \varepsilon) \right). \end{aligned}$$

The first two terms in the brackets in the right hand side of the formula for A_0 should be treated in the sense of the partial derivatives w.r.t. x and ξ for function $W_1(x, \xi)$ followed by the substitution $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$. The functions $A_j(x, \varepsilon)$, $A_0(x, \varepsilon)$ are bounded uniformly in x , ε and ζ_k .

The right hand side of identity (20) can be represented as (11) satisfying at the same time Assumptions (A1), (A2), (A3). Namely, the operators $\mathcal{L}_i$ are supposed to be depending on t , $\mathcal{L}_i(t) = \mathcal{L}_i(t)$, and are introduced as

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(t) &:= \sum_{j=1}^{n+1} K_j^{(1)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} + K_0^{(1)}(x, t), \\ \mathcal{L}_2(t) &:= K_0^{(2)}(x, t), \quad \mathcal{L}_3(t) := 0,\end{aligned}\tag{21}$$

as $t > 0$, where

$$\begin{aligned}K_j^{(1)}(x, t) &:= \frac{t^{\frac{1}{1-b}}}{1 + t^{\frac{2-b}{1-b}} W_*(x, t^{\frac{1}{1-b}})} \frac{\partial}{\partial x_j} W_*(x, t^{\frac{1}{1-b}}), \\ K_0^{(1)}(x, t) &:= - \frac{1}{1 + t^{\frac{2-b}{1-b}} W_*(x, t^{\frac{1}{1-b}})} \left(2 \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_j \partial \xi_j} \left(x, \frac{x}{t^{\frac{1}{1-b}}} \right) \right. \\ &\quad \left. + t^{\frac{1}{1-b}} (\Delta_x W_1) \left(x, \frac{x}{t^{\frac{1}{1-b}}} \right) \right) + t P(t^{\frac{1}{1-b}}), \\ K_0^{(2)}(x, t) &:= - P(t^{\frac{1}{1-b}}) + \frac{W_1 \left(x, \frac{x}{t^{\frac{1}{1-b}}} \right) W_* \left(x, \frac{x}{t^{\frac{1}{1-b}}} \right)}{1 + t^{\frac{2-b}{1-b}} W_*(x, t^{\frac{1}{1-b}})}, \\ P(t) &:= \frac{t^{a-1}}{|\square'|} \int_{\square} \frac{\psi_0^2(x_{n+1})}{1 + t^{2-b} W_*(x, \varepsilon)} \left(2 \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_j \partial \xi_j} \left(x, \frac{x}{t} \right) + \varepsilon (\Delta_x W_1) \left(x, \frac{x}{t} \right) \right) dx,\end{aligned}$$

and for $t = 0$, operators $\mathcal{L}_i$ are determined by the formulae

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1(0) &:= 0, \quad \mathcal{L}_3(0) := 0, \\ \mathcal{L}_2(0) &:= - \frac{1}{2} \int_{\square} dx \psi_0^2(x_{n+1}) \int_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_{\xi} W_1(x, \xi)|^2 d\xi.\end{aligned}\tag{22}$$

It is easy to make sure that under such choice of operator $\mathcal{L}(t)$, the perturbation in right hand side of (20) becomes (11), if as a new small parameter we choose ε^{1-b} , and as new random variables we take ζ_k^{1-b} .

The above obtained operator $\mathcal{L}(t)$ is not symmetric, since the operator $\mathcal{L}_i$ are not. This cause no big troubles since the symmetricity of these operators was employed in (Borisov, 2015 : 21) just in certain steps, which can be verified independently. The next point is that the operators $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ depend on t . In this case the technique of (Borisov, 2017) works as well, just Assumptions (A1), (A2), (A3) are to be satisfied uniformly in t .

In (Borisov, 2017), the symmetricity of $\mathcal{L}(t)$ was employed to ensure the realness of eigenvalues Λ_0 and $\Lambda_{\alpha, N}^{\varepsilon}(\zeta)$. This is obviously true in our case. The next point,

where the symmetricity was used, is the bracketing at several steps. In our case the bracketing can be done for the original operators $\mathcal{H}_\square^\delta$ and $\mathcal{H}_{\alpha,N}^\varepsilon(\zeta)$ since they are self-adjoint and then transformation (20) should be applied. Then all the proofs from (Borisov, 2017) can be reproduced literally. This is why in our case we need just to check Assumptions (A1), (A2), (A3) uniformly in t .

It was shown in (Borisov, 2015 : 21) that Assumption (A1) holds true for the operator $\mathcal{L}_1$ defined by (21). As it was proved in (Borisov, 2015 : 21, Eq. (5.15)), we have the inequality

$$(\mathcal{L}_2(t)\Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)} = - \int_{\square} dx \Psi_0^2(x_{n+1}) \int_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_\xi W_1(x, \xi)|^2 d\xi + O(t^{\frac{1}{1-b}}), \quad t \rightarrow +0. \quad (23)$$

It was also proved that

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_1(t)\Psi_0)(x, t) &= t P(t^{\frac{1}{1-b}})\Psi_0(x_{n+1}) \\ &- \frac{\Psi_0(x_{n+1})}{1 + t^{\frac{2-b}{1-b}}W_*(x, t^{\frac{1}{1-b}})} \left(2 \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x_j \partial \xi_j} \left(x, \frac{x}{t^{\frac{1}{1-b}}} \right) + t^{\frac{1}{1-b}} (\Delta_x W_1) \left(x, \frac{x}{t^{\frac{1}{1-b}}} \right) \right). \end{aligned}$$

Given such right hand in equation (14), one can construct the asymptotic expansion for its solution Ψ_1 by the multiscale method (Bakhvalov, 1984). This expansion holds true at least in $L_2(\square)$ -norm and it implies that $\Psi_1 = O(t^{\frac{2}{1-b}})$. Hence,

$$(\Psi_1, \mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)} = O(t^{\frac{2}{1-b}}), \quad t \rightarrow 0. \quad (24)$$

This identity and (23) yield

$$(\mathcal{L}_2(t)\Psi_0, \Psi_0)_{L_2(\square)} - (\Psi_1, \mathcal{L}_1(t)\Psi_0)_{L_2(\square)} \leq -\frac{1}{2} \int_{\square} dx \Psi_0^2(x_{n+1}) \int_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_\xi W_1(x, \xi)|^2 d\xi$$

that proves Assumption (A2).

As in the case of equation (14), one can construct the asymptotics for the solution to problem (15) by the multiscale method. It gives that $\Phi_1 = O(t^{\frac{2}{1-b}})$ in $L_2(\square)$ -norm. This identity and (24) lead us to the formula

$$\begin{aligned} -\Lambda_2 + (\text{Re}(\Phi_1 - \Psi_1), \text{Re} \mathcal{L}_1\Psi_0)_{L_2(\square)} &= \int_{\square} dx \Psi_0^2(x_{n+1}) \int_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_\xi W_1(x, \xi)|^2 d\xi + O(t^{\frac{1}{1-b}}) \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\square} dx \Psi_0^2(x_{n+1}) \int_{(0,1)^{n+1}} |\nabla_\xi W_1(x, \xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

for sufficiently small t . This, Assumption (A3) is satisfied.

Since the functions W_0, W_1 are real-valued, for each real-valued function $u \in W_2^2(\square)$ the functions $\mathcal{L}_1(t)u, \mathcal{L}_2(t)u$ are real-valued. This ensures the fourth assumption in (Borisov, 2017).

Thus, we can apply the general results in (Borisov, 2017) to our model and it leads us to Theorems 1, 2, 3, 4.

4 Conclusion

One of main aims of the present paper is to show that the general results obtained previously in [1] can be also applied to certain singular perturbations. The main tool is to employ a non-unitary transformation of the operator, in fact, a certain multiplication operator. This operator is to be introduced in such a way to remove the singular perturbation from the operator and replace it by a regular one. This approach was successfully realized in [2] and we show that it works perfectly for our case as well. And as our main results show, the considered perturbation by a fast oscillating potential is negative in the sense that it shifts the spectrum down.

References

- [1] D.I. Borisov «Initial length scale estimate for layers with small random negative definite perturbations», *J. Math. Sci.* (2017 to appear).
- [2] D.I. Borisov, R.Kh. Karimov, T.F. Sharapov «Initial length scale estimate for waveguides with some random singular potentials», *Ufa Math. J.* Vol.7, No.2.(2015) : 33–54.
- [3] N.S. Bakhvalov, G.P. Panasenko *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials* (Nauka, Moscow, 1984). Translated by Kluwer (Dordrecht, 1989).
- [4] F. Martinelli and H. Holden «On absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a random Schrödinger operator on $L^2(R^\nu)$ », *Comm. Math. Phys.* Vol. 93, No. 2.(1984): 197-217.
- [5] J. Fröhlich, T. Spencer «Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy», *Comm. Math. Phys.* Vol. 88, No. 2. (1983) : 151-184.
- [6] J. Baker, M. Loss, and G. Stolz «Minimizing the ground state energy of an electron in a randomly deformed lattice», *Comm. Math. Phys.* Vol. 283, No. 2. (2008) : 397–415.
- [7] D. Borisov and I. Veselić «Low lying spectrum of weak-disorder quantum waveguides», *J. Stat. Phys.* Vol. 142, No. 1. (2011) : 58–77.
- [8] D. Borisov and I. Veselić «Low lying eigenvalues of randomly curved quantum waveguides», *J. Funct. Anal.* Vol. 265, No. 11. (2013) : 2877–2909.
- [9] J. Bourgain «An approach to Wegner’s estimate using subharmonicity», *J. Stat. Phys.* Vol. 134, No. 5-6. (2009) : 969–978.
- [10] L. Erdős and D. Hasler «Anderson localization at band edges for random magnetic fields», *J. Stat. Phys.* Vol. 146, No. 5. (2012) : 900–923.
- [11] L. Erdős and D. Hasler «Wegner estimate and anderson localization for random magnetic fields», *Comm. Math. Phys.* Vol. 309, No. 2. (2012) : 507–542.
- [12] F. Ghribi, P. D. Hislop, and F. Klopp «Localization for Schrödinger operators with random vector potentials», *In Adventures in mathematical physics. Contemp. Math. Providence, RI, Amer. Math. Soc.* Vol. 447. (2007) : 123–138.
- [13] F. Ghribi and F. Klopp «Localization for the random displacement model at weak disorder», *Ann. Henri Poincaré* Vol. 11, No. 1-2. (2010) : 127–149.
- [14] P.D. Hislop and F.Klopp «The integrated density of states for some random operators with nonsign definite potentials», *J. Funct. Anal.* Vol. 195, No. 1. (2002) : 12–47.
- [15] F. Kleespies and P. Stollmann «Lifshitz asymptotics and localization for random quantum waveguides», *Rev. Math. Phys.* Vol. 12, No. 10. (2000) : 1345–1365.
- [16] F. Klopp «Localization for semiclassical continuous random Schrödinger operators II, No. The random displacement model», *Helv. Phys. Acta.* Vol. 66, No. 7-8. (1993) : 810–841.
- [17] F. Klopp «Localisation pour des opérateurs de Schrödinger aléatoires dans $L^2(\mathbf{R}^d)$: un modèle semi-classique», *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* Vol. 45, No. 1. (1995) : 265–316.

-
- [18] F. Klopp «Localization for some continuous random Schrödinger operators», *Comm. Math. Phys.* Vol. 167, No. 3. (1995) : 553–569.
- [19] F. Klopp «Weak disorder localization and Lifshitz tails: continuous Hamiltonians», *Ann. Henri Poincaré* Vol. 3, No. 4. (2002) : 711–737.
- [20] F. Klopp, M. Loss, S. Nakamura, and G. Stolz «Localization for the random displacement model», *Duke Math. J.* Vol. 161, No. 4. (2012) : 587–621.
- [21] F. Klopp and S. Nakamura «Spectral extrema and Lifshitz tails for non-monotonous alloy type models», *Comm. Math. Phys.* Vol. 287, No. 3. (2009) : 1133–1143.
- [22] F. Klopp, S. Nakamura, F. Nakano, and Y. Nomura «Anderson localization for 2D discrete Schrödinger operators with random magnetic fields», *Ann. Henri Poincaré* Vol. 4, No. 4. (2003) : 795–811.
- [23] V. Kostechnik and I. Veselić «On the Lipschitz continuity of the integrated density of states for sign-indefinite potentials», *Math. Zeit.* Vol. 252, No. 2. (2006) : 367–392.
- [24] D. Lenz, N. Peyerimhoff, O. Post, and I. Veselić «Continuity properties of the integrated density of states on manifolds», *Japan. J. Math.* Vol. 3, No. 1. (2008) : 121–161.
- [25] D. Lenz, N. Peyerimhoff, O. Post, and I. Veselić «Continuity of the integrated density of states on random length metric graphs», *Math. Phys. Anal. Geom.* Vol. 12, No. 3 (2009) : 219–254.
- [26] D. Lenz, N. Peyerimhoff, and I. Veselić «Integrated density of states for random metrics on manifolds», *Proc. London Math. Soc.* Vol. 88, No. 3. (2004) : 733–752.
- [27] K. Leonhardt, N. Peyerimhoff, M. Tautenhahn, and I. Veselić «Wegner estimate and localization for alloy-type models with sign-changing exponentially decaying single-site potentials», *Rev. Math. Phys.* Vol. 27, No. 4. (2015) : 1550007.
- [28] G. Stolz «Non-monotonic random Schrödinger operators: the Anderson model», *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 248, No. 1. (2000) : 173–183.
- [29] N. Ueki «On spectra of random Schrödinger operators with magnetic fields», *Osaka J. Math.* Vol. 31, No. 1. (1994) : 177–187.
- [30] N. Ueki «Simple examples of Lifshitz tails in Gaussian random magnetic fields», *Ann. Henri Poincaré* Vol. 1, No. 3. (2000) : 473–498.
- [31] N. Ueki «Wegner estimate and localization for random magnetic fields», *Osaka J. Math.* Vol. 45, No. 3. (2008) : 565–608.
- [32] I. Veselić «Wegner estimate and the density of states of some indefinite alloy type Schrödinger operators», *Lett. Math. Phys.* Vol. 45, No. 3. (2002) : 199–214.
- [33] D. Borisov, A. Golovina, I. Veselić «Quantum Hamiltonians with weak random abstract perturbation. I. Initial length scale estimate», *Ann. H. Poincaré* Vol. 17, No. 9. (2016) : 2341–2377.

УДК 512.56, 512.57

Сложность решеток квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов

Луцак С.М., докторант, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
г. Астана, Республика Казахстан, +77787149316, E-mail: sveta_lutsak@mail.ru

В работе выполнено исследование сложности строения решеток (относительных) квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов. Вопрос о том, что считать сложностью решетки квазимногообразий и какие решетки квазимногообразий являются сложными согласно той или иной мере сложности, а какие - нет, изучался многими авторами. Хорошо известны две меры сложности строения решеток квазимногообразий: иррациональность (невычислимость множества всех их конечных подрешеток) и Q -универсальность. Иррациональность решетки квазимногообразий означает, что не существует алгоритма, который по заданной конечной решетке определял бы, вложима эта решетка в рассматриваемую решетку квазимногообразий или нет. Другая мера сложности строения решеток квазимногообразий выражается понятием Q -универсальности. Это значит, что решетка квазимногообразий для любого квазимногообразия конечной сигнатуры является гомоморфным образом некоторой подрешетки рассматриваемой Q -универсальной решетки квазимногообразий. Два года назад была установлена связь между иррациональностью и Q -универсальностью и поставлена проблема. Верно ли, что любой Q -универсальный класс систем фиксированной сигнатуры содержит иррациональный подкласс? Существует ли не Q -универсальный класс, но, тем не менее, являющийся иррациональным? Автором доказана выполнимость нетривиального тождества на решетках квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов. Установлено, что существует континуум иррациональных классов дифференциальных группоидов, не являющихся Q -универсальными.

Ключевые слова: решетка квазимногообразий, иррациональность, Q -универсальность.

Дифференциалды группоидтер кластары үшін квазикөпбейне торлардың күрделілігі

Луцак С.М., докторант, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті,
Астана қ., Қазақстан Республикасы, +77787149316, Электрондық пошта: sveta_lutsak@mail.ru

Жұмыста дифференциалды группоидтер кластары үшін квазикөпбейне торлардың күрделілігіне (салыстырмалығына) зерттеу жасалды. Мәселе квазикөпбейне торлардың күрделілігі деп нені санау санау керек, және квазикөпбейне торлардың қайсысын күрделіліктің сол немесе басқа өлшеміне сәйкес күрделі болып табылады, ал қайсылары күрделі емес болып табылатынын көптеген авторлар зерттеген. Квазикөпбейне торлар күрделілігінің екі өлшемін жақсы білеміз: иррационалдығы (барлық төменгі торлары жиынтығының есептелмейтіні) және Q -әмбебаптығы. Квазикөпбейне торлардың иррационалдығы, тапсырылған соңғы торы бойынша осы тор қарастырылып жатқан квазикөпбейне торларына салынатынын анықтайтын алгоритмнің жоқ дегені. Квазикөпбейне торлар күрделілігінің екінші өлшемі Q -әмбебаптығы ұғымымен білдіріледі. Ол квазикөпбейне торы соңғы сигнатурасының кез келген квазикөпбейнелігі үшін қарастырылып жатқан квазикөпбейне тордың Q -әмбебаптығы қайсы бар төменгі торы гомоморфты бейне болып табылады дегені. Осыдан екі жыл бұрын иррационалдық пен Q -әмбебаптығы арасындағы байланысы анықтады және мәселе көтерілді. Белгіленген сигнатураны жүйелерінің кез келген Q -әмбебап класы иррационалдық төменгі класына ие болғаны дұрыс па? Q -әмбебап болып табылмайтын, бірақ, иррационалдық болып табылатын клас бар ма? Дифференциалды группоидтер кластары үшін квазикөпбейнелік торларында тривиалды емес тепе-теңдігінің орындалатынын дәлелдеді. Q -әмбебаптық болып табылмайтын дифференциалды группоидтердің иррационалдық кластарының континуумы бар болғаны анықталды.

Түйін сөздер: квазикөпбейне тор, иррационалдығы, Q -әмбебаптығы.

The complexity of quasivariety lattices for the classes of differential groupoids

Lutsak S.M., PhD student, the L.N. Gumilev Eurasian National University,
Astana, Kazakhstan, +77787149316, E-mail: sveta_lutsak@mail.ru

In this work we explore the complexity of structure of (relative) quasivariety lattices for the classes of differential groupoids. A question, what is the complexity of quasivariety lattice and what quasivariety lattices are complex according to this or that measure of complexity and which are not, studied by many authors. Two complexity measures of the structure of quasivariety lattices are known: unreasonability (non-computability the set of all finite sublattices of the quasivariety lattices) and Q -universality. Unreasonability of the quasivariety lattice means that there is no algorithm which would determine by the given finite lattice, this lattice is embeddable into the considered quasivariety lattice or not. Other complexity measure of the structure of quasivariety lattices is expressed by the concept of Q -universality. It means that the quasivariety lattice for any quasivariety of finite signature is a homomorphic image of some sublattice of the considered Q -universal lattice of quasivarieties. Two years ago it was established a connection between unreasonability and Q -universality; it was also posed the following problem. Does any Q -universal class of algebraic structures of a fixed signature contain a unreasonable subclass? Is there a class of algebraic structures which is not Q -universal but which is nevertheless unreasonable? We find a non-trivial identity holding in quasivariety lattices for the classes of differential groupoids. It is proved that there are continuum many unreasonable classes of the differential groupoids which are not Q -universal.

Key words: quasivariety lattice, unreasonability, Q -universality.

1 Введение

Одной из известных проблем универсальной алгебры и теории решеток является вопрос о том, какие решетки изоморфны решеткам квазимногообразий. Эта проблема была поставлена в 1945 году Г. Биркгофом (Birkhoff, 1946: 310) и, независимо, в 1966 году А.И. Мальцевым (Мальцев, 1968: 217) и является актуальной по настоящее время. Описание решеток, изоморфных решеткам квазимногообразий, получено для ряда конкретных классов решеток (например, для алгебраических точечных решеток (Горбунов, 1999, 294–299), для конечных дистрибутивных решеток (Туманов, 1983: 168–181)). Нахождение решения проблемы Биркгофа-Мальцева в самой общей ее постановке представляется исключительно сложной задачей. Утверждать это позволяет ряд результатов о сложности строения решеток квазимногообразий, полученных к настоящему времени, см. (Adams, 2004: 357–378), (Nurakunov, 2012a: 3, 10–12, 14), (Нуракунов, 2014: 395–399), (Швидефски, 2015: 392, 393–395), а также (Горбунов, 1999: 271–274, 291–300). Тем не менее, изучение проблемы Биркгофа-Мальцева для конкретных классов алгебраических систем представляет интерес и заслуживает внимания.

В настоящей работе продолжено изучение сложности строения решеток квазимногообразий. Объектом исследования являются решетки (относительных) квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов, а предметом исследования — сложность этих решеток, которая характеризуется с различных точек зрения. А именно, рассматриваются две меры сложности строения решеток квазимногообразий: иррациональность (или невычислимость множества всех их конечных подрешеток) и Q -универсальность.

Решетка квазимногообразий $Lq(\mathbf{K})$ для класса $\mathbf{K}$ алгебраических систем фиксированной сигнатуры называется иррациональной, если множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $Lq(\mathbf{K})$ невычислимо, т. е. не существует алгоритма,

который по заданной конечной решетке определял бы, вложима эта решетка в рассматриваемую решетку квазимногообразий $Lq(\mathbf{K})$ или нет. В этом случае сам класс $\mathbf{K}$ тоже будем называть иррациональным. Эта концепция сложности строения решеток квазимногообразий была введена К. Херрманном в 2007 году и развита в работах А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012a: 1–17), (Nurakunov, 2012b: 391–393), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 395–399). Первые примеры иррациональных квазимногообразий (а именно, квазимногообразия унарных и точечных абелевых групп) были построены им же в работах (Nurakunov, 2012a: 3, 10–12, 14), (Нуракунов, 2014: 393, 395–399). Существование иррациональных квазимногообразий говорит о том, что решетки квазимногообразий могут иметь чрезвычайно сложное строение.

Другая мера сложности строения решеток квазимногообразий была введена М.В. Сапиром в 1985 г. в работе (Sapir, 1985: 172) и выражается понятием Q -универсальности. Согласно М.В. Сапиру, квазимногообразие $\mathbf{K}$ является Q -универсальным, если для любого квазимногообразия $\mathbf{K}'$ конечной сигнатуры решетка $Lq(\mathbf{K}')$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки в решетке $Lq(\mathbf{K})$ (Sapir, 1985: 172). В этом случае решетка квазимногообразий $Lq(\mathbf{K})$ также называется Q -универсальной; она не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству. Сейчас известно очень много различных Q -универсальных квазимногообразий и число таких примеров постоянно растет, см. обзорную работу (Adams, 2004: 357–378), а также (Горбунов, 1999: 271–274).

Классы (квазимногообразия) дифференциальных группоидов изучались в работе (Schwartz, 2014: 1111–1117), см. также работы А.В. Кравченко (Kravchenko, 2008: 11–17), (Кравченко, 2009: 26–39), (Кравченко, 2012a: 89–99), (Кравченко, 2012b: 201–207). Дифференциальным группоидом называется алгебра с одной бинарной операцией, удовлетворяющая тождествам (символ $\cdot$ обозначает бинарную операцию):

1. $\forall x [x \cdot x = x]$
2. $\forall x \forall y \forall z \forall t [(x \cdot y) \cdot (z \cdot t) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot t)]$
3. $\forall x \forall y [x \cdot (x \cdot y) = x]$

В работе (Schwartz, 2014: 1116) было показано, что существует иррациональный класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, а в работе (Kravchenko, 2008: 13) доказана Q -универсальность класса дифференциальных группоидов. Также, в работе (Schwartz, 2014: 1121) было доказано, что класс $\mathbf{K}$ всех систем сигнатуры σ является Q -универсальным тогда и только тогда, когда он содержит иррациональный подкласс $\mathbf{K}'$, т.е. такой подкласс $\mathbf{K}'$, что множество всех конечных подрешеток решетки $Lq(\mathbf{K}')$ невычислимо. Таким образом, была установлена связь между двумя рассмотренными выше мерами сложности. Вследствие чего, возникла следующая проблема (Schwartz, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Верно ли, что любой Q -универсальный класс $\mathbf{K}$ систем фиксированной сигнатуры содержит иррациональный подкласс? Существует ли иррациональный класс $\mathbf{K}$, не являющийся Q -универсальным? Ответ на первый вопрос был дан в работе (Швидефски, 2015: 392).

Автором найдены примеры не Q -универсальных классов алгебраических систем, для которых множества всех конечных подрешеток их решеток квазимногообразий невычислимы. А именно, доказано существование континуума иррациональных классов дифференциальных группоидов, не являющихся Q -универсальными, см. теоремы 2 и 3.

2 Обзор литературы

Вопрос о том, какие решетки изоморфны решеткам квазимногообразий, поставлен в работах (Birkhoff, 1946: 310), (Мальцев, 1968: 217). В настоящее время эту проблему называют проблемой Биркгофа-Мальцева; результаты и обсуждения, касательно данной проблемы, см. в (Adams, 2004: 357–378), (Швидефски, 2015: 382–383, 393–395), (Горбунов, 1999: 271–274, 291–300).

Изучению свойств решеток, изоморфных решеткам квазимногообразий алгебраических систем, посвящено огромное количество работ, см. библиографию в настоящей работе и в (Adams, 2004: 372–378), (Швидефски, 2015: 382–383, 395–398), (Горбунов, 1999: 339–365). Среди них можно отметить работы А.И. Мальцева (Мальцев, 1970: 385), Г. Гретцера (Gratzer, 1978: 415–417), В.А. Горбунова (Горбунов, 1995а: 142–168), (Горбунов, 1995б: 369–397), (Горбунов, 1995в: 646–666), (Горбунов, 1999: 349–351), В.И. Туманова (Туманов, 1983: 168–181), (Горбунов, 1982: 12–44), М. Адамса и В. Дзебяка (Adams, 2004: 357–378), (Adams, 1994а: 1053–1059), (Adams, 1994б: 181–210), (Adams, 1994в: 15–28), (Adams, 2001: 253–283), (Adams, 2002а: 7–11), (Adams, 2002б: 333–356), М.В. Сапира (Sapir, 1985: 172–180), А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012а: 1–17), (Nurakunov, 2012б: 391–393), (Nurakunov, 2012в: 167–179), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 372–400), А.В. Кравченко (Kravchenko, 2002: 311–325), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Kravchenko, 2016: 388–394), (Кравченко, 2001: 113–127), (Кравченко, 2009: 26–39), (Кравченко, 2012а: 89–99), (Кравченко, 2012б: 201–207), М.В. Швидефски (Schwidefsky, 2014: 1099–1126), (Швидефски, 2015: 381–398), (Семенова, 2012: 1111–1132) и других.

В настоящее время существует несколько подходов к понятию сложности решеток квазимногообразий. Понятие Q -универсальной решетки квазимногообразий введено в работе (Sapir, 1985: 172), где также была доказана Q -универсальность квазимногообразия, порожденного одной полугруппой. Примеры Q -универсальных классов алгебраических систем можно найти в работах (Adams, 2004: 357–378), (Швидефски, 2015: 393–395), (Adams, 1994а: 1053–1059), (Adams, 2001: 253–283), (Adams, 2002б: 333–356), (Kravchenko, 2002: 311–325), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Нуракунов, 2014: 372–400), (Schwidefsky, 2014: 1124), (Sheremet, 2001: 193–201), (Горбунов, 1999: 271–274) и других. В работе М.Е. Адамса и В. Дзебяка (Adams, 1994а: 1056) найдены достаточные условия Q -универсальности; эти условия получили обобщение в работе (Швидефски, 2015: 391). Кроме того, была установлена взаимосвязь между сигнатурой σ и наличием у класса $\mathbf{K}(\sigma)$ всех систем этой сигнатуры свойства Q -универсальности. А именно, класс $\mathbf{K}(\sigma)$ является Q -универсальным тогда и только тогда, когда σ содержит либо по крайней мере бинарный предикатный символ, либо по крайней мере унарный функциональный символ, либо σ является, по крайней мере, счетной, см. рукопись В. Дзебяка (Dziobiak, 1997: proposition 4.4) и работу (Schwidefsky, 2014: 1121–1123).

Понятие иррациональной решетки дано в работе (Nurakunov, 2012а: 2). Примеры классов, для которых множества всех конечных подрешеток их решеток квазимногообразий невычислимы, были построены в работах (Nurakunov, 2012а: 3, 10–12, 14), (Nurakunov, 2012б: 391–393), (Nurakunov, 2012в: 168–170), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 393, 395–399), (Schwidefsky, 2014: 1110–1111, 1116–1117, 1119–1120), (Семенова, 2012: 1129–1131). Взаимосвязь между Q -универсальностью класса $\mathbf{K}(\sigma)$ всех систем сигнатуры σ и существованием у него иррационального подкласса установлена

в работе (Schwidefsky, 2014: 1121).

Вопросы о том, верно ли, что любой Q -универсальный класс $\mathbf{K}$ систем фиксированной сигнатуры содержит иррациональный подкласс; и о существовании иррационального класса $\mathbf{K}$, не являющегося Q -универсальным, поставлены в работах (Schwidefsky, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Положительный ответ на первый вопрос для почти всех известных к настоящему моменту Q -универсальных квазимногообразий дан в работе (Швидефски, 2015: 392).

Классы дифференциальных группоидов рассматривались в работах (Schwidefsky, 2014: 1111–1117), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Кравченко, 2009: 26–39), (Кравченко, 2012а: 89–99), (Кравченко, 2012б: 201–207). Имеется результат о существовании класса $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, для которого множество всех конечных подрешеток решетки квазимногообразий $L_q(\mathbf{K})$ невычислимо (Schwidefsky, 2014: 1116–1117). Q -универсальность класса дифференциальных группоидов доказана в работе (Kravchenko, 2008: 13). Таким образом, выполненный обзор опубликованных на сегодняшний день статей (и других источников, см. библиографию к настоящей работе) по теме исследования свидетельствует об отсутствии в изученной литературе факта о существовании иррациональных и одновременно не Q -универсальных классов дифференциальных группоидов.

Отметим также, что нетривиальное теоретико-решеточное тождество H_n , $n \in \mathbb{Z}^+$ было рассмотрено в работе (Semenova, 2003: 554, 556).

3 Материал и методы

Напомним некоторые основные понятия и общепринятые обозначения из теории решеток и универсальной алгебры. За всеми понятиями, здесь не определенными, мы отсылаем читателя к книгам В.А. Горбунова (Горбунов, 1999: 1–69, 93–109, 125–138, 205–300), А.И. Мальцева (Мальцев, 1970: 9–88, 129–137, 183–189, 267–299), см. также А.В. Кравченко (Кравченко, 2011: 7–73), S. Burris, Н.Р. Sankaranarayanan (Burris, 1981: 5–110), G. Grätzer (Grätzer, 1978: 15–52).

Для нижней полурешетки с наибольшим элементом $\mathcal{L} = \langle L; \wedge; 1 \rangle$ обозначим через $S_\wedge(\mathcal{L})$ решетку всех нижних подполурешеток в $\mathcal{L}$, содержащих $1_{\mathcal{L}}$. Для любых двух подполурешеток $L_0, L_1 \in S_\wedge(\mathcal{L})$ множество $L_0 + L_1 = \{l_0 \wedge l_1 \mid l_0 \in L_0, l_1 \in L_1\}$ является наименьшей нижней подполурешеткой в $\mathcal{L}$, содержащей $L_0 \cup L_1$; т. е. решеточным объединением L_0 и L_1 в $S_\wedge(\mathcal{L})$.

Все рассматриваемые классы алгебраических систем мы считаем абстрактными (Горбунов, 1999: 6), (Мальцев, 1970: 207), т. е. замкнутыми относительно изоморфизмов. Обозначим через $\mathbf{K}(\sigma)$ класс всех систем сигнатуры σ ; через $\mathbf{S}(\mathbf{K})$ класс всех систем из $\mathbf{K}(\sigma)$, изоморфных подсистемам систем из $\mathbf{K}$ (Горбунов, 1999: 24). Пусть $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}(\sigma)$. Тогда $\mathbf{K}'$ называется $\mathbf{K}$ -квазиэквивалентным, если $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \text{Mod}(\Sigma)$ для некоторого множества Σ квазитожеств сигнатуры σ (Горбунов, 1999: 117). Очевидно, $\mathbf{K}'$ является $\mathbf{K}$ -квазиэквивалентным ($\mathbf{K}$ -квазимногообразием или относительным квазимногообразием), тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{Q}(\mathbf{K}')$, где $\mathbf{Q}(\mathbf{K}')$ — наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathbf{K}'$ (Швидефски, 2015: 384). Множество всех $\mathbf{K}$ -квазиэквивалентных подклассов, упорядоченное по включению, образует полную решетку, которая называется решеткой квазимногообразий для $\mathbf{K}$ или просто решеткой относительных квазимногообразий, когда $\mathbf{K}$ легко восстанавливается из контекста, и

обозначается $Lq(\mathbf{K})$ (Горбунов, 1999: 205), (Швидефски, 2015: 384).

При доказательстве основного результата используются методы универсальной алгебры и теории решеток: в частности, метод построения классов, обладающих определенными свойствами, развитый в работах А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012a: 1–17), (Nurakunov, 2012b: 167–179), (Нуракунов, 2014: 372–400), и теоретико-решеточные методы из работ (Schwedefsky, 2014: 1099–1126), (Семенова, 2012: 1111–1132), (Швидефски, 2015: 381–398). Нам потребуются достаточное условие невычислимости множества всех конечных подрешеток данной решетки (Нуракунов, 2014: 396, утверждение 5.2), и утверждение о существовании класса дифференциальных группоидов (Schwedefsky, 2014: 1115, proposition 4.9).

Лемма 1 (Нуракунов, 2014: 396, утверждение 5.2) Пусть $\mathbf{L}$ и $\mathbf{F}$ — множества, первое из которых вычислимо. Если множество $\mathbf{L} \cap \mathbf{F}$ невычислимо, то множество $\mathbf{F}$ также невычислимо.

Заметим, что запись $\mathcal{A} \leq_s \prod_{n \in N} \mathcal{A}_n$ означает, что система $\mathcal{A}$ является подпрямым произведением семейства систем $\mathcal{A}_n$, $n \in N$. Через ω мы обозначаем множество натуральных чисел.

Теорема 1 (Schwedefsky, 2014: 1115, proposition 4.9) Пусть $\mathcal{K}_n$ — конечная нетривиальная решетка для любого $n \in N \subseteq \omega$. Тогда существует класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, такой что $Lq(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{K}_n)$.

Дополнительно, будем использовать две леммы из работы А.М. Нуракунова (Nurakunov, 2012a: 13, lemmas 17, 18) о свойствах решеток $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$, где $\mathcal{L}_n$ (для любого $2 < n < \omega$) — конечная нижняя полурешетка с наибольшим элементом типа “корона”.

Лемма 2 (Nurakunov, 2012a: 13, lemma 17) Решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ подпрямой неразложима для любого $2 < n < \omega$.

Лемма 3 (Nurakunov, 2012a: 13, lemma 18) Решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ вложима в $S_\wedge(\mathcal{L}_m)$ тогда и только тогда, когда $n = m$ (для любых $2 < n, m < \omega$).

Также нам потребуется лемма (Semenova, 2003: 554, lemma 5.2) о выполнимости определенных неравенств в решетках.

В следующем пункте мы доказываем основные теоремы 2 и 3. В теореме 2 утверждается существование иррационального класса $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, который, тем не менее, не является Q -универсальным. Заметим, что теорема 2 доказывается без привлечения методологии AD -классов. Схема доказательства теоремы 2 следующая. Сначала, используя теорему 1, показываем, что существует класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, такой что $Lq(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{L}_n)$. Затем, используя лемму 1, устанавливаем, что этот класс $\mathbf{K}$ является иррациональным, т. е. множество всех конечных подрешеток решетки $Lq(\mathbf{K})$ невычислимо. Далее доказываем, что решетка $\prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ удовлетворяет нетривиальному решеточному тождеству H_3 (определено ниже, в ходе доказательства теоремы 2). Тогда, это тождество будет выполняться и на решетке $Lq(\mathbf{K})$, поскольку тождества устойчивы относительно перехода к подсистемам (Мальцев, 1970: 189). Следовательно, класс $\mathbf{K}$ не будет Q -универсальным, т. к. хорошо известно, что

Q -универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству (Горбунов, 1999: 273).

В теореме 3 утверждается существование континуума иррациональных классов $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, не являющихся Q -универсальными. При доказательстве этой теоремы используется факт о том, что число подмножеств счетного множества, являющихся невычислимыми, континуально; с учетом которого, утверждение теоремы 3 будет следовать из теоремы 2.

4 Результаты и обсуждение

Теорема 2 *Существует иррациональный класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, не являющийся Q -универсальным.*

Доказательство теоремы 2. Пусть множество $N \subseteq \omega \setminus \{0, 1, 2\}$ невычислимо и $\{\mathcal{L}_n \mid n \in N\}$ — класс конечных нижних полурешеток с наибольшим элементом типа “корона” (см. рис. 1).

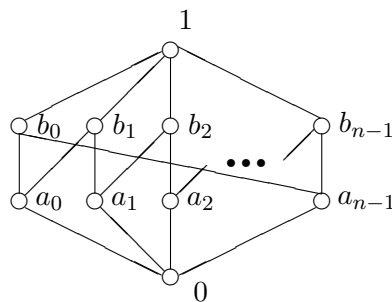


Рисунок 1 – “Корона” $\mathcal{L}_n$

Согласно теореме 1, примененной к классу $\{\mathcal{L}_n \mid n \in N\}$, существует класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, такой что $\text{Lq}(\mathbf{K}) \leq_s \prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{L}_n)$.

Решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ подпрямой неразложима для любого $n > 2$, согласно лемме 2. Решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ вложима в $S_\wedge(\mathcal{L}_m)$ тогда и только тогда, когда $n = m$ (для любых $n, m > 2$), согласно лемме 3. Пусть $\mathbf{L} = \{S_\wedge(\mathcal{L}_n) \mid n > 2\}$ и $\mathbf{M} = \{S_\wedge(\mathcal{L}_n) \mid n \in N\}$. Решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_m)$ вложима $\prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ в точности тогда, когда $m \in N$, и, следовательно, решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_m)$ вложима в $\text{Lq}(\mathbf{K})$ тогда и только тогда, когда $m \in N$, т. е. $S_\wedge(\mathcal{L}_m) \in \mathbf{M}$. Тогда, $\mathbf{M} = \mathbf{L} \cap \mathbf{S}(\text{Lq}(\mathbf{K}))$. Значит, решетка $\text{Lq}(\mathbf{K})$ такова, что множество всех ее конечных подрешеток невычислимо, согласно лемме 1.

Далее покажем, что решетка $\prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ удовлетворяет нетривиальному тождеству H_3 . Отметим, что тождество H_n было рассмотрено в работе (Semenova, 2003: 554, 556) и имеет вид:

$$U_n = \bigvee_{0 \leq i \leq n-1} V_{i,n} \vee \bigvee_{0 \leq i \leq n-2} W_{i,n},$$

где решеточные термы от переменных $x_0, x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned}
U_n &= U_{0,n} \\
U_{n,n} &= x_n \\
U_{i,n} &= x_i \wedge (U_{i+1,n} \vee x'_{i+1}), & 0 \leq i \leq n-1 \\
V_{i,n} &= V_{i,0,n}, & 0 \leq i \leq n-1 \\
V_{i,i,n} &= (x_i \wedge U_{i+1,n}) \vee (x_i \wedge x'_{i+1}), & 0 \leq i \leq n-1 \\
V_{i,j,n} &= x_j \wedge (V_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), & 0 \leq j < i \leq n-1 \\
W_{i,n} &= W_{i,0,n}, & 0 \leq i \leq n-2 \\
W_{i,i,n} &= x_i \wedge (x'_{i+1} \vee x'_{i+2}) \wedge ((U_{i+1,n} \wedge (x_i \vee x'_{i+2})) \vee x'_{i+1}), & 0 \leq i \leq n-2 \\
W_{i,j,n} &= x_j \wedge (W_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), & 0 \leq j < i \leq n-2.
\end{aligned}$$

Если $n = 3$, то тождество H_3 запишется так:

$$U_3 = \bigvee_{0 \leq i \leq 2} V_{i,3} \vee \bigvee_{0 \leq i \leq 1} W_{i,3}$$

или

$$U_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3}),$$

где решеточные термы имеют вид:

$$\begin{aligned}
U_3 &= U_{0,3}, \\
U_{0,3} &= x_0 \wedge (U_{1,3} \vee x'_1), \\
U_{1,3} &= x_1 \wedge (U_{2,3} \vee x'_2), \\
U_{2,3} &= x_2 \wedge (U_{3,3} \vee x'_3), \\
U_{3,3} &= x_3. \\
V_{0,3} &= V_{0,0,3}, \\
V_{0,0,3} &= (x_0 \wedge U_{1,3}) \vee (x_0 \wedge x'_1). \\
V_{1,3} &= V_{1,0,3}, \\
V_{1,0,3} &= x_0 \wedge (V_{1,1,3} \vee x'_1), \\
V_{1,1,3} &= (x_1 \wedge U_{2,3}) \vee (x_1 \wedge x'_2). \\
\text{Тогда } V_{1,3} &= x_0 \wedge ((x_1 \wedge U_{2,3}) \vee (x_1 \wedge x'_2)) \vee x'_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{2,3} &= V_{2,0,3}, \\
V_{2,0,3} &= x_0 \wedge (V_{2,1,3} \vee x'_1), \\
V_{2,1,3} &= x_1 \wedge (V_{2,2,3} \vee x'_2), \\
V_{2,2,3} &= (x_2 \wedge U_{3,3}) \vee (x_2 \wedge x'_3). \\
\text{Тогда } V_{2,3} &= x_0 \wedge ((x_1 \wedge ((x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x'_3)) \vee x'_2)) \vee x'_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{0,3} &= W_{0,0,3}, \\
W_{0,0,3} &= x_0 \wedge (x'_1 \vee x'_2) \wedge ((U_{1,3} \wedge (x_0 \vee x'_2)) \vee x'_1). \\
W_{1,3} &= W_{1,0,3},
\end{aligned}$$

$$W_{1,0,3} = x_0 \wedge (W_{1,1,3} \vee x'_1),$$

$$W_{1,1,3} = x_1 \wedge (x'_2 \vee x'_3) \wedge ((U_{2,3} \wedge (x_1 \vee x'_3)) \vee x'_2).$$

Обозначим

$$V_3 = (V_{0,3} \vee V_{1,3} \vee V_{2,3}) \vee (W_{0,3} \vee W_{1,3}).$$

Тогда H_3 , выполнимость которого следует проверить, примет вид: $U_3 = V_3$.

Сначала покажем, что решетка $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ для любого $n \in N$ удовлетворяет тождеству H_3 . Согласно (Semenova, 2003: 554, lemma 5.2), следующие неравенства выполняются в каждой решетке ($n \in \mathbb{Z}^+$):

$$V_{i,n} \leq U_n, (0 \leq i \leq n-1); \quad W_{i,n} \leq U_n, (0 \leq i \leq n-2).$$

Если $n = 3$, то $V_{i,3} \leq U_3, (0 \leq i \leq 2); \quad W_{i,3} \leq U_3, (0 \leq i \leq 1)$.

Тогда $V_3 \leq U_3$. Осталось доказать, что $U_3 \leq V_3$. Все переменные (термы) $x_0, x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3$ интерпретируем как подполурешетки "короны" $\mathcal{L}_n$, содержащие наибольший элемент $1_{\mathcal{L}_n}$, — соответственно $X_0, X_1, X_2, X_3, X'_1, X'_2, X'_3$.

Пусть произвольно взятый элемент $a_0 \in L_n \setminus \{1_{\mathcal{L}_n}\}$ лежит в U_3 . Заметим, что если в качестве a_0 взять наибольший элемент $1_{\mathcal{L}_n}$, то включение $U_3 \leq V_3$, очевидно, будет выполняться, поскольку все рассматриваемые подполурешетки "короны" $\mathcal{L}_n$ содержат $1_{\mathcal{L}_n}$. В дальнейшем вместо $a_0 \in L_n \setminus \{1_{\mathcal{L}_n}\}$ будем использовать запись $a_0 \in L_n$.

Тогда a_0 , с одной стороны, лежит в X_0 , которая является подполурешеткой в $\mathcal{L}_n$, а, с другой стороны, — в $U_{1,3} + X'_1$. Если элемент $a_0 \in L_n$ лежит в $U_{1,3} + X'_1$, то найдутся элементы $a_1 \in U_{1,3}$ и $b_1 \in X'_1$, такие что $a_0 = a_1 \wedge b_1$. Если $a_0 = a_1$ или $a_0 = b_1$, то $a_0 \in (X_0 \cap U_{1,3}) \cup (X_0 \cap X'_1)$. Таким образом, $a_0 \in L_n$ лежит в $V_{0,3}$, а, следовательно, принадлежит V_3 .

Если пересечение строгое: $a_0 = a_1 \wedge b_1, a_0 < a_1, a_0 < b_1$, то из условия $a_1 \in U_{1,3}$ следует, что элемент a_1 , с одной стороны, лежит в X_1 , которая является подполурешеткой в $\mathcal{L}_n$, а, с другой стороны, — в $U_{2,3} + X'_2$. Если элемент a_1 лежит в $U_{2,3} + X'_2$, то найдутся элементы $a_2 \in U_{2,3}$ и $b_2 \in X'_2$, такие что $a_1 = a_2 \wedge b_2$. Если $a_1 = a_2$ или $a_1 = b_2$, то $a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X'_2)$. Тогда, если $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $a_1 \in (X_1 \cap U_{2,3}) \cup (X_1 \cap X'_2)$ и $b_1 \in X'_1$, то элемент $a_0 \in L_n$ лежит в $V_{1,3}$, а, следовательно, принадлежит V_3 .

Если вновь пересечение строгое: $a_1 = a_2 \wedge b_2, a_1 < a_2, a_1 < b_2$, то из условия $a_2 \in U_{2,3}$, следует, что элемент a_2 , с одной стороны, лежит в X_2 , которая является подполурешеткой в $\mathcal{L}_n$, а, с другой стороны, — в $X_3 + X'_3$. Если элемент a_2 лежит в $X_3 + X'_3$, то найдутся элементы $a_3 \in X_3$ и $b_3 \in X'_3$, такие, что $a_2 = a_3 \wedge b_3$. Если $a_2 = a_3$ или $a_2 = b_3$, то $a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X'_3)$. Тогда, если $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $b_1 \in X'_1$, а $a_1 \in X_1$ и $a_1 = a_2 \wedge b_2$, где $a_2 \in (X_2 \cap X_3) \cup (X_2 \cap X'_3)$, $b_2 \in X'_2$, то элемент $a_0 \in L_n$ лежит в $V_{2,3}$, а, следовательно, принадлежит V_3 .

Когда пересечение строгое: $a_2 = a_3 \wedge b_3, a_2 < a_3, a_2 < b_3$, получим, что $a_0 \in X_0$ и $a_0 = a_1 \wedge b_1$, где $b_1 \in X'_1$, а $a_1 \in X_1$ и $a_1 = a_2 \wedge b_2$, где $b_2 \in X'_2$, $a_2 \in X_2$ и $a_2 = a_3 \wedge b_3$, где $a_3 \in X_3$ и $b_3 \in X'_3$. Представим этот случай на диаграмме. Получим цепь $a_0 - a_1 - a_2 - a_3 - 1_{\mathcal{L}_n}$ ($a_0 < a_1, a_1 < a_2, a_2 < a_3$) длины 4 (см. рис. 2), что противоречит тому, что в "короне" $\mathcal{L}_n$ длина максимальной цепи равна 3.

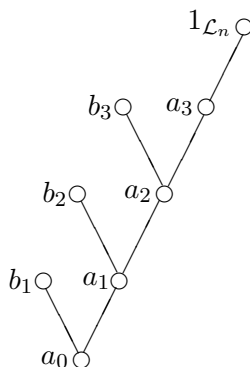


Рисунок 2 – Получившаяся цепь длины четыре в “короне” $\mathcal{L}_n$

Таким образом, неравенство $U_3 \leq V_3$ имеет место. Следовательно, тождество H_3 выполняется на $S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ для любого $n \in N$. Тогда $\prod_{n \in N} S_\wedge(\mathcal{L}_n)$ тоже будет удовлетворять H_3 , поскольку тождества мультипликативно устойчивы (Мальцев, 1970: 189). Значит, H_3 будет выполняться и на $Lq(\mathbf{K})$, поскольку тождества устойчивы относительно перехода к подсистемам (Мальцев, 1970: 189). Известно (Горбунов, 1999: 273), что Q -универсальные решетки квазимногообразий не удовлетворяют никакому нетривиальному решеточному тождеству. Поэтому класс $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов не будет Q -универсальным. Теорема 2 доказана.

Теорема 3 *Существует континуум иррациональных классов $\mathbf{K}$ дифференциальных группоидов, не являющихся Q -универсальными.*

Доказательство теоремы 3. Утверждение данной теоремы следует из теоремы 2 и из того факта, что число подмножеств $N \subseteq \omega \setminus \{0, 1, 2\}$ счетного множества $\omega \setminus \{0, 1, 2\}$, являющихся невычислимыми, континуально. Теорема 3 доказана.

В литературе есть примеры иррациональных классов (Nurakunov, 2012a: 3, 10–12, 14), (Nurakunov, 2012b: 391–393), (Nurakunov, 2012в: 168–170), (Нуракунов, 2012: 480–482), (Нуракунов, 2014: 393, 395–399), (Schwedeisky, 2014: 1110–1111, 1116–1117, 1119–1120), (Семенова, 2012: 1129–1131), очень много примеров Q -универсальных классов алгебраических систем (Adams, 2004: 357–378), (Швидефски, 2015: 393–395), (Adams, 1994a: 1053–1059), (Adams, 2001: 253–283), (Adams, 2002b: 333–356), (Kravchenko, 2002: 311–325), (Kravchenko, 2008: 11–17), (Нуракунов, 2014: 372–400), (Schwedeisky, 2014: 1124), (Sheremet, 2001: 193–201), (Горбунов, 1999: 271–274); ставился вопрос, влечет ли наличие у класса свойства Q -универсальности его иррациональность, и наоборот (Schwedeisky, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Теоремы 2 и 3, доказанные выше, указывают на факт о существовании иррациональных решеток квазимногообразий, которые, однако, не являются Q -универсальными. Таким образом, найдены решетки квазимногообразий, которые, согласно одной мере, являются сложными, а, согласно другой мере сложности, — нет. Результат теорем 2 и 3 представляют интерес для специалистов по теории квазимногообразий.

5 Заключение

Вопрос о сложности строения производных решеток, в частности решеток квазимногообразий, изучался многими авторами (см., например, библиографию в настоящей работе и в (Adams, 2004: 372–378), (Швидефски, 2015: 395–398), (Горбунов, 1999: 339–365)) и отчасти является философским. Где лежит грань между сложным и несложным? Что считать сложностью решетки квазимногообразий? Хорошо известны две меры сложности строения решеток квазимногообразий: Q -универсальность и иррациональность (невычислимость множества всех их конечных подрешеток). Отметим, что наличие в решетках квазимногообразий континуума так называемых «плохих» элементов, т. е. элементов, не имеющих покрытий, также говорит о сложности строения этих решеток; в этом случае существует континуум подквазимногообразий данного квазимногообразия K , не имеющих независимого базиса квазитождеств относительно K .

Автором изучается вопрос о связи двух свойств решеток квазимногообразий, характеризующих с различных точек зрения сложность строения таких решеток. Первое из них, Q -универсальность, свидетельствует о максимальной сложности в теоретико-решеточном смысле, а второе, иррациональность (невычислимость множества всех конечных подрешеток решеток квазимногообразий), говорит об алгоритмической сложности. Естественным представляется вопрос о существовании классов, обладающих одним из этих свойств, но не обладающих другим. Ранее (Швидефски, 2015: 392) установлено, что для почти любого Q -универсального квазимногообразия можно найти иррациональный подкласс и поставлен вопрос о существовании иррационального класса, не являющегося Q -универсальным (Schwede, 2014: 1124), (Швидефски, 2015: 395). Автором показано, что существует континуум классов дифференциальных группоидов, таких, что решетки квазимногообразий для этих классов являются иррациональными (т. е. сложными согласно одной мере сложности), но, при этом, не являются Q -универсальными. Таким образом, установлено, что, наличие у решетки квазимногообразий для рассматриваемых классов одного из упомянутых выше свойств (а именно, иррациональности) не является необходимым и достаточным условием сложности решетки согласно концепции Q -универсальности. Полученные результаты имеют теоретический характер и могут быть применены в дальнейших исследованиях в области универсальной алгебры.

Список литературы

- [1] Adams M.E., Adaricheva K.V., Dziobiak W., Kravchenko A.V. Open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev // Stud. Log. — 2004. — Vol. 78. — P. 357–378.
- [2] Adams M.E., Dziobiak W. Q -universal quasivarieties of algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 120, no. 4. — P. 1053–1059.
- [3] Adams M.E., Dziobiak W. Lattice of quasivarieties of 3-element algebras // J. Algebra. — 1994. — Vol. 166, no. 1. — P. 181–210.
- [4] Adams M.E., Dziobiak W. Quasivarieties of distributive lattices with a quantifier // Discrete Math. — 1994. — Vol. 135. — P. 15–28.
- [5] Adams M.E., Dziobiak W. Finite-to-finite universal quasivarieties are Q -universal // Algebra Universalis. — 2001. — Vol. 46. — P. 253–283.
- [6] Adams M.E., Dziobiak W. The lattice of quasivarieties of undirected graphs // Algebra Univers. — 2002. — Vol. 47, no. 1. — P. 7–11.

-
- [7] Adams M.E., Dziobiak W. Q -universal varieties of bounded lattices // *Algebra Univers.* — 2002. — Vol. 48, no. 3. — P. 333–356.
- [8] Birkhoff G. *Universal algebra* // *Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress (Montreal, 1945)*. — Toronto: the University of Toronto Press., 1946. — P. 310–326.
- [9] Burris S., Sankappanavar H.P. *A course in universal algebra*. — New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verl., 1981. — 315 p.
- [10] Dziobiak W. *Selected topics in quasivarieties of algebraic systems: manuscript*. — 1997.
- [11] Grätzer G. *General lattice theory*. — Berlin: Akademie-Verlag, 1978. — 456 p.
- [12] Kravchenko A.V. Q -universal quasivarieties of graphs // *Algebra and Logic*. — 2002. — Vol. 41, no. 3. — P. 311–325.
- [13] Kravchenko A.V. On the lattices of quasivarieties of differential groupoids // *Comment. Math. Univ. Carolin.* — 2008. — Vol. 49, no. 1. — P. 11–17.
- [14] Kravchenko A.V. Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II // *Sib. electron. mathem. rep.* — 2016. — Vol. 13. — P. 388–394.
- [15] Nurakunov A.M. Unreasonable lattices of quasivarieties // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2012. — Vol. 22, no. 3. — P. 1–17.
- [16] Nurakunov A.M., Imanaliev M.I. Complexity of quasivariety lattices of pointed Abelian Groups // *Doklady Mathematics*. — 2012. — Vol. 85, no. 3. — P. 391–393.
- [17] Nurakunov A.M., Semenova M.V., Zamojska-Dzienio A. On lattices connected with various types of classes of algebraic structures // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. — 2012. — Т. 154. — С. 167–179.
- [18] Sapir M.V. The lattice of quasivarieties of semigroups // *Algebra Universalis*. — 1985. — Vol. 21. — P. 172–180.
- [19] Schwedfsky M.V., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. II // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2014. — Vol. 24, no. 8. — P. 1099–1126.
- [20] Semenova M.V., Wehrung F. Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height // *Internat. J. Algebra Comput.* — 2003. — Vol. 13, no. 5. — P. 543–564.
- [21] Sheremet M.S. Quasivarieties of Cantor algebras // *Algebra Universalis*. — 2001. — Vol. 46. — P. 193–201.
- [22] Горбунов В.А. Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. I // *Алгебра и логика*. — 1995. — Т. 34, № 2. — С. 142–168.
- [23] Горбунов В.А. Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. II // *Алгебра и логика*. — 1995. — Т. 34, № 4. — С. 369–397.
- [24] Горбунов В.А. Строение решеток многообразий и решеток квазимногообразий: сходство и различие. III // *Алгебра и логика*. — 1995. — Т. 34, № 6. — С. 646–666.
- [25] Горбунов В.А. *Алгебраическая теория квазимногообразий*. — Новосибирск: Научная книга, 1999. — 368 с.
- [26] Горбунов В.А., Туманов В.И. Строение решеток квазимногообразий // *Тр. Ин-та математики СО АН СССР*. — 1982. — Т. 2. — С. 12–44.
- [27] Кравченко А.В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий унарных алгебр // *Матем. тр.* — 2001. — Т. 4, № 2. — С. 113–127.
- [28] Кравченко А.В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий дифференциальных группоидов // *Матем. тр.* — 2009. — Т. 12, № 1. — С. 26–39.
- [29] Кравченко А.В. Сложность решеток квазимногообразий для многообразий дифференциальных группоидов. II // *Матем. тр.* — 2012. — Т. 15, № 2. — С. 89–99.
- [30] Кравченко А.В. Минимальные квазимногообразия дифференциальных группоидов с ненулевым умножением // *Сиб. электрон. матем. изв.* — 2012. — Т. 9. — С. 201–207.
- [31] Кравченко А.В., Семенова М.В. *Универсальная алгебра и теория решеток*. — Новосибирск: НГУ, 2011. — 74 с.

- [32] Мальцев А.И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и математической логики // Труды международного математического конгресса (Москва, 1966). — М.: Мир, 1968. — С. 217–231.
- [33] Мальцев А.И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.
- [34] Нуракунов А.М. Решетки квазимногообразий точечных абелевых групп // Алгебра и логика. — 2014. — Т. 53, № 3. — С. 372–400.
- [35] Нуракунов А.М., Иманалиев М.И. Сложность решеток квазимногообразий точечных абелевых групп // Доклады академии наук. — 2012. — Т. 444, № 5. — С. 480–482.
- [36] Семенова М.В., Замойска-Дзенио А. О решетках подклассов // Сиб. Мат. Ж. — 2012. — Т. 53, № 5. — Р. 1111–1132.
- [37] Туманов В.И. Конечные дистрибутивные решетки квазимногообразий // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 2. — С. 168–181.
- [38] Швидефски М.В. О сложности решеток квазимногообразий // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54, № 3. — С. 381–398.

References

- [1] Adams, Michael, and Kira Adaricheva, and Wieslaw Dziobiak, and Aleksandr Kravchenko. “Open questions related to the problem of Birkhoff and Maltsev.” *Stud. Log.* 78 (2004): 357–378.
- [2] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “ Q -universal quasivarieties of algebras.” *Proc. Amer. Math. Soc.* 120 (1994): 1053–1059.
- [3] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Lattice of quasivarieties of 3-element algebras.” *J. Algebra* 166 (1994): 181–210.
- [4] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Quasivarieties of distributive lattices with a quantifier.” *Discrete Math.* 135 (1994): 15–28.
- [5] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “Finite-to-finite universal quasivarieties are Q -universal.” *Algebra Universalis* 46 (2001): 253–283.
- [6] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “The lattice of quasivarieties of undirected graphs.” *Algebra Universalis* 47 (2002): 7–11.
- [7] Adams, Michael, and Wieslaw Dziobiak. “ Q -universal varieties of bounded lattices.” *Algebra Universalis* 48 (2002): 333–356.
- [8] Birkhoff, Garrett. “Universal algebra.” Proceedings of the First Canadian Mathematical Congress, Montreal, 1945. *Toronto: the University of Toronto Press* (1946): 310–326.
- [9] Burris, Stanley, and Hanamantagouda P. Sankappanavar. *A course in universal algebra*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verl., 1981.
- [10] Dziobiak, Wieslaw. *Selected topics in quasivarieties of algebraic systems*. Manuscript, 1997.
- [11] Grätzer, George. *General lattice theory*. Berlin: Akademie-Verlag, 1978.
- [12] Kravchenko, Aleksandr. “ Q -universal quasivarieties of graphs.” *Algebra and Logic* 41 (2002): 311–325.
- [13] Kravchenko, Aleksandr. “On the lattices of quasivarieties of differential groupoids.” *Comment. Math. Univ. Carolin.* 49 (2008): 11–17.
- [14] Kravchenko, Aleksandr. “Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II.” *Sib. electron. mathem. rep.* 13 (2016): 388–394.
- [15] Nurakunov, Anvar. “Unreasonable lattices of quasivarieties.” *Internat. J. Algebra Comput.* 22 (2012): 1–17.
- [16] Nurakunov, Anvar, and Murzabek Imanaliev. “Complexity of quasivariety lattices of pointed Abelian Groups.” *Doklady Mathematics* 85 (2012): 391–393.
- [17] Nurakunov, Anvar, and Marina Semenova, and Anna Zamojska-Dzienio. “On lattices connected with various types of classes of algebraic structures.” *Uchenye zapiski kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki* 154 (2012): 167–179.

- [18] Sapir, Mark. "The lattice of quasivarieties of semigroups." *Algebra Universalis* 21 (1985): 172–180.
- [19] Schwidefsky, Marina, and Anna Zamojska-Dzienio. "Lattices of subclasses. II." *Internat. J. Algebra Comput.* 24 (2014): 1099–1126.
- [20] Semenova, Marina, and Friedrich Wehrung. "Sublattices of lattices of order-convex sets. II. Posets of finite height." *Internat. J. Algebra Comput.* 13 (2003): 543–564.
- [21] Sheremet, Mihail. "Quasivarieties of Cantor algebras." *Algebra Universalis* 46 (2001): 193–201.
- [22] Gorbunov V. (1995) Stroenie reshetok mnogoobrazij i reshetok kvazimnogoobrazij: skhodstvo i razlichie. I [The structure of variety lattices and quasivariety lattices: similarities and differences. I]. *Algebra and Logic*, vol. 34, no 2, pp. 142–168.
- [23] Gorbunov V. (1995) Stroenie reshetok mnogoobrazij i reshetok kvazimnogoobrazij: skhodstvo i razlichie. II [The structure of variety lattices and quasivariety lattices: similarities and differences. II]. *Algebra and Logic*, vol. 34, no 4, pp. 369–397.
- [24] Gorbunov V. (1995) Stroenie reshetok mnogoobrazij i reshetok kvazimnogoobrazij: skhodstvo i razlichie. III [The structure of variety lattices and quasivariety lattices: similarities and differences. III]. *Algebra and Logic*, vol. 34, no 6, pp. 646–666.
- [25] Gorbunov, Viktor. *Algebraic Theory of Quasivarieties*. New York: Plenum, 1998.
- [26] Gorbunov V., Tumanov V. (1982) Stroenie reshetok kvazimnogoobrazij [The structure of quasivariety lattices]. *Tr In-ta matematiki SO AN SSSR*, vol. 2, pp. 12–44.
- [27] Kravchenko A. (2001) slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij dlya mnogoobrazij unarnyh algebr [The complexity of quasivariety lattices for the varieties of unary algebras]. *Matem. tr.*, vol. 4, no. 2, pp. 113–127.
- [28] Kravchenko A. (2009) Slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij dlya mnogoobrazij differencialnyh gruppoidov [The complexity of quasivariety lattices for the varieties of differential groupoids]. *Matem. tr.*, vol. 12, no. 1, pp. 26–39.
- [29] Kravchenko A. (2012) Slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij dlya mnogoobrazij differencialnyh gruppoidov. II [The complexity of quasivariety lattices for the varieties of differential groupoids. II]. *Matem. tr.*, vol. 15, no. 2, pp. 89–99.
- [30] Kravchenko A. (2012) Minimalnye kvazimnogoobraziya differencialnyh gruppoidov s nenulevym umnozheniem [Minimum quasivarieties of differential groupoids with nonzero multiplication]. *Sib. electron. mathem. rep.*, vol. 9, pp. 201–207.
- [31] Kravchenko A., Semenova M. (2011) Universalnaya algebra i teoriya reshetok [Universal algebra and lattice theory]. Новосибирск: НГУ, 74 p.
- [32] Maltsev A. (1968) O nekotoryh pogranichnyh voprosah algebry i matematicheskoy logiki [On some boundary problems of algebra and mathematical logic]. *Trudy mezhdunarodnogo matematicheskogo kongressa (Moskva, 1966)*, M.: Mir, pp. 217–231.
- [33] Maltsev, Anatolij. *Algebraic systems*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.
- [34] Nurakunov A. (2014) Reshetki kvazimnogoobrazij tochechnyh abelevykh grupp [Quasivariety lattices of pointed Abelian groups]. *Algebra and Logic*, vol. 53, no. 3, pp. 372–400.
- [35] Nurakunov A., Imanaliev M. (2012) Slozhnost reshetok kvazimnogoobrazij tochechnyh abelevykh grupp [The complexity of quasivariety lattices of pointed Abelian groups]. *Doklady akademii nauk*, vol. 444, no. 5, pp. 480–482.
- [36] Semenova M., Zamojska-Dzienio A. (2012) O reshetkah podklassov [On lattices of subclasses]. *Sib. Mat. Zh.*, vol. 53, no. 5, pp. 1111–1132.
- [37] Tumanov V. (1983) Konechnye distributivnye reshetki kvazimnogoobrazij [Finite distributive lattice of quasivarieties]. *Algebra and logic*, vol. 22, no. 2, pp. 168–181.
- [38] Shvidefski M. (2015) O slozhnosti reshetok kvazimnogoobrazij [On the complexity of quasivariety lattices]. *Algebra and logic*, vol. 54, no. 3, pp. 381–398.

UDC 159.62.64

**The numerical solution of the initial and boundary value problem for
one-dimensional nonstationary nonlinear Boltzmann's
six-moment system equations with the Vladimirov-Marshak boundary
conditions**

Sakabekov A., Dr. Sci.(Phys.-Math.), professor, Kazakh National Technical University after
K.I. Satpayev, Almaty city, Republic of Kazakhstan, +77772255722,

E-mail: auzhani@gmail.com

Tleuova G., Master Student, al-Farabi Kazakh National University, Almaty city, Republic
of Kazakhstan, +77715258453, E-mail: gaynyt@gmail.com

The Boltzmann equation is a complex integral-differential equation and the basis of the kinetic theory of gases. It describes the behavior of a rarefied gas in space of time and velocity. It is used to the study of electron transport in solids and plasmas, neutron transport in nuclear reactors, in the tasks of remote sensing of the Earth from Space. The moment method is one of effective methods for solution of the Boltzmann equation. The system of Boltzmann's moment equations is intermediate between kinetic and hydrodynamic levels of description of state of the rarefied gas and form class of nonlinear partial differential equations. If particle distribution function will be decomposed into an Fourier series on complete orthogonal system of functions, then Boltzmann's equation will be equivalent to an infinite system of partial differential equations relative to the moments of the particle distribution function in the complete system of eigenfunctions of linearized operator. But solving infinite system of differential equations impossible. Therefore, an approximate solution of the initial and boundary value problem for the Boltzmann equation can be determined by the moment method. This article describes the one-dimensional nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system equations in the third approximation, which a hyperbolic system of partial differential equations and contains six equations for the moments of the particle distribution function. And formulates the statement of the initial and boundary value problem for the Boltzmann's moment system equations in the third approximation and shows the results of the numerical solution with the Vladimirov-Marshak boundary conditions.

Key words: Boltzmann's six moment system equations, Vladimirov-Marshak boundary conditions, particle distribution function.

**Владимиров-Маршак шеттік шарттарымен Больцманның бір өлшемді сызықсыз
алты-моменттік теңдеулер жүйесі үшін алғашқы-шеттік есептің сандық шешімі**

Сақабеков Ә., ф.-м.ғ.д., профессор, Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті,
Алматы қ., Қазақстан республикасы, +77772255722, E-mail: auzhani@gmail.com

Тлеуова Ғ.Н., магистрант, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
республикасы, +77715258453, E-mail: gaynyt@gmail.com

Больцман теңдеуі - күрделі интеграл-дифференциал теңдеу және газдардың кинетикалық теориясының негізі. Уақыт және жылдамдық бойынша кеңістіктегі сиретілген газдың күйін сипаттайды. Қатты дене және плазмадағы электрондардың тасымалдануын, ядролық реакторлардағы нейтрондардың тасымалдануын және ғарыштан Жерді қашықтықтан зерттеу жұмыстарында қолданылады. Больцман теңдеуін шешудің тиімді әдістерінің бірі моменттік әдіс болып табылады. Больцман моменттік теңдеулерінің жүйесі сиретілген газдың күйін сипаттауда кинетикалық және гидродинамикалық деңгейлердің аралығында жатқан дербес туындылы сызықты емес теңдеулер класын құрайды.

Егер бөлшектердің үлестірім функциясы толық ортогонал функциялар жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктелсе, онда Больцман теңдеуі жіктеу коэффициенттеріне сай сызықты оператордың өзіндік функцияларының толықтығынан дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің шексіз жүйесінің баламасы болады. Бірақ дифференциалдық теңдеулердің шексіз жүйесін шешу мүмкін емес. Сондықтан Больцман теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептің жуықталған шешімін табу үшін моменттік әдісті қолданамыз. Бұл мақалада дербес туындылы сызықсыз гиперболалық дифференциалдық теңдеулер класына жататын және алты дербес туындылы сызықсыз дифференциалдық теңдеуден тұратын Больцманның алты-моменттік теңдеулердің жүйесі қарастырылған. Больцманның бір өлшемді сызықсыз алты-моменттік теңдеулер жүйесі үшін алғашқы-шеттік есептің қойылымы келтіріліп, Владимиров-Маршак жалпылынған шарттарымен осы жүйенің сандық шешімінің нәтижелері көрсетілген.

Түйін сөздер: Больцманның алты-моменттік теңдеулер жүйесі, Владимиров-Маршак жалпыланған шарттары, бөлшектердің үлестірім функциясы.

Численное решение начально-краевой задачи для одномерной нестационарной нелинейной шестимоментной системы уравнений Больцмана при граничных условиях Владимиров-Маршака

Сакабеков А., д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный технический университет им. К.И.Сатпаева, г.Алматы, Республика Казахстан, +77772255722, E-mail: auzhani@gmail.com
Тлеуова Ғ.Н., магистрант, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы, Республика Казахстан, +77715258453, E-mail: gaynyt@gmail.com

Уравнение Больцмана - сложное интегро-дифференциальное уравнение и основа кинетической теории газов. Оно описывает состояние разреженного газа в пространстве по времени и скоростям. Применяется для изучения переноса электронов в твердых телах и плазме, переносе нейтронов в ядерных реакторах, в задачах дистанционного зондирования Земли из космоса. Одним из эффективных методов решения уравнения Больцмана является моментный метод. Система моментных уравнений Больцмана является промежуточной между кинетическим и гидродинамическими уравнениями описания состояния разреженного газа и образует класс нелинейных уравнений в частных производных. Если функция распределения частиц будет разложена в ряд Фурье по полной ортогональной системе функций, то уравнение Больцмана окажется эквивалентным бесконечной системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно коэффициентов разложения в силу полноты системы собственных функций линеаризованного оператора. Но решить бесконечную систему дифференциальных уравнений невозможно. Поэтому для нахождения приближенного решения начально-краевой задачи для уравнения Больцмана применяем моментный метод. В данной статье рассмотрена одномерная нелинейная нестационарная система моментных уравнений Больцмана в третьем приближении, которая является гиперболической системой дифференциальных уравнений в частных производных и содержит 6 уравнений относительно моментов функции распределения частиц. Сформулирована постановка начально-краевой задачи для системы моментных уравнений Больцмана в третьем приближении и приведены результаты численного решения данной системы при обобщенных условиях Владимиров-Маршака.

Ключевые слова: шестимоментная система уравнений Больцмана, граничные условия Владимиров-Маршака, функция распределения частиц.

1 Introduction

An approximate solution of the initial and boundary value problem for the Boltzmann equation can be determined by the moment method. According to the moment method particle distribution function decomposed into an infinity series of complete orthogonal system of functions. Boltzmann's equation is equivalent to an infinite system of differential equations relative to the moments of the particle distribution function in the complete system of eigenfunctions of linearized operator. As a rule we limit study by finite moment system

of equations because solving infinite system of equations does not seem to be possible. There arises the problem of boundary conditions for a finite system of equations that approximate the microscopic boundary conditions for Boltzmann's equation. We consider the third approximation of one-dimensional nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system equations and give the approximation of a homogeneous microscopic boundary condition for a nonlinear onedimensional Boltzmann equation.

Moment methods differs from each other by choosing different systems of basis functions. For instance, Grad [1,2] obtained the moment system by expanding the particle distribution function in Hermite polynomials near the local Maxwell distribution. Grad used Cartesian coordinates of velocities and Grad's moment system contained as coefficients such unknown hydrodynamic characteristics like density, temperature, average speed, and so forth. In work [3] we have obtained the moment system which differs from Grad's system of equations. We used spherical velocity coordinates and decomposed the distribution function into a series of eigenfunctions of the linearized collision operator[4,5], which is the product of Sonine polynomials and spherical functions. The expansion coefficients, moments of the distribution function is defined differently than in the Grad. The resulting system of equations, which correspond to the partial sum of series and which we called Boltzmann's moment system of equations, is a nonlinear hyperbolic system in relation to the moments of the particles distribution function. The differential part of the resulting system is linear in relation to the moments of the distribution function and nonlinearity is included as moments of collision integral [6]. The moments of a nonlinear collision operator are expressed through coefficients of Talmi and Klebsh-Gordon[7,8].

2 Literature review

Note that Boltzmann's moment equations are intermediate between Boltzmann(kinetic theory) and hydrodynamic levels of description of state of the rarefied gas and form class of nonlinear partial differential equations. Existence of such class was noticed by Grad in his articles (Grad,1949:331-407) and (Grad,1958:205-294). He obtained the moment system of equations by expanding the particle distribution function in Hermite polynomials near the local Maxwell distribution. Grad used Cartesian coordinates of velocities and Grad's moment system contained as coefficients such unknown hydrodynamic characteristics like density,temperature,average speed,and so forth. Formulation of boundary conditions for Grad's system is almost impossible, as the characteristic equations for various approximations of Grad's hyperbolic system contain unknown parameters like density,temperature, and average speed. However, 13- and 20-moment Grad equations are widely used in solving many problems of the kinetic theory of gases and plasma. In work (Sakabekov,2002) we have obtained the moment system which differs from Grad's system of equations. A homogeneous boundary condition for particles for particles distribution function was approximated and proved the correctness of initial and boundary value problem for nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system of equations in three-dimensional space.

In works (Cergignani,1975) and (Kogan,1967) used spherical velocity coordinates and decomposed the distribution function into a series of eigenfunctions of the linearized collision operator, which is the product of Sonine polynomials and spherical functions. The structure of Boltzmann's moment system of equations corresponds to the structure of Boltzmann's

equation; namely, the differential part of resulting system is linear in relation to the moments of the distribution function and nonlinearity is included as moments of collision operator (Kumar, 1966:113-141). In work (Sakabekov, 2014) the initial and boundary value problem for one-dimensional nonstationary Boltzmann's equation with boundary conditions of Maxwell was approximated by a corresponding problem for Boltzmann's moment system of equations. The boundary conditions for Boltzmann's moment system of equations were called Maxwell-Auzhan conditions. In work (Levelmore, 1996:1021-1065) has been presented a systematic nonperturbative derivation of a hierarchy of closed systems of moment equations corresponding to any classical theory, it is a fundamental work where closed systems of moment equations describe a transition regime.

3 Material and methods

We write in an expanded form system of one-dimensional Boltzmann's moment equations in the k -th approximation:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{nl}}{\partial t} x + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} [l (\sqrt{\frac{2(n+l+\frac{1}{2})}{(2l-1)(2l+1)}} f_{n,l-1} - \sqrt{\frac{2(n+l)}{(2l-1)(2l+1)}} f_{n+1,l-1}) + \\ & + (l+1) (\sqrt{\frac{2(n+l+\frac{1}{2})}{(2l+1)(2l+3)}} f_{n,l+1} - \sqrt{\frac{2n}{(2l+1)(2l+3)}} f_{n-1,l+1})] = I_{nl}, \quad 2n+1 = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (1) \end{aligned}$$

where the moments I_{nl} of a nonlinear collision operator are expressed through coefficients of Talmi and Klebsh-Gordon [7,8] and have the next form:

$$I_{nl} = \sum \langle N_3 L_3 n_3 l_3 : l \mid n l 0 0 : l \rangle \langle N_3 L_3 n_3 l_3 : l \mid n_1 l_1 n_2 l_2 : l \rangle \left(\frac{l_1 0 l_2 0}{l 0} \right) (\sigma_{l_3} - \sigma_0) f_{n_1 l_1} f_{n_2 l_2} \quad (2)$$

where $\langle N_3 L_3 n_3 l_3 : l \mid n_1 l_1 n_2 l_2 : l \rangle$ are generalized coefficients of Talmi, $(l_1 0 l_2 0 / l 0)$ are Klebsh-Gordon coefficients, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{R\theta}}$ is the constant, R is Boltzmann's constant, and θ is the ideal gas temperature. This system corresponds to decomposition of the particle distribution function by eigenfunctions of the linearized collision operator.

If in (1) $2n+1$ takes the values from 0 to 3, we get Boltzmann's moment system equations in the third approximation:

$$\frac{\partial f_{00}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial f_{01}}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial f_{02}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} f_{01} + \frac{3}{\sqrt{5}} f_{03} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} f_{11} \right) = J_{02}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial f_{10}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} f_{01} + \sqrt{\frac{5}{3}} f_{11} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial f_{01}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(f_{00} + \frac{2}{\sqrt{3}} f_{02} - \sqrt{\frac{2}{3}} f_{10} \right) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial f_{03}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \frac{3}{\sqrt{5}} f_{02} = J_{03}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial t} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} f_{02} + \sqrt{\frac{5}{3}} f_{10} \right) = J_{11} \quad (8)$$

$$x \in (-a, a), t > 0,$$

where $f_{00} = f_{00}(t, x)$, $f_{01} = f_{01}(t, x)$, $f_{02} = f_{02}(t, x)$, $f_{03} = f_{03}(t, x)$, $f_{10} = f_{10}(t, x)$, $f_{11} = f_{11}(t, x)$, are the moments of the particle distribution function; $J_{02} = (\sigma_2 - \sigma_0)(f_{00}f_{02} - f_{01}f_{01}/\sqrt{3})/2$, $J_{03} = (1/4)(\sigma_3 + 3\sigma_1 - 4\sigma_0)f_{00}f_{03} + (1/4\sqrt{5})(2\sigma_1 + \sigma_0 - 3\sigma_3)f_{01}f_{02}$, $J_{11} = (\sigma_1 - \sigma_0)(f_{00}f_{11} + (1/2)(\sqrt{5}/\sqrt{3})f_{10}f_{01} - (\sqrt{2}/\sqrt{15})(f_{01}f_{02}))$ are moments of the collision integral, where $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ and σ_3 are the Fourier coefficients. We consider the Vladimirov-Marshak boundary conditions:

$$\frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-\sqrt{2}f_{00} - \sqrt{\frac{2}{3}}f_{02} + \frac{1}{\sqrt{3}}f_{10} \right) + f_{01} \right] |_{x=-a} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}f_{00} - 2\sqrt{2}f_{02} + f_{10} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}}f_{01} + \frac{3}{\sqrt{5}}f_{03} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}f_{11} \right] |_{x=-a} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\frac{1}{3}}f_{00} + f_{02} - \frac{3}{\sqrt{2}}f_{10} \right) - \sqrt{\frac{2}{3}}f_{01} + \sqrt{\frac{5}{3}} \right] |_{x=-a} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-\sqrt{2}f_{00} - \sqrt{\frac{2}{3}}f_{02} + \frac{1}{\sqrt{3}}f_{10} \right) - f_{01} \right] |_{x=a} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}f_{00} - 2\sqrt{2}f_{02} + f_{10} \right) - \frac{2}{\sqrt{3}}f_{01} - \frac{3}{\sqrt{5}}f_{03} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}f_{11} \right] |_{x=a} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{2\alpha} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}f_{00} + f_{02} - \frac{3}{\sqrt{2}}f_{10} \right) + \sqrt{\frac{2}{3}}f_{01} - \sqrt{\frac{5}{3}}f_{11} \right] |_{x=a} = 0, \quad (14)$$

and introduce the following vectors and matrix :

$$\begin{aligned} u &= (f_{00}, f_{02}, f_{10})', \\ w &= (f_{01}, f_{03}, f_{11})', \\ J_1 &= (0, J_{02}, 0)', \\ J_2 &= (0, J_{03}, J_{01})', \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{5}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} \end{pmatrix}, B = -\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & 2\sqrt{2} & -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

where matrix A и B are nonsingular.

We write the initial and boundary value problem for six-moment Boltzmann's system equations with boundary conditions (9)-(14) in a vector-matrix form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = J_1, \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A' \frac{\partial u}{\partial x} = J_2, t \in (0, T], x \in (-a, a), \quad (16)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), w|_{t=0} = w_0(x), x \in [-a, a], \quad (17)$$

$$(Aw \mp Bu)|_{x=\pm a} = 0, t \in (0, T], \quad (18)$$

where $u_0(x)$ и $w_0(x)$ are given initial vector functions. It requires to find the solution of the system (15,16) with the initial conditions (17) and boundary conditions (18).

4 Results and discussion

We use the explicit method for solving the initial and boundary value problem numerically. According to the explicit method we approximate the system (15,16):

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + A \frac{W_{i+1}^n - W_i^n}{\Delta x} = J_1(U_i^n, W_i^n),$$

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + A' \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} = J_2(U_i^n, W_i^n).$$

And the values of U_i^{n+1} and W_i^{n+1} are equal to:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A(W_{i+1}^n - W_i^n) + \Delta t J_1(U_i^n, W_i^n),$$

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} A'(U_i^n - U_{i-1}^n) + \Delta t J_2(U_i^n, W_i^n).$$

We use the next initial values:

$$f_{00}^0(x) = 1 - x, f_{02}^0(x) = x, f_{10}^0(x) = x(1 - x), f_{01}^0(x) = 1 - x^2, f_{03}^0(x) = x^2, f_{11}^0(x) = x^2(1 - x^2),$$

$$U_0(x) = \begin{pmatrix} 1 - x \\ x \\ x(1 - x) \end{pmatrix}, W_0(x) = \begin{pmatrix} 1 - x^2 \\ x^2 \\ x^2(1 - x^2) \end{pmatrix},$$

$$\sigma_0 = 0.3, \sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 0.7, \sigma_3 = 0.9, \alpha = 0.2, n \in [1, 10], i \in [1, 9].$$

The numerical results (the values of $U(x,t)$ and $W(x,t)$, corresponding to the values of $f_{00}, f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{10}, f_{11}$) were obtained on C++ program and shown in this 6 figures.

5 Conclusion

The study of various problems for Boltzmann's moment system of equations is an important and actual task in the theory of a rarefied gas and applications of the moment system

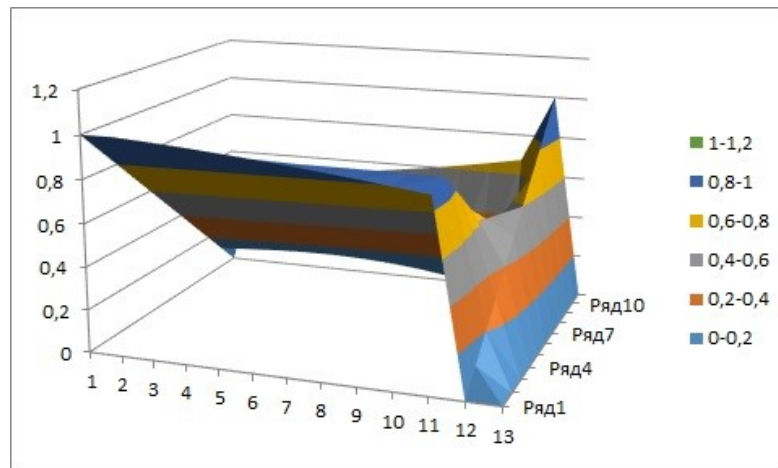


Figure 1 – The behavior of the moment f_{00} in space of time and variable x (gas density)

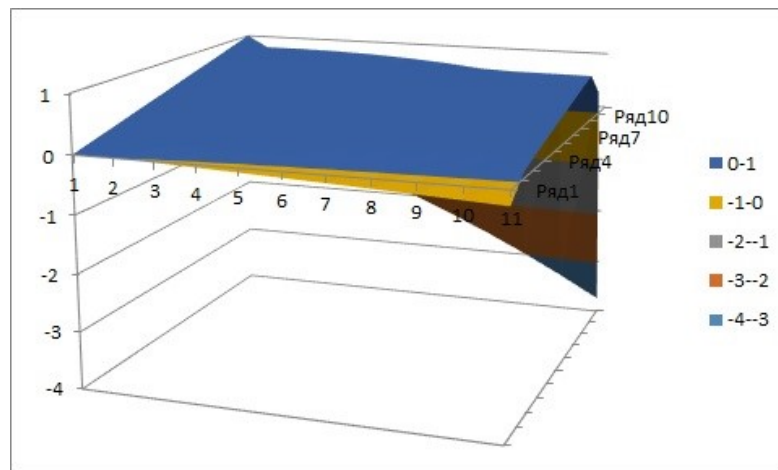


Figure 2 – The behavior of the moment f_{02} in space of time and variable x

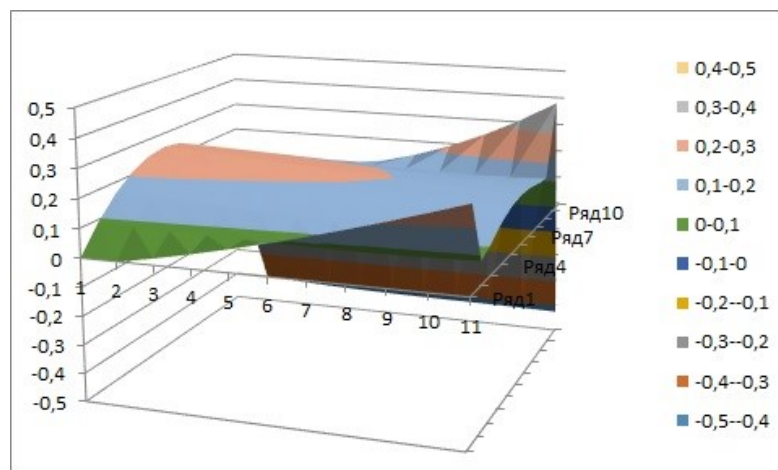


Figure 3 – The behavior of the moment f_{10} in space of time and variable x

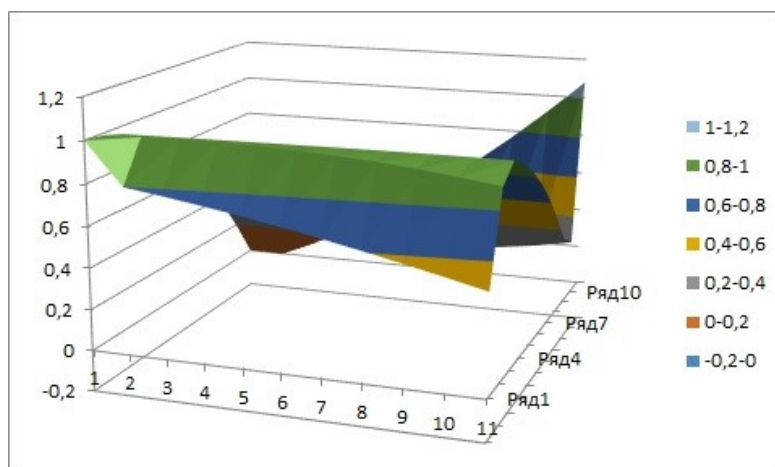


Figure 4 – The behavior of the moment f_{01} in space of time and variable x

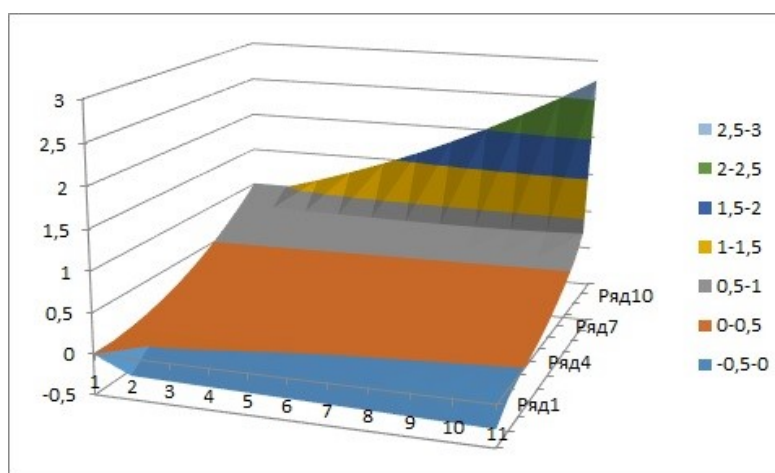


Figure 5 – The behavior of the moment f_{03} in space of time and variable x

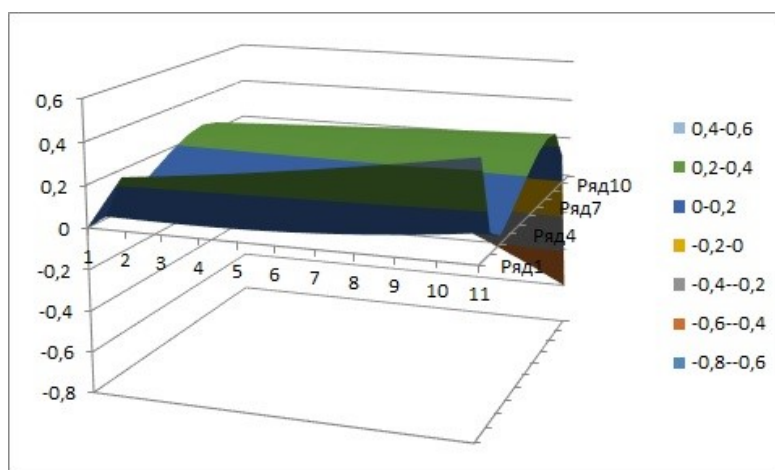


Figure 6 – The behavior of the moment f_{11} in space of time and variable x

equations. The Boltzmann equation describes the behavior of a rarefied gas in space of time and velocity and the numerical solution of the initial and boundary value problem for Boltzmann's six-moment system equations allows us to see the behavior of the moments of the particle distribution function $f_{00}, f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{10}, f_{11}$ in space of time and variable x . Obtained results showed that the parameter α (α depends on gas temperature) has influence on the behavior of the moments of the particle distribution function $f_{00}, f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{10}, f_{11}$.

References

- [1] Grad, Harold. "On the kinetic theory of rarefied gases." *Communications on Pure and Applied Mathematics* (1949): 331–407.
- [2] Grad, Harold. "Principle of the kinetic theory of gases." *Handbuch der Physik* (1958): 205–294.
- [3] Sakabekov, Auzhan. *Initial-Boundary Value Problems for the Boltzmann's Moment System Equations*. Almaty: Gylym, 2002.
- [4] Cercignani, Carlo. "Theory and Application of the Boltzmann Equation." *Journal of Applied Mechanics* (1976): 502–521.
- [5] Kogan, Mikhail. *Dynamic of Rarefied Gas*. Moscow: Nauka, 1967.
- [6] Kumar, Kailash. "Polynomial expansions in kinetic theory of gases." *Annals of Physics* (1966): 113–141.
- [7] Neudachin, Vladimir G., and Smirnov, Yuriy F. *Nucleon Association of Easy Kernel*. Moscow: Nauka, 1969.
- [8] Moshinsky, Marcos. *The Harmonic Oscillator in Modern Physics: from Atoms to Quarks*. New York: Gordon and Breach, 1960.
- [9] Sakabekov, Auzhan, and Auzhani, Yerkanat. "Boundary conditions for the onedimensional nonlinear nonstationary Boltzmann's moment system equations." *Journal of Mathematical Physics* (2014): 23–50.
- [10] Mischler, Stephane. "Kinetic equations with Maxwell boundary conditions." *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* (2010): 719–760.

2-бөлім

Механика

Раздел 2

Механика

Section 2

Mechanics

UDC 536.242

Experimental and numerical studies of PCM-based storage for solar thermal energy storage applications

Akhmetov B., PhD student, al-Farabi Kazakh National University, Almaty city, Republic of Kazakhstan, +77471256726, E-mail: eng.akhmetov@gmail.com

Seitov A., Master student, al-Farabi Kazakh National University, Almaty city, Republic of Kazakhstan, +77075091194, E-mail: seitov.abzal9@gmail.com

Popov, R., Assoc. Prof., Plovdiv University "Paisii Hilendarski", Plovdiv city, Bulgaria, +359895587302, E-mail: rum-pop@yahoo.com.

Georgiev A., Dr.Sci. (Tech.), professor, Technical University - Sofia, Plovdiv Branch, Plovdiv city, Bulgaria, +35932659513, E-mail: AGeorgiev@gmx.de

Kaltayev A., Dr.Sci. (Phys.-Math.), professor, al-Farabi Kazakh National University, Almaty city, Republic of Kazakhstan, +77471256726, E-mail: aidakhan.kaltayev@kaznu.kz

In the world, buildings are responsible for 40% of the world's total annual energy consumption, which is responsible for one-third of greenhouse gas emissions worldwide. The significance of this energy is used for lighting, heating, cooling and air-conditioning purposes. Raising concern about the environmental impact of greenhouse produced by conventional power plants caused renewed interest in environmentally friendly technologies, including heating and cooling systems for buildings. This work was conducted to investigate and explore the possibilities of solar energy storage using phase change materials (PCM) and using that energy to heat water for daily applications. By carrying out charging of the latent heat storage (LHS) based on PCM which is paraffin wax in the current study, its energy storage capacity was calculated and compared with the storage tank without PCM but filled with water only - sensible heat storage (SHS). As a result, LHS was able store 40% more thermal energy compared to SHS. Moreover, charging process of the LHS was numerically investigated to visualize the thermal field in the PCM based storage. The results show that the numerical results agree with the experimental results which indicated the correctness of the mathematical model and simulation results.

Key words: Phase change material storage, latent heat storage, thermal energy storage.

Фазасы өзгертін материал негізінде күн жылу энергиясын сақтауды эксперименттік және сандық зерттеу

Ахметов Б., докторант, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77471256726, E-mail: eng.akhmetov@gmail.com

Сейтов А., магистрант, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77075091194, E-mail: seitov.abzal9@gmail.com

Попов Р., доцент, "Паисий Хилендарски" атындағы Пловдив университеті, Пловдив қ., Болгария, +359895587302, E-mail: rum-pop@yahoo.com.

Георгиев А., т.ғ.д., профессор, Техникалық университет - София, Пловдив филиалы, Пловдив қ., Болгария, +35932659513, E-mail: AGeorgiev@gmx.de

Қалтаев А., ф.-м.ғ.д., профессор, Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77471256726, E-mail: aidakhan.kaltayev@kaznu.kz

Қазіргі таңда, ғимараттар, бүкіл әлемдегі жылу энергиясының 40% тұтынуына жауапты, және бұл энергия тұтыну әлемдегі жалпы парниктік газдардың атмосфераға бөлінуінің үштен бір бөлігіне жауапты болып табылады. Осы энергияның көп бөлігі жарықтандыру, жылыту, салқындату және ауа кондиционерлері үшін пайдаланылады. Дәстүрлі жылу станцияларының қоршаған ортаға әсеріне байланысты, қазіргі таңда экологиялық таза жылу энергия көздерін пайдалануға қызығушылық туғызды. Бұл жұмыс күн энергиясын фазасы өзгеретін материал арқылы сақтау, оны күнделікті су жылыту үшін пайдалана отырып, күн энергиясының сақтау мүмкіндіктерін зерттеу және зерделеу үшін жүргізілді. Негізінде фазасы өзгеретін материал жатқан, бұл жағдайда парафин, латентті жылу сақтағышты зарядтау барысында, оның жылу сыйымдылығы анықталды және фазасы өзгеретін материалсыз жылу сақтағышпен, тек сумен сақтағанда, салыстырулар жүргізілді. Нәтижесінде, латенттік жылу сақтағыш фазасы өзгеретін материалсыз жылу сақтағышқа қарағанда 40% -ға артық жылуды сақтады. Сонымен қатар, негізінде фазасы өзгеретін материал жатқан латенттік жылу сақтағыштың жылу өрісінің өзгерісі сандық түрде зерттелген. Нәтижесінде, сандық әдіспен алынған нәтижелер эксперименталды түрде алынған нәтижелерімен келісетінін байқадық және бұл математикалық моделдің және моделдеу нәтижелерінің дұрыстығын көрсетті.

Түйін сөздер: латенттік жылу сақтағыш, жылуды сақтау, фазасы өзгеретін материалда жулыды сақтау.

Экспериментальные и численные исследования хранения тепла на основе МФП для солнечной тепловой энергии

Ахметов Б., докторант, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77471256726, E-mail: eng.akhmetov@gmail.com

Сейтов А., магистрант, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77075091194, E-mail: seitov.abzal9@gmail.com

Попов Р., доцент, Университет Пловдив им. "Паисий Хилендарски", г. Пловдив, Болгария, +359895587302, E-mail: rum-pop@yahoo.com.

Георгиев А., д.т.н., профессор, Технический университет - София, филиал Пловдив, г. Пловдив, Болгария, +35932659513, E-mail: AGeorgiev@gmx.de

Калтаев А., д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77471256726, E-mail: aidakhan.kaltayev@kaznu.kz

На данный момент здания ответственны за 40% от общего годового потребления энергии в мире, которая отвечает за одну треть выбросов парниковых газов по всему миру. Значительная часть этой энергии используется для освещения, отопления, охлаждения и кондиционирования воздуха. Повышение обеспокоенности по поводу воздействия на окружающую среду парниковых газов, производимых обычными тепловыми станциями, вызвали новый интерес к экологически чистым технологиям, в том числе систем отопления и охлаждения для зданий. Эта работа была проведена с целью исследования и изучения возможностей хранения солнечной энергии с использованием материалов фазового перехода (МФП), используя эту энергию для нагрева воды ежедневного применения. Путем проведения зарядки латентного теплового аккумулятора (ЛТА) на основе МФП, который в данном исследовании является парафином, чья энергоемкость была рассчитана и проведены сравнения с теплоаккумулятором без МФП, заполненный только водой, - физическим хранением тепла (ФХТ). По результатам экспериментального исследования, ЛТА на основе МФП смог сохранить на 40% больше тепловой энергии по сравнению с ФХТ. Кроме того, процесс зарядки ЛТА на основе МФП был численно исследован для визуализации теплового поля в аккумуляторе. Результаты показывают, что численные результаты согласуются с экспериментальными результатами, которые показывают правильность математической модели и результатов моделирования.

Ключевые слова: латентный теплоаккумулятор, хранение тепла, хранение тепла в фазовом изменении материала.

1 Introduction

In recent years, due to problems in the rapid depletion of traditional energy sources and the growing demand for energy, the implementation of proper storage of thermal energy is one of the most important questions in energy conversion systems. Latent heat storage (LHS) in phase change materials (PCM) has been adopted as one of the most effective methods of using solar energy and the recovery of industrial waste heat, look (Belen, 2003: 251–283). The main advantage of these systems appears to be the ability to store large amounts of energy in a relatively small volume at a constant temperature transition. Thus, many authors have reported the results of studies on the thermal storage during melting and solidification process in the energy storage systems, look (Agyenimet, 2010: 615–628).

Changing phase solid-liquid by melting and solidification can store a large amount of heat or cold. Melting characterized by a small change in volume, generally less than 10%. If the container can fit the material while it is in a liquid state, the pressure does not change significantly and therefore, melting and solidification of the material flowing to storage at constant temperature, look (FQ, 2002: 1273). Upon melting, while heat is transferred to the storage material, the material still retains its melting temperature at a constant temperature, also called phase transition temperature, look (Mehling, 2008: 179). Once phase transition is complete, a further heat transfer again leads to sensible heat accumulation. The heat supplied during melting is called latent heat, or latent heat storage process, look (Fan, 2010:24–46).

Storage of heat energy plays an important role both in heating and cooling applications, such as residential or commercial buildings, and also in industrial processes. Some of the technical solutions based on phase change materials can help to preserve and improve energy efficiency when used in the correct temperature levels at which the PCM changes its phase. Thus, only a few degrees difference in temperature, a large amount of energy can be saved. PCM based LHS can find its application in the elimination of energy storage problems in various fields, where they can function as a heat battery, look (Vakialtojar, 2001:249–263). PCM can afford to keep the temperature stable in the storage due to their high energy storage density. PCM can help to maintain the level of tank water temperature to a certain point. Successful use of LHS is not only a question of storing energy density, but also, the question of correct charge and discharge of energy accumulated at a rate suitable for the desired application, look (Mohammed, 2004:1597–1615).

Publications are available in the literature, which deals with an experimental study of the thermal characteristics of PCM storage with different storage configurations. Suitable PCM is also expected to increase the storage capacity. In this context, paraffin wax appeared as interesting topic among researchers for its attractive properties such as good heat storage density, melt or solid state compatibility with little or no significant super-cooling effects, non-reactivity with the most common chemical reagents and low cost, look (Bathelt, 1979:453–458), (Rieger, 1982:137–147), (Rabienataj, 2013: 155–163) and (Donald, 2013:393–403).

The co-author, Prof. A. Georgiev and his team from the Technical University of Sofia, Plovdiv Branch, designed and developed latent heat storage, look (Popov, 2013:1–6). Aim of the current study is concentrated on experimental and numerical analysis of LHS charging process, heat transfer and fluid flow processes in LHS and its performance compared to the same size sensible heat storage (SHS). Such study is very important in understanding of advantages and disadvantages of the design features of the latent heat storage and its

efficiency in terms of charging and PCM properties.

2 Literature review

2.1 Modeling of phase change process

The change in the phase of the material from the liquid state to the solid state can be described as the time evolution of the liquid/solid boundary through the volume studied. Therefore, determining the location of this interface at a specific time is the goal of phase transition problems. This position directly depends on the rate at which heat is absorbed by the material, hence, on the thermal properties of the material. However, these properties (thermal conductivity, specific heat, density, etc.) often change significantly between liquid and solid states. Thus, phase change modeling involves knowing the position in time and space of the liquid/solid interface so that the relevant properties can be applied on both sides. The complexity of the phase change problem is caused by the fact that this interface position is both a solution to the problem and the required input; Such types of problems are called moving boundary value problems and were studied as early as 1831 by Clapeyron and Lamy when studying the formation of the earth's crust. However, the work on ice formation in 1889 by Joseph Stefan really represented a common class for these problems, known further as Stefan's problems.

2.2 Modeling PCM encapsulated in rectangular capsules

The phase change material, enclosed in flat rectangular containers, was modeled by various researchers using air as the coolant. Dolado et al. (2006) developed various numerical models simulating the behavior of flat plate PCM capsules subject to airflow, each of which takes into account various modeling assumptions. Two models are based on difference differences and only conductivity inside PCM is taken into account, without regard for any effect that natural convection can have, while PCM is in the liquid phase. One model considered a one-dimensional conductivity in the PCM in a direction perpendicular to the HTF, while the other considered conductivity in the PCM both in parallel and in the normal HTF flow. Comparison of numerical results with previous experimental data Belain Zalba (2002) confirmed that a one-dimensional model can reproduce experimental data with the required accuracy. Consequently, the simulation of conductivity inside the PCM in the direction of the HTF flow did not lead to a significant increase in the accuracy of the numerical results.

2.3 Experimental data on phase change material thermal storage tanks

Moreno et al. (2014) experimentally tested the use of a horizontal clamp to store PCM data to change the daily load for cooling a small space. The PCM tank was connected to a water-to-water heat pump and a ventilation unit connected to the canopy building, which was used to represent the internal space, the temperature of which should be maintained. The productivity of a horizontal water storage tank with identical dimensions was compared with the characteristics of a tank packed in PCM capsules that are commercially available, rectangular in shape and made of high-density polyethylene.

Such detailed experimental tests exist for other PCM capsule geometries, such as plastic bags (Saied Mohammad Vakilaltojjar, 2000; Zukowski, 2007), plastic vertical plates (Lazaro, Dolado, Marnn and Zalba, 2009; B. Zalba, Marin, Cabeza and Mehling, 2004), as well as spherical capsules (J. Wei, Kawaguchi, Hirano and Takeuchi, 2005), as well as spherical capsules (Bedecarrats, Castaing-Lasvignottes, Strub and Dumas, 2009; IW Eames and Adref, 2002; Nallusamy, Sampath and Velraj, 2007). However, a careful analysis of the behavior of commercially available PCMs studied in this project has not been found in the literature.

3 Materials and methods

3.1 Characterization of PCM

As in any other application, the selection of the PCM to be used is a crucial point. The temperature of water to be stored as domestic hot-water is about 60°C ; therefore, the melting temperature of the PCM should be around 60°C . In the market, different PCMs with this melting temperature can be found. Three paraffins were studied (E53, ECP, E45) in laboratory of Birmingham Centre for Energy Storage (UK) using Differential Scanning Calorimetry and density meter to evaluate their heat capacities, thermal conductivity and density changes for temperature range of 25°C up to 90°C . Finally, E53 with a melting temperature of 59°C was chosen for the experimental and numerical studies of latent heat storage presented in this paper. As illustrated in the Figure 1, it can be noticed that E53 has two phase transition regions: solid-solid phase transition in the temperature range of $35 - 50^{\circ}\text{C}$ and solid-liquid phase change around $55 - 65^{\circ}\text{C}$ temperature range. Furthermore, the density of the E53 is higher in the solid state (around 0.87 mg/m^3) and lower in the liquid state (approximately 0.78 mg/m^3).

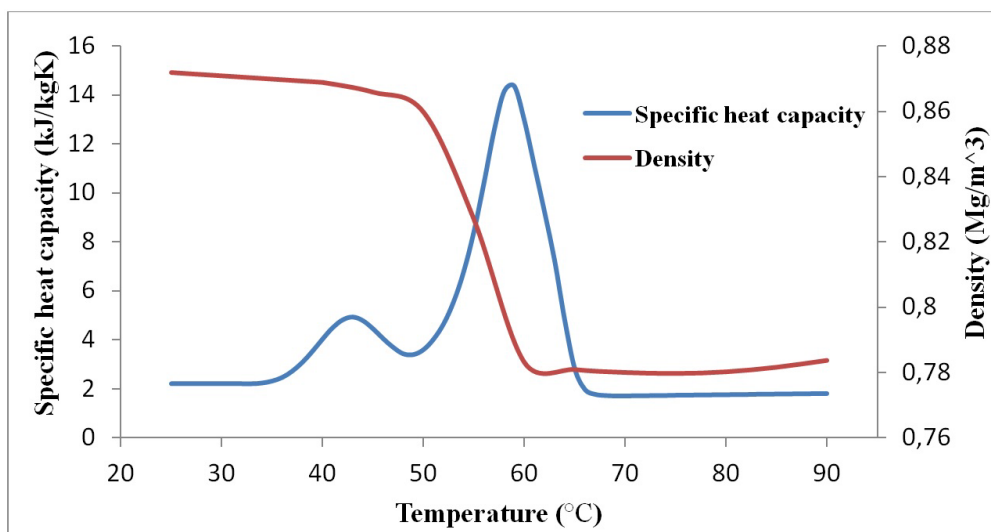


Figure 1 – Thermal properties of paraffin E53

3.2 Methodology of tests

Figure 2 shows the latent heat storage tank equipped with 39 PCM containers filled with paraffin E53, and figure 3 illustrates the schematic diagram of the experimental setup for the experimental studies. The PCM-based tank is heated up using an electrical heater attached to the base. The power input to the electrical heater is controlled by an AC power variable transformer connected to the 230V AC. The voltage across the heater and the current through the heater are measured to determine the power input to the heater. PCM-based tank with container is insulated on all sides to minimize heat loss.

Detailed illustration of the latent heat storage and its design features are shown in Figure 4. PCM containers have rectangular cross section with dimensions 950 x 80 x 50 mm, look (Stoyanova, 2013:28–31). They are placed into the vertical cylinder tank (storage) with 1 m height and 0.3 m radius. The tank and containers are made of stainless steel grade AISI 304L. Number of PCM containers are 39 and they are located coaxially in the storage. There are two concentric circles: external circle contains 26 containers and the inner circle has 13 containers. All the containers are fixed with brackets to the lower and upper parts of the storage tank in order to make them stable during charging and discharging regimes. There are three inlet pipes in the bottom side of the storage where the heat carrier fluid flows into the storage. In the upper part of the storage other three pipes are connected to the storage to discharge the heat carrier fluid from the storage.

Temperature is measured at the inlet, at outlet and inside the container. These temperature sensors and flow meter are connected to a data acquisition system for continuous monitoring and recording of the data.

Two types of experiments were conducted. The first is about the constant voltage charging of LHS filled with PCM paraffin E53. In the second experiment, LHS was filled with water as a heat storage medium. The second experiment was carried out in order to evaluate and compare the effectiveness of LHS (filled with paraffin E53) and water only (without paraffin).



Figure 2 – Latent heat storage which contains 39 PCM containers filled with E53

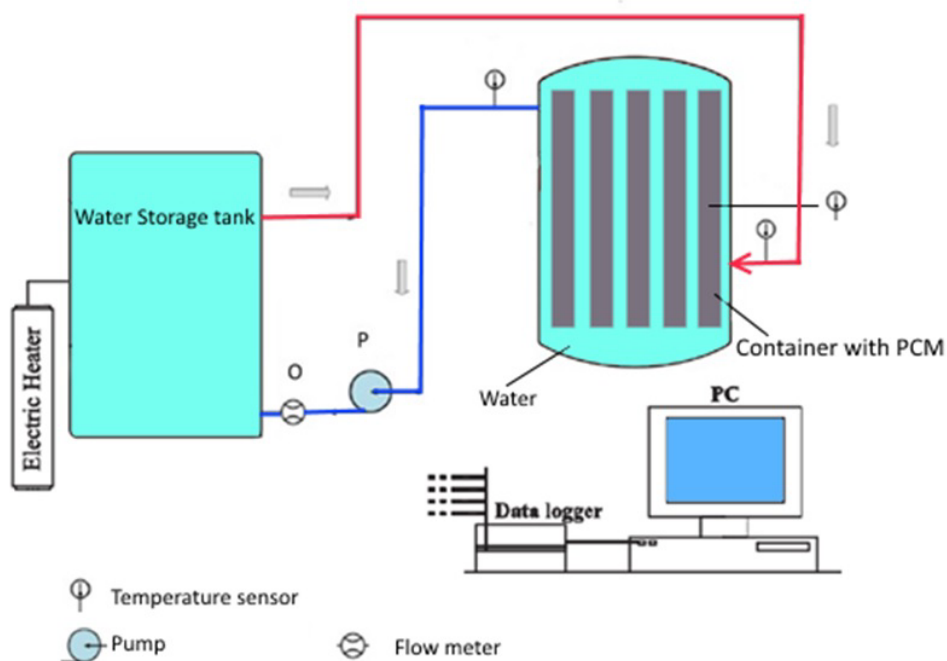


Figure 3 – Experimental setup

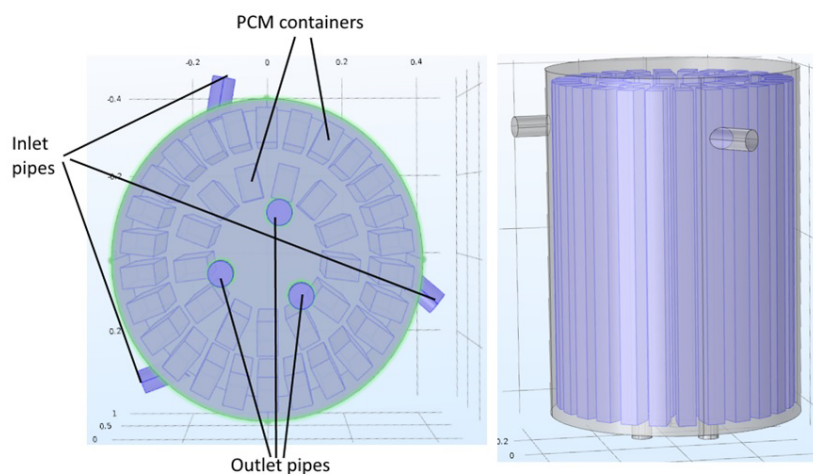


Figure 4 – Design features of the latent heat storage

3.3 Equations

Simulation is conducted in three dimensional space in a time dependent manner by means of finite element method based on Comsol multiphysics. The geometry used to perform the simulation of charging and discharging of LHS is presented in figure 4. The containers which enclose PCM (e.g. paraffins) are thermally insulated at the top and bottom. Moreover, it is assumed that the volume of the PCM does not change during phase transition. Such assumption, allows introducing simpler mathematical models, although, according to the experimental investigations, paraffins change their volume during melting or solidification.

Moreover, to avoid intensive numerical calculations, the containers are considered as highly conductive layers.

In order to simulate the dynamic behaviour of the heat carrier fluid flowing inside the LHS, the continuity and Navier-Stokes equations must be solved simultaneously. Continuity equation takes the form, look (Chung, 2002:1007):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) \quad (1)$$

where ρ - density, kg/m^3 and u - velocity, m/s . The Navier-Stokes equation which accounts for the conservation of the momentum is given by:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2 u + F \quad (2)$$

where p - pressure in the fluid, Pa , ν - kinematic viscosity, m^2/s . Heat transfer from the water to the wall of the PCM containers takes place in the form of convection. Therefore, complete energy equation has to be solved by using the velocity field obtained from the solutions of Eqns. (1) and (2). Thus, the energy equation describing the heat transfer process is given by:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T)$$

c_p - specific heat capacity, J/kgK , k - thermal conductivity of the material, W/mK , T - temperature of the heat carrier fluid, K .

The energy equation for the phase change material including latent heat transfer during phase change is:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p u \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (3)$$

$$k = \theta_1 k_{phase1} + \theta_2 k_{phase2} \quad (4)$$

$$c_p = \theta_1 c_{p_{phase1}} + \theta_2 c_{p_{phase2}} + L \frac{d\alpha}{dT} \quad (5)$$

$$\rho = \frac{\theta_1 c_{p_{phase1}} \rho_{phase1} + \theta_2 c_{p_{phase2}} \rho_{phase2}}{\theta_1 c_{p_{phase1}} + \theta_2 c_{p_{phase2}}} \quad (6)$$

where $\theta_1 = 1 - \alpha$ and $\theta_2 = \alpha$ corresponds to phase 1 and phase 2 respectively. Moreover, L is the latent heat fusion of phase change and α is the liquid volume fraction in the phase change material and it is a function of temperature:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 & T < T_{solid} \\ \alpha &= \frac{T - T_{solid}}{T_{liquid} - T_{solid}} & T_{solid} \leq T \leq T_{liquid} \\ \alpha &= 1 & T > T_{liquid} \end{aligned} \quad (7)$$

In the stream of PCM containers buoyancy melted part of the PCM due to the temperature difference was not considered in the model, but only conduction heat transfer occurs in both melted and the solid part of PCM. Thus, the difference between melting and solid phases is based on its thermal conductivity coefficients k , specific heat capacities c_p and densities ρ . Moreover equations (4) - (7) do not consider the effects of hypothermia modeling processes during phase changes. And, other properties of phase change materials are paraffin for simulation purposes were taken from experimental results (Hamid, 2009:247–254).

3.4 Initial and boundary conditions

or liquid flow, the boundary conditions (BC) on solid surfaces such as the inner wall of the vessel and on the surface of containers are considered PCM without slipping BC. Furthermore, it is assumed that the storage tank has been completely isolated, which is defined by the formula look (Chung, 2002:1007):

$$-n \cdot (-k\nabla T) = 0 \quad (8)$$

where n - normal vector to the heat transferring surface. Therefore, heat transfer occurs only by means of inlet and outlet pipes. The containers are considered as highly conductive layers, where heat exchange takes place between heat carrier fluid and phase change material which can be described as:

$$-n \cdot (-k\nabla T) = d_S(Q_S - \rho_S c_{pS} \frac{\partial T}{\partial t}) - \nabla_t \cdot (-d_S K_S \nabla_t T) \quad (9)$$

where d_S - layer thickness which is taken as 0.01m in our case, Q_S - layer internal heat source and it is zero in our modeling, J , ρ_S - layer density, kg/m^3 , c_{pS} - layer specific heat capacity, J/kgK , k - layer thermal conductivity, W/mK - they are taken from material properties and it was mentioned above that the PCM containers are made from stainless steel.

Temperatures of the PCM and working fluid filling the storage tank, inlet velocities and inlet temperature we take from the experimental data.

Outlet BCs for the velocity was set up in terms of the pressure with suppress backflow which adjusts the outlet pressure in order to prevent fluid from entering the domain through the boundary. And, temperature BC is Neumann type:

$$-n \cdot (-k\nabla T) = 0 \quad (10)$$

4 Results and discussion

Figure 5 illustrates the cumulative heat stored in SHS and LHS system for a constant HTF flow rate. This clearly shows that the thermal energy stored in the LHS systems far exceeds SHS preservation system of the same size and volume of the storage tank. Thus, LHS system can provide substantial reduction in the volume for storing the same stored heat, compared with SHS systems. From figure 6, we can see that the SHS system of charges to a maximum temperature of $70^\circ C$ for 40 minutes before the LHS system. The average time in the SHS charging systems are faster than the LHS of the system for 30-60 minutes, depending on the flow rate. Charging time will be accredited to the lack of phase change materials in SHS

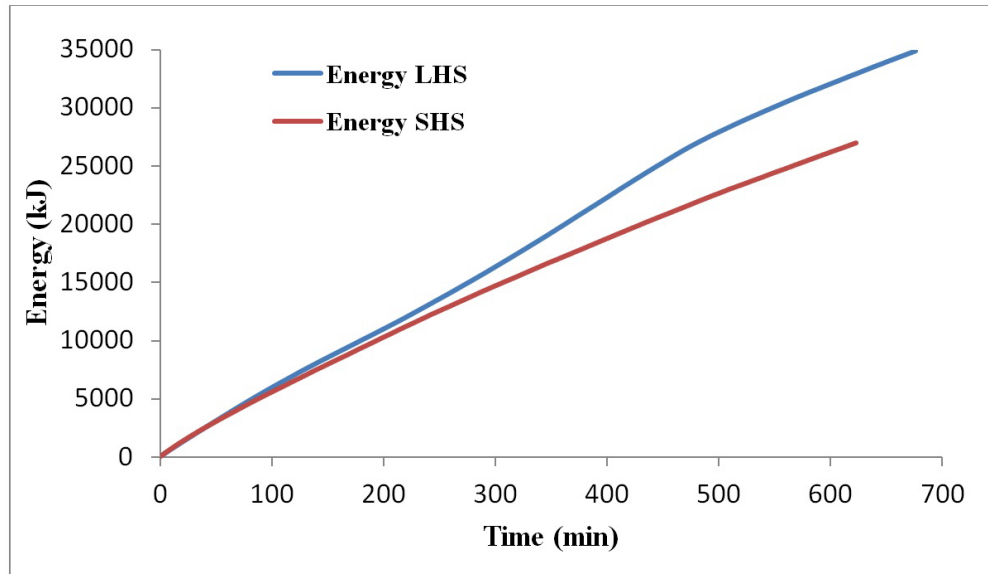


Figure 5 – Comparison of Cumulative energies in LHS and SHS systems

systems. On the other hand, the heat transfer between the HTF and PCM latent heat in the system reduces the temperature gradient and increases the HTF charging time.

The effectiveness of the heat exchanger ε is defined by equation (12) below (Incropera, 2007:675–707) and is presented in figure 7 for the solidification process.

$$\varepsilon = \frac{T_{in} - T_{out}}{T_{in} - T_{HE}} \quad (11)$$

where T_{in} - inlet temperature, T_{out} - outlet temperature, T_{HE} - temperature in heat exchanger.

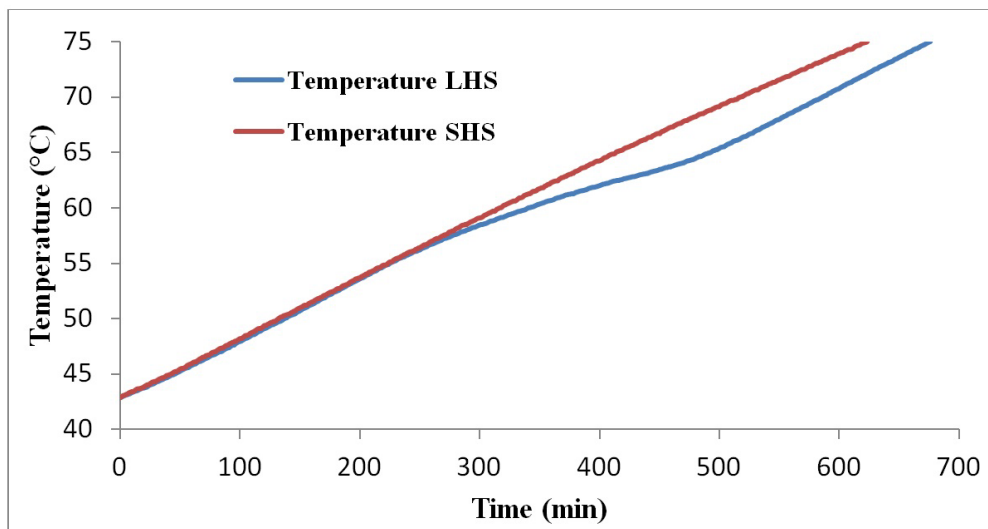


Figure 6 – Temperature histories of HTF during SHS and LHS charging process

Figure 7 shows a comparison of the effectiveness of the system of systems SHS and LHS. It is seen from the figure that the effectiveness of SHS system varies for different periods of time,

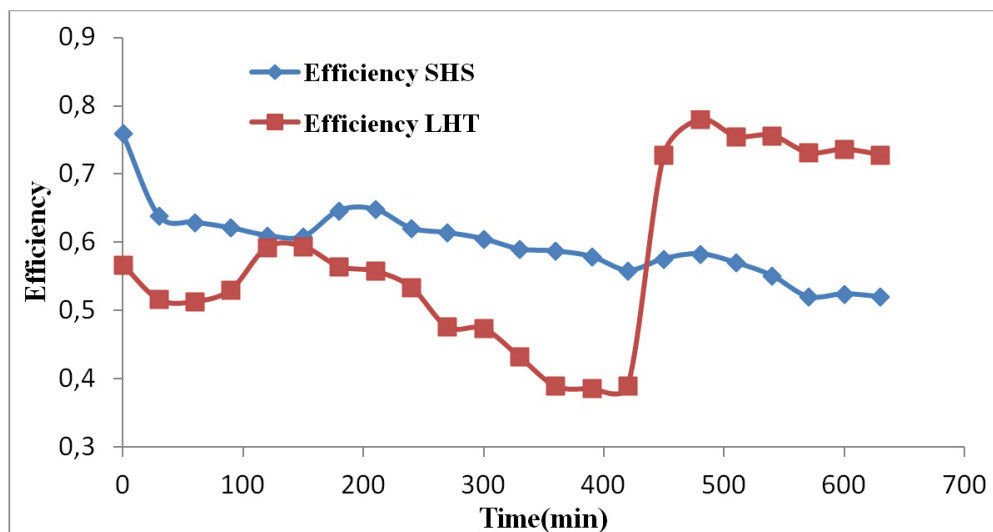


Figure 7 – Effectiveness of heat exchanger system during charging of LHS and SHS

whereas the efficiency of the system is constant LHS phase transformation temperatures, and it also shows a higher efficiency. Thus, LHS system is more efficient.

As seen in figure 7 that the efficiency is high at the beginning and at the end of the solidification process, while it is smaller therebetween. This behavior corresponds to the high efficiency of heat transfer of the physical PCM and lower efficiency in the melting process, which may occur due to the slow rate of absorption of latent heat by melting.

Figure 8 shows an example of the computed temperature profile at a point in the PCM domain, which was computed numerically and measured experimentally. It can be seen that the temperature profile of the paraffin E53 during charging process is divided into 3 regions which represent the solid, phase change zone and liquid phase. The temperature rise in solid phase region and liquid phase region was due to the sensible heat added (Figure 8b). Temperature between 53°C to 59°C was the phase change region where the melting of PCM started at 53°C and completed at 59°C . The temperature gradient of this region was smaller due to the large amount of energy, in the form of latent heat of fusion, was needed to melt the PCM (Figure 9).

The temperature evolution at middle positions in PCM container and the temperature evolution on outlet of PCM during charging are shown in figure 8. The continuous lines represent the numerical results, while the circles represent the experimental results. By comparing numerical and experimental curves for the charge case, it is apparent that the results are very similar. Moreover, it appears that the experimental and numerical curves are similar, which indicates that the phenomena are numerically well represented.

Figure 10 shows streamlines of velocity and temperature distribution on the PCM containers. The PCM containers which are in the inner circle charged first in a short time and outer circle containers were charged after that. It can be concluded that outer circle PCM containers are very close to the storage tank walls, therefore, those areas does not allow fluid flow and heat transfer processes to be intensive. As the result of the numerical simulation, thermal field in the LHS was visualized in detail and based on it one can analyze the phase change zones in the storage. Moreover, by means of the numerical studies the deficiencies or

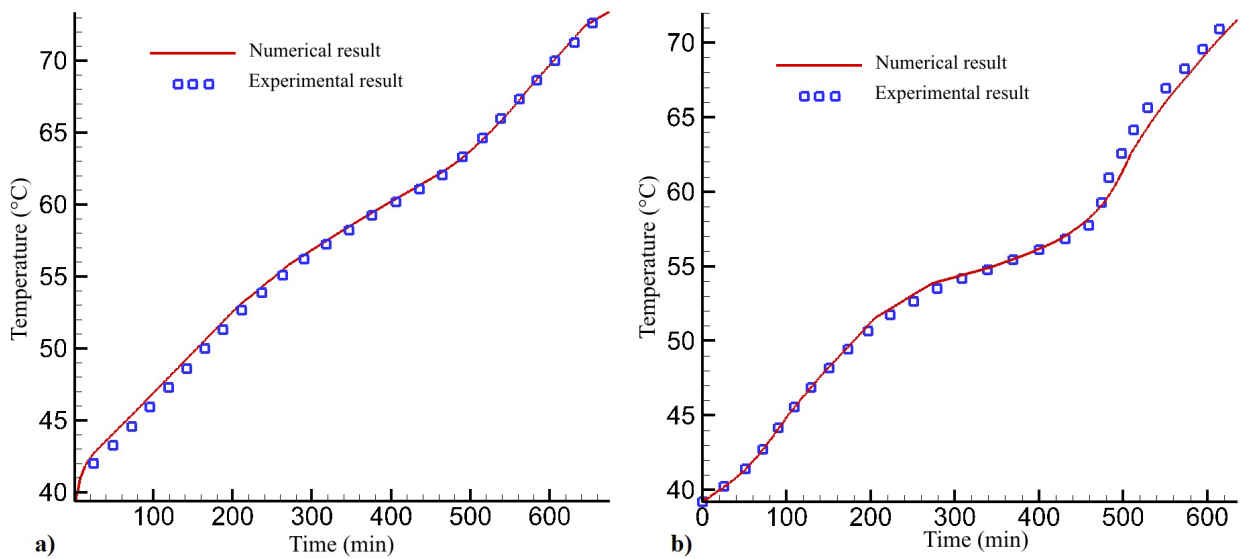


Figure 8 – Comparison of the experimental and numerical results for charging LHT with PCM. Outlet temperature (a) and temperature at middle position in PCM container (b)

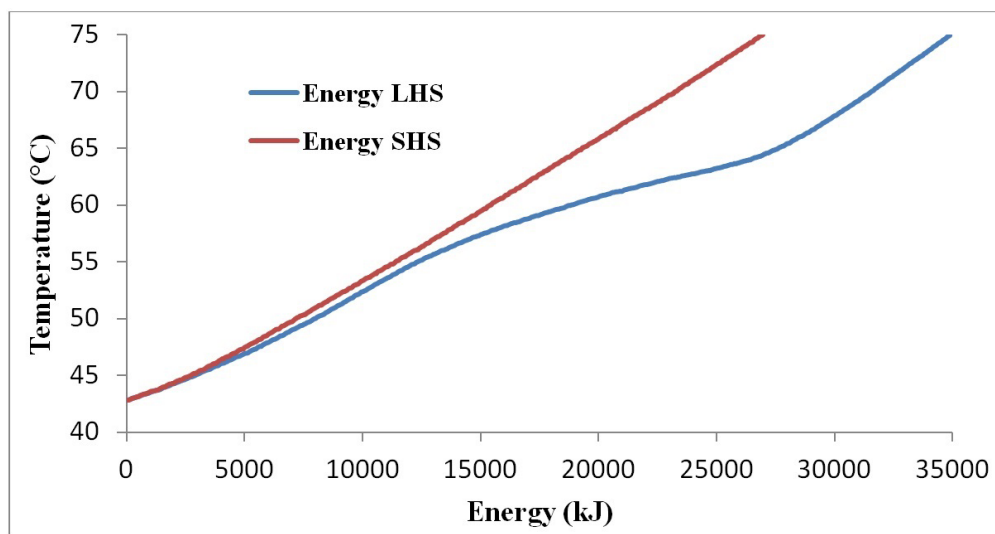


Figure 9 – Temperature histories of HTF during SHS and LHS charging process

drawbacks of the storage design can be studied which is usually impossible in experimental studies.

5 Conclusion

The aim of the investigation was to find out how effectively LHS based on paraffin, E53, could store the thermal energy compared to the similar-sized storage tank without PCM (e.g. SHS). Moreover, the charging mode of the LHS was numerically studied with the purpose of evaluating the thermal field in the tank. Such evaluation allows to visualize the thermal field

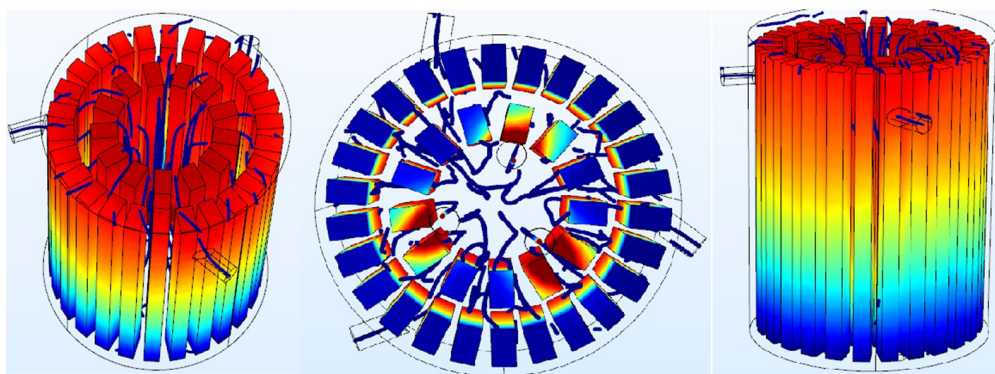


Figure 10 – Streamlines of velocity and temperature distribution on the PCM containers

in the PCM containers as well as the storage tank, including the flow field of the heat transfer fluid and understand the charging processes in detail. Thus, according to the results, as the charging takes place from 25°C up to 75°C at constant heat rate, the LHS could store 40% more energy compared to SHS. It should be noted that the LHS and SHS are the same storage tanks: (i) in case of LHS, the total volume of the storage was 0.3m^3 of which 0.15m^3 was filled with PCM and (ii) in case of SHS, the containers were removed and the tank was filled with water as the sensible storage material. In a word, when approximately the half of the storage tank filled with PCM, 40% more thermal energy could be stored in the tank. Although, the charging time took 53min more time compared to SHS, which is not a problem since duration of solar radiation takes more than 3-4 hours daily. Furthermore, the charging of LHS was numerically studied and development of the thermal field in the storage was simulated. The results of the numerical studies were compared with the experimental ones, thus, correctness of the numerical approach was verified. It was visualized that the phase change processes occur in the inner circle PCM containers since the inlet pipes were located in the centre part of the storage tank bottom. To melt the PCM in the outer circle containers took some time because the flow of heat transfer fluid was intensive in the central part of the storage but not on the areas of the side walls. Thus, the modeling assisted in understanding the phase transition zones in the storage, and fluid flow processes and showed the detailed thermal performance of the PCM filled storage. In the future, authors are planning to study the energy performance and efficiency of the LHS integrated with solar collectors which will give more realistic understanding of the charging processes. Moreover, the LHS will be integrated to the consumer side (e.g. hot water application systems), thus, allowing to evaluate the storage performance in case of thermal energy discharge from the storage.

6 Acknowledgements

The authors appreciate the technical support of the Birmingham Centre for Energy Storage (BCES), Technical University of Sofia-Branch Plovdiv, and Newton-Al-Farabi Programme (Application number: 216398976) which funded the travel grant of Akhmetov B. to BCES.

References

- [1] Anastasiya Stoyanova, "Experimental installation for investigation of latent heat accumulator as a part of hybrid system for air conditioning." *Journal Toplotekhnika* 14(2013).
- [2] Bathelt et al., "Latent heat-of-fusion energy storage experiments on heat transfer from cylinders during melting." *J. Heat Transfer* 101(1979):453–58, accessed August 01, 1979, doi:10.1115/1.3451008.
- [3] Belen Zalba et al., "Review on thermal energy storage with phase change materials, heat transfer analysis and applications." *Applied Thermal Engineering* 23(2003):251-83. accessed February 2003, doi:10.1016/S1359-4311(02)00192-8.
- [4] Chung T. J. *Computational Fluid Dynamics*. (Cambridge: Cambridge University Press, 2002), 120–99.
- [5] Donald Neeper, "Thermal dynamics of wallboard with latent heat storage." *Solar Energy* 68(2013):393–03, accessed July 2013, doi:10.1016/S0038-092X(00)00012-8.
- [6] Fan and Jay Khodadadi, "Thermal conductivity enhancement of phase change materials for thermal energy storage: a review." *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 15(2010):24–46. accessed January 2011, doi:10.1016/j.rser.2010.08.007.
- [7] FQ Wang et al., "A review of research concerning the use of PCMS in air conditioning and refrigeration engineering." *Adv. Build Technol.* 2(2002). accessed December 2002, doi:10.1016/B978-008044100-9/50158-3.
- [8] Francis Agyenimmet et al., "A review of materials, heat transfer and phase change problem formulation for latent heat thermal energy storage systems (LHTESS)." *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 14(2010):615–28. accessed February 2010, doi:10.1016/j.rser.2009.10.015.
- [9] Hamid ElQarnia "Numerical analysis of a co upled solar collector latent heat storage unit using various phase change materials for heating the water." *Energy Conversion and Management* 50(2009):247–54, accessed February, 2009, doi: 10.1016/j.enconman.2008.09.038.
- [10] Incropera et al., *Fundamentals of Heat and Mass Transfer 6th Edition* (New York: John Wiley & Son, 2007), 675–707.
- [11] Mehling Harald and Cabeza F. Luisa, *Heat and cold storage with PCM: an up to date introduction into basics and applications*. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 2008.
- [12] Mohammed M. Farid et al., "A review on phase change energy storage, materials and applications." *Energy Conversion and Management* 45(2004):1597–15, accessed June 2004, doi: 10.1016/j.enconman.2003.09.015.
- [13] Rabienataj Darzi et al., "Numerical investigation of free-cooling system using plate type PCM storage." *International Communications in Heat and Mass Transfer* 48(2013):155–63, accessed November 2013, doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2013.08.025
- [14] Rieger et al., "Analysis of the heat transport mechanisms during melting around a horizontal circular cylinder." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 25(1982):137–47, accessed January 1982, doi:10.1016/0017-9310(82)90242-3.
- [15] Popov Rumen and Georgiev Aleksandr, "SCADA system for study of installation consisting of solar collectors, phase change materials and borehole storages." (paper presented at the Proc. of the 2nd Int. Conf. on Sustainable Energy Storage, Trinity College Dublin, Ireland, June 19–21, 2013).
- [16] Vakilaltojjar and Saman, "Analysis and modeling of a phase change material storage system for air conditioning applications." *Applied Thermal Engineering* 21(2001):249–63, accessed February 2001, doi:10.1016/S1359-4311(00)00037-5.

3-бөлім

Раздел 3

Section 3

Информатика

Информатика

Computer
science

UDC 519.872

Study of enterprise load balancing algorithms using model-based design

Aidarov K.A., PhD student, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77013460160, E-mail: kanataidarov@yahoo.com
 Almatov A.Zh., Student, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Republic of Kazakhstan, +77476273606, E-mail: abat_aktobe_95@mail.ru

Given work describes load balancing algorithms for external services with unspecified clients used in real enterprise facilities. Simplest example of such service is a pair of a web server and a browser. Principles of load balancing, their pros and cons are considered, their implementation and applicability to different services are described. Algorithms of load balancing for DNS Round Robin, Direct Routing, Redirect methods are studied. Result of model implementation for cluster system allowed to obtain estimations of oscillation effect decrease between its overloaded and normal states. As a conclusion recommendations for using implemented model of queuing network for different enterprise services of user request processing are given.

Key words: load balancing, discrete-event simulation, model based design, probabilistic modeling.

Модельге бағытталған жобалау арқылы жүктеуді безбеңдеудің өндірістік алгоритмдерін зерттеу

Айдаров К.А., докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77013460160, E-mail: kanataidarov@yahoo.com
 Алматов А.Ж., студент, әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77476273606, E-mail: abat_aktobe_95@mail.ru

Берілген жұмыс, шынайы өндірістік мекемелерде қолданылатын, арнайы емес клиенттері бар сырттай қызметтер үшін безбеңдеу алгоритмдерін сипаттайды. Бұндай қызметтің ең қарапайым мысалы ретінде веб-серверді немесе браузерді алуға болады. Безбеңдеу принциптері, олардың артықшылықтары мен кемшіліктері қарастырылған, түрлі қызметтер үшін іске асырылулары мен қолданымдылығы сипатталған. DNS Round Robin, Direct Routing, редирект үдістері үшін безбеңдеу алгоритмдері зерттелген. Модельді кластерлік жүйе үшін іске асыру нәтижесі бойынша, жүйенің асыра жүктелген және қалыпты жағдайлары арасындағы осциляция әсерінің кемуі бақыланды. Мақаланың соңында іске асырылған желілік жүйенің моделін, түрлі қолданушылардың сұраныстарын өңдеу қызметтері үшін, қолдануға нұсқаулықтар келтірілген.

Түйін сөздер: жүктеуді безбеңдеу, дискретті-оқиғалы модельдеу, модельге бағытталған жобалау, ықтималдық модельдеу

Исследование промышленных алгоритмов балансировки нагрузки через модельно-ориентированное проектирование

Айдаров К.А., докторант, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77013460160, E-mail: kanataidarov@yahoo.com
 Алматов А.Ж., студент, Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77476273606, E-mail: abat_aktobe_95@mail.ru

Данная работа описывает алгоритмы балансировки для внешних сервисов с неспециализированными клиентами, используемых в настоящих промышленных ЦОДах. Простейший пример такого сервиса и клиента – это веб-сервер и браузер. Рассмотрены непосредственно принципы балансировки, их плюсы и минусы, описана их реализация и применимость к различным сервисам. Исследованы алгоритмы балансировки нагрузки для методов DNS Round Robin, Direct Routing, Редирект. По результатам реализации модели для кластерной системы получены оценки уменьшения эффекта осцилляции между ее перегруженным и нормальным состояниями. В заключение даны рекомендации по использованию реализованной модели сетевой системы в различных промышленных сервисах обработки пользовательских запросов.

Ключевые слова: балансировка нагрузки, дискретно-событийное моделирование, модельно-ориентированное проектирование, вероятностное моделирование

1 Introduction

In many Internet projects, web server is running on a single physical server gradually limiting performance achieved by the server. The most obvious solution in this case is to upgrade hardware equipment. But if one goes this way, then after some time it becomes impossible to upgrade equipment further because of limited space and cost efficiency. Therefore, one needs to convert his project to clustered model instead single server one. Clustering is beyond the scope of this work and thoroughly described in (Teo, 2001: 185-195).

Now the question arises is how to balance load between servers. In addition to direct load distribution is necessary to solve a number of issues. These include increasing resiliency (uninterrupted operation of the project in case of failure of one of servers), and protection against certain types of attacks. For example, from the opening large number of "empty" connections, where nothing is transmitted. In given work considered three algorithms implementing load balancing methods and they modeled using technology of Model-Based Design.

Working on the basis of the model is becoming more and more popular trend in development of a software for systems with clustered resources. On websites of manufacturers of software tools, one can find a lot of success stories, reports on improving the efficiency up to 50%, a significant reduction of errors in the design and a more rapid increase in the level of maturity of developed functions just on the basis of development models (Navarre, 2002: 205-216).

Constructed models allow to model three methods of load balancing in distributed systems, namely DNS Round Robin, Direct Routing, redirect. Of course all three models can be implemented in a cluster environment.

2 Related works

All of reviewed methods and works use queuing networks and their respective algorithms based on the queuing theory (Mitrani, 2004). Studied algorithms of load balancing can be classified into three categories: static, dynamic and adaptive (Al-Amri, 2002: 165-178).

A system described in work (Barros, 2007: 241-255) is a dynamic method which executes programs solving the problem based on "divide-and-conquer" approach on systems with distributed memory. Given system provides primitives for organization of parallel operation of program and uses Random Stealing algorithm (Wrzesinska, 2007: 425-436) for distribution of load between clusters.

Random stealing algorithm fully distributed load balancing algorithm which initiates connection as soon as task being finished and load balancing partner will be chosen randomly among neighbor nodes. Proof of stability of the algorithm for systems with full graph structure written in (Wimmer, 2013: 315).

Another system described in (Eckstein, 2015: 429-469) built as a framework written in *C++/MPI* in order to implement general algorithms of branch and bound method (Krislock, 2017: 1-23). It uses Inversion of Control principle (Martin, 2014) for interaction with code of branch and bound method. Given system optimized in a way that not all nodes are participate in load balancing, only nodes load of which deviates from average on a predefined value. Information about load of nodes distributed through complex mechanism based on linked tree between nodes.

Paper (Aversa, 2005: 1034-1047) offers an algorithm of load distribution for master-slave systems and possesses a hierarchical structure. System consists of three types of nodes: workers, masters and controller. Master defines idle node and sends a task to it from his local pool of subtasks. Worker receives this subtask and executes it sequentially and after finishing sends back results. Job of controller is to monitor load of masters which summarizes load of their respective workers and retranslates subtasks between master nodes if necessary. Work (Mazzucco et al., 2007) studies issue of building optimal tree structure for distributed networks of grid-services. A system of many nodes considered using queuing networks theory, an average processing time of a single job calculated in an open model for different configurations of interactions between nodes. The structure of systems represented as a tree for organization of interaction between nodes using master-slave paradigm.

Paper (Kameda, 1997: 35-97) arises response time minimization problem for distributed system. System modeled as queuing network consisting of $M/M/1$ servers merged into arbitrary topology network. In paper presented algorithm for parametric by t study of optimal distribution of jobs on servers with complexity $O(n^2M)$ and algorithm of construction of optimal distribution for fixed t of $O(mM \log n)$ complexity where M is a complexity of finding optimal solution (Kontogiannis, 2014: 144).

Mean value analysis method (Geist, 1982: 67) applied to system with closed queuing networks for calculation of parameters. There are exact and approximate methods of mean value analysis. Last reviewed paper considers exact method for closed networks with single class of requests.

3 Material and methods

There are quite a bunch of different algorithms and methods of load balancing. Selecting specific algorithm must be justified, first, by specifics of certain project, second, arisen from goals of the project. In order to find these goals it necessary to focus on following (Waraich, 2008: 1263-1265) when considering appropriate method for one's own project:

- Justness. It must be guaranteed that for processing of each request system resources allocated and do not allow situation when single request being processed and others wait for their turn;
- Effectiveness. All servers processing requests must be busy 100%. It is desirable not to allow situation when one of servers being idle waiting requests, despite given situation

is quite common and this property cannot be always achievable.

- Minimizing request execution time. Time between start of processing of single request (its queuing for processing) and finishing of it must be minimized.
- Minimizing response time. Time of response to user request also must be minimized.

Other desirable (but not necessary) properties of an algorithm are following:

- Predictability. It is necessary to clearly understand in which situations and at which loads algorithm will be efficient for solving given tasks;
- Even distribution of system resources;
- Scalability. Algorithm must preserve its state and stay operational at sudden increase of incoming load.

3.1 DNS Round Robin

The easiest method of balancing is the use of DNS Round Robin algorithm (Borkar, 2011: 198-201). The essence of it is that it creates multiple DNS-records of type A for the domain in the DNS-server. DNS-server returns the record of type A in an alternating cyclic order (Figure 1).

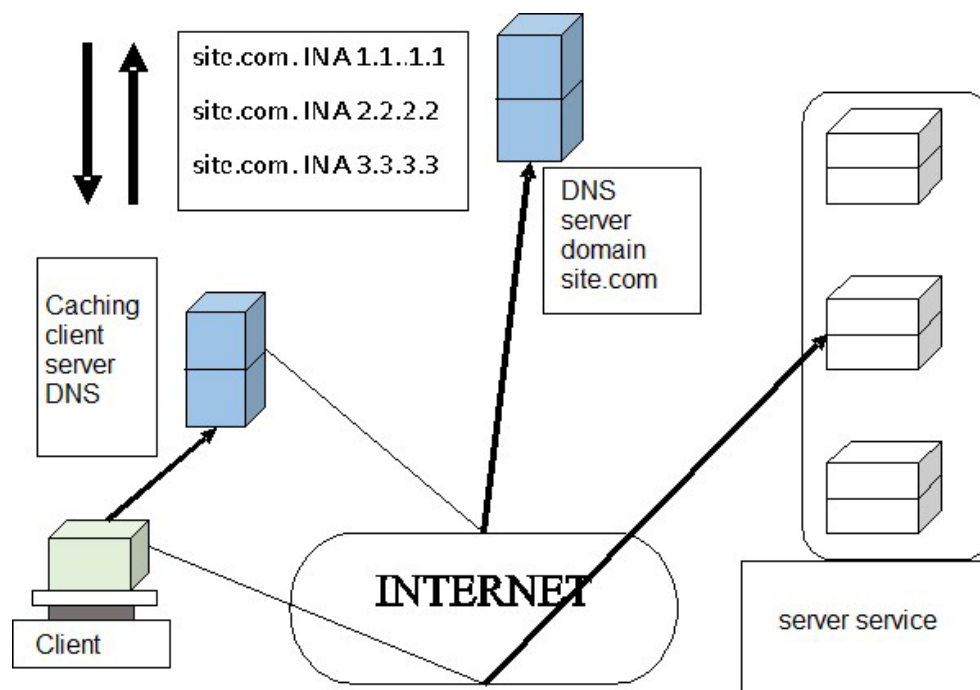


Figure 1 – Load balancing with DNS Round Robin

Method Pros

- It absolutely does not depend on the high-level protocol. That is, this method can be used by any protocol, where an appeal to the server is named;
- Method does not depend on the server load. Due to the fact that there is a DNS-caching server, we do not care how much we will have customers – at least one or millions;
- Method does not require communication between servers. Therefore, it can be used for balancing the local (this balancing of servers within a data center, for example) and for the global balancing, when we have a few data centers, where server together almost have nothing to do;
- The main advantage of the method - it is a low cost solution. If we have a project, domain, DNS-server, we only need to add some records in DNS, to move to this method of balancing.

Method Cons

- It is difficult to shut down servers that do not respond or have failed. VDNS there caching. Recording removed, and customers no longer use it only after a time, which is given by the parameter TTL (Time To Live) in the DNS-zone. In addition, some providers have the DNS-servers that cache entry is forced to a much longer time. We even faced with a situation where entry has been removed from the DNS, and on her customers continued to go another year;
- It is very difficult to distribute the load between servers in the correct proportions. The only way to do this is to provide for each server on several IP-addresses so that their number was in proportion to that part of the load, which should go to them. This is a minus, as the IP-address, we usually do not have much.

3.2 Direct Routing

On balancer having a certain IP-address and responds to the ARP, comes first packet connection. It determines that he was first. Need an algorithm it is sent to the correct server, changing the MAC-address of the place of destination (destination address). Then, the IP-address is written in a certain connection table. If this is not the first packet, it is simply search the connection table. It turns any server processes this compound, and the package is recovering there. The most common solution is now software implementations of this method is called the Linux Virtual Server. The URL-terminology, this method of balancing is called direct routing (Direct Routing, Figure 2).

Method Pros

- Independence from the high-level protocol. One can balance using HTTP, FTP or SMTP – the difference will be negligible;
- There balancing method without a dedicated load balancer. With a small number of servers may be relevant;

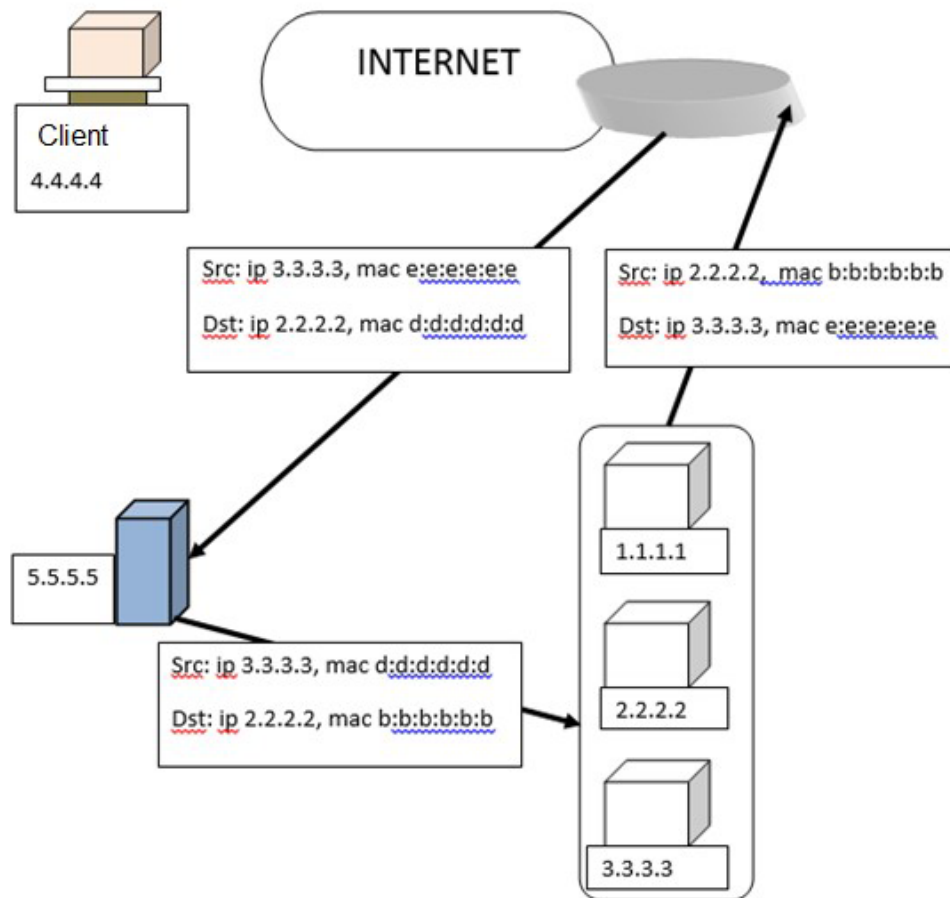


Figure 2 – Load balancing with Direct Routing

- It is possible to send the replies by balancer. Given that, for example, the protocol HTTP response size is typically an order of magnitude larger than the size of the request, then there is a fairly strong economy of resources;
- Relatively low resource consumption.

Method Cons

The obvious disadvantage of this method is that all servers must be in the water and the same network segment. Need a specific configuration of servers and network equipment. Therefore, this method is not always convenient and is applicable.

3.3 Redirect

There is some balancer that when referring to the service (eg, <http://site.com>) gives the client a redirect to a particular server (for example, <http://server2.site.com>). In the case of HTTP it will look like "HTTP redirect 302". Thus, the redirect code will look like "temporarily moved"(moved temporary, Figure 3).

Method Pros

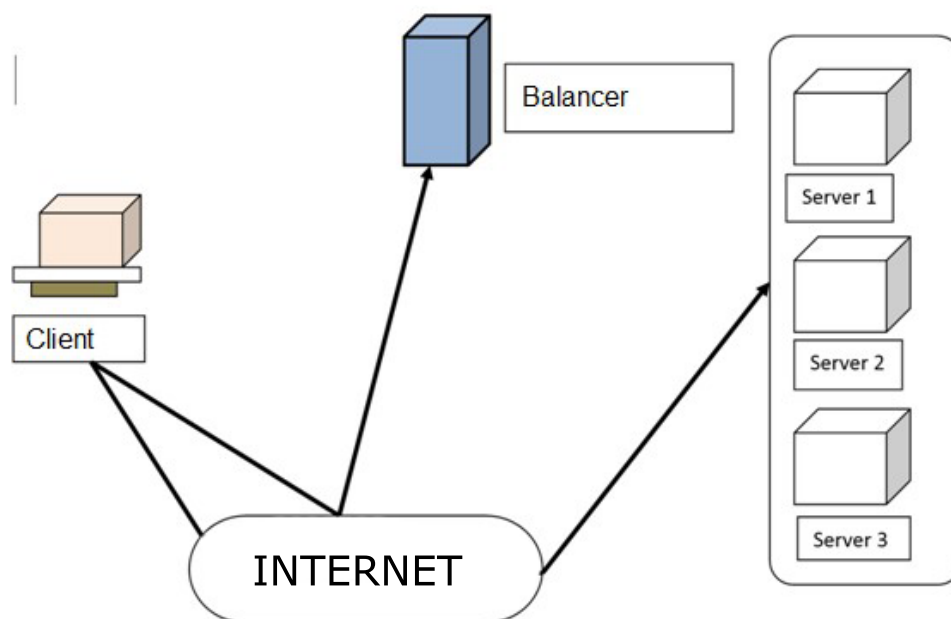


Figure 3 – Load balancing by redirecting

- If the request is sufficiently "heavy" it sometimes makes sense to use a redirection, even for global balance. We have a load balancer that sends via redirects requests for processing in different data centers;
- The method also allows users to distribute different types of requests to different servers;
- Queries may well be analyzed.

Method Cons

- It is, as has been said, applies to a very small number of high-level protocols;
- For the client to each request, it turns out, it made two requests;
- One-to our redirector, one- to the server that handles the connection. This increases the time in which the client will receive a final answer to customers request.

4 Results and discussion

Analytical representation of algorithms implemented in the form of model-oriented design models with intention to further verify them. For this purpose, the model-oriented design tool Mathworks Simulink (Simulink, 2016) was used. For given paper currently only DNS Round Robin algorithm implemented in model's Scheduler block, but other algorithm implementations also quite trivial to build and will be implemented further.

The SimEvents framework (SimEvents, 2016) in Simulink is designed for visual modeling of processes with discrete-event semantics, including simulating the behavior of a multiprocessor / multicore system with unstable resources. This framework allows to simulate the effects

of planning (delays, etc.) and to explore the design area of a running task by analyzing the impact of decisions made in planning on the performance of management design. The framework provides control algorithms and makes it possible to smoothly transition to implementing the algorithm from the model through automatic code generation technologies.

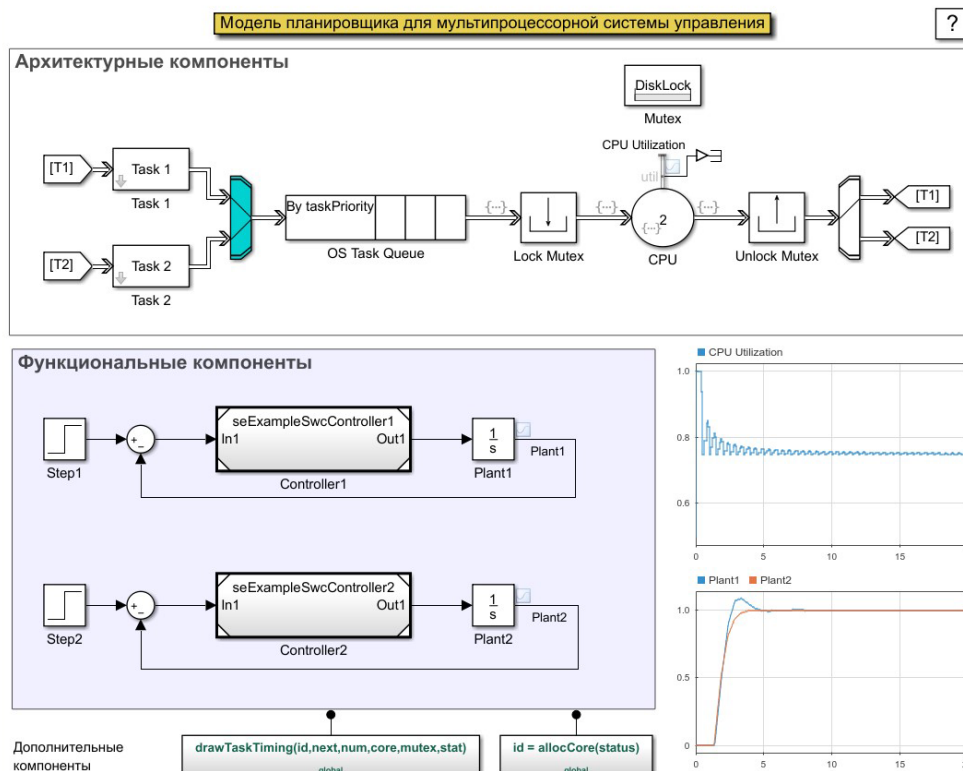


Figure 4 – Scheduler implementation of multicore control system with Simulink model

Figure 4 shows the Simulink model using the SimEvents framework containing a block of architectural components and a block of functional components. The scheduler implicitly implies the existence of a Task definition, which is a real-time task with the following attributes: identifier, period, priority, segments (subtasks). The scheduler simulates a homogeneous multiprocessor system and is defined by the following properties: the number of processes, the planning policy, the mutually exclusive resources. The implementation of the architectural block of the scheduler is built on a high-level discrete-event language supported by Simulink. In turn, this language relies on the MATLAB interpreter, which allows to implement own scheduling policies for processors, which was done, i.e. The implementation of the standard planning policy has been replaced. In our case, these were the implementations of the 3 algorithms described above in MATLAB.

The SimEvents Scheduler permits clients to determine errands as some parameters additionally as appeared in Figure 5.

These parameters characterize a homogeneous multicore framework with two centers. The scheduler is setup to play out a need based approach. The framework has two control undertakings, with:

Scheduler	Tasks	Resources
Number of tasks:		
2		
Task periods:		
[0.5, 0.5]		
Task priorities:		
[200, 50]		
Number of segments in each task:		
[3, 2]		
Simulink function for each segment:		
{ 't1_read', 't1_run', 't1_write' }, { 't2_run', 't2_write' }		
Execution durations of each segment:		
{ [0.1, 0.2, 0.1], [0.25, 0.1] }		

Figure 5 – Parameters used in Scheduler block for DNS Round Robin method

- Task 1 for Controller1 is arranged with a time of 0.5 second, need of 200 and 3 sections, whose capacities and execution lengths are (t1_read, t1_run, t1_write) and (0.1, 0.2, 0.1) second individually;
- Task 2 for Controller2 is arranged with a time of 0.5 second, need of 50, 2 sections, whose capacities also, execution lengths are (t2_run, t2_write) and (0.25, 0.1) second individually. The Scheduler is made as a MATLAB Discrete-Event System. It executes the multi-center scheduler as takes after:
- An assignment occurrence is demonstrated as an element that is intermittently made, executed, and demolished toward the end of execution. Properties and runtime conditions of an assignment occasion are put away as information of the element;
- The assignment line of the working framework and the multicore processor itself are demonstrated as two element stockpiles;
- Task occurrences (elements) are made occasionally inside the assignment line. They are put away in a requested grouping as required by the planning approach;
- The booking calculation is acknowledged by planning occasions on the undertaking substances. Occasions cause errands (elements) that are prepared to execute to be sent from the assignment line to the processor (the second element stockpiling);

- An executing assignment remains in the processor for the time period as determined by the execution length parameter. Such execution term is reproduced by utilizing a clock occasion. At the point when the clock finishes, its occasion activity executes the comparing assignment work (Simulink Function).

The Scheduler permits appointing a subjective number of centers and investigating how that effects SimEvents framework execution. In the primary situation two centers have been allocated to execute the two control errands. Fig. ?? shows parameters of the Scheduler obstruct for this setup.

With adequate preparing limit, both shut circle control frameworks perform acceptably when the set point is changed from 0 to 1. Fig. ?? incorporates a reaction outline (on the left-hand side) and a timing outline (on the right-hand side):

- The reaction outline demonstrates the reaction of the two controllers with Controller1 in the top diagram, and Controller2 in the base diagram;
- The planning graph demonstrates usage of centers and assets. A hued bar shows execution of a fragment of errand. The position of a bar on the flat pivot shows time of begin and consummation of the fragment. The position of the bar on the vertical pivot shows standardized errand consummation prior and then afterward executing the fragment.

The planning graph of Figure 6 shows that errands are prepared simultaneously with centers having medium and adjusted usages. See that Task2 allocated to Core1 since it has higher need and, along these lines, allocated before Task1.

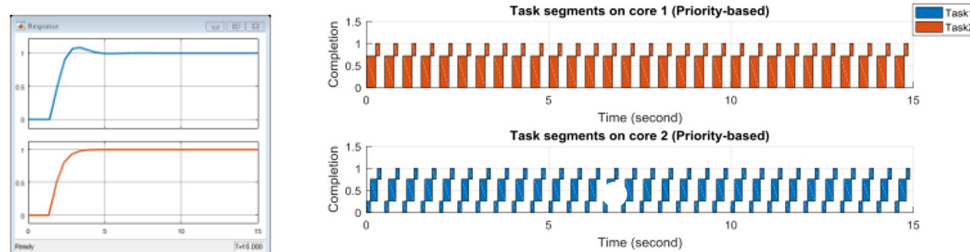


Figure 6 – Task scheduler output and scheduler performance (2 cores) with DNS Round Robin scheduling

5 Conclusion

Therefore, common software-balancing algorithms have been considered, which are often used to solve the problem of load balancing servers, websites etc. In traditional web server architectures DNS balancer distributes requests to the server based on the status of their workload. Because the Web servers must inform the DNS server about the status of their load from time to time, the so-called buffer download busy often to reduce the frequency of updates. Without proper attention, excessive use of loading buffer may lead to excessive oscillation within the cluster. All three discussed the method helps reduce the oscillation effect on Web servers that has been tested through the implementation of their models using Model-Based Design.

References

- [1] *Al-Amri, M. S., and S. E. Ahmed.* "New job selection and location policies for load-distributing algorithms." *International Journal of Network Management* 12, no. 3 (2002): 165-78. doi:10.1002/nem.428.
- [2] *Aversa, R., B. Di Martino, N. Mazzocca, and S. Venticinque.* "A hierarchical distributed-shared memory parallel Branch&Bound application with PVM and OpenMP for multiprocessor clusters." *Parallel Computing* 31, no. 10-12 (2005): 1034-047. doi:10.1016/j.parco.2005.03.010.
- [3] *Borkar, G. M., M. A. Pund, and P. Jawade.* "Implementation of round robin policy in DNS for thresholding of distributed web server system." *Proceedings of the International Conference & Workshop on Emerging Trends in Technology – ICWET '11*, 2011, 198-201. doi:10.1145/1980022.1980067.
- [4] *Barros, F. J.* "Modeling and simulation of parallel adaptive divide-and-conquer algorithms." *The Journal of Supercomputing* 43, no. 3 (2007): 241-55. doi:10.1007/s11227-007-0143-3.
- [5] *Eckstein, J., W. E. Hart, and C. A. Phillips.* PEBBL: an object-oriented framework for scalable parallel branch and bound." *Mathematical Programming Computation* 7, no. 4 (2015): 429-69. doi:10.1007/s12532-015-0087-1.
- [6] *Geist, R., and K. Trivedi.* "Queueing Network Models in Computer System Design." *Mathematics Magazine* 55, no. 2 (1982): 67. doi:10.2307/2690049.
- [7] *Kameda, H., J. Li, C. Kim, and Y. Zhang.* "Overall Optimal Load Balancing vs. Individually Optimal Load Balancing." *Optimal Load Balancing in Distributed Computer Systems Telecommunication Networks and Computer Systems*, 1997, 35-97. doi:10.1007/978-1-4471-0969-3_2.
- [8] *Kontogiannis, S., and A. Karakos.* "ALBL: an adaptive load balancing algorithm for distributed web systems." *International Journal of Communication Networks and Distributed Systems* 13, no. 2 (2014): 144. doi:10.1504/ijcnds.2014.064041.
- [9] *Krislock, N., J. Malick, and F. Roupin.* "BiqCrunch." *ACM Transactions on Mathematical Software* 43, no. 4 (2017): 1-23. doi:10.1145/3005345.
- [10] *Martin, R. C.* *Agile software development principles, patterns, and practices.* Harlow: Pearson Education Ltd, 2014.
- [11] *MathWorks* "SimEvents User's Guide." *The MathWorks Inc., Natick, MA, USA* (2016): 208 p.
- [12] *MathWorks* "Simulink User's Guide." *The MathWorks Inc., Natick, MA, USA* (2016): 3290 p.
- [13] *Mazzucco, M., I. Mitrani, J. Palmer, M. Fisher, and P. Mckee.* "Web Service Hosting and Revenue Maximization." *Fifth European Conference on Web Services (ECOWS'07)*, 2007. doi:10.1109/ecows.2007.8.
- [14] *Mitrani, I.* *Probabilistic modelling.* Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [15] *Navarre, D., P. Palanque, and R. Bastide.* "Model-Based Interactive Prototyping of Highly Interactive Applications." *Computer-Aided Design of User Interfaces III* (2002): 205-16. doi:10.1007/978-94-010-0421-3_18.
- [16] *Teo, Y. M., and R. Ayani.* "Comparison of Load Balancing Strategies on Cluster-based Web Servers." *Simulation* 77, no. 5-6 (2001): 185-95. doi:10.1177/003754970107700504.
- [17] *Waraich, S. S.* "Classification of Dynamic Load Balancing Strategies in a Network of Workstations." *Fifth International Conference on Information Technology: New Generations (itng 2008)*, 2008, 1263-265. doi:10.1109/itng.2008.166.
- [18] *Wimmer, M., D. Cederman, J. Larsson Triff, and P. Tsigas.* "Work-stealing with configurable scheduling strategies." *ACM SIGPLAN Notices* 48, no. 8 (2013): 315. doi:10.1145/2517327.2442562.
- [19] *Wrzesinska, G., A. Oprescu, T. Kielmann, and H. Bal.* "Persistent Fault-Tolerance for Divide-and-Conquer Applications on the Grid." *Euro-Par 2007 Parallel Processing Lecture Notes in Computer Science*: 425-36. doi:10.1007/978-3-540-74466-5_46.

УДК 20.23.27

Требования к геоинформационной системе для сбора, обработки, визуализации и анализа экспериментальных геофизических наземных и спутниковых данных

Мукашева С.Н., к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник,
Институт ионосферы, г. Алматы, Республика Казахстан, +77273858759,
E-mail: snmukasheva@gmail.com

Малимбаев А.М., магистрант, научный сотрудник, Институт ионосферы
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы,
Республика Казахстан, +77473779330, E-mail: nanozavr@mail.ru

Шарипова Г. научный сотрудник, Институт ионосферы,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77079074858, E-mail: gunya-87@mail.ru

Информационные и компьютерные технологии широко используются для решения актуальных задач, стоящих перед современной наукой. Целью настоящей работы является обоснование и подготовка рекомендаций к требованиям геоинформационной системе (ГИС) для сбора, обработки и визуализации экспериментальных геофизических наземных и спутниковых данных в периоды сейсмической активизации на Северном Тянь-Шане. На основе современных информационных технологий с использованием экспериментальных данных, математического моделирования и средств вычислительной техники рекомендуется реализовать функциональные возможности геоинформационной системы. В едином геоинформационном пространстве рекомендуется организовать доступ к необходимым ресурсам: спутниковые измерения параметров межпланетного магнитного поля (скорость, температура, плотность, давление, концентрация потоков частиц солнечного ветра); GPS-измерения (полное электронное содержание); наземные измерения параметров геомагнитного поля; доступ к международным и казахстанским сейсмологическим каталогам. С помощью компьютерных программных средств, портлетов (внутренних служебных программ), рекомендуется реализовать графическое представление данных для конкретного сейсмического события в необходимом временном интервале. Создаваемая ГИС позволит для конкретного сейсмического события в регионе Северного Тянь-Шаня проанализировать эффекты в геофизических полях на стадии подготовки и во время землетрясений.

Ключевые слова: геоинформационная система, литосфера, ионосфера, землетрясение.

Геоақпараттық жүйені жинау, өңдеу, визуалды және эксперименттік геофизикалық жер үсті және жер серікті деректерді талдау талаптары қойылған

Мукашева С.Н., ф.-м. ф. канд., жетекші ғылыми қызметкер, Ионосфера институты,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77273858759, e-mail: snmukasheva@gmail.com

Малимбаев А.М., магистранты, ғылыми қызметкер, Ионосфера институты, аль-Фараби атындағы
Қазақ

Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы
+77473779330, e-mail: nanozavr@mail.ru

Шарипова Г., ғылыми қызметкер, Ионосфера институты, Алматы қ.,
Қазақстан Республикасы, +77079074858, e-mail: gunya-87@mail.ru

Өзекті міндеттерді шешу үшін ақпараттық және компьютерлік технологиялар кеңінен пайдаланып, заманауи ғылыми тұрған алдында. Геоақпараттық жүйесін (ГАЗ) жинау үшін, осы жұмыс мақсаты дайындау талаптарының ұсыныстары мен негіздеулері болып табылып, Солтүстік Тянь-Шандегі жер серіктік деректерін сейсмикалық жандандыру кезеңдері мен геофизикалық жер үсті эксперименттерін визуалды өңдеу. Заманауи ақпараттық технологияларды негізін эксперименттік деректерді пайдалана отырып, геоинфоақпараттық жүйелердің функционалды мүмкіндіктерін іске асыруы математикалық моделдеу және есептеу техника құралдары ұсынылады.

Бірыңғай геоақпараттық кеңістікте қажетті ресурстарға қол жеткізу ұйымдастырылады: планета аралық магнит өрісін жерсерік параметрлерін өлшеу (жылдамдығы, температура-сы, тығыздығы, қысымы, күн және жел бөлшектер ағынының концентрациясы); GPS-өлшеу (толық электрондық мазмұны); геомагнитті өрісінің жер үсті параметрлерін өлшеу; халықаралық және қазақстандық сейсмологиялық каталогтарға қол жетімділігі. Компьютерлік бағдарламалар құралдары көмегімен, портлеттер (ішкі қызметтік бағдарламалар), графикалық мәліметтерді іске асырылуын ұсынлуы үшін нақты сейсмикалық оқиғалар уақытша қажетті аралықтары ұсынылады. Солтүстік Тянь-Шань өңірінде нақты сейсмикалық оқиғаларды ГАЗ құрылатын мүмкіндігі, геофизикалық өрістердегі дайындау сатысындағы талдау әсерлері мен жер сілкінісі уақытында.

Түйін сөздер: Геоақпараттық жүйе, литосфера, ионосфера, жер сілкініс.

Requirements for Geoinformational System for Gathering, Processing, Visualization, and Analysis of Experimental Geophysical Ground and Satellite Data

Mukasheva S.N., Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of

Ionosphere, Almaty, Kazakhstan, +77273858759, E-mail: snmukasheva@gmail.com

Malimbayev A.M., researcher, Institute of Ionosphere, graduate student, Kazakh

National University named after Al-Farabi, Almaty, Kazakhstan,

+77473779330, E-mail: nanozavr@mail.ru

Sharipova G., researcher, Institute of Ionosphere,

Almaty, Kazakhstan, +87079074858, E-mail: gunya-87@mail.ru

Information and communication technologies are widely used for solving actual problems, faced by modern science. The goal of the current paper is to justify the need for and prepare recommendations for requirements of a geoinformational system (GIS) for gathering, processing, and visualization of experimental geophysical ground and satellite data for the periods of seismic activity on Northern Tian Shan. We recommend to create a geoinformational system, based on modern technologies, and using experimental data, mathematical modelling, and computing technologies. We recommend to organize access to necessary resources in the common geoinformation space: satellite measurements of interplanetary magnetic field (velocity, temperature, density, concentration of streams of solar wind particles); GPS-measurements; Ground-based measurements of geomagnetic field parameters, and International and Kazakhstani seismological catalogs. We recommend to realize a graphical presentation of data for specific seismic event in the demanded time interval with help of computer software and portlets (internal support programs). The created GIS will allow to analyze effects in geophysical fields for specific seismic events in region of Northern Tian Shan on pre-earthquake stages and during the earthquake.

Key words: Geoinformation system, Lithosphere, Ionosphere, Earthquake.

1 Введение

Над эпицентрами сильных землетрясений по спутниковым данным были зарегистрированы всплески магнитной и электрической компонент поля низкочастотных шумовых излучений за несколько часов до главного сейсмического удара. Обнаружены изменения в электрической и магнитной составляющих поля низкочастотных излучений, регистрируемых на борту спутника, при пересечении проекции его трассы над глубинными разломами литосферы. Все эти излучения обусловлены особенностями нестационарных процессов в зонах тектонических разломов земной коры (Hayakawa, 2003a: 30), (Pulinets, 2003a: 65), (Pulinets, 2006b: 649).

Несмотря на известный прорыв в развитии современных спутниковых и информационных технологий, эффективность прогнозирования землетрясений остается весьма низкой, что затрудняет проведение государственными органами превентивных мер в связи с возможными сильными землетрясениями. Проблема краткосрочного прогноза

землетрясений была и остается одной из важнейших нерешенных проблем геофизики, и цена этой проблемы возрастает с каждым годом.

С развитием космических технологий спутниковая информация и данные наземных геофизических обсерваторий все шире применяются в научных исследованиях различных физических процессов. Использование спутниковой научной информации в исследованиях очаговых зон землетрясений и литосферно-ионосферных связей требует разработок новых методов и методик обработки и анализа данных в быстро изменяющихся физических условиях, обусловленных перемещением спутника в пространстве. Для обработки спутниковой информации приходится использовать кратковременный анализ данных в скользящих окнах, в этих условиях многие традиционные средства обработки данных для спутниковых измерений становятся непригодными. В связи с этим актуальными являются работы по созданию геоинформационной системы для обеспечения наземными и спутниковыми данными исследований в области выявления эффектов в геофизических полях в периоды сейсмической активизации с целью поиска электромагнитных предвестников землетрясений.

При создании новой геоинформационной системы появляется потребность в определении требований к ней. Авторы (Александров, 2007: 105), (Баранов, 1999: 32) приводят следующее определение: требование – это условие или возможность, которой должна соответствовать система.

Целью настоящей работы является обоснование и подготовка рекомендаций к требованиям геоинформационной системе (ГИС) для сбора, обработки и визуализации экспериментальных геофизических наземных и спутниковых данных в периоды сейсмической активизации на Северном Тянь-Шане.

2 Обзор литературы

На основе многолетних теоретических и экспериментальных исследований установлено, что с одной стороны, характеристики околоземного космического пространства (ионосфера, магнитосфера, радиационный пояс Земли) откликаются на активизацию геодинамических процессов в литосфере (Adushkin, 2012: 305), (Afraimovich, 2001: 396), (Hobara, 2005: 679), (Lefeuvre, 2006: 747), а с другой стороны, геодинамические процессы в литосфере откликаются на активизацию процессов на Солнце и в околоземном космическом пространстве (Закржевская, 2001: 7), (Иванов, 2012: 738).

В последние годы активно ведутся исследования влияния на сейсмичность электромагнитных источников естественного происхождения, а именно, воздействия магнитных бурь с внезапным началом, обусловленных поступлением в магнитосферу Земли высокоскоростной солнечной плазмы, генерируемой солнечной вспышкой (Гульельми, 2012a: 85), (Гульельми, 2012b: 23), (Гульельми, 2015c: 98), (Иванов, 2012: 738).

В работе (Соболев, 2003: 228) рассматривается вопрос о возможном воздействии геомагнитных бурь с внезапным началом (SSC, storm sudden commencement) на глобальную сейсмическую активность, проанализировано 405 землетрясений каталога USGS/NEIC с магнитудами $M > 5.0$ за 1973-2010 гг., отмечается понижение глобальной сейсмичности после геомагнитных бурь SSC. В работе (Тертышников, 2013: 69) отмечают, что прослеживается связь между значительными градиентами в Н-составляющей геомагнитного поля и магнитудой землетрясений, чем больше градиент, тем больше вероятность силь-

ного землетрясения. В работе (Узбеков, 2011: 78) приведены результаты исследования закономерностей проявления и природы аномалий в вариациях главного магнитного поля на периодах 5-35 суток и их связи с сейсмичностью земной коры Северного Тянь-Шаня, автор отмечает, что вариации геомагнитного поля и приливообразующих сил являются косвенными признаками, указывающими на вероятность изменения сейсмичности при их воздействии на земную кору.

В работе (Узбеков, 2011: 113) приведены результаты исследования за период 1963-2000 гг. влияния геомагнитных бурь с внезапным началом с геомагнитными индексами $A_p > 48$ (что соответствует индексу планетарной геомагнитной активности $K_p > 5$) на сейсмичность для двух регионов: Средняя Азия и Кавказ. Рассматривались землетрясения представительного каталога с энергетическим классом $K=7.0$. Для сейсмоактивного региона Казахстана и Кыргызии установлено, что в целом по региону отмечается тенденция увеличения числа землетрясений после геомагнитных бурь. Тем не менее, авторы (Соболев, 2003b: 233) отмечают, что в области $[44.0-45.25 \text{ N}; 78.25-79.5 \text{ E}]$ количество землетрясений после больших геомагнитных бурь увеличивается (положительный эффект), а в области $[41.0-42.25 \text{ N}; 76.5-77.75 \text{ E}]$ – уменьшается (отрицательный эффект). Авторы (Соболев, 2003b: 230) объясняют, что влияние магнитных бурь на сейсмичность носит триггерный характер, поскольку энергия геомагнитной бури на несколько порядков меньше высвобождаемой сейсмической энергии (Соболев, 2002a: 14), а выявленные эффекты различием геоэлектрических разрезов – в районе положительного эффекта залегают пласты с более низким электросопротивлением.

Общей внешней причиной, управляющей и организующей землетрясения на Земле, является крупномасштабное открытое магнитное поле Солнца, мощные корональные выбросы масс, отмечают в работе (Иванов, 2012: 741). Геомагнитные аномалии перед сильными землетрясениями отмечаются в работах (Chen, 2011: 5), (Hayakawa, 2011b: 302), (Zotov, 2013: 883), (Старжинский, 2012: 31), (Довбня, 2014: 160), ультранизкочастотные сейсмо-магнитные феномены перед землетрясениями отмечаются в ряде работ, например (Hattori, 2013: 293). Аномалии в вариациях ионосферных параметров перед землетрясениями отмечаются в работах (Korsunova, 2006: 13005), (Larkina, 1989: 50), (Liu, 2006: 5304), (Рогожин, 2014: 148). Моделированию физических процессов в системе литосфера-атмосфера-ионосфера перед землетрясениями посвящено ряд работ, например, (Gershenzon, 2001: 247).

Накопленные в последние годы знания о процессах в сложной системе литосфера-атмосфера-ионосфера на стадии подготовки сильных землетрясений, позволяют ставить вопрос о возможности практического применения этих знаний в целях краткосрочного прогноза землетрясений. Необходим комплексный подход с привлечением ряда геофизических параметров для исследования процессов геоболочках перед землетрясениями на базе которых можно строить надежный прогноз. (Липеровский, 2008: 831).

В настоящей работе даются рекомендации к требованиям геоинформационной системе для сбора, обработки и визуализации экспериментальных геофизических наземных и спутниковых данных в периоды сейсмической активизации в регионе Северного Тянь-Шаня.

3 Материал и методы

3.1 Определение предметной области геоинформационной системы

По принятому в настоящее время определению (Александров, 2007: 35), (Баранов, 1999: 32) геоинформационная система, ГИС, – информационная система, обеспечивающая сбор, хранение, обработку, доступ, отображение и распространение пространственных данных.

Предметной областью создаваемой ГИС является сбор наземных и спутниковых геофизических данных (параметров геомагнитного поля, верхних слоев земной атмосферы, ионосферы) в периоды активизации сейсмических явлений на Северном Тянь-Шане.

На основе современных геоинформационных технологий (ГИС-технологии) с использованием экспериментальных данных, математического моделирования и средств вычислительной техники будут реализованы функциональные возможности ГИС.

В едином геоинформационном пространстве будет организован доступ к необходимым геоинформационным ресурсам:

- National Aeronautics and Space Administration (<http://cdaweb.gsfc.nasa.gov> NASA) – информация о состоянии межпланетного магнитного поля, ММП, (скорость, температура, плотность, давление, концентрация потоков частиц солнечного ветра);

- данные GPS-измерений: в формате RINEX-файлов – HTTP-сервер SOPAC (Scripps Orbit and Permanent Array Center) – <http://lox.ucsd.edu> или на FTP-сервере по адресу <ftp://lox.ucsd.edu/pub/nav>; в формате IONEX-файлов – <ftp://cddis.gsfc.nasa.gov/pub/gps/products/ionex>;

- измерения параметров магнитного поля Земли спутниками группировки SWARM (www.swarm.eo.esa.int);

- INTERMAGNET (www.intermagnet.org);

- данные МЦД Киото, Япония, Кр-индексы, (<http://swdcwww.kugi.kyoto-u.ac.jp>);

- данные геомагнитной обсерватории Алма-Ата, geomag.ionos.kz (<http://89.250.81.120/index.html>);

- Международный каталог USGS United States Geological Survey, NEIC National Earthquake Information Center (<http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/map>);

- ГУ «Сейсмологическая опытно-методическая экспедиция Комитета науки МОН РК» (<http://some.kz/index.php>);

- Казахстанский Национальный Центр данных (<http://www.kndc.kz>) Автоматический бюллетень (<http://www.kndc.kz/index.php/ru/sejsmicheskie-byulleteni/automatic-bulletin>).

Функциональные возможности ГИС будут реализованы следующим образом:

1. Для конкретного сейсмического события будет организован сервер для хранения наземных и спутниковых данных для региона Северного Тянь-Шаня.

2. Будут разработаны собственные программные средства для преобразования данных при переходе от одной формы представления в другую.

3. В ГИС будут интегрированы стандартные и авторские программы статистической обработки экспериментальных данных.

4. С помощью компьютерных программных средств, портлетов (внутренних служебных программ) будет реализовано графическое представление данных для конкретного события в необходимом временном интервале.

5. На основе разработанной математической модели, компьютерного моделирования и численных расчетов будет осуществлена визуализация геодинамических процессов в земной коре в периоды сейсмической активизации.

6. Разработаны методические указания по обращению и работе с геоинформационной системой (описаны форматы и структура входных и выходных данных, пошагово описаны обращения к разработанным компьютерным программным средствам).

4 Результаты и обсуждение

4.1 Основные требования к общей информационной инфраструктуре

Требования к общей информационной инфраструктуре:

- быстрота и простота развертывания ГИС методом наращивания функциональности;

- общая устойчивость системы – необходимо предусмотреть дублирующие каналы передачи данных между всеми звеньями системы (по возможности), дублирование и защиту основных ее элементов;

- минимизация стоимости программных решений и оборудования, например, где возможно, рекомендуется использовать бесплатные UNIX-подобные операционные системы;

- необходимо обеспечить наивысшую меру защиты информации и системы от противоправных или нарушающих целостность системы посягательств.

Требования для установки необходимых общедоступных комплексов программ, например Gamit/Globk (Gamit это комплекс программ для всесторонней обработки GPS данных, разработанный Массачусетским технологическим институтом):

- работающая операционная система Linux и компиляторы C и FORTRAN для автоматизаций и интерактивной обработки требуется командная оболочка CSH;

- минимальные системные требования для установки и использования комплекса Gamit определяются процессором не ниже чем Pentium 90 и оперативной памятью не ниже 128 Мб. Для программ рекомендуется использовать не менее 1Гб свободного дискового пространства. Для полноценного использования Gamit требуется установка дополнительных программ. Программы TEQC для перевода «сырых» данных GPS-измерений в формат RINEX и программа GMT для создания графиков.

- для проведения обработки требуется бесперебойный и безлимитный интернет так как программа Gamit использует файлы данных которые требуют постоянного обновления для сохранения актуальности, например, список действующих спутников (необходимо обновлять при запуске каждого нового спутника), файл нутаций (необходимо обновлять каждый год). Такие файлы доступны на нескольких серверах в том числе и в FTP сервере Dep. of Earth, Atmospheric, and Planetary Sciences и FTP архиве SOPAC.

Необходимо установить следующие требования к программному обеспечению:

- система должна иметь архитектуру клиент-сервер, сервер должен поддерживать множественную репликацию данных всех уровней (репликация – это процесс, под которым понимается копирование данных из одного источника на другой, или на множество других, и наоборот [25]).

- строгая организация структуры различных геофизических данных;

- поддержка программного комплекса для обработки данных пролетных спутников;

- поддержка программных средств для статистической обработки геофизических данных;
- поддержка программных средств для визуализации результатов математического моделирования;
- поддержка группировки слоев, строгая организация структуры цифровых данных;
- возможность встраивания ГИС-ядра во внешние программные системы, в т.ч. поддержка сервера единого информационного центра;
- поддержка географических данных формата MapInfo;
- своевременное поступление, внесение и обработка информации.

4.2 Основные требования к серверу геоинформационной системы

Требования к удобству работы с большим количеством геофизических данных:

- поддержка внесения нетипизированных и типизированных фактографических данных;
- наличие развитой системы прав доступа к картографическим и семантическим данным;
- возможность автоматического учета работы пользователей системы;
- хранение картографической и семантической информации на сервере.
- существование необходимого набора цифровых карт Северного Тянь-Шаня, представленных в формате базовой ГИС.

Для сокращения финансовых издержек можно использовать OPENSOURCE решение на базе ГИС GRASS (бесплатно).

В качестве СУБД (система управления базами данных) предлагается использовать MySQL (свободная реляционная система управления базами данных), которая имеется в свободном доступе.

Потребуется создать специализированные модули для ГИС:

- работа с фактографическими данными измерений на космических аппаратах и наземных обсерваториях;
- моделирование геодинамических процессов в земной коре в периоды сейсмической активизации;
- визуализация результатов моделирования геодинамических процессов в земной коре в периоды сейсмической активизации;
- графическое представление геофизических данных;
- картографическое представление эпицентров землетрясений с магнитудой $M \geq 5.0$ для региона Северного Тянь-Шаня.

Вся информация в ГИС будет организована в виде слоев. Слои, это самый первый уровень абстракции в ГИС. Работая с ГИС, мы обязаны разделить существующие у нас данные на слои. Каждый слой содержит объекты определенного вида, объединенные общими характеристиками. Работая в ГИС, мы можем подключать и отключать интересные нас слои, или менять порядок их отображения. Структура формирования информационных слоев ГИС для сбора, хранения и обработки наземных и спутниковых геофизических данных в периоды активизации сейсмических явлений на Северном Тянь-Шане представлена на рисунке 1.



Рисунок 1 – Структура формирования информационных слоев ГИС для сбора, хранения и обработки наземных и спутниковых геофизических данных в периоды активизации сейсмических явлений на Северном Тянь-Шане

5 Заключение

На основе современных геоинформационных технологий с использованием экспериментальных данных, математического моделирования и средств вычислительной техники будут реализованы функциональные возможности геоинформационной системы для сбора, обработки, визуализации и анализа экспериментальных геофизических наземных и спутниковых данных в периоды сейсмической активизации на Северном Тянь-Шане.

В едином информационном пространстве будет организован доступ к необходимым геоинформационным ресурсам (NASA, HTTP-сервер SOPAC, INTERMAGNET, МЦД Япония, геомагнитная обсерватория Алма-Ата, данные измерений группировки SWARM, NEIC National Earthquake Information Center, ГУ «Сейсмологическая опытно-методическая экспедиция Комитета науки МОН РК», Казахстанский Национальный Центр данных).

С помощью компьютерных программных средств, портлетов (внутренних служебных программ) будет реализовано графическое представление данных для конкретного события в необходимом временном интервале. На основе разработанной математической модели, компьютерного моделирования и численных расчетов будет осуществлена визуализация геодинамических процессов в земной коре в периоды сейсмической активизации.

Геоинформационная система, созданная с учетом вышеизложенных требований, необходима для поиска электромагнитных предвестников землетрясений.

Благодарности.

Авторы выражают благодарность Инчину Александру Сергеевичу за неоценимый вклад в развитие информационных технологий в Республике Казахстан для решения научных и прикладных задач в области геофизики. Его работы по созданию программного обеспечения по получению данных со спутников SWARM (программа TRASSA,

программа AUTOPLOT и другие) войдут структурными элементами в создаваемую ГИС.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0079/ГФ4.

Список литературы

- [1] Adushkin V.V., Rjabova S.A., Spivak A.A., Harlamov V.A. Response to seismic background geomagnetic variations // Doklady RAN.–2012.–Vol. 444(3).–P.304-308.
- [2] Afraimovich E.L., Perevalova N.P., Plotnikov A.V., Uralov A.M. The shock-acoustic waves generated by the earthquakes//Ann. Geophys. –2001.– Vol.19.–P.395-409.
- [3] Chen K.J., Chiu B., Wang J.S., Lee C.Y., Lin C.H., Chao K. Geomagnetic anomaly at Luning before the 1999 Chi-Chi earthquake (Mw =7.6) in Taiwan // Natural Hazards: DOI 10.1007/s11069-011-9726-7. –2011.–P.1-20.
- [4] Gershenzon N., Bambakidis G. Modelling of seismo-electromagnetic phenomena // Russian Journal of Earth sciences.– 2001.– Vol. 3, N4. –P. 247-275.
- [5] Hattori K., Han P., Yoshino C., Febriani F., Yamaguchi H., Chen C.H. Investigation of ULF Seismo-Magnetic Phenomena in Kanto, Japan During 2000-2010: Case Studies and Statistical Studies // Surv Geophys: DOI 10.1007/s10712-012-9215-x.–2013.–Vol. 34.–P.293–316.
- [6] Atmospheric and Ionospheric Electromagnetic Phenomena Associated with Earthquakes // Edited by M. Hayakawa: Tokyo. Terra Scientific Publishing Company.–2003a. – 996p.
- [7] Hayakawa M. On the fluctuation spectra of seismo-electromagnetic phenomena// Nat. Hazards Earth Syst. Sci.–2011b.–Vol.11.–P. 301-308.
- [8] Hobara Y., Parrot M. Ionospheric perturbations linked to a very powerful seismic event// J. Atmos. Solar-Terr. Phys.–2005.– Vol.67, N 7.–P.677-685.
- [9] Korsunova I.P., Khogai V.V. Medium-term ionospheric precursors to strong earthquakes// J. Geomagn. Aeron.: doi: 10.1029/2005GI000122.2006.–2006.–Vol.6.–P. G13005.
- [10] Larkina V.I., Migulin V.V., Inchin A.S., Molchanov O.A. Some statistical results on very low frequency radio wave emissions in the upper ionosphere over earthquake zones// Physics of the Earth and Planetary Interiors.–1989.–№ 57. –P.50.
- [11] Lefevre F., Biagi P. F., Castellana L., Hayakawa M. Global diagnostics of the ionospheric perturbations related to the seismic activity using the VLF radio signals collected on the DEMETER satellite// J. Nat. Hazards and Earth Syst. Sci. –2006. –Vol.6. –P.745–753.
- [12] Liu I.Y., Chen Y.I., Chuo Y.I., Chen C.S. A statistical investigation of preearthquake ionospheric anomaly// Ann. Geophys.: doi: 10.1029/2005JA01333.2006.–2006.–Vol.111.–P. A05304.
- [13] Pulinet S.A., Boyarchuk K.A. Ionospheric Precursors of Earthquakes / Springer, 2003a. –312p.
- [14] Pullinet S.A. Space technologies for short-term earthquake warning //Adv.Space Res.–2006b.–Vol.37.–P.643-652.
- [15] Zotov O.D., Guglielmi A.V., Sobisevich A.L. On Magnetic Precursors of Earthquakes // Izvestiya, Physics of the Solid Earth.–2013.–Vol. 49, № 6. –P. 882-889.
- [16] Александров В.Н., Базина М.А., Журкин И.Г., Корнилова Л.В., Плешков В.Г., Побединский Г.Г., Ребрий А.В., Тимкина О.В. Справочник стандартных и употребляемых (распространённых) терминов по геодезии и картографии, топографии, геоинформационным системам, пространственным данным.–М.: Братишка, 2007. –736 с.
- [17] Баранов Ю.Б., Берлянт А.М., Капралов Е.Г., Кошкарев А.В., Серапинас Б.Б., Филиппов Ю.А. Геоинформатика. Толковый словарь основных терминов.– М.: ГИС-АссоциацияЮ, 1999. – 750с. -<http://gis.ru/geoinfoslovar.html>
- [18] Гульельми А.В., Зотов О.Д. О магнитных возмущениях перед сильными землетрясениями //Физика Земли.–2012а.–№ 2.–С.84-87.
- [19] Гульельми А.В., Зотов О.Д. Явление синхронизма в динамической системе магнитосфера-техносфера-литосфера // Физика Земли.–2012b, № 6.–С. 23-33.

- [20] Гульельми А.В., Лавров И.П., Собисевич А.Л. Внезапные начала магнитных бурь и землетрясения // Солнечно-земная физика: DOI: 10.12737/5694. –2015с. –Т. 1, № 1.–С.98-103.
- [21] Довбня Б.В. Электромагнитные предвестники землетрясений и их повторяемость // Геофизический журнал.–2014.–Т.36, № 3.–С.160-165.
- [22] Закржевская Н.А., Соболев Г.А., Харин Е.П. О связи сейсмичности с магнитными бурями // Физика Земли.–2001.–№ 11.–С. 6-15.
- [23] Иванов К.Г., Харпиладзе А.Ф. Природа сильных землетрясений на Земле и мощных корональных выбросов массы Солнцем. Лето 2012 г. // Геомагнетизм и аэрономия.–2014.–Т. 54, № 6.–С.738-743.
- [24] Липеровский В.А., Похотелов О.А., Мейстер К.-В., Липеровская Е.В. Физические модели связей в системе литосфера-атмосфера-ионосфера перед землетрясениями //Геомагнетизм и аэрономия.–2008.–Т.48, № 6.–С.831-843.
- [25] Рогожин Е.А., Собисевич Л.Е. Волновые возмущения, наведенные коровыми землетрясениями (на примере двух сильных землетрясений в Кавказско-Анатолийском секторе Альпийского Средиземноморского подвижного пояса // Физика Земли.–2014.–№ 2.–С.148-156.
- [26] Старжинский С.С., Никифоров В.М. Реакция в электромагнитном поле на катастрофическое землетрясение 11 марта 2011 г. //Физика Земли.–2012.–№ 11-12.–С.24-34.
- [27] Соболев Г.А., Закржевская Н.А. О возможности влияния магнитных бурь на сейсмичность // Физика Земли.–2002а.–№ 4.–С. 3-15.
- [28] Соболев Г.А., Пономарев А.В. Физика землетрясений и предвестники.–М.: Наука, 2003b. –282 с.
- [29] Тертышников А.В. Оценки практической значимости геомагнитных предвестников сильных землетрясений // Гео-лиогеофизические исследования. Результаты исследований геофизических рисков. –2013. – № 3. –С. 63–70.
- [30] Узбеков Н.Б. Вариации геомагнитного поля в связи с прогнозом землетрясений в северном Тянь-Шане: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 25.00.29 / Институт сейсмологии.–Алматы, 2011.–120с.

References

- [1] Adushkin, V. V., S. A. Ryabova, A. A. Spivak, and V. A. Kharlamov. 2012. "Response of the Seismic Background to Geomagnetic Variations." In *Doklady Earth Sciences*, 444:642–646. Springer. <http://link.springer.com/content/pdf/10.1134/S1028334X12050157.pdf>.
- [2] Afraimovich, E. L., N. P. Perevalova, A. V. Plotnikov, and A. M. Uralov. 2000. "The Shock-Acoustic Waves Generated by Earthquakes." arXiv Preprint Physics/0007041. <https://arxiv.org/abs/physics/0007041>.
- [3] Chen, Kuang-Jung, Bonbbon Chiu, Jee-Shiang Wang, Cheng-Yu Lee, Cheng-Horng Lin, and Kevin Chao. 2011. "Geomagnetic Anomaly at Luning before the 1999 Chi-Chi Earthquake (Mw= 7.6) in Taiwan." *Natural Hazards* 58 (3): 1233–1252.
- [4] Gershenzon, Naum, and Gust Bambakidis. 2001a. "Modeling of Seismo-Electromagnetic Phenomena." *Russ. J. Earth Sci* 3 (4): 247–275.
- [5] Hattori, Katsumi, Peng Han, Chie Yoshino, Febty Febriani, Hiroki Yamaguchi, and Chieh-Hung Chen. 2013. "Investigation of ULF Seismo-Magnetic Phenomena in Kanto, Japan during 2000–2010: Case Studies and Statistical Studies." *Surveys in Geophysics* 34 (3): 293–316.
- [6] Hayakawa, Masashi. 1999a. *Atmospheric and Ionospheric Electromagnetic Phenomena Associated with Earthquakes*. Terra Scientific Pub. Co.
- [7] Hayakawa, Masashi. 2011b. "On the Fluctuation Spectra of Seismo-Electromagnetic Phenomena." *Natural Hazards and Earth System Sciences* 11 (2): 301–308.
- [8] Hobara, Y., and M. Parrot. 2005. "Ionospheric Perturbations Linked to a Very Powerful Seismic Event." *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* 67 (7): 677–685.
- [9] Korsunova, L. P., and V. V. Khagai. 2006. "Medium-Term Ionospheric Precursors to Strong Earthquakes." *Int. J. Geomagn. Aeron* 6. <http://elpub.wdcb.ru/journals/ijga/gi0611/2005GI000122/2005GI000122.pdf>.

- [10] Larkina, V. I., V. V. Migulin, O. A. Molchanov, I. P. Kharkov, A. S. Inchin, and V. B. Schvetcova. 1989. "Some Statistical Results on Very Low Frequency Radiowave Emissions in the Upper Ionosphere over Earthquake Zones." *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 57 (1–2): 100–109.
- [11] Liu, JANN-YENQ, Y. I. Chen, Y. J. Chuo, and Chun-Shu Chen. 2006. "A Statistical Investigation of Preearthquake Ionospheric Anomaly." *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 111 (A5). <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/2005JA011333/full>.
- [12] Molchanov, O., A. Rozhnoi, M. Solovieva, O. Akentieva, J. J. Berthelier, M. Parrot, F. Lefeuvre, P. F. Biagi, L. Castellana, and M. Hayakawa. 2006. "Global Diagnostics of the Ionospheric Perturbations Related to the Seismic Activity Using the VLF Radio Signals Collected on the DEMETER Satellite." *Natural Hazards and Earth System Science* 6 (5): 745–753.
- [13] Pulinet, S. A. 2006a. "Space Technologies for Short-Term Earthquake Warning." *Advances in Space Research* 37 (4): 643–652.
- [14] Pulinet S.A., Boyarchuk K.A. *Ionospheric Precursors of Earthquakes* / Springer, 2003a. –312p.
- [15] Zotov, O. D., A. V. Guglielmi, and A. L. Sobisevich. 2013. "On Magnetic Precursors of Earthquakes." *Izvestiya, Physics of the Solid Earth* 49 (6): 882–889.
- [16] Aleksandrov V.N., Bazina M.A., Zhurkin I.G., Kornilova L.V., Pleshkov V.G., Pobedinskiy G.G., Rebriy A.V., Timkina O.V. (2007) *Spravochnik standartnykh i upotrebyayemykh (rasprostranonykh) terminov po geodezii i kartografii, topografii, geoinformatsionnym sistemam, prostranstvennym dannym* [Reference book of standard and used (common) terms] on geodesy and cartography, topography, geoinformation systems, spatial data].–M.: Bratishka, 736 p.
- [17] Baranov YU.B., Berlyant A.M., Kapralov Ye.G., Koshkarev A.V., Serapinas B.B., Filippov YU.A. (1999) *Geoinformatika. Tolkovyy slovar' osnovnykh terminov* [Geoinformatics. Explanatory dictionary of basic terms].– M.: GIS-Assotsiatsiya YU, 750p. <http://gis.ru/geinfoslovar.html>
- [18] Gulyelmi A.V., Zotov O.D. (2012a) *O magnitnykh vozmushcheniyakh pered sil'nymi zemletryasenyami* [About magnetic disturbances before strong earthquakes]. *Physics of Eart*, № 2, pp. 84-87.
- [19] Gulyelmi A.V., Zotov O.D. (2012b) *Yavleniye sinkhronizma v dinamicheskoy sisteme magnitosfera-tekhnosfera-litosfera* [The phenomenon of synchronism in the dynamic magnetosphere-technosphere-lithosphere system]. *Physics of Eart*, № 6, pp. 23-33.
- [20] Gulyelmi A.V., Lavrov I.P., Sobisevich A.L. (2015c) *Vnezapnyye nachala magnitnykh bur' i zemletryaseniya* [Sudden beginnings of magnetic storms and earthquakes]. *Solar-terrestrial physics*, vol. 1, No. 1, pp. 98-103. DOI: 10.12737 / 5694.
- [21] Dovbnaya B.V. (2014) *Elektromagnitnyye predvestniki zemletryaseny i ikh povtoryayemost'* [Electromagnetic precursors of earthquakes and their frequency]. *Geofizicheskiy zhurnal*, vol.36, № 3, pp.160-165.
- [22] Zakrzhevskaya N.A., Sobolev G.A., Kharin Ye.P. (2001) *O svyazi seysmichnosti s magnitnymi buryami* [On the connection of seismicity with magnetic storms]. *Physics of Eart*, № 11, pp. 6-15.
- [23] Ivanov K.G., Kharshiladze A.F. (2014) *Priroda sil'nykh zemletryaseny na Zemle i moshchnykh koronal'nykh vybrosov massy Solntsem. Leto 2012 g.* [The nature of strong earthquakes on Earth and powerful coronal mass ejections of the Sun. Summer 2012]. *Geomagnetism and aeronomy*. vol. 54, No. 6, pp. 738-743.
- [24] Liperovskiy V.A., Pokhotelov O.A., Meyster K.-V., Liperovskaya Ye.V. (2008) *Fizicheskiye modeli svyazey v sisteme litosfera-atmosfera-ionosfera pered zemletryasenyami* [Physical models of connections in the lithosphere-atmosphere-ionosphere system before earthquakes]. *Geomagnetism and aeronomy*, vol. 48, No. 6, pp. 831-843.
- [25] Rogozhin Ye.A., Sobisevich L.Ye. (2014) *Volnovyye vozmushcheniya, navedennyye korovymi zemletryasenyami (na primere dvukh sil'nykh zemletryaseny v Kavkazsko-Anatoliyskom sektore Al'piyskogo Sredizemnomorskogo podvizhnogo poyasa)* [The wave disturbance induced crustal earthquakes (for example, two strong quakes in the Caucasus-Anatolian sector podvizhnogo Alpine Mediterranean belt] // *Physics of Eart*, № 2, pp. 148-156.
- [26] Starzhinskiy S.S., Nikifrov V.M. (2012) *Reaktsiya v elektromagnitnom pole na katastroficheskoye zemletryaseniye 11 marta 2011 g.* [Reaction in the electromagnetic field to a catastrophic earthquake March 11, 2011]. *Physics of Eart*, № 11-12, pp. 24-34.
- [27] Sobolev G.A., Zakrzhevskaya N.A. (2002a) *O vozmozhnosti vliyaniya magnitnykh bur' na seysmichnost'* [On the possibility of the effect of magnetic storms on seismicity]. *Physics of Eart*, № 4, pp. 3-15.
- [28] Sobolev G.A., Ponomarev A.V. (2003b) *Fizika zemletryaseny i predvestniki*. [The physics of earthquakes and predvestniki]. M.: Nauka, 282 p.

-
- [29] Tertyshnikov A.V. (2013) Otsenki prakticheskoy znachimosti geomagnitnykh predvestnikov sil'nykh zemletryaseniy [Estimates of the practical importance of geomagnetic precursors of strong earthquakes]. Geliogeofizicheskiye issledovaniya. Rezul'taty issledovaniy geofizicheskikh riskov, № 3. pp. 63–70.
- [30] Uzbekov N.B. (2011) Variatsii geomagnitnogo polya v svyazi s prognozom zemletryaseniya v severnom Tyan'-Shane [Variations of the geomagnetic field in connection with the forecast of earthquakes in the northern Tien Shan]: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 25.00.29 / Institut seysmologii.–Almaty, 120p.

УДК 51-76

Онтологические модели алгоритмов роевого интеллекта для иммунносетевого моделирования лекарственных препаратов

Самигулина Г.А., д.т.н, доцент, заведующий лабораторией,
Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК,
г. Алматы, Республика Казахстан, E-mail: galinasamigulina@mail.ru
Масимканова Ж.А., магистрант, Казахский национальный университет имени
аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан, +77078346177,
E-mail: masimkanovazh@gmail.com

Статья посвящена разработке информационной системы прогнозирования свойств новых лекарственных препаратов на основе методов роевого интеллекта и искусственных иммунных систем. Важным аспектом при прогнозировании зависимости между химическим строением вещества и их биологической активностью (QSAR, Quantitative Structure-Activity Relationship) является выбор дескрипторов. Перспективным направлением в области QSAR стало применение подходов искусственного интеллекта, которые обеспечивают высокую точность прогнозирования химических соединений с заданными свойствами. В статье рассматриваются методы пчелиной колонии и алгоритм роя частиц для решения задачи выделения информативных дескрипторов и дальнейшего иммунносетевого моделирования фармакологической активности химических соединений. Приведены существующие программные средства реализации данных алгоритмов для построения оптимального набора дескрипторов. Применение мультиалгоритмического подхода при иммунносетевом моделировании лекарств требует систематизации используемых методов и создание интегрированной онтологической модели. Разработка онтологических моделей позволяет структурировать входные и выходные данные, учитывать особенности функционирования и взаимосвязи, экономит временные и вычислительные ресурсы при разработке компонентно-ориентированного программного обеспечения для иммунносетевого моделирования новых химических веществ с заданной фармакологической активностью. Разработаны онтологические модели пчелиной колонии и алгоритма роя частиц для решения задачи выделения информативных дескрипторов в редактор онтологий Protege.

Ключевые слова: компьютерный молекулярный дизайн лекарств, QSAR, роевой интеллект, выделение информативных дескрипторов, онтологические модели.

Дәрілерді иммунды-желілік моделдеу үшін үйір интеллектісінің алгоритмдерінің онтологиялық моделдері

Самигулина Г.А., т.ғ.д., доцент, зертхана жетекшісі, Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы, Қазақстан, galinasamigulina@mail.ru
Масимканова Ж.А., магистрант, аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан, masimkanovazh@gmail.com

Мақала жасанды иммундық жүйелер мен үйір интеллектісінің әдістерінің негізінде жаңа дәрі-дәрмектердің қасиеттерін болжаудың ақпараттық жүйесін құрастыруға арналған. Дескрипторларды таңдау заттектердің химиялық құрылымы мен олардың биологиялық белсенділігі арасындағы байланысты (QSAR, Quantitative Structure-Activity Relationship) болжау барысында маңызды көрініс болып табылады. Белгіленген қасиеттері бар химиялық байланыстарды болжаудың жоғары дәлдігін қамтамасыз ететін жасанды интеллект әдістерін қолдану QSAR облысындағы келешекті бағыт болып табылады.

Мақалада ақпараттық дескрипторларды бөлу және ары қарай химиялық байланыстардың фармакологиялық белсенділіктерін иммунды-желілік моделдеу есептерін шешу үшін аралар шоғыры әдісі мен құстар алгоритмі қарастырылды. Дескрипторлардың оңтайлы жинағын құрастыру үшін берілген алгоритмдерді жүзеге асырудың қолда бар құралдары сипатталды. Дәрілерді иммунды-желілік моделдеу барысында мультиалгоритмдық әдісті қолдану пайдаланылатын әдістерді жүйелеуді және кіріктірілген онтологиялық моделін құрастыруды талап етеді. Онтологиялық моделдерді құрастыру белгіленген фармакологиялық белсенділігі бар жаңа химиялық заттектерді иммунды-желілік моделдеу үшін құрамдастық-бағытталған бағдарламалық қамтамасыз етуді құрастыру барысында кіріс және шығыс деректерін жүйелеуге, жұмыс істеу және байланысу ерекшеліктерін ескеруге, уақыт және есептеу ресурстарын азайтуға мүмкіндік береді. Ақпараттық дескрипторларды бөлу есебін шешу үшін аралар шоғыры әдісі мен құстар алгоритмінің онтологиялық моделдері Protege онтология редакторында құрастырылды.

Түйін сөздер: дәрілердің компьютерлік молекулярлық дизайны, QSAR, үйір интеллектісі, ақпараттық дескрипторларды бөлу, онтологиялық моделдер.

The ontological models of swarm intelligence algorithms for immune network modeling of drugs

Samigulina G.A., Dr.Sci. (Tech.), assistant professor, head of laboratory, Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan, galinasamigulina@mail.ru

Massimkanova Zh. A., student of master degree, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, masimkanovazh@gmail.com

The article is devoted to development of information system of forecasting properties of new drugs based on methods of swarm intelligence and artificial immune systems. An In forecasting relationship between the chemical structure of substances and their biological activity (QSAR, Quantitative Structure-Activity Relationship) an important aspect is feature selection. A perspective direction in QSAR is the use of artificial intelligence, which provide high accuracy of forecasting of chemical compounds with predetermined properties. The article considers the methods of bee colonies and particle swarm algorithm for solving the problem of feature selection and further immune network modeling of pharmacological activity of chemical compounds. The existing software of implementation of these algorithms for constructing of optimum set of descriptors are given. Application of multialgorithmic approach in immune network modeling of drugs requires the systematization of using methods and development of an integrated ontological model. Development of ontological models allows to structure input and output data, to consider features of functioning and relationships, saves time and computational resources in the development of component-based software for immune network modeling of new substances with predetermined pharmacological activity. The ontological models of bee colony and particle swarm algorithm for solving the problem of feature selection are created in ontology editor Protege.

Key words: computer-aided molecular design, QSAR, swarm intelligence, feature selection, ontological model.

1 Введение

При компьютерном молекулярном дизайне лекарств исследование химических соединений связано с обработкой огромных массивов данных, представляющих собой определенную проблему. Решением одной из основных задач фармакологии является изучение зависимости между химическим строением веществ и их биологической активностью, что позволяет значительно сократить сроки разработки лекарственных препаратов и их стоимость. Количественные зависимости структура-свойства/активность (QSAR, Quantitative Structure-Activity Relationship) позволяют выявлять потенциально активные молекулы в базах химических соединений и осуществлять синтез веществ с заранее заданными свойствами. Правильное построение QSAR-модели зависит от качества

исходного набора соединений (Golla S., 2017: 478). При поиске зависимостей структура-активность химических веществ актуальной задачей является выбор оптимального набора дескрипторов на основе которого строится QSAR-модель. Задача предсказания новых соединений с заданными свойствами (Chin Y.L., 2012: 3) решается с использованием интеллектуальных методов, которые позволяют анализировать и предсказывать токсичность, метаболизм, реакционную способность соединений и др. К ним относятся нейронные сети, эволюционные алгоритмы, искусственные иммунные системы, алгоритмы роевого интеллекта и др.

В настоящее время методы роевого интеллекта являются перспективным направлением и широко применяются во многих областях медицины и фармакологии. К методам роевого интеллекта, основанным на моделировании поведения живых существ, относятся: методы муравьиной и пчелиной колонии, алгоритм роя частиц, альтруизма, капель воды, кукушки, серых волков, летучих мышей, гравитационного поиска, светляков, оптимизация передвижения бактерий и многороевая оптимизация.

Актуально применение новых инновационных подходов при разработке системы прогнозирования зависимости структура-свойства/активность лекарственных препаратов. Одним из перспективных подходов являются искусственные иммунные системы. Они представляют собой сложную адаптивную структуру, эффективно использующую различные механизмы обучения, памяти и ассоциативного поиска для решения прикладных задач. Существует несколько направлений (Dasgupta D., 1998: 438) в искусственных иммунных системах, таких как клональный алгоритм отбора, негативный алгоритм отбора и иммунносетевой алгоритм.

Искусственные иммунные системы имитируют поведение иммунной системы человека в процессе защиты организма от внешних факторов (Samigulina G.A., 2015: 48) и обладают такими достоинствами как память, обучаемость, распределенность, самоорганизация и высокая степень параллелизма. В данной статье при решении задачи отбора информативных дескрипторов рассматриваются методы пчелиной колонии и алгоритмы роя частиц для построения оптимальной иммунносетевой модели.

2 Обзор литературы

При иммунносетевом моделировании особенно актуально применение онтологических моделей, позволяющих систематизировать и структурировать данные (Baranjuk V.V., 2015: 15). Ряд исследований посвящён построению онтологических моделей алгоритмов роевого интеллекта. Статья (Rangel C., 2015: 536) направлена на создание автоматизированной системы сравнения и выбора метода для лечения болезни на основе пчелиного алгоритма. В связи с разнообразием и сложностью вычислений авторами разработана онтологическая модель алгоритма. В исследовании (Yuan F., 2015: 52) изучается связь между симптомами и лечением в медицинских записях. Работа (Shao L., 2012: 222) посвящена разработке онтологической модели алгоритма роя частиц для решения проблемы подобию в наборах данных. В статье (Shi-xiong X., 2011: 6) предлагается система диагностики на основе метода онтологии и алгоритма роя иммунных частиц. Результаты эксперимента показывают, что новый алгоритм диагностики позволяет повысить точность принятия правильных решений.

Создание интеллектуальной технологии прогнозирования зависимости структура-

свойства/активность состоит из нескольких задач (Самигулина Г.А., 2015: 15). Сначала выбираются химические соединения для исследования, затем описываются структуры соединений на основе дескрипторов. После этого выполняется отбор информативных дескрипторов и осуществляется построение оптимального набора дескрипторов для дальнейшего иммунносетевого моделирования. Затем выполняется классификация и осуществляется обучение искусственной иммунной системы. Далее реализуется алгоритм распознавания образов на основе сингулярного разложения матриц (Tarakanov A., 2007: 503) для определения класса и выполняется оценка энергетических ошибок, которая позволяет определить эффективность распознавания образов. В заключении производится отбор кандидатов лекарственных соединений с заданными свойствами для дальнейших исследований.

На рисунке 1 представлена схема интеллектуальной технологии прогнозирования фармакологической активности лекарственных препаратов на основе алгоритмов пчелиной колонии и роя частиц.

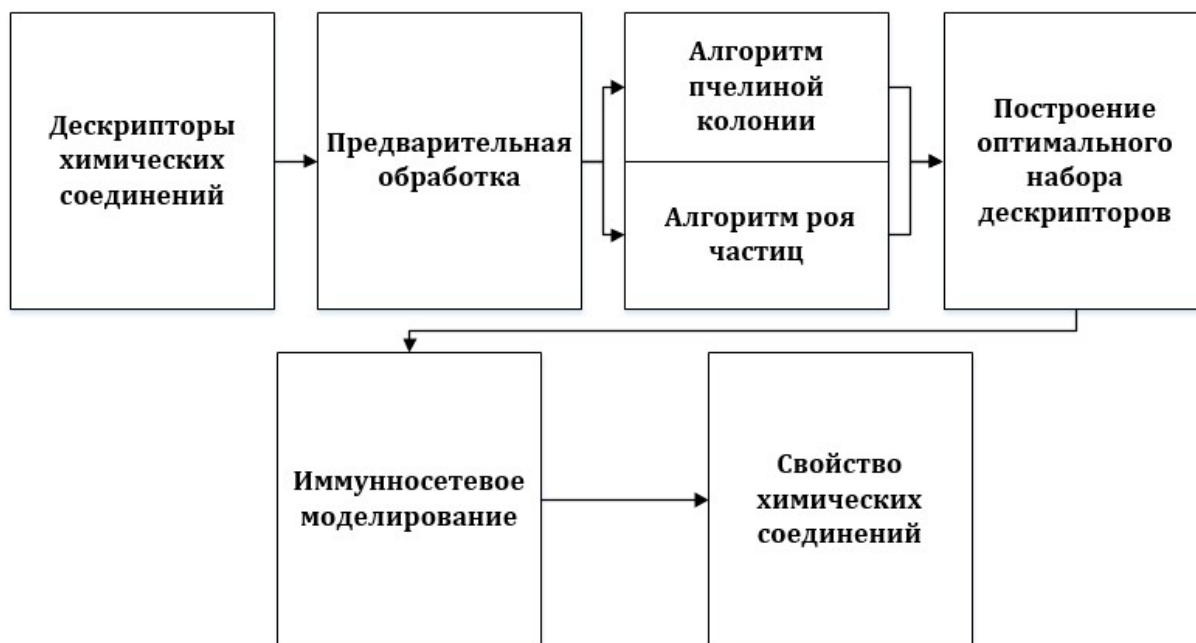


Рисунок 1 – Интеллектуальная технология прогнозирования зависимости структура-свойства/активность

На этапе предварительной обработки данных осуществляется нормализация, проверяется полнота дескрипторов, достоверность и выделение информативных дескрипторов на основе алгоритмов роевого интеллекта. Дескриптор - параметр, характеризующий структуру соединения, химические и биологические свойства веществ. Дескрипторы классифицируются по нескольким уровням: дескрипторы элементного уровня, дескрипторы структурной формулы, дескрипторы электронной структуры, дескрипторы молекулярной формулы, дескрипторы междумолекулярных взаимодействий (Раевский О.А., 2006: 99). Основными типами молекулярных дескрипторов являются: фрагментные дескрипторы, топологические индексы, физико-химические дескрипторы, квантово-

химические дескрипторы, дескрипторы молекулярных полей, константы заместителей, фармакофорные дескрипторы, дескрипторы молекулярного подобия и др. Всего в настоящее время из различных источников можно встретить более 7000 типов молекулярных дескрипторов (Ходашинский И.А., 2012: 142). Отбор информативных дескрипторов позволяет находить оптимальное количество дескрипторов, при котором после иммуносетевого моделирования и прогнозирования свойств новых химических соединений ошибка обобщения будет минимальной. Выделение информативных дескрипторов позволяет сократить затраты на вычисление ненужных дескрипторов, повышает скорость алгоритмов прогнозирования и качество прогноза.

В настоящее время увеличивается использование онтологических моделей для создания систематизированных структур информационных систем (Samigulina G.A., 2016: 3). Разработка интеллектуальной системы с использованием онтологических моделей позволяет учитывать особенности функционирования и взаимосвязи, снижает временные и вычислительные ресурсы. При разработке интеллектуальной системы компьютерного молекулярного дизайна лекарственных препаратов с заданными свойствами особенно важно построение интегрированной онтологической модели. Применение современных онтологических редакторов и построение OWL (Web Ontology Language) моделей облегчает решение задачи формирования оптимального набора дескрипторов.

В настоящее время для создания и поддержки онтологий существует целый ряд инструментов, которые помимо общих функций редактирования выполняют поддержку документирования онтологий, импорт и экспорт онтологий разных форматов и языков, поддержку графического редактирования, управление библиотеками онтологий и т.д. Редактор онтологии Protege является доступной программой для проектирования онтологических моделей. Protege включает редактор онтологий, позволяющий проектировать онтологии разворачивая иерархическую структуру абстрактных или конкретных классов и слотов. Структура онтологии сделана аналогично иерархической структуре каталога (Гладун А.Я., 2006: 1). Protege может генерировать формы получения знаний для введения классов и подклассов. Инструмент имеет графический интерфейс, удобный для использования.

3 Материал и методы

Постановка задачи формулируется следующим образом: необходимо разработать онтологические модели алгоритмов роевого интеллекта для решения задачи выделения информативных дескрипторов и дальнейшего иммуносетевого моделирования новых лекарственных препаратов с заданными свойствами.

Роевой интеллект основан на обратной связи при адаптации к изменяющейся среде и децентрализованности между частицами. Алгоритмы роевого интеллекта позволяют находить новые решения и улучшают существующие решения избегая ранней сходимости к локальному решению. Для поведения роя характерны автономность, распределение функций и самоорганизация. Размер популяции оказывает влияние на точность и время вычислений (Олейник А.А., 2012: 114). Большая популяция увеличивает время вычисления и ухудшает сходимость, а малая популяция сходимость улучшает. В алгоритме роя частиц частица меняет свое положение основываясь на знании текущего положения, предыдущего состояния и предыдущих состояний соседей данной частицы.

Алгоритм пчелиной колонии (Олейник А.А., 2011: 85) является одним из эвристических алгоритмов для решения оптимизационных задач, который основан на имитации поведения колонии пчел при сборе нектара. Для описания поведения пчёл используются понятия, такие как рабочие пчелы, пчелы-исследователи, пчелы-разведчики. Все пчёлы будут выбирать для исследования не только элитные участки, но и окрестности для разнообразия решений в последующих итерациях и для увеличения вероятности обнаружения оптимальных решений.

Для решения задачи выделения информативных дескрипторов используются модификации классического метода алгоритма пчелиной колонии. Алгоритмы GABC1 и GABC2 отличаются тем, что приводят к глобальному оптимуму. В модификации JA-ABC улучшена скорость сходимости и предусмотрена способность предотвращения преждевременной сходимости. Алгоритм ABC использует правила Деба, состоящие из трех эвристических правил и вероятностной схемы выбора выполнимых решений, основанных на их значениях фитнес-функции. Алгоритм MBABC использует новый механизм, основанный на измерении различий между бинарными строками для генерации новых решений. Особенности пчелиного алгоритма являются динамическое разбиение поискового пространства на области и совместное исследование элитных областей и неэлитных окрестностей. При решении задачи возможно использование вышеуказанных модификаций пчелиного алгоритма и за счёт распараллеливания уменьшение времени работы алгоритмов (Schiezero M., 2013: 30).

Алгоритм роя частиц может рассматриваться как многоуровневая система, в которой каждая частица-агент обменивается информацией по простым правилам (Agrawal S., 2015: 403). Поиск оптимального решения начинается с рассмотрения случайных частиц, называемых роем. Каждая частица имеет фитнес-значение, которое вычисляется с помощью функции затрат. Фитнес-функция создает пространство поиска, в котором каждое решение имеет фитнес-значение. Каждая частица настраивает позицию и скорость в пространстве поиска. На основе координаты частицы рассчитывается скорость частицы. Выбираются координаты лучшего решения для частицы и для роя частиц. При перемещении частица меняет свою скорость и позицию в соответствии со своим собственным опытом и соседей. Метод роя частиц позволяет проводить более ёмкий обмен информацией между частицами. В качестве связи используется так называемая общая память, суть которой в том, что каждая частица знает координаты наилучшей точки. То есть наилучшее решение, найденное роем в каждый момент времени известно всем его частицам (Hamed Z., 2012: 125). В итоге на движение частицы влияет стремление к наилучшему среди всех частиц положению.

Существует множество модификаций классического алгоритма с учетом уменьшения вероятности преждевременной сходимости путем изменения характеристик движения частиц и динамического изменения параметров алгоритма во время оптимизации. Алгоритм LBEST тщательно исследует пространство поиска, однако является более медленным, чем классический алгоритм (Particle Swarm Optimization). При этом, чем меньшее число соседей учитывается при формировании вектора скорости, тем ниже скорость сходимости алгоритма, но тем эффективней он избегает субоптимальных решений. В алгоритме InWPSO было изменено правило обновления векторов скоростей частиц. Алгоритм TVInWPSO показывает, что частицы сначала исследуют область поиска экстенсивно, находя множество субоптимальных решений, а со временем все более

концентрируются на исследовании их окрестностей. Возрастание инерции способствует сходимости алгоритма на поздних стадиях работы. Алгоритм CanPSO отличается способом вычисления векторов скоростей частиц, так как был введен дополнительный множитель для контроля скорости частицы. В модифицированном алгоритме FIParticleSwarm важную роль играет информированность всех частиц, что ведет к повышению эффективности алгоритма. Разработано следующее программное обеспечение на основе пчелиных алгоритмов для решения задачи отбора информативных дескрипторов: ABCoptim, ABCMATLABweb, Artificial-Bee-Colony, EABC, abc-clustering и др.

Существует ряд пакетов прикладных программ на основе роя частиц: ParadisEO, TribesPSO, EPSO, SwarmNLP, Co-PSO и др. Приложение ParadisEO - это программное обеспечение, посвященное проектированию, реализации и анализу метаэвристики для многокритериальной оптимизации. Программный продукт EPSO (Evolutionary Particle Swarm Optimization) является гибридной системой на основе эволюционного алгоритма и метода роя частиц. Программа SwarmNLP визуализирует оптимизацию роя частиц по многократным критериям. Эта программа является хорошим инструментом для решения задачи на основе оптимизации роя частиц и визуализации пространства решений. Программный пакет Co-PSO включает в себя расширяемые библиотеки тестовых функций и графов, определяющих топологии соседства, которые могут быть использованы алгоритмами роя частиц. В результате работы программа Co-PSO строит график изменения значений целевой функции с ростом числа итераций для частиц-победителя, а также графики изменения размеров частиц в функции номера итерации.

4 Результаты и обсуждение

Разработка онтологической модели начинается с общих понятий и переходит к детализации. Иерархическая структура онтологической модели состоит из основных классов, таких как входные (INPUTDATA) и выходные данные (OUTPUTDATA). В работе (Самигулина Г.А., 2015: 15) предложена интегрированная онтологическая модель имунносетевой технологии, которая состоит из онтологической модели предварительной обработки данных, онтологической модели распознавания образов и онтологической модели оценки энергетической ошибки. Формальная интегрированная модель онтологии представляется в виде кортежа множеств:

$$OM_{IIT} = \langle OM_{PR}, OM_{IR}, OM_{AEE} \rangle$$

где OM_{PR} - онтологическая модель предварительной обработки данных;

OM_{IR} - онтологическая модель распознавания образов;

OM_{AEE} - онтологическая модель оценки энергетической ошибки.

При построении оптимальной имунносетевой модели применяется мультиалгоритмический подход (Самигулина Г.А., 2016: 55), который позволяет использовать несколько алгоритмов и методов искусственного интеллекта для отбора дескрипторов. В работе предварительная обработка данных осуществляется на основе алгоритмов пчелиной колонии и роя частиц.

Онтологическая модель предварительной обработки данных состоит из онтологических моделей алгоритмов пчелиной колонии и роя частиц:

$$OM_{PR} = \langle OM_{ABC}, OM_{PSO} \rangle$$

где OM_{ABC} - онтологическая модель алгоритмов пчелиной колонии;

OM_{PSO} - онтологическая модель алгоритмов роя частиц.

Онтологическая модель алгоритмов пчелиной колонии состоит из нескольких модификаций классического алгоритма:

$$OM_{ABC} = \langle OM_{GABC1}, OM_{GABC2}, OM_{JA-ABC}, OM_{ABC}, OM_{MBABC}, OM_{BasicABC} \rangle$$

где OM_{GABC1} - онтологическая модель алгоритма GABC1;

OM_{GABC2} - онтологическая модель алгоритма GABC2;

OM_{JA-ABC} - онтологическая модель модификации JA-ABC;

OM_{ABC} - онтологическая модель алгоритма ABC;

OM_{MBABC} - онтологическая модель модификации MBAB;

$OM_{BasicABC}$ - онтологическая модель классического алгоритма.

Так как не существуют универсальных методов для построения оптимального набора дескрипторов, то при разработке интеллектуальной системы прогнозирования фармакологической активности лекарственных соединений основной задачей является уменьшение ошибки обобщения и повышение качества прогноза.

Достоинством применения мультиалгоритмического подхода является возможность выбора алгоритма с наилучшими результатами после иммунносетевого моделирования, то есть выбирается тот алгоритм, использование которого дает минимальную ошибку обобщения. Алгоритмы, описанные выше, могут быть использованы для отбора дескрипторов и их результаты будут отличаться в зависимости от размера и качества данных, наличия независимых дескрипторов, критериев оптимальности и останова и т.д. При построении онтологической модели алгоритмов пчелиной колонии (Таблица 1) в качестве примера был рассмотрен классический алгоритм пчелиной колонии, так как отличительной чертой классического алгоритма является децентрализованность, взаимодействие агентов и простота поведения агентов. Данный алгоритм зависит от таких параметров как: общее число пчёл-разведчиков, общее число участков, число элитных участков, максимальное число итераций. Поэтому онтологическая модель классического алгоритма представляется следующим образом:

$$OM_{BasicABC} = \langle InitialPopulation, NumberOfLocation, Iteration, Gbest \rangle$$

где $InitialPopulation$ - общее число пчёл-разведчиков;

$NumberOfLocation$ - общее число участков;

$Iteration$ - максимальное число итераций;

$Gbest$ - лучшая координата пчелы.

С помощью инструмента OntoGraf в редакторе онтологий Protege было осуществлено графическое представление онтологической модели классического алгоритма пчелиной колонии (Рисунок 2). Алгоритм роя частиц также имеет несколько модификаций. Они различаются скоростью сходимости, наличием дополнительных множителей и др.

$$OM_{PSO} = \langle OM_{LBEST}, OM_{InWPSO}, OM_{TVInWPSO}, OM_{CanPSO}, OM_{FIPS}, OM_{BasicPSO} \rangle$$

где OM_{LBEST} - онтологическая модель алгоритма LBEST;
 OM_{InWPSO} - онтологическая модель модификации InWPSO;
 $OM_{TVInWPSO}$ - онтологическая модель алгоритма TVInWPSO;
 OM_{CanPSO} - онтологическая модель алгоритма CanPSO;
 OM_{FIPS} - онтологическая модель алгоритма FIParticleSwarm;
 $OM_{BasicPSO}$ - онтологическая модель классического алгоритма.

Таблица 1 – Онтологическая модель алгоритмов пчелиной колонии

Наименование	Содержание
Онтологическая модель алгоритмов пчелиной колонии	Алгоритмы пчелиной колонии:
	- Алгоритм GABC1
	- Алгоритм GABC2
	- Модификация JA-ABC
	- Алгоритм ABC
	- Модификация MBABC
	- Классический алгоритм BasicABC
	Создание размера популяции.
	Определение местоположения источников нектара (DetermineLocationOfFoodSource).
	Оценка фитнес-функций.
	Поиск рабочими пчелами новых источников и исследование лучшего источника (EmployedBeePhase).
	Выбор источника пчелой-исследователем (OnlookerBeePhase).
	Произведение локальной разведки в окрестностях выбранных точек (ScoutBeePhase).
	Определение соседства агентов (DetermineNeighbourhood).
	Выбор элитного (SelectEliteLocation) и неэлитного (SelectNon-eliteLocation) местоположения.
	Запоминание лучшего источника (Gbest). При достижении улучшения в рое сохраняется обновленное лучшее решение и соответствующий ему вектор параметров целевой функции.
	При выполнении условия останова (StopSearching) из множества решений выбирается наилучшее, которое является результатом вычисления алгоритма.
	Отобранный набор дескрипторов.

Критерием останова могут быть: достижение максимально допустимого количества итераций, нахождение приемлемого решения, отсутствие существенного улучшения значения целевой функции на протяжении некоторого количества итераций. За счет исключения дополнительных параметров классический алгоритм роя частиц снижает вычислительные сложности и время обработки данных. Онтологическая модель классического алгоритма роя частиц представляется следующим образом:

$$OM_{BasicPSO} = \langle PopulationSizeOfAgents, pbest, Iteration, Gbest \rangle$$

где $PopulationSizeOfAgents$ - общее число агентов;
 $pbest$ - наилучшая позиция частицы;

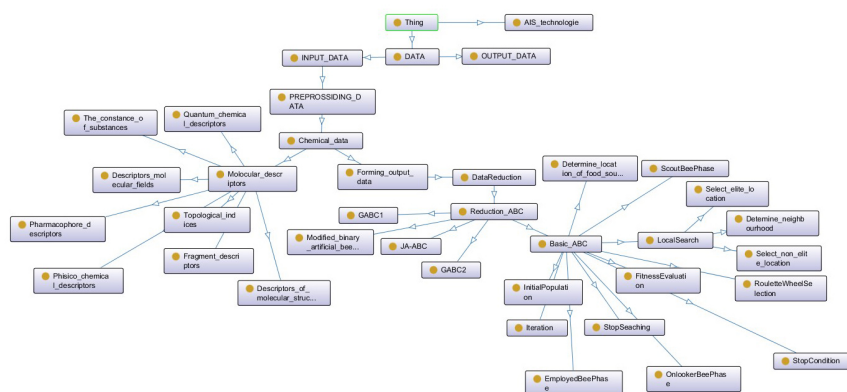


Рисунок 2 – Онтологическая модель алгоритма пчелиной колонии

Iteration - максимальное число итераций;

Gbest - наилучшая позиция роя.

В графическом виде онтологическая модель алгоритмов роя частиц представлена на рисунке 3.

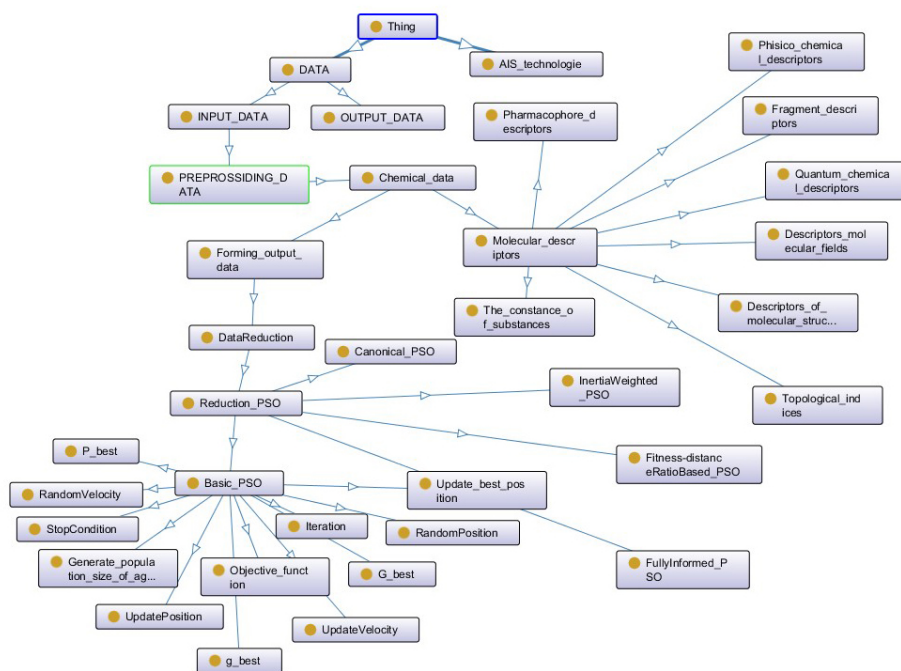


Рисунок 3 – Онтологическая модель роя частиц

В работе построена онтологическая модель классического алгоритма BasicPSO, так как алгоритм более глубоко исследует дескрипторное пространство и не имеет дополнительных параметров. Онтологическая модель алгоритмов роя частиц представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Онтологическая модель алгоритмов роя частиц

Наименование	Содержание
Онтологическая модель алгоритмов роя частиц	Алгоритмы роя частиц:
	- Алгоритм LBEST
	- Модификация InWPSO
	- Алгоритм TVInWPSO
	- Алгоритм CanPSO
	- Алгоритм FIPS
	- Классический алгоритм BasicPSO
	Создание размера популяции частиц (PopulationSizeOfAgents).
	Генерация начальных положений (RandomPosition) и скоростей (RandomVelocity, при которой создается вектор равномерно распределенных случайных величин и произвольно выбирается наилучшая позиция частицы (pbest).
	Вычисление фитнесс-функций.
	Определение наилучшего положения (gbest).
	Миграция на основе стохастического поведения частиц.
	Обновление позиций (UpdatePosition) и скоростей (UpdateVelocity).
	Обновление лучшей позиции частиц (UpdateBestPosition).
	Проверка условия завершения (StopCondition), которая происходит в результате достижения заданного числа итераций.
	Сохранение лучшего положения (Gbest). При достижении улучшения в рое сохраняется обновленное лучшее решение и соответствующий ему вектор параметров целевой функции.
	Отобранный набор дескрипторов.

5 Заключение

Интеллектуальная технология прогнозирования зависимости структура-свойства/активность с использованием мультиалгоритмического подхода позволяет интегрировать разные методы искусственного интеллекта для решения задачи компьютерного молекулярного дизайна новых лекарственных препаратов с заданными свойствами. Применение мультиалгоритмического подхода с использованием алгоритмов роевого интеллекта позволяет эффективно осуществлять предварительную обработку данных, выделять информативный набор дескрипторов, создавать оптимальную иммунносетевую модель. Выбирается тот алгоритм роевого интеллекта, который дает минимальную ошибку обобщения при иммунносетевом моделировании. Разработаны онтологические модели алгоритмов пчелиной колонии и алгоритмов роя частиц для выделения оптимального набора дескрипторов и дальнейшего иммунносетевого моделирования в редакторе онтологий Protege. Разработка интеллектуальной системы с использованием онтологических моделей рассматриваемых алгоритмов позволяет структурировать данные и анализировать скрытые взаимосвязи между дескрипторами. Работа выполнена по гранту КН МОН РК № ГР 0115РК00549 (2015-2017 г.г) по теме проекта: "Компьютерный молекулярный дизайн лекарственных препаратов на основе иммунносетевого моделирования".

Список литературы

- [1] *Agrawal S., Silakari S.* A review on application of Particle Swarm Optimization in Bioinformatics // Current bioinformatics. -2015. -P. 401-413.
- [2] *Baranjuk V.V., Smirnova O.S.* Expanding the bionics ontology by the description of swarm intelligence // International Journal of Open Information Technologies. -2015. -Vol. 3, No. 12. -P. 13-17.
- [3] *Chin Y.L., Chun W.Y.* Current Modeling Methods Used in QSAR/QSPR // Statistical Modelling of Molecular Descriptors in QSAR/QSPR. -2012. -P. 1-31.
- [4] *Dasgupta D.* Artificial Immune Systems and Their Applications. - NY: Springer-Verlag, 1998. -438 p.
- [5] *Golla S., Neely B., Whitebay E., Madhally S., Robinson R., Gasem K.* Virtual design of chemical penetration enhancers for transdermal drug delivery // Chem. Biol. Drug Design. -2012. -P. 478-487.
- [6] *Hamed Z., Aboozar K., Hamid M.* Application of modified particle swarm optimization as an efficient variable selection strategy in QSAR/QSPR studies // Journal of chemometrics. -2012. -P. 123-128.
- [7] *Rangel C., Aguilar J., Cerrada M., Altamiranda J.* An Approach for the Emerging Ontology Alignment based on the Bees Colonies // Proc. of Int'l Conf. Artificial Intelligence. -2015. -P. 536-541.
- [8] *Samigulina G.A., Samigulina Z.I.* Computational Molecular Design of Antiseptic Drugs based on Immune Network Modeling // Proceedings of the 12-th International Conference on Electronics Computer and Computation "ICECCO-2015". -Almaty: Suleyman Demirel University, 2015. -C. 47-52.
- [9] *Samigulina G.A., Samigulina Z.I.* Drug Design of sulfanilamide based on Immune Network Modeling and Ontological approach // Proc. of the 10th IEEE Int. Conf. on Application of Information and Communication Technologies AICT2016. -Baku, 2016.
- [10] *Schiezaro M., Pedrini H.* Data feature selection based on Artificial bee colony algorithm // EURASIP Journal on Image and Video processing. -2013. -P. 29-33.
- [11] *Shao L., Bai Y., Qiu Y., Du Zh.* Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Semantic Relations and Its Engineering Applications // Systems Engineering Procedia. -2012. -Vol. 5. -P. 222-227.
- [12] *Shi-xiong X., Fei L., Qiang N.* Fault Diagnosis Method Based on Ontology and Particle Swarm-Immune Optimization Algorithm in the Motor // Multimedia and Signal Processing (CMSP). -2011. -P. 1-9.
- [13] *Tarakanov A., Nicosia G.* Foundations of immunocomputing // Proceedings of the 1-st IEEE Symposium of Computational Intelligence. -Honolulu, 2007. -P. 503-508.
- [14] *Yuan F., Chen S., Liu H., Xu L.* Artificial bee colony-based extraction of non-taxonomic relation between symptom and syndrome in TCM records [Электрон. ресурс]. -Vol. 6, Issue 6. -URL: <http://dx.doi.org/10.1504/IJCSM.2015.073600> (дата обращения: 07.01.2017)
- [15] *Гладун А.Я., Рогушина Ю.В.* Онтологии в корпоративных системах [Электрон. ресурс]. -2006. -URL: <http://www.management.com.ua/ims/ims116.html> (дата обращения: 19.12.2016)
- [16] Компьютерный молекулярный дизайн лекарственных препаратов на основе иммуносетевого моделирования: отчет о НИР (промежуточный) / Институт информационных и вычислительных технологий КН МОН РК: рук. Самигулина Г.А. -Алматы, 2015. -145 с. -№ГР 0115РК00549. - Инв. №0215РК01473.
- [17] *Олейник Ан.А., Олейник Ал.А., Субботин С.А.* Агентные технологии для отбора информативных признаков // Кибернетика и системный анализ. -2012. -№ 2. -С. 113-125.
- [18] *Олейник А.А.* Мультиагентный метод оптимизации с адаптивными параметрами // Искусственный интеллект. -2011. -№1. -С. 83-90.
- [19] *Раевский О.А.* Дескрипторы водородной связи в компьютерном молекулярном дизайне // Рос. Хим. Журнал. -2006. -№2. -С. 97-108.
- [20] *Самигулина Г.А., Самигулина З.И.* Построение оптимальной иммуносетевой модели для прогнозирования свойств неизвестных лекарственных соединений на основе мультиалгоритмического подхода // Проблемы информатики. -Новосибирск, 2013. -С. 21-29.
- [21] *Ходашинский И.А., Горбунов И.В., Дудин П.А., Синьков Д.С.* Построение нечетких систем прогнозирования эффективности немедикаментозного лечения // Интеллектуальные системы. -2012. -№3 (33). -С. 140-149.

References

- [1] Agrawal S., Silakari S., "A review on application of Particle Swarm Optimization in Bioinformatics," *Current bioinformatics* 10 (2015): 401-413.
- [2] Baranjuk V.V. and Smirnova O.S., "Expanding the bionics ontology by the description of swarm intelligence" *International Journal of Open Information Technologies* 3(12) (2015): 13-17.
- [3] Chin Y.L. and Chun W.Y., "Current Modeling Methods Used in QSAR/QSPR," *Statistical Modelling of Molecular Descriptors in QSAR/QSPR*(2012): 1-31.
- [4] Dasgupta D., *Artificial Immune Systems and Their Applications* (NY: Springer-Verlag, 1998), 438.
- [5] Gladun A.Ya., Rogushina Yu.V. (2006) Ontologii v korporativnyh sistemah [Ontologies in enterprise systems]. *Korporativnye sistemy*, vol. 1, accessed December 19, 2016, <http://www.management.com.ua/ims/ims116.html>.
- [6] Golla S. et al., "Virtual design of chemical penetration enhancers for transdermal drug delivery," *Chem. Biol. Drug Design* (2012): 478-487.
- [7] Hamed Z., Aboozar K., Hamid M., "Application of modified particle swarm optimization as an efficient variable selection strategy in QSAR/QSPR studies" *Journal of chemometrics* (2012): 123-128.
- [8] Oleinik An.A., Oleinik Al.A., Subbotin S.A. (2012) Agentnye texnologii dlya otbora informativnyh priznakov [Agent technologies for the selection of informative features]. *Kibernetika i sistemnyi analiz*, vol. 2, pp. 113-125.
- [9] Oleinik A.A. (2011) Multiagentnyi metod optimizatsii s adaptivnymi parametrami [Multi algorithmic approach with adaptive parameters]. *Iskusstvennyi intellekt*, vol.1, pp. 83-90.
- [10] Raevskii O.A. (2006) Deskriptory bodorodnoi svyazi v komputernom molekulyarnom dizaine [Descriptors of hydrogen bond in computer molecular design]. *Ros. xim. jurnal*, vol. 2, pp. 97-108.
- [11] Rangel C. et al., "An Approach for the Emerging Ontology Alignment based on the Bees Colonies," *Int'l Conf. Artificial Intelligence* (2015): 536-541.
- [12] Samigulina G.A. and Samigulina Z.I., "Computational Molecular Design of Antiseptic Drugs based on Immune Network Modeling," *Proceedings of the 12-th International Conference on Electronics Computer and Computation "ICECCO-2015"* (Almaty: Suleyman Demirel University, 2015): 47-52.
- [13] Samigulina G.A. and Samigulina Z.I. "Drug Design of sulfanilamide based on Immune Network Modeling and Ontological approach," *Proc. of the 10th IEEE Int. Conf. on Application of Information and Communication Technologies AICT2016*, accessed January 19, 2017, www.aict.info/2016.
- [14] Samigulina G.A. et al. (2015) Komputernyi molekulyarnyi dizain lekarstvennyh preparatov na osnove immunnosetevogo modelirovaniya [Computer-aided molecular design of drugs based on immune network modeling]. *Otchet o NIR*, pp. 145.
- [15] Samigulina G.A., Samigulina Z.I. (2013) Postroenie optimalnoi immunnosetevoi modeli dlya prognozirovaniya svoystv neizvestnyh lekarstvennyh soedinenii na osnove multialgoritmicheskogo podhoda [Construction of an optimal immune-network model for predicting the properties of unknown drug compounds on the basis of a multi-algorithmic approach]. *Problemy informatiki*, pp. 21-29.
- [16] Schiezero M. and Pedrini H., "Data feature selection based on Artificial bee colony algorithm," *EURASIP Journal on Image and Video processing*(2013): 29-33.
- [17] Shao L. et al., "Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Semantic Relations and Its Engineering Applications," *Systems Engineering Procedia* (2012): 222-227.
- [18] Shi-xiong X. et al., "Fault Diagnosis Method Based on Ontology and Particle Swarm-Immune Optimization Algorithm in the Motor," *Multimedia and Signal Processing (CMSP)*(2011): 1-9.
- [19] Tarakanov A. and Nicosia G., "Foundations of immunocomputing," *Proceedings of the 1-st IEEE Symposium of Computational Intelligence* (Honolulu, 2007): 503-508.
- [20] Xodashinskii I.A., Gorbunov I.V., Dudin P.A., Sinkov D.S. (2012) Postroenie nechetkih sistem prognozirovaniya effektivnosti nemedikamentoznogo lecheniya [Construction of fuzzy systems for predicting the effectiveness of non-drug treatment]. *Intellektualnye sistemy*, vol. 3, no 33, pp. 140-149.
- [21] Yuan F. et al., "Artificial bee colony-based extraction of non-taxonomic relation between symptom and syndrome in TCM records," *International Journal of Computing Science and Mathematics*(2015), accessed January 7, 2017, DOI: <http://dx.doi.org/10.1504/IJCSM.2015.073600>.

4-бөлім

Раздел 4

Section 4

Қолданылмалы
математикаПрикладная
математикаApplied
Mathematics

УДК 519.63; 519.684

**Свойства переноса воздуха в респираторной системе человека с помощью
численного моделирования**

Исахов А.А., доктор Ph.D., Казахский национальный университет им. аль-Фараби,
г. Алматы, Республика Казахстан, +77056108050, E-mail: alibek.issakhov@gmail.com
Абылкасымова А. Б., докторант, Казахский национальный университет им.
аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан

В данной работе рассматривается перенос воздуха в респираторной системе человека с помощью численного моделирования. Исследование течения воздуха в носовой полости человека представляет значительный интерес, поскольку дыхание осуществляется в основном с помощью носа. Носовое дыхание важно для поддержания внутренней среды легких, так как температура окружающего воздуха переходит в альвеолярные условия при достижении носоглотки. В данной работе проводилось двухмерное численное моделирование переноса воздуха в модельных поперечных сечениях носовой полости для нормального человеческого носа на основе системы уравнений Навье-Стокса, уравнения для температуры и уравнения для относительной влажности. Для численного решения данной системы уравнений применяется схема расщепления по физическим параметрам. Полученные данные численного моделирования переноса воздуха носовой полости человека сверялись с известными численными результатами, в виде профилей скорости и температуры. Результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что при дыхании с помощью нормального человеческого носа есть достаточно времени для нагрева и водообмена, чтобы достичь внутриальвеолярного состояния. Носовая полость ускоряет теплообмен путем сужения проходов для воздуха и завихрений от носовых раковин стенок внутренней полости.

Ключевые слова: перенос воздуха в респираторной системе человека, альвеолярное состояние, теплообмен в носовой полости, уравнение Навье-Стокса, схема расщепления по физическим параметрам, метод конечных объемов.

**Сандық модельдеу көмегімен адамның тыныс алу жүйесінде ауаның тасымалдануының
қасиеттері**

Исахов А.А., Ph.D. докторы, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы, +77056108050, Электрондық пошта: alibek.issakhov@gmail.com
Абылкасымова А. Б., докторант, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,
Алматы қ., Қазақстан Республикасы

Берілген жұмыста сандық модельдеу көмегімен адамның тыныс алу жүйесінде ауаның тасымалдануын қарастырады. Тыныс алу мұрын арқылы жүретін болғандықтан, мұрын қуысындағы ауаның ағымын зерттеу қызығушылық туғызады. Қоршаған ортаның температурасы мұрынжұтқыншаққа жеткенде альвеолярлы жағдайға ауысқандықтан, өкпе ішкі ортасын сақтау үшін мұрынмен тыныс алу маңызды болып табылады. Берілген жұмыста адам мұрны үшін мұрын қуысының көлденең қимасы моделінде ауаның таралуын Навье-Стокс теңдеуі негізінде, температура теңдеуі және салыстырмалы ылғал теңдеуі үшін екі өлшемді сандық модельдеу жүргізілді.

Берілген теңдеулер жүйесінің сандық шешімін табу үшін физикалық параметрлер бойынша ыдырату схемасы қолданылады. Адам мұрын қуысындағы ауаның таралуының сандық модельдеуі жылдамдық және температура профильдерінің сандық нәтижелерімен салыстырылды. Сандық модельдеу нәтижелерінен ішкі альвеолярлық жағдайға жету үшін тыныс алу кезінде адам мұрны ауаны жылыту және ылғандандыру үшін жеткілікті уақыт бар. Ауа өту жолын тарылту және ішкі қуыс қабырғасының мұрын қалқанының құйындары мұрын қуысында жылу алмасуды тездетеді.

Түйін сөздер: адам тыныс алу жүйесінде ауаның таралуы, альвеолярлы жағдай, мұрын қуысында жылу алмасу, Навье-Стокс теңдеуі, физикалық параметрлер бойынша ыдырату схемасы, ақырлы көлем әдісі.

Air transport properties in the human respiratory system by using numerical simulation

Issakhov A.A., Ph.D., al-Farabi Kazakh National University,

Almaty, Kazakhstan, +77056108050, E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

Abylkassymova A., doctorate student, al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

This paper considers air transport in the human respiratory system with the numerical simulation. Investigation of air flow in the human nasal cavity is of considerable interest, since breathing is done mainly through the nose. Nasal breathing is important to maintain the internal environment of lung, as the ambient temperature becomes alveolar conditions when the nasopharynx. In this study conducted a two-dimensional numerical simulation of air transport in the model cross-sections of the nasal cavity to normal human nose, which based on the Navier-Stokes equations, the equations for temperature and equation for relative humidity. For the numerical solution of this system of equations is used projection method. The obtained data transfer numerical modeling air human nasal cavity were verified with known numerical results in the form of velocity and temperature profiles. Numerical modeling results show that with normal breathing through a human nose have enough time to heat and water exchange to achieve intraalveolar state. The nasal cavity accelerates heat by narrowing the air passages and twists of the turbinates walls of the inner cavity.

Key words: transport of air in the human respiratory system, alveolar state, heat transfer in the nasal cavity, the Navier-Stokes equations, projection method, finite volume method.

1 Введение

Через носовую полость происходит первичное распознавание запахов, через него мы вдыхаем воздух, который переходит в альвеолярные состояния (нагревается там до физиологически нормальной температуры и полностью насыщается водяным паром). Его пределы ограничены вестибулярным аппаратом и внутренними отверстиями полости носа (ходами). Носовая полость разделена анатомически на несколько отделов. Перегородкой нос разделен на две симметричные полости. Внешние отверстия носа - ноздри, ведут к преддверию, имеющему крыльчатые хрящи и колумеллу. В преддверии имеются маленькие волоски - вибриссы. В носу во внутреннем носовом клапане есть место сужения, который соединяет преддверие и собственно полость носа. Носовая полость содержит 2-3 сосудистых образований - носовые раковины. Они выполняют функции регуляторов всей воздушной циркуляции, создают нормальную температуру воздуха и полностью насыщают водяным паром, очищают и обеззараживают его. В норме воздушный поток проходит через нос со скоростью 6 л/мин, этот показатель может быть увеличен до 10 л/мин. Однако носовая полость имеет в зависимости от причины возникновения, искривления и могут быть разделены как:

1. Физиологические
2. Компенсаторные
3. Травматические

При вышеуказанном характере искривления, оно негативно сказывается в первую очередь на затруднения дыхания. Носовое дыхание является очень важной, системной частью жизнедеятельности нашего организма и любые его нарушения рано или поздно вызывают отрицательные последствия для человеческого организма. Чаще всего страдает сердечно-сосудистая система, развиваются бронхит или регулярные простуды. Также отрицательные последствия для здоровья из-за носовой полости можно отнести такие причины:

- Затруднение носового дыхания;
- Хронический ринит;
- Аллергические реакции;
- Головные боли;
- Сухость в носу, дискомфорт и неприятные ощущения во время носового дыхания;
- Носовые кровотечения;
- Храп по ночам;
- Повышенная утомляемость, снижение работоспособности, пониженная устойчивость к физическим нагрузкам;
- Частые инфекции, протекающие с симптомами ОРЗ (насморк, кашель, чихание), повышением температуры тела;
- Симптомы хронического воспаления глотки и гортани;
- Симптомы воспалительного процесса в среднем ухе;
- Нарушение формы носа;
- Ухудшение памяти, мышления, рассеянность внимания.

Основным методом устранения искривления носовой полости является хирургическая операция - септопластика. Однако надо отметить, что успешность хирургической операции в лучшем случае не превышает 80 %, что приводит к повторной хирургической операции. А также хирургическая операция будет, зависеть от опыта и умелости самого хирурга. Естественно для увеличения процента успешности хирургической операции нужно будет точно сделать исправления носовой полости. Так как до хирургического вмешательства за счет рентгеновских снимков можно будет оценить характер искривления и с помощью численного моделирования можно будет заранее исправить и оптимизировать носовую полость. Зная предварительно точное исправление носовой пазухи, хирург может увеличить процент успешности проводимой хирургической операции, что соответственно уменьшит процент повторной операции.

2 Обзор литературы

Носовая полость уравнивает вдыхаемый воздух с внутренним состоянием тела с удивительной эффективностью. В работах Коула (Cole, 1953: 669-681), Инглестедта (Ingelstedt, 1956: 1-80) и Вебба (Webb, 1951: 378-382) были достигнуты общие соглашения, что вдыхаемый воздух через носовую полость достигает до альвеолярного состояния (полностью насыщен парами воды и при нормальной температуре тела) к тому времени, когда она достигает глотки, и это практически не зависит от состояния окружающего воздуха поступившего через ноздри. Эти результаты, также были получены в работе Фарли и Пател (Farley and etc., 1988: 628-632), которые собирали в естественных условиях данные с показания температуры воздуха вдоль верхних дыхательных

путей, а также в работе Ханна и Шерер (Hanna and etc., 1986: 12-18), отражаются измерения локальных коэффициентов массообмена на гипсовой модели верхней дыхательной пути человека. Тем не менее, в работе МакФаден (McFadden, 1983: 331-336) отметил, что выводы справедливы и для спокойного дыхания, в некоторых обстоятельствах при высоких уровнях вентиляции, кондиционирование дополнительного воздуха должно происходить во внутригрудных дыхательных путях для того, чтобы полностью обуславливать вдыхаемый воздух в альвеолярном состоянии.

Многочисленные исследования были направлены на оценку увлажнения и регулирования температуры носовой полости. Однако математические модели были основаны на осесимметричных трубках или занятых квазистационарных потоках (Naftali and etc., 1998: 931-939). Как правило, эти работы подтвердили мнение, что в нормальных условиях есть достаточно времени для нагрева и увлажнения воздуха в носовой полости. Кроме того, лекарства также как хирургические процедуры в настоящее время используются с возрастающей скоростью для восстановления структуры и функций носовой полости (Magan, 1990). Например, ароматические ингаляции используются для улучшения воздушного потока и для уменьшения скопления, а также процедуры ринопластики используются для преодоления травмы или эстетических деформаций. Эти искусственные вмешательства вызывают локальные изменения, и могут повлиять на эффективность транспортных явлений воздуха. Однако, точные интраназальные характеристики и распределение транспортных явлений пока еще неизвестны даже для нормального (или здорового) состояния (Issakhov, 2016: 1082-1096), (Issakhov, 2011: 1282-1288).

Экспериментальное исследование носовой полости является практически невозможным, из-за сложной внутренней структуры и размеров, т.е. введение любого измерительного прибора или зонда вызывает дополнительное возмущение потока. Поэтому математическое моделирование является одним из единственных подходов для изучения течения воздуха в носовой полости.

Целью данного исследования было использование численного вычисления для исследования динамической емкости носовой полости, процесса нагрева и увлажнения вдыхаемого воздуха.

3 Постановка задачи

Воздушный поток через структуру носовой полости проходит очень сложный путь. Сложная структура носовой полости и полный трехмерный анализ потока пара, передача тепла во внутренней части слизистой оболочки носовой полости требует значительных вычислительных ресурсов, которые препятствуют систематическому анализу соответствующих факторов (Рисунок 1).

С учетом имеющихся вычислительных ресурсов, комплексное исследование транспортных механизмов проводилось в двумерном виде, через поперечные сечения носа.

Дополнительно для численного моделирования делаются следующие предположения:

- Стенки носовой полости и носовых раковин предполагаются неподвижно твердыми.
- Течение воздуха в носовой полости рассматривается как ламинарное течение, и воздух как несжимаемую среду (так как числа Рейнольдса и Маха очень маленькие).
- Скорости на стенках полости принимаются как нулевые ($u = 0, v = 0$).

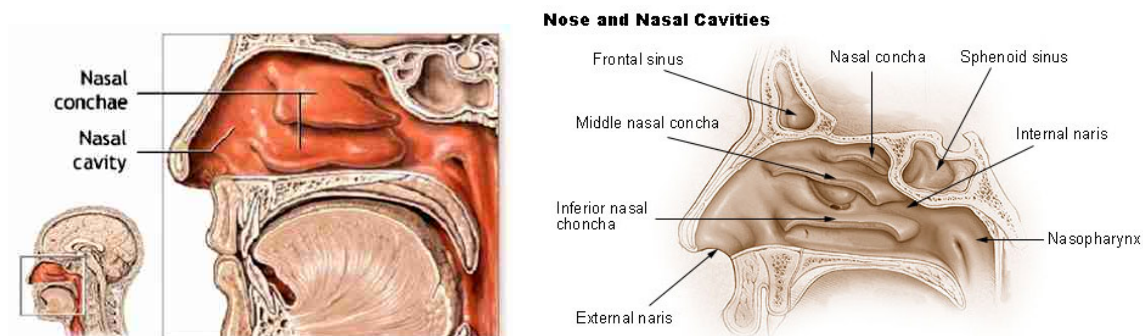
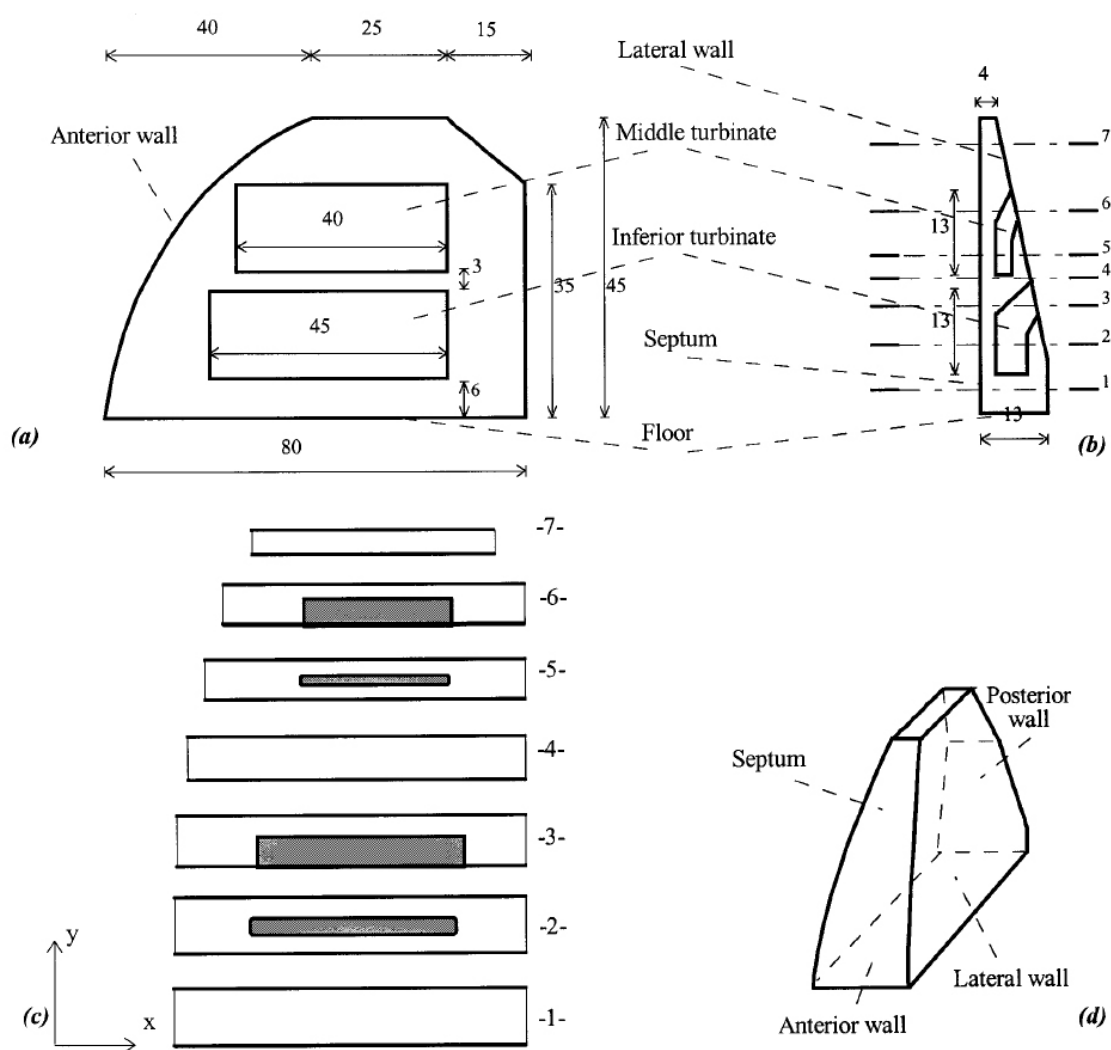


Рисунок 1 – Модель носа при продольном сечении.

Рисунок 2 – Упрощенная модель носа: а) продольное сечение, б) коронарное сечение, в) поперечные сечения на высоте $h=3, 13, 17, 20, 26, 33, 40$ мм от нижней точки носовой полости, д) перспективный вид.

– Стенки носовой полости считаются полностью насыщенными парами воды и температура вблизи тела из-за влажного слизистого слоя доходят до васкулярных сосудов носовой стенки.

Тонкие особенности носа не имеют точных размеров, т.к. существуют различия в структуре носовой полости у здоровых людей, поэтому практически невозможно определить точную модель "нормального носа". Таким образом, разрабатывается упрощенная модель носа, где выявляются основные существенные признаки носовой полости. Размеры взяты из усредненных данных носовой полости человека (Рисунок 2).

Физической областью задачи является второе поперечное сечение (Рисунок 2(с) 2-"), которое имеет важное значение для исследования, т.к. именно в этой области протекает значимая доля воздушного потока, а также имеет сложную структуру, благодаря которой выполняются основные функции носовой полости.

Математическая модель построена на основе уравнений Навье-Стокса, включающие уравнение неразрывности, уравнение движения, а также дополнительно используется уравнение энергии (температуры) и уравнения для относительной влажности (Ferziger and etc., 2013), (Fletcher and etc., 2013), (Chung, 2002).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{k}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right)$$

где u, v - компоненты скорости, t - время, p - давление, ν - кинематическая вязкость, T - температура, C - влажность, c_p - удельная теплоемкость среды при постоянном давлении, k - коэффициент теплопроводности, ρ - плотность, D - коэффициент молекулярной диффузии.

Мгновенная скорость на входе в каждом поперечном сечении предполагается, что имеет параболический профиль с максимальной скоростью $(U_{in}^M)_{\max}$, которая изменяется в течение дыхательного цикла. В работе Хирардин и др. (Girardin, 1983: 231-236) проведены измерения с помощью лазерной анемометрии в модели носа человека и были обнаружены, что поле течения в основном имеют слоистые параболические профили

скорости в любом поперечном сечении. В состоянии покоя, нормальный взрослый человек дышит объемом около $V_T = 0.5L$ (вдох и выдох) $f = 15$ раз в минуту при средней скорости потока около $0,125$ л/с в каждую ноздрю. Соответственно, мгновенное распределение скорости на входе U_{in}^M в направлении x дана таком виде (Рисунок 3):

$$u_{in}(t, x = 0, y) = (U_{in}^M)_{\max} \left[2 \sin^2 \frac{\pi t}{2} - 1 \right] \times \frac{(12y - y^2)}{36}$$

Граничное условие входа для температуры и относительной влажности внешнего воздуха взята равным $25^\circ C$ и $0.0047 \text{ kg } H_2O/m^3$, соответственно:

$$T_{in}(t, x = 0, y) = 25^\circ C$$

$$C_{in}(t, x = 0, y) = 0.0047 \text{ kg } H_2O/m^3$$

На стенках носовой полости и носовой раковины:

$$u_{wall}(t, x, y) = 0, \quad v_{wall}(t, x, y) = 0,$$

$$T_{wall}(t, x, y) = 37^\circ C \quad C_{in}(t, x, y) = 0.0438 \text{ kg } H_2O/m^3$$

Начальные условия задаются в таком виде:

$$u_0(t = 0) = 0,$$

$$T_0(t = 0) = 32^\circ C.$$

$$C_0(t = 0) = 0.0235 \text{ kg } H_2O/m^3.$$

4 Материал и методы

Для численного решения данной системы уравнений используется схема расщепления по физическим параметрам (Issakhov, 2015: 229-238), (Chorin, 1968: 745-762). Уравнения дискретизируются методом конечных объемов (Peyret, 1983), (Pletcher and etc., 2011), (Roache, 1972). На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии, и методом Рунге-Кутты четвертого

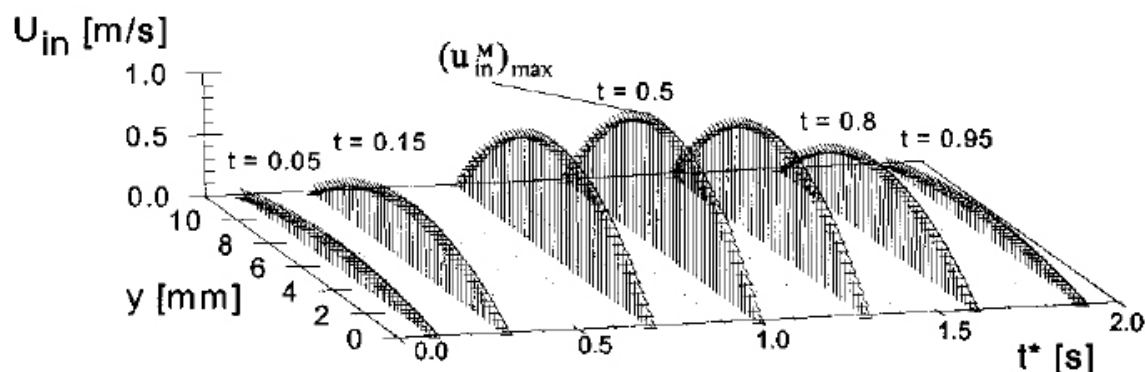


Рисунок 3 – Скорость воздуха на входе в поперечном сечении.

порядка вычисляется промежуточное поле скоростей (Chung, 2002). На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Якоби. На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления. На четвертом этапе вычисляется уравнения для температуры методом Рунге-Кутты четвертого порядка. На пятом этапе вычисляется уравнения для относительной влажности, также решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка (Chung, 2002), (Issakhov, 2016: 1082-1096), (Issakhov, 2011: 1282-1288). Ниже приведена математическая запись данного алгоритма:

$$1) \int_{\Omega} \frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\tau} d\Omega = -\oint_{\partial\Omega} (\nabla \vec{u}^n \vec{u}^* - \nu \Delta \vec{u}^*) n_i d\Gamma$$

$$1) \oint_{\partial\Omega} (\Delta p) d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\nabla \vec{u}^*}{\tau} d\Omega$$

$$1) \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\tau} = -\nabla p.$$

$$1) \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \frac{k}{\rho c_p} \Delta T - \nabla u^n T$$

$$1) \frac{C^{n+1} - C^n}{\tau} = D \Delta C - \nabla u^n C$$

Для проведения численного моделирования была построена вычислительная сетка с помощью программного комплекса PointWise. Для того чтобы распараллелить численный алгоритм используется метод декомпозиции области для этого вычислительная область делится на 12 подобластей. Поставленная задача запускалась на программном комплексе ITFS-MKM на высокопроизводительном кластере T-Cluster при механико-математическом факультете КазНУ им. аль-Фараби

5 Результаты и обсуждение

В результате численного моделирования аэродинамики носовой полости человека получены следующие данные. А также для проверки данного численного алгоритма использовались данные расчетов из статьи (Naftali and etc., 1998: 831-839), где описаны профили продольной компоненты скорости и температуры в трех поперечных сечениях: на расстоянии $x_1 = 17\text{ мм}$, $x_2 = 49\text{ мм}$ и $x_3 = 80\text{ мм}$ от входа (Рис. 4). Для численного моделирования использовались соответствующие, параметры для воздушных констант: $\rho = 1.12\text{ кг/м}^3$, $\mu = 1.9 \times 10^{-5}\text{ кг/мс}$, $c_p = 1005.5\text{ Дж/кгК}$, $k = 0.0268\text{ Вт/мК}$, $D = 2.6 \times 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}$.

На рисунке 5 показаны сравнение профилей для x_1 , x_2 и x_3 продольной составляющей скорости результатов расчета и данных из статьи Naftali S. (Naftali and etc., 1998: 831-839). На рисунке 6 показаны сравнение профилей температуры для сечений x_1 , x_2 и x_3 с работой (Naftali and etc., 1998: 831-839). На рисунке 7 показаны профили относительной влажности для сечений x_1 , x_2 и x_3 . На всех рисунках представлены численные результаты были обезразмерены.

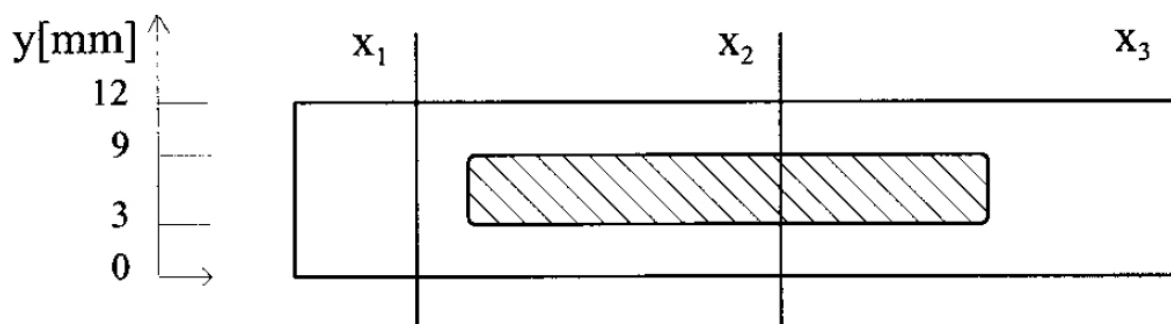


Рисунок 4 – Оценка в трех локациях для температуры и скорости для поперечного сечения.

На рисунке 8 изображен продольный компонент скорости в поперечном сечении для времени $t = 1\text{ с}$. На рисунке 9 изображен поперечный компонент скорости в поперечном сечении для времени $t = 1\text{ с}$. Из рисунков видно, что появляющиеся из-за носовых раковин вихревые течения, которые играют немаловажную роль в процессе нагрева воздуха. На рисунке 10 - 11 отображаются компоненты температуры, и относительная влажность на расчетной области для времени $t = 1\text{ с}$. Из рисунков можно заметить, что при прохождении в узких местах носовой полости воздух нагревается вниз по течению, а также увеличивается относительная влажность. А также из рисунка 9 можно увидеть, что за носовой перегородкой температура увеличивается и к носоглотке температура воздуха греется до альвеолярного состояния. А при низкой температуре окружающей среды относительная влажность играет очень важную роль.

6 Заключение

Таким образом, в ходе исследования носовой полости можно сделать следующие выводы, что стенки носовой полости способствуют нагреву воздуха и появлению вихрей,

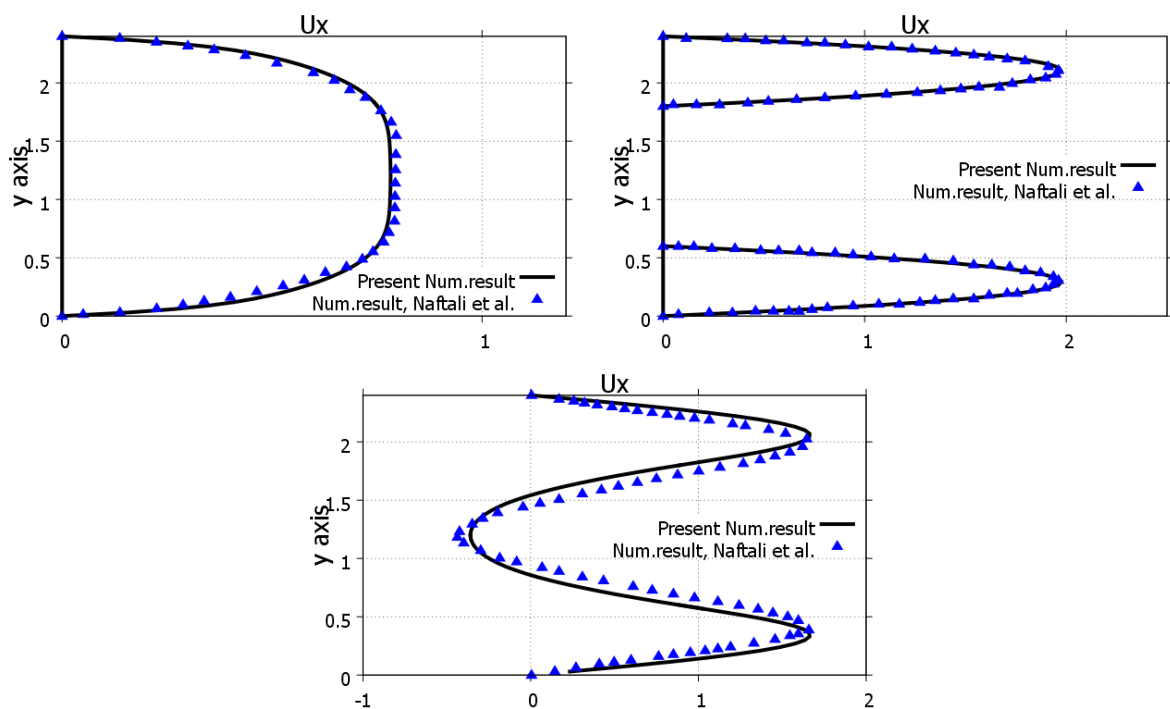


Рисунок 5 – Сравнения профили составляющей скорости для сечений $x_1 = 17$ мм, $x_1 = 49$ мм и $x_3 = 80$ мм с результатами расчетов из статьи (Naftali and etc., 1998: 831-839).

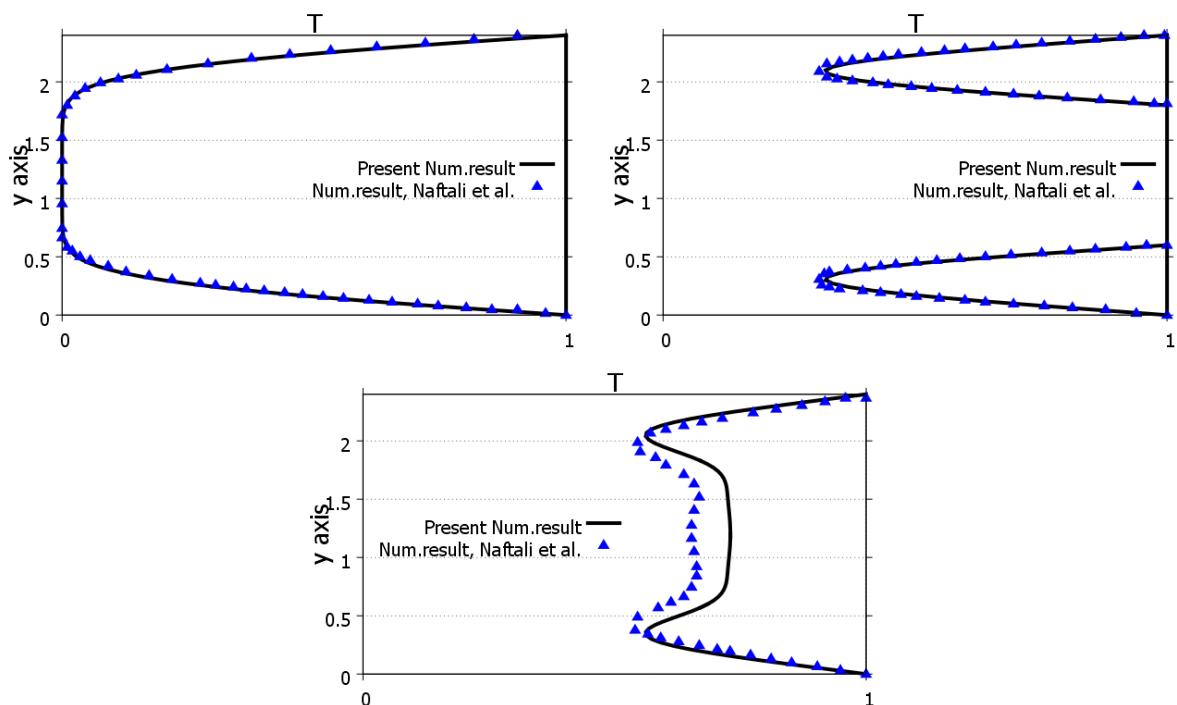


Рисунок 6 – Сравнения профилей температуры для сечений $x_1 = 17$ мм, $x_1 = 49$ мм и $x_3 = 80$ мм с результатами расчетов из статьи (Naftali and etc., 1998: 831-839).

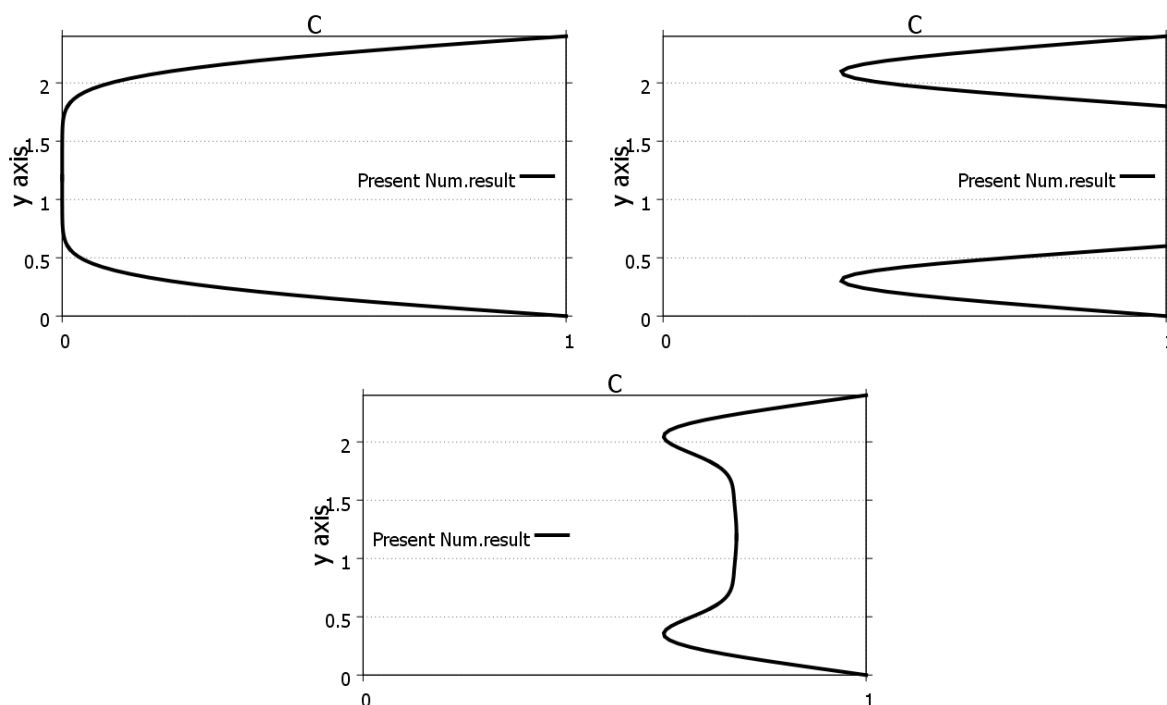


Рисунок 7 – Профили относительной влажности для сечений $x_1 = 17$ мм, $x_1 = 49$ мм и $x_3 = 80$ мм.

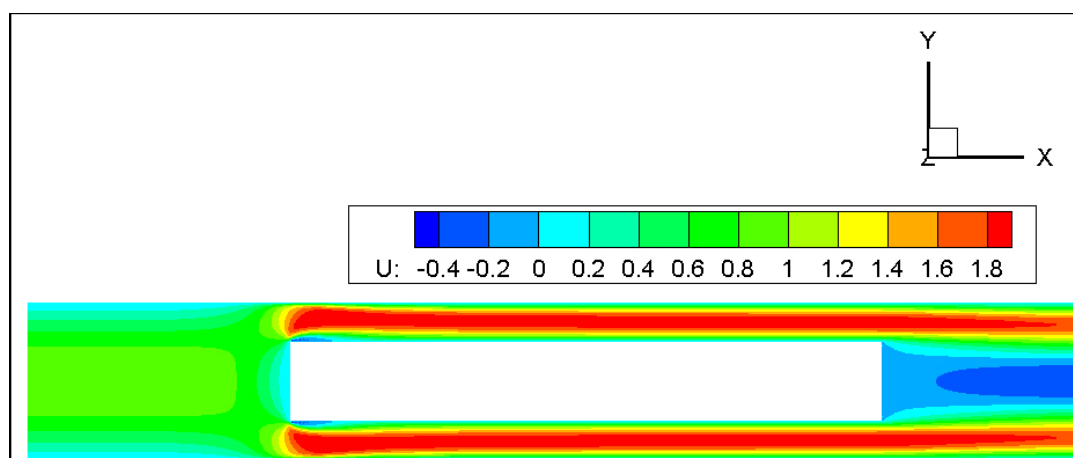


Рисунок 8 – Продольные компоненты скорости потока для поперечного сечения.

которые имеют немаловажное значение для перехода воздуха в альвеолярное состояние, перед тем как попасть в носоглотку. А также немаловажную роль играет, относительная влажность в носовой полости, так как при низких температурах окружающей среды за счет влажности идет нагревание входного воздуха. Исследования движения воздуха в носовой полости являются актуально значимыми, так как в настоящее время, по разным причинам увеличивается число людей с проблемами носового дыхания данная проблема разрешается хирургическим путем, где важно оптимально оперировать структуру носа, так чтобы носовая полость правильно функционировала, поскольку нормальное дыхание должно осуществляться с помощью носа.

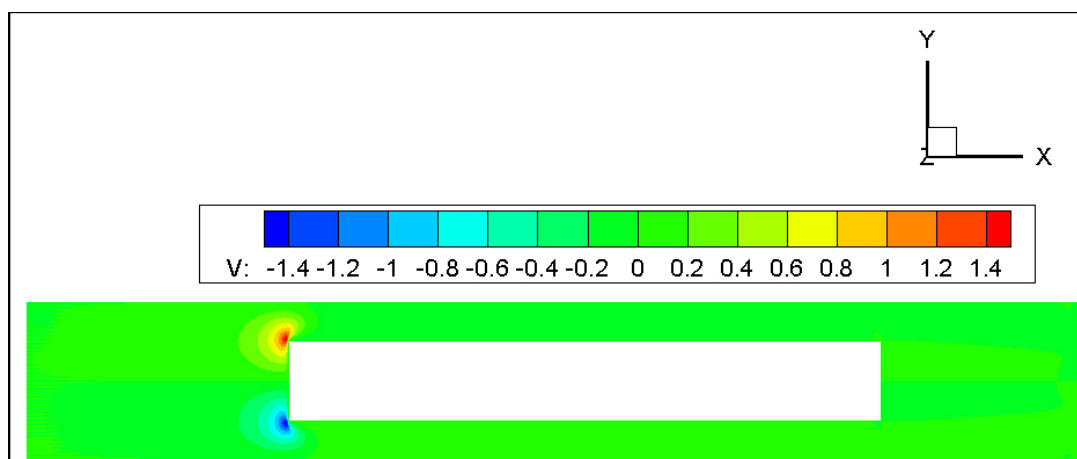


Рисунок 9 – Поперечные компоненты скорости потока для поперечного сечения.

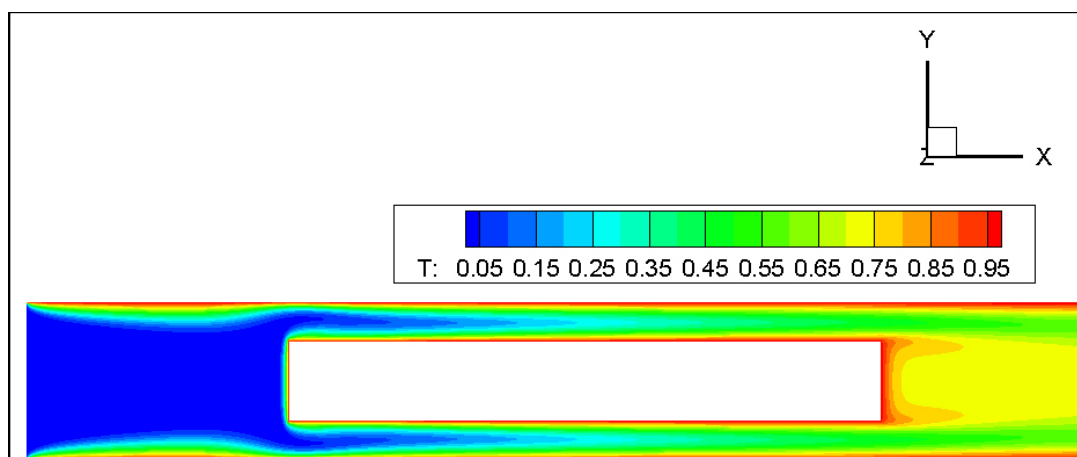


Рисунок 10 – Температура потока для поперечного сечения.

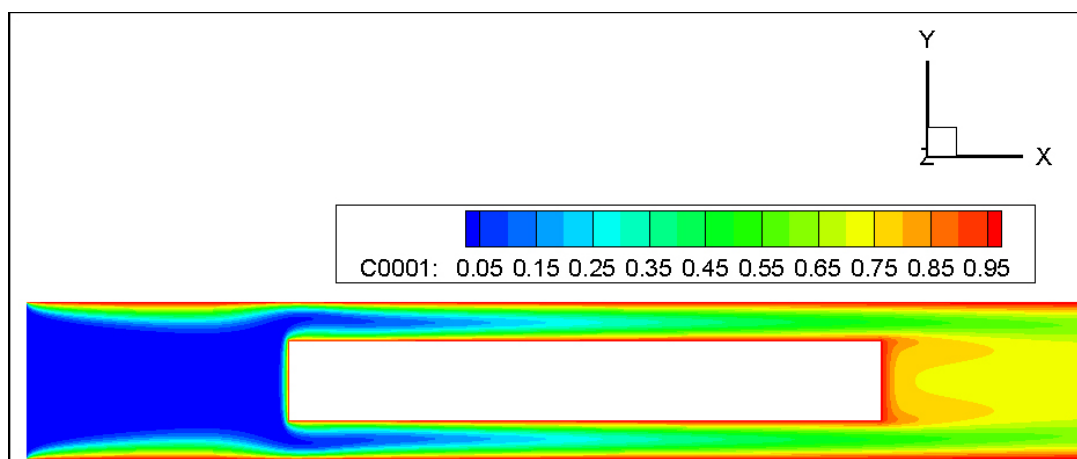


Рисунок 11 – Относительная влажность потока для поперечного сечения.

Список литературы

- [1] Chorin A.J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations // *Math. Comp.* — 1968. — 22. — P. 745-762.
- [2] Cole P. Some aspects of temperature, moisture and heat relationships in the upper respiratory tract // *J. Laryngol. Otol.* — 1953. — 67. — P. 669-681.
- [3] Chung T.J., *Computational Fluid Dynamics*, — Cambridge University Press, 2002, — 1012 p.
- [4] Farley R. D., and Patel K. R. Comparison of air warming in human airway with thermodynamic model // *Med. Biol. Eng. Comput.* — 1988. — 26. — P. 628-632.
- [5] Ferziger J.H., Peric M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, third edition, Springer, 2013. — 426 p.
- [6] Fletcher C. A.J., Fletcher C. A. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, Vol. 1: Fundamental and General Techniques. — Springer. 2013. — 401 p.
- [7] Girardin, M., E. Bilgen, and P. Arbour. Experimental study of velocity fields in a human nasal fossa by laser anemometry // *Ann. Otol. Rhinol. Laryngol.* — 1983. — 92. — P. 231-236.
- [8] Hanna L. M., and Scherer P. W. Measurement of local mass transfer coefficients in a cast model of the human upper respiratory tract // *J. Biomech. Eng.* — 1986. — 108. — P. 12-18.
- [9] Ingelstedt S. Studies on conditioning of air in the respiratory tract // *Acta Oto-Laryngol. Suppl.* — 1956. — 131. — P. 1-80.
- [10] Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2015. — 16(5). — P. 229-238. doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [11] Issakhov A. Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // *Applied Mathematical Modelling*, — 2016. — Volume 40. — Issue 2. — P. 1082-1096. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.
- [12] Issakhov A. Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method // *J. Phys.: Conf. Ser.* — 2011. — 318(4). — P. 1282-1288. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [13] Maran A. G. D., and Lund V. J. *Clinical Rhinology* // — New York: Thieme Medical. — 1990.
- [14] McFadden E. R. Respiratory heat and water exchange: Physiological and clinical implications // *J. Appl. Physiol.* — 1983. — 54. — P. 331-336.
- [15] Naftali S., Schroter R. C., Shiner R. J., Elad D. Transport Phenomena in the Human Nasal Cavity: A Computational Model // *Annals of biomedical engineering*. — 1998. — P. 831-839.
- [16] Peyret R., Taylor D. Th. *Computational Methods for Fluid Flow*. — Springer-Verlag, New York: Berlin, 1983, — 358 p.
- [17] Pletcher R. H., Tannehill J. C., Anderson D. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Third Edition (Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences). — CRC Press. 2011. — 774 p.
- [18] Roache P.J. *Computational Fluid Dynamics*. — Hermosa Publications, Albuquerque, NM, 1972. — 434 p.
- [19] Webb P. Air temperatures in respiratory tracts of resting subjects // *J. Appl. Physiol.* — 1951. — 4. — P. 378-382.

References

- [1] Chorin, A.J. "Numerical solution of the Navier-Stokes equations." *Math. Comp.* 22(1968): 745-762.
- [2] Cole, P. "Some aspects of temperature, moisture and heat relationships in the upper respiratory tract," *J. Laryngol. Otol.* 67 (1953): 669-681.
- [3] Chung, T.J., "Computational Fluid Dynamics," Cambridge University Press, (2002), 1012 p.
- [4] Farley, R. D., and Patel, K. R. "Comparison of air warming in human airway with thermodynamic model," *Med. Biol. Eng. Comput.* 26 (1988): 628-632.
- [5] Ferziger, J.H. and Peric M. "Computational Methods for Fluid Dynamics, third edition," Springer, (2013), 426 p.
- [6] Fletcher, C. A.J. and Fletcher, C. A. "Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 1: Fundamental and General Techniques," Springer. (2013). 401 p.
- [7] Girardin, M., E. Bilgen, and P. Arbour. "Experimental study of velocity fields in a human nasal fossa by laser anemometry," *Ann. Otol. Rhinol. Laryngol.* 92(1983): 231-236.
- [8] Hanna L. M., and Scherer P. W. "Measurement of local mass transfer coefficients in a cast model of the human upper respiratory tract," *J. Biomech. Eng.* 108(1986): 12-18.
- [9] Ingelstedt S. "Studies on conditioning of air in the respiratory tract." *Acta Oto-Laryngol. Suppl.* 131(1956): 1-80.
- [10] Issakhov A. "Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant," *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16(5) (2015): 229-238. doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [11] Issakhov A. "Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities," *Applied Mathematical Modelling* Volume 40, Issue 2 (2016): 1082-1096. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.
- [12] Issakhov A. "Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method," *J. Phys.: Conf. Ser.* 318(4) (2011): 1282-1288. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [13] Maran A. G. D., and Lund V. J. "Clinical Rhinology," New York: Thieme Medical. (1990).
- [14] McFadden E. R. "Respiratory heat and water exchange: Physiological and clinical implications," *J. Appl. Physiol.* 54(1983): 331-336.
- [15] Naftali S., Schroter R. C., Shiner R. J. and Elad D. "Transport Phenomena in the Human Nasal Cavity: A Computational Model," *Annals of biomedical engineering* (1998): 831-839.
- [16] Peyret R. and Taylor D.Th. "Computational Methods for Fluid Flow," Springer-Verlag, NewYork:Berlin, (1983). 358 p.
- [17] Pletcher R. H., Tannehill J. C. and Anderson D. "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Third Edition (Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences)," CRC Press. (2011). 774 p.
- [18] Roache P.J. "Computational Fluid Dynamics," Hermosa Publications, Albuquerque, NM, (1972). 434 p.
- [19] Webb P. "Air temperatures in respiratory tracts of resting subjects," *J. Appl. Physiol.* 4(1951): 378-382.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Айсагалиев Серикбай Абдигалиевич* - профессор Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук
2. *Айсагалиева София Серикбаевна* - главный научный сотрудник НИИ математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
3. *Абылкасымова Айжан Болатовна* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби
4. *Ахметов Бахытжан* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби
5. *Айдаров Канат Алхожаевич* - докторант Казахского национального университета имени аль-Фараби,
6. *Алматов Абат Жанатович* - студент Казахского национального университета имени аль-Фараби,
7. *Борисов Денис Иванович* - доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики Уфимского научного центра РАН, Университет г. Градец Кралове, Градец Кралове, Чешская республика,
8. *Георгиев Александр Георгиев* - старший преподаватель Технического университета-София, Пловдив, Болгария, доцент
9. *Исахов Алибек Абдиашимович* - доцент Казахского национального университета имени аль-Фараби, Ph.D.
10. *Калтаев Айдархан Жусупбекович* - профессор Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор физико-математических наук
11. *Луцак Светлана Михайловна* - докторант Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева
12. *Максимканова Жазира Ауезбеккызы* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
13. *Мукашева Сауле Нурмуханбетовна* - ведущий научный сотрудник ДТОО «Институт ионосферы», кандидат физико-математических наук
14. *Малимбаев Андрей Маратович* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
15. *Попов Румен Констадинов* - старший преподаватель Пловдивского университета «Паисий Хилендарский», Пловдив, Болгария, доцент
16. *Сакабеков Аужан* - профессор Казахского национального исследовательского технического университета имени К.И. Сатпаева, доктор физико-математических наук
17. *Сейтов Абзал Ниязбекулы* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
18. *Самигулина Галина Ахметовна* - заведующая лабораторией Института информационных и вычислительных технологий, доктор технических наук, доцент
19. *Тлеуова Гайни Нурланкызы* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
20. *Шарипова Гульнар* - научный сотрудник ДТОО «Институт ионосферы»

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набранные только в текстовом формате $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat.dairbayeva@gmail.com (ответственному секретарю редколлегии, Даирбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ или формат eps [см. п.7]. Указывается код по УДК. В редакцию также представляется отпечаток работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисуночными надписями, аннотации, не должен превышать 17 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 6 страниц.
 Структура статьи.
 Первая страница:
 - 1) Первая строка - номер УДК, выравнивание - по левому краю, шрифт - полужирный.
 - 2) Название статьи (Заголовок) должно отражать суть и содержание статьи и привлекать внимание читателя. Название должно быть кратким, информативным и не содержать жаргонизмов или аббревиатур. Оптимальная длина заголовка - 5-7 слов (в некоторых случаях 10-12 слов). Название статьи должно быть представлено на русском, казахском и английском языках. Название статьи представляется полужирным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
 - 3) Автор(ы) статьи - с указанием имени и фамилии, ученой степени, ученого звания, занимаемой должности, места работы, город, страна, контактный телефон, email - на русском, казахском и английском языках. Сведения об авторах представляются обычным шрифтом строчными буквами, выравнивание - по центру.
 - 4) Аннотация объемом 150-500 слов на русском, казахском и английском языках. Структура аннотации включает в себя следующие ОБЯЗАТЕЛЬНЫЕ пункты: "Вступительное слово о теме исследования. "Цель, основные направления и идеи научного исследования. "Краткое описание научной и практической значимости работы. "Краткое описание методологии исследования. "Основные результаты и анализ, выводы исследовательской работы. "Ценность проведенного исследования (внесенный вклад данной работы в соответствующую область знаний). "Практическое значение итогов работы.
 - 5) Ключевые слова/словосочетания - количеством 3-5 на русском, казахском и английском языках.
 Последующая страница (новая):
 - 6) Введение состоит из следующих основных элементов: "Обоснование выбора темы; актуальность темы или проблемы. В обосновании выбора темы на основе описания опыта предшественников сообщается о наличии проблемной ситуации (отсутствие каких-либо исследований, появление нового объекта и т.д.). Актуальность темы определяется общим интересом к изученности данного объекта, но отсутствием исчерпывающих ответов на имеющиеся вопросы, она доказывается теоретической или практической значимостью темы. "Определение объекта, предмета, целей, задач, методов, подходов, гипотезы и значения вашей работы. Цель исследования связана с доказательством тезиса, то есть представлением предмета исследования в избранном автором

аспекте.

7) Материал и Методы - должны состоять из описания материалов и хода работы, а также полного описания использованных методов. Характеристика или описание материала исследования включает его представление в качественном и количественном отношении. Характеристика материала - один из факторов, определяющий достоверность выводов и методов исследования. В этом разделе описывается, как проблема была изучена: подробная информация без повторения ранее опубликованных установленных процедур; используется идентификация оборудования (программного обеспечения) и описание материалов, с обязательным внесением новизны при использовании материалов и методов. Научная методология должна включать в себя: - исследовательский вопрос(-ы); - выдвигаемую гипотезу (тезис); - этапы исследования; - методы исследования; - результаты исследования.

8) В секции обзор литературы - должны быть охвачены фундаментальные и новые труды по исследуемой тематике зарубежных авторов на английском языке (не менее 15 трудов), анализ данных трудов с точки зрения их научного вклада, а также пробелы в исследовании, которые Вы дополняете в своей статье. НЕДОПУСТИМО наличие множества ссылок, не имеющих отношения к работе, или неуместные суждения о ваших собственных достижениях, ссылки на Ваши предыдущие работы.

9) В разделе Результаты и Обсуждение - приводится анализ и обсуждение полученных вами результатов исследования. Приводятся выводы по полученным в ходе исследования результатам, раскрывается основная суть. И это один из самых важных разделов статьи. В нем необходимо провести анализ результатов своей работы и обсуждение соответствующих результатов в сравнении с предыдущими работами, анализами и выводами.

10) Заключение, выводы - обобщение и подведение итогов работы на данном этапе; подтверждение истинности выдвигаемого утверждения, высказанного автором, и заключение автора об изменении научного знания с учетом полученных результатов. Выводы не должны быть абстрактными, они должны быть использованы для обобщения результатов исследования в той или иной научной области, с описанием предложений или возможностей дальнейшей работы. Структура заключения должна содержать следующие вопросы: Каковы цели и методы исследования? Какие результаты получены? Каковы выводы? Каковы перспективы и возможности внедрения, применения разработки?

11) Список используемой литературы, или Библиографический список состоит из не менее 30 наименований литературы, и из них 50 необходимо представить список литературы в двух вариантах: первый - в оригинале, второй - романизированным алфавитом (транслитерация). Романизированный список литературы должен выглядеть в следующем виде: автор(-ы) (транслитерация) – (год в круглых скобках)– название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название русскоязычного источника (транслитерация, либо английское название - если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке. Например: Gokhberg L., Kuznetsova T. Strategiya-2020: novye kontury rossiiskoi innovatsionnoi politiki [Strategy 2020: New Outlines of Innovation Policy]. Foresight-Russia, vol. 5, no 4.(2011): pp. 8-30.

Список литературы представляется в алфавитном порядке, и ТОЛЬКО те работы, которые цитируются в тексте. Стиль оформления списка литературы на русском и казахском языке согласно ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления"(требование к изданиям, входящих в перечень ККСОН). Стиль оформления Романизированного списка литературы, а также источников на английском (другом иностранном) языке для естественнонаучных и технических направлений - Chicago Style (www.chicagomanualofstyle.org).

В данном разделе необходимо учесть:

- а) Цитируются основные научные публикации, передовые методы исследования, которые применяются в данной области науки и на которых основана работа автора.
- б) Избегайте чрезмерных самоцитирований.
- в) Избегайте чрезмерных ссылок на публикации авторов СНГ/СССР, используйте мировой опыт.
- г) Библиографический список должен содержать фундаментальные и наиболее актуальные труды, опубликованные известными зарубежными авторами и исследователями по теме статьи.

- 12) Ссылки на цитируемые работы в тексте даются в скобках, с указанием первого автора работы, год издания: номер страниц(-ы). Например, (Залесский 1991: 25). В случае, наличия в списке литературы нескольких работ одного и того же автора, изданных в один год, то дополнительно к году издания добавляется буква "а" "б" и т.д. Например, (Садуова, 2001а: 15), (Садуова, 2001б, 22).
6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов L^AT_EX2_ε и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате `.eps`, либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов `Maple`, `Mathematica` или с помощью пакета `Latexcad`. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат `.eps` с помощью `Adobe Photoshop` или конвертера `Conversion Artist`. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ

1-бөлім

Математика

Айсағалиев С.А., Айсағалиева С.С.

Существование решения задачи управляемости для линейных интегро-дифференциальных уравнений с ограничениями 3

Borisov D.I.

Initial length scale estimate for the Schrödinger operator with a random fast oscillating potential in a multi-dimensional layer 21

Луцак С.М.

Сложность решеток квазимногообразий для классов дифференциальных группоидов 32

Sakabekov A., Tleuova G.

The numerical solution of the initial and boundary value problem for one-dimensional nonstationary nonlinear Boltzmann's six-moment system equations with the Vladimirov-Marshak boundary conditions 46

2-бөлім

Механика

Akhmetov B., Seitov A., Popov R., Georgiev A., Kaltayev A.

Experimental and numerical studies of PCM-based storage for solar thermal energy storage applications 55

3-бөлім

Информатика

Aidarov K.A., Almatov A.Zh.

Study of enterprise load balancing algorithms using model-based design 69

Мукашева С.Н., Малимбаев А.М., Шарипова Г.

Требования к геоинформационной системе для сбора, обработки, визуализации и анализа экспериментальных геофизических наземных и спутниковых данных 80

Самигулина Г.А., Масимканова Ж.А.

Онтологические модели алгоритмов роевого интеллекта для иммунносетевого моделирования лекарственных препаратов 92

4-бөлім

Қолданылмалы математика

Исахов А.А., Абылкасымова А. Б.

Свойства переноса воздуха в респираторной системе человека с помощью численного моделирования 105

Сведения об авторах 119

К сведению авторов 120

Раздел 1

Математика

Раздел 2

Механика

Раздел 3

Информатика

Раздел 4

Прикладная математика

CONTENTS

Section 1

Mathematics

*Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S.*The existence of a solution of the controllability problem for linear
integral and differential equations with restrictions 3*Borisov D.I.*Initial length scale estimate for the Schrödinger operator with a random fast oscillating potential in a multi-
dimensional layer 21*Lutsak S.M.*

The complexity of quasivariety lattices for the classes of differential groupoids 32

*Sakabekov A., Tleuova G.*The numerical solution of the initial and boundary value problem for one-dimensional nonstationary nonlinear
Boltzmann's six-moment system equations with the Vladimirov-Marshak boundary conditions 46

Section 2

Mechanics

Akhmetov B., Seitov A., Popov, R., Georgiev A., Kaltayev A.

Experimental and numerical studies of PCM-based storage for solar thermal energy storage applications 55

Section 3

Computer science

Aidarov K.A., Almatov A.Zh.

Study of enterprise load balancing algorithms using model-based design 69

*Mukasheva S.N., Malimbayev A.M., Sharipova G.*Requirements for Geoinformational System for Gathering, Processing, Visualization,
and Analysis of Experimental Geophysical Ground and Satellite Data 80*Samigulina G.A., Massimkanova Zh. A.*

The ontological models of swarm intelligence algorithms for immune network modeling of drugs 92

Section 4

Applied
Mathematics*Issakhov A.A., Abylkassymova A.*

Air transport properties in the human respiratory system by using numerical simulation 105

Сведения об авторах 119

К сведению авторов 120