

ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ҚазҰУ ХАБАРШЫСЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК КазНУ

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

KazNU BULLETIN

Mathematics, Mechanics, Computer Science Series

№ 4 (92)

Алматы
«Қазақ университеті»
2016

Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного
согласия Республики Казахстан, свидетельство № 956-Ж от 25.11.1999 г.
(Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.)
Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия:

научный редактор: М.А. Бектемесов - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби
заместитель научного редактора: А.Б. Кыдырбекулы - д.т.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби
ответственный секретарь: Г.М. Даирбаева - к.ф.-м.н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби

Члены редколлегии:

Айсагалиев С.А. - д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Алиев Ф.А. - д.ф.-м.н., профессор, академик Национальной академии наук Азербайджана, Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан
Ахмед-Заки Д.Ж. - д.т.н., КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Бадаев С.А. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Жайнаков А.Ж. - д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Кыргызской Республики, Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Кыргызстан
Кабанихин С.И. - д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия
Калтаев А.Ж. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Кангужин Б.Е. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Майнке М. - профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института Аэродинамики, Германия
Малышкин В.Э. - д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия

Мейрманов А.М. - д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, Россия
Мухамбетжанов С.Т. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Отелбаев М.О. - д.ф.-м.н., профессор, академик Национальной академии наук РК, Евразийский национальный университета им. Л.Н. Гумилева, Казахстан
Панфилов М. - д.ф.-м.н., профессор, Национальный политехнический институт Лотарингии, Франция
Ружанский М. - д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания
Тайманов И.А. - д.ф.-м.н., профессор, академик Российской академии наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия
Тукеев У.А. - д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Шокин Ю.И. - д.ф.-м.н., профессор, академик Российской академии наук, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия
Юлдашев З.Х. - д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан

Научное издание

Вестник КазНУ

Серия математика, механика, информатика

№ 4(92) 2016

Редактор: Г.М. Даирбаева

Компьютерная верстка: Б.А. Аетова

ИБ N 10307

Подписано в печать 20.12.2016 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Объем 9.9 п.л. Тираж 500 экз. Заказ N 6137.

Издательский дом "Қазақ университеті"

Казахского национального университета им. аль-Фараби.

050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома "Қазақ университеті".

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

UDC 005

Akhmetova A.Zh.^{1*}, La L.L.¹

¹Faculty of Information technologies, Eurasian National University, Republic of Kazakhstan,
Astana

*E-mail: akhmetova_ash@enu.kz

About the group approach in the task of fuzzy synthetic evaluation

The fuzzy synthetic evaluation method can be applied to problems where we need to evaluate object determined by various heterogeneous features. The problem is to determine quantitatively significances of various features th6666/at is their weights. Using various weight vectors leads to the different results of evaluation. There are various methods to define weight vectors but there is no criterion to determine the best of them. The work is devoted to the problem of determining the balance in the method of fuzzy synthetic evaluation sites. The paper proposes the use of the cluster approach to determine the weights of the criteria which in a sense, a universal and can be applied to various modifications of this method. We establish a connection between the fuzzy synthetic evaluation method and fuzzy classifications and propose a group approach to determine weights of the method. Also, the article describes the proof of the theorem, which determines the weight of the criteria for the group approach.

Key words: the synthetic method, a group approach, the weight criteria, fuzzy classification.

Ахметова А.Ж., Ла. Л.Л.

О групповом подходе в задаче нечеткой синтетической оценки

Синтетический метод нечеткой оценки может быть применен к задачам, в которых нужно оценить объект, определяемый различными разнородными функциями. Проблема состоит в том, чтобы определить значения различных функций, которым является количественная характеристика – их вес. Использование различных весовых векторов приводит к различным результатам оценки. Существуют различные методы для определения весовых векторов, но нет никакого критерия, чтобы определить лучшие из них. В методе нечеткой синтетической оценки объектов можно определить веса. Предлагается использование группового подхода, с помощью которого можно определить веса критериев. Он является универсальным и может быть применен к различным модификациям этого метода. Для определения веса метода установлена связь между синтетическим методом оценки и нечеткой классификации. Кроме того, в статье описывается доказательство теоремы, которая определяет вес критериев для группового подхода.

Ключевые слова: синтетический метод, групповой подход, веса критериев, нечеткая классификация.

Ахметова А.Ж., Ла. Л.Л.

Бұлдыр синтетикалық бағалау есебіндегі топтық әдіс туралы

Бұлдыр бағалауды жүзеге асыратын синтетикалық әдісті түрлі функциялармен сипатталатын объекттерді бағалауға мүмкіндік беретін есептерге қолдануға болады. Мұндай есептердегі негізгі мәселе – сандық сипаттама болып табылатын түрлі функциялардың мәндері, яғни олардың салмағын анықтау болып табылады. Түрлі салмақтық векторларды қолдану бағалаудың түрлі нәтижелеріне алып келеді. Салмақтық векторларды анықтаудың түрлі әдістері болғанымен, олардың ішінен ең тиімдісін таңдап беретін критерийлердің жоқтың қасы. Объекттерді бұлдыр синтетикалық бағалау әдісі арқылы салмақты анықтауға мүмкіндік бар. Критерийлердің салмағын анықтауға мүмкіндік беретін топтық есептеуді қолдану ұсынылуда. Ол универсалды жол болып саналады және оны синтетикалық бағалау әдісінің түрлі модификацияларына қолдануға болады. Сонымен қатар әдістің салмағын анықтау мақсатында бағалаудың синтетикалық әдісі мен бұлдыр классификациялау әдісі арасында байланыс орнатылды. Бұдан бөлек мақалада топтық есептеуге арналған критерийлер салмағын анықтайтын теорема дәлелдеуі сипатталады.

Түйін сөздер: синтетикалық әдіс, топтық есеп, критерийлер салмағы, бұлдыр классификация.

Introduction

This article is devoted to an application of the group approach for solution of an object evaluation problem where the object is described by numerous non homogeneous attributes. The group approach is used to determine the weights in the fuzzy synthetic evaluation method and a theorem that allows us to find the corresponding weights of the group solution is proved. The fuzzy synthetic evaluation method can be applied to numerous problems where we need to evaluate object determined by many heterogeneous features. Examples include assessment of fire safety in buildings, river and ground water quality [1-3],[9], evaluation of seismic safety of buildings, road transport congestion, air pollution [4-8], [10] and so on. We propose to use a group approach for determining weights which is in some sense universal and can be applied to various modifications of the fuzzy synthetic evaluation method.

Let's remind the definition of the fuzzy synthetic evaluation method and define necessary auxiliary concepts and notations.

Let $M = \{S_1, \dots, S_h\}$ be a finite set of evaluated objects. When an object $S \in M$ is the vector $S = (s_1, \dots, s_n) \in R^n$ of dimension n , we say that S is described by n features or attributes. The magnitude s_i expresses the quantitative value of i -th feature of the object S . In applications attributes characterize various properties of an object that are measured in different units. For example, a roll of fabric $S = (s_1, s_2, s_3)$ can be determined by three features: width, length of the roll and the price for 1 meter of fabric.

As a result of applying the fuzzy synthetic evaluation method we get object's evaluation that is equal to one of the m values of natural language. For example, the evaluation of fire safety of building can accept one of the values: *very safe building*, *safe*, *medium*, *not safe*, *dangerous*. That is after applying of the method the object will be evaluated to belong to one of 5 classes of buildings.

Let $L = \langle \{a_1, \dots, a_m\}, < \rangle$ be a finite lattice, where $a_i < a_j$ iff $i < j$.

Definition 1 [11]. A fuzzy subset A of the set M is a map

$$\mu_A : M \rightarrow L.$$

Here M is a set of evaluated objects and the value $\mu_A(S)$ is interpreted as the degree of membership of an element S to the fuzzy set A , in our case, we suppose that S with a degree of $\mu_A(S)$ possesses the evaluated property. The task of assessment of $S \in M$ will consist in determination of $\mu_A(S)$. Definition of $\mu_A(S)$ happens at some stages called model levels. Depending on quantity of levels we will distinguish one, two, etc. level models.

We suppose that a_i accept values of the natural language, expressing some quality, for example, good, bad, etc.

Now we proceed to the description of the method applied to the two-level model.

Assume that there are k factors $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ on which the object will be evaluated. Each factor is described by n_t , $t = 1, \dots, k$, attributes. Let's consider how an object is evaluated for factor Φ_t .

In the initial phase, with respect to each attribute, object belongs to one of m classes that corresponds to a_j , $j = 1, \dots, m$. Object's belonging to one of the classes is defined as follows.

Let's determine the matrix $\mathbf{R}^t = (r_{ij}^t)_{n_t \times m}$ by the following way.

Let $s_i \in J_i = [y_{i1}, y_{i,m+1}] \subseteq R$, $i = 1, \dots, n$ and $[y_{i1}, y_{i,m+1}]$ be partitioned into m intervals

$$[y_{i1}, y_{i2}), [y_{i2}, y_{i3}), \dots, [y_{im}, y_{i,m+1}].$$

The values $y_{i2}, y_{i3}, \dots, y_{im}$ and the functions $\mu_{J_i} : J_i \rightarrow L$ such that $\mu_{J_i}(s_i) = a_j$ iff $s_i \in [y_{ij}, y_{i,j+1})$ are defined by experts of subject's domain of the solved problem. We suppose that the functions μ_{J_i} are either increasing or decreasing i.e. $\mu_{J_i}(a) \leq \mu_{J_i}(b)$, whereas $a \leq b$ (or $\mu_{J_i}(a) \geq \mu_{J_i}(b)$ at $a \leq b$). Then if μ_{J_i} increases the values r_{ij}^t are defined as follows:

$$r_{i,j}^t = \begin{cases} \frac{s_i - y_{ij}}{y_{i,j+1} - y_{ij}}, & \text{if } \mu_{J_i}(s_i) = a_j; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1)$$

Similarly, if μ_{J_i} is decreasing then

$$r_{ij}^t = \begin{cases} \frac{y_{ij} - s_i}{y_{ij} - y_{i,j+1}}, & \text{if } \mu_{J_i}(s_i) = a_j; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

The first level of the fuzzy synthetic evaluation method is described by equation

$$(\mathbf{w}^t)' \mathbf{R}^t = \mathbf{b}^t \quad (3)$$

where $\mathbf{w}^t = (w_1^t, \dots, w_{n_t}^t)$, $0 \leq w_i^t \leq 1$, is a weight vector, $\mathbf{b}^t = (b_1^t, \dots, b_m^t)$, the vector $(\mathbf{w}^t)'$ is the transpose of $\mathbf{w}^t$,

$$b_j^t = \sum_{i=1}^{n_t} w_i^t r_{ij}^t, \quad (4)$$

$j = 1, \dots, m$. We call $\mathbf{b}^t = (b_1^t, \dots, b_m^t)$ the evaluation vector. On each level, starting from the second one, factors of the prior acts as attributes of the current level. We now describe

the second level of the fuzzy synthetic evaluation method. On the first level we estimated the object $S \in M$ with n_t attributes in each of the factors Φ^t , $t = 1, \dots, k$ we used. Let

$$\mathbf{b}^t = (\mathbf{w}^t)' \mathbf{R}^t, \quad (5)$$

be equations determined on the first level of the method in factors Φ^t , where $\mathbf{w}^t = (w_1^t, \dots, w_{n_t}^t)$ is the vector composed of the weights of its attributes, $\mathbf{R}^t$ is a matrix composed of the values of the membership function μ_{ij}^t , $\mathbf{R}^t = (r_{ij}^t)_{n_t \times m}$, $r_{ij}^t = \mu_{ij}^t$, $\mathbf{b}^t = (b_1^t, \dots, b_m^t)$ is the evaluation vector on the first level of the method. Let $\mathbf{B} = (b_{tj})_{k \times m}$,

$$b_{tj} = b_j^t = \sum_{i=1}^{n_t} w_i^t r_{ij}^t, \quad (6)$$

$t = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, m$. Then the second level of the fuzzy synthetic evaluation method is described by equation

$$\mathbf{c} = \mathbf{W}' \mathbf{B} \quad (7)$$

where $\mathbf{W} = (W_1, \dots, W_k)$ is a weight vector on the second level, W_t is a weight of the factor Φ_t , $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$, $c_j = \sum_{t=1}^k W_t b_{tj}$ is the evaluation vector on the second level. Analogously, the fuzzy synthetic evaluation can be determined on the higher levels. Let $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ be an evaluation vector on the last level of the fuzzy synthetic evaluation method, $\tilde{c}$ is positive integer closest to $\sum_{j=1}^m j c_j$. Then object S will be estimated by a linguistic meaning that corresponds to an element $a_{\tilde{c}}$ of lattice or in other words, we assume that it belongs to $\tilde{c}$ -th class.

A correspondence between fuzzy synthetic evaluations and fuzzy classifications

In this section the accordance between the fuzzy synthetic evaluation method and fuzzy classifications is established. It's shown that the application of the method to the set of objects will result in a fuzzy classification of these objects. Let's remind the definition of fuzzy classification. Denote

$$V_h^m = \{A \mid A = (a_{ij})_{h \times m}, \quad 0 \leq a_{ij} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^m a_{ij} = 1; \quad i = 1, \dots, h\}. \quad (8)$$

Definition 2 [1]. Each matrix $A_K \in V_h^m$ defines a fuzzy classification K of the set $M = \{S_1, \dots, S_h\}$ on m classes. Elements a_{ij} of the matrix A_K are interpreted as the membership degree of S_i in the j -th class. We say that classification K is given by matrix A_K and that matrix A_K determines classification K . The j -th class is a fuzzy set determined by the membership function $\mu_j(S_i) = a_{ij}$. We call a vector $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ normal if

$$\sum_{j=1}^m x_j = 1.$$

Any vector with positive components can be normalized by dividing each component by the sum of all components. On the each level of the fuzzy synthetic evaluation method we get an evaluation vector $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$. Denote by $\mathbf{b}^N$ its normalization, that is $\mathbf{b}^N = (b_1^N, \dots, b_m^N)$, where

$$b_i^N = b_i / \sum_{j=1}^m b_j. \quad (9)$$

Let $M = \{S_1, \dots, S_h\}$ be the set of objects to be evaluated, $\mathbf{b}_i$ be the normal evaluation vector of S_i , $i = 1, \dots, h$ on some level. Then the matrix composed of these vectors

$$B_K = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \dots \\ \mathbf{b}_h \end{pmatrix} = (b_{ij})_{h \times m}$$

is the matrix of fuzzy classification of the set $M = \{S_1, \dots, S_h\}$, here b_{ij} is j -th element of $\mathbf{b}_i$. The element b_{ij} expresses the membership degree of the object S_i in the j -th class.

Proposition 1. Let $(\mathbf{b}^t)^N = (b_1^t, \dots, b_m^t)$, $t = 1, \dots, k$, be the normal evaluation vector of the object S in the factor Φ_t on the l -th level. $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)$ is the normal weight vector, where w_t is the weight of the factor Φ_t . Let $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ be an evaluation vector on the level $l+1$. Then

$$\sum_{j=1}^m c_j = 1. \quad (10)$$

Proof. Let $\mathbf{B}$ be a matrix composed of the vectors $(\mathbf{b}^t)^N$, $t = 1, \dots, k$, $\mathbf{B} = (b_{tj})_{k \times m}$; $b_{tj} = b_j^t$ is the j -th component of the vector $(\mathbf{b}^t)^N$. Then

$$\mathbf{c} = \mathbf{w}' \mathbf{B} = \left(\sum_{t=1}^k w_t b_{t1}, \dots, \sum_{t=1}^k w_t b_{tm} \right). \quad (11)$$

Let's find the sum of the component of the vector $\mathbf{c}$.

$$\sum_{j=1}^m c_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{t=1}^k w_t b_{tj} \right) = \sum_{t=1}^k w_t \left(\sum_{j=1}^m b_{tj} \right) = \sum_{t=1}^k w_t \cdot 1 = 1. \quad (12)$$

Thus, by normalizing the evaluation vectors and weight vectors in each factor on the first level, we will have normal evaluation vectors on the next levels. Accordingly, if on some level of the fuzzy synthetic evaluation method for each of the factors we have fuzzy classification of the evaluated objects represented by the matrix B_K then on the next level the matrix composed of evaluation vectors of the S_i $i = 1, \dots, h$ also will be the matrix of fuzzy classification of the set $M = \{S_1, \dots, S_h\}$.

Group approach to determine the weights

When we use the fuzzy synthetic evaluation method, it is an important task to determine quantitatively significances of various criteria that is their weights. Usually the weights are defined by experts, using the various weight vectors leads to the different results of evaluation.

There are many methods to define weight vectors but there is no criterion to determine the best of them. In this section the group approach is proposed to determine the weights. The essence of this approach is to determine an evaluation vector that is the closest to the evaluation vectors obtained by using different weight vectors. We will call it the group evaluation vector. The weight vector corresponding to the group evaluation vector is the required one.

Let's define the group evaluation vector which is modification of the definition of the group classification[1]. Group evaluation vectors and corresponding weight vectors will be determined separately on each level. For definiteness, we consider the procedure of finding a group decision on the second level of the fuzzy synthetic evaluation method. Group solutions on the first, third, etc. levels are determined in a similar way. Note that on the first level we consider the group evaluation vector for every factor.

We will denote by $\mathbf{c}(\mathbf{w})$ the evaluation vector obtained on the second level as a result of application the fuzzy synthetic evaluation method with the weight vector $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)$. Let X be the set of all weight vectors, $\mathbf{c}(X) = \{\mathbf{c}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in X\}$ be the set of evaluation vectors for all weight vectors from X .

Definition 3. Let $\mathbf{c}(\mathbf{w}_1), \dots, \mathbf{c}(\mathbf{w}_r)$ are evaluation vectors obtained on the second level by applying the fuzzy synthetic evaluation method to the object S by using different weight vectors $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_r$. We call $\mathbf{c}^*$ a group evaluation vector for $\mathbf{c}(\mathbf{w}_1), \dots, \mathbf{c}(\mathbf{w}_r)$ if the minimum of the functional

$$F(\mathbf{c}) = \sum_{p=1}^r \rho^2(\mathbf{c}(\mathbf{w}_p), \mathbf{c}). \quad (13)$$

is attained on this vector, i.e.

$$F(\mathbf{c}^*) = \min_{\mathbf{c} \in \mathbf{c}(X)} \sum_{p=1}^r \rho^2(\mathbf{c}(\mathbf{w}_p), \mathbf{c}). \quad (14)$$

Lemma. Let $h_1, \dots, h_r$ be arbitrary real numbers, $x = \left(\sum_{i=1}^r h_i \right) / r$. Then

$$\sum_{i=1}^r (x - h_i)^2 \leq \sum_{i=1}^r (y - h_i)^2, \quad (15)$$

for any real y .

Proof. We have

$$\sum_{i=1}^r (x - h_i)^2 = rx^2 - 2x(h_1 + \dots + h_r) + \sum_{i=1}^r h_i^2 = rx^2 - 2rx^2 + \sum_{i=1}^r h_i^2, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^r (y - h_i)^2 = ry^2 - 2y(h_1 + \dots + h_r) + \sum_{i=1}^r h_i^2 = ry^2 - 2yrx + \sum_{i=1}^r h_i^2. \quad (17)$$

Assume that for some y

$$\sum_{i=1}^r (x - h_i)^2 > \sum_{i=1}^r (y - h_i)^2, \quad (18)$$

then

$$rx^2 - 2rx^2 > ry^2 - 2yrx \quad (19)$$

or

$$0 > y^2 - 2yx + x^2 = (y - x)^2. \quad (20)$$

The last inequality is impossible, the contradiction proves the lemma.

The next theorem allows us to find the weight vector corresponding to the group evaluation vector.

Theorem. Let $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$ be the evaluation vectors obtained on the second level of the fuzzy synthetic evaluation method by r different ways, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r$ be corresponding weight vectors, $\mathbf{c}_p = (c_1^p, \dots, c_m^p)$, $\mathbf{c}_p = \mathbf{c}(\mathbf{w}_p)$, $p = 1, \dots, r$. Let $\mathbf{c}^*$ be the group evaluation vector for $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_r$, ρ be the Euclidean metric. Then the components of the weight vector $\mathbf{w}^* = (w_1^*, \dots, w_k^*)$ corresponding to $\mathbf{c}^*$ are determined by the following formula

$$w_i^* = \left(\sum_{p=1}^r w_i^p \right) / r, \quad i = 1, \dots, k. \quad (21)$$

Proof. For the group evaluation vector $\mathbf{c}^* = (c_1^*, \dots, c_m^*)$ we have

$$F(\mathbf{c}^*) = \min_{\mathbf{c} \in \mathbf{c}(X)} \sum_{p=1}^r \rho^2(\mathbf{c}_p, \mathbf{c}) = \min_{\mathbf{c} \in \mathbf{c}(X)} \sum_{p=1}^r \left(\sqrt{\sum_{j=1}^m (c_j^p - c_j)^2} \right)^2 = \min_{\mathbf{c} \in \mathbf{c}(X)} \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^r (c_j^p - c_j)^2, \quad (22)$$

where $c = (c_1, \dots, c_m)$. By Lemma the group evaluation vector $\mathbf{c}^* = (c_1^*, \dots, c_m^*)$ is defined as follows

$$c_j^* = \left(\sum_{p=1}^r c_j^p \right) / r, \quad j = 1, \dots, m. \quad (23)$$

Let's show that $\mathbf{w}^*$ is a weight vector for $\mathbf{c}^*$, i.e. Then

$$\begin{aligned} c_j^* &= \left(\sum_{p=1}^r c_j^p \right) / r = \left(\sum_{p=1}^r \left(\sum_{i=1}^k w_i^p b_{ij} \right) \right) / r = \left(\sum_{i=1}^k \left(\sum_{p=1}^r w_i^p b_{ij} \right) \right) / r = \\ &= \sum_{i=1}^k b_{ij} \left(\sum_{p=1}^r w_i^p \right) / r = \sum_{i=1}^k b_{ij} w_i^* = \\ &= \sum_{i=1}^k w_i^* b_{ij}. \end{aligned} \quad (24)$$

So,

$$\mathbf{c}^* = (\mathbf{w}^*)' \mathbf{B}. \quad (25)$$

The theorem is proved.

Note that if $\mathbf{w}_p$, $\mathbf{c}_p = \mathbf{c}(\mathbf{w}_p)$, $p = 1, \dots, r$ are normal vectors then $\mathbf{c}^*$ and $\mathbf{w}^*$ are normal vectors too.

Conclusion

Fuzzy synthetic evaluation method can be applied to problems of estimation of objects is determined by many heterogeneous criteria and factors. The paper proposes the use of the cluster approach to determine the weights of criteria, which in some sense universal and can be applied to various modifications of this method. The article established a connection between the method of fuzzy synthetic evaluation and fuzzy classification, proved the theorem that determines the weight of the criteria for the group approach.

References

- [1] *Averkin, A. N., Batyrshin, I. Z., Blishun, A. F., Silov, V. B., Tarasov V.B.* Fuzzy Sets in Methods of Control and Artificial Intelligence. - Moscow: Nauka, 1986.
- [2] *Bohui Pang, Shizhen Bai.* An integrated fuzzy synthetic evaluation approach for supplier selection based on analytic network process // Journal of Intelligent Manufacturing. Volume 24, Issue 1, 2013, - pp.163-174.
- [3] *Chang, Ni-Bin, Chen, H. W., Ning, S. K.* Identification of river water quality using the Fuzzy Synthetic Evaluation approach // Journal of Environmental Management. -(2001). - 63(3), - pp.293-305.
- [4] *Fachao Li, Wenfang Wang, Yan Shi2 and Chenxia Jin.* Fuzzy synthetic evaluation model based on the knowledge system // International Journal of Innovative Computing: Information and Contro. Volume 9, - Number 10, - October, 2013, - pp.4073-4084.
- [5] *Gao, Z., Zhong, Q., An, M.* Fuzzy Integration Method of Synthetic Evaluation for Traffic and Transportation Systems // Proceedings of the Second International Conference on Transportation and Traffic. Studies -2000, - pp.211-223.
- [6] *Gorai A. K., Kanchan , Upadhyay A., Goyal P.* Design of fuzzy synthetic evaluation model for air quality assessment. // Environment Systems and Decisions. Volume 34, Issue 3, - September, 2014 - pp 456-469.
- [7] *Hu, B. Q., Lo, S. M., Liu, M., Zhao, C. M.* On the Use of Fuzzy Synthetic Evaluation and Optimal Classification for Fire Risk Ranking of Buildings // Neural Computing and Application -2009, - 2, - pp.113-127.
- [8] *Khan F , Sadiq R.* Risk-based prioritization of air pollution monitoring using fuzzy synthetic evaluation technique // Environ Monit Assess. - Jun, 2005, - 105(1-3), - pp.261-83
- [9] *Sudhir Dahiya, Bupinder Singh, Shalini Gaur, V.K. Garg, H.S. Kushwaha* Analysis of groundwater quality using fuzzy synthetic evaluation // Journal of Hazardous Materials. Volume 147, Issue 3, - 2007, - pp.938-946
- [10] *Tesfamariam, S., Saatcioglu, M.* Seismic Risk Assessment of RC Buildings Using Fuzzy Synthetic Evaluation // Journal of Earthquake Engineering. -2008, - 12(7), -pp.1157-1184.
- [11] *Zadeh, L. A.* Fuzzy sets and their application to pattern classification and clustering analysis. // Fuzzy sets, fuzzy logic, and fuzzy systems. -1996, - pp.355-393.

UDC 517.968.2

Zhunussova Zh.Kh.

Al-Farabi Kazakh National University Republic of Kazakhstan, Almaty

E-mail: Zhanat.Zhunussova@kaznu.kz

Soliton immersion for nonlinear Schrodinger equation with gravity

One of the developed directions of mathematics is studying of nonlinear differential equations in partial derivatives. Investigation in this area is topical, since the results get the theoretical and practical applications. There are some different approaches for solving of the equations. Methods of the theory of solitons allow to construct the solutions of the nonlinear differential equations in partial derivatives. One of the methods for solving of the equations is the inverse scattering method. The aim of the work is to construct a surface corresponding to a regular onesoliton solution of the nonlinear Schrodinger equation with gravity in $(1+1)$ -dimension. In this work the nonlinear Schrodinger equation with gravity in $(1+1)$ -dimensions, as well as solitonic immersion in Fokas-Gelfand sense are considered. According to the approach the nonlinear differential equations in $(1+1)$ -dimension are given in the form of zero curvature condition and are compatibility condition of the linear system equations, i.e. Lax representation. In this case there is a surface with immersion function. The surface defined by the immersion function is identified to the surface in three-dimensional space. Surface with coefficients of the first fundamental form corresponding to the regular onesoliton solution of the nonlinear Schrodinger equation is found by soliton immersion. **Key words:** nonlinear equation, immersion, surface, solitonic solution, fundamental form, zero curvature condition.

Жунусова Ж.Х.

Солитонная иммерсия нелинейного уравнения Шредингера с притяжением

Одним из развивающихся направлений математики является исследование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование в данном направлении актуально, так как результаты находят теоретические и практические применения. Существуют различные подходы для решения данных уравнений. Методы теории солитонов позволяют построить решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Одним из методов для разрешения вышеуказанных уравнений является метод обратной задачи рассеяния. Цель данной работы построение поверхности соответствующей регулярно односолитонному решению нелинейного уравнения Шредингера с притяжением в $(1+1)$ -размерности. В данной работе рассмотрено нелинейное уравнение Шредингера с притяжением в $(1+1)$ -размерности, а также солитонная иммерсия в смысле Фокаса-Гельфанда. Согласно данному подходу в $(1+1)$ -мерном случае нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных даются в виде условий нулевой кривизны и являются условием совместности системы линейных уравнений, т.е. представлении Лакса. В этом случае существует поверхность с иммерсионной функцией. Поверхность определенная посредством иммерсионной функции идентифицируется с поверхностью в трехмерном пространстве. С помощью солитонной иммерсии для регулярного односолитонного решения нелинейного уравнения Шредингера найдена поверхность с соответствующими коэффициентами первой квадратичной формы.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, иммерсия, поверхность, солитонное решение, фундаментальная форма, условие нулевой кривизны.

Жүнісова Ж.Х.

Тартылысы бар сызықты емес Шредингер теңдеуінің солитондық иммерсиясы

Сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді зерттеу - математиканың дамып кележатқан тарауларының бірі. Нәтижелердің теориялық және практикалық қолданысы болғандықтан, бұл бағыттағы зерттеулер өзекті. Бұл теңдеулерді шешу үшін әртүрлі әдістер бар. Сызықты емес дербес туындылы теңдеулердің шешімін солитондар теориясы әдістерін қолданып табуға болады. Кері сәйіс әдісі - айтылған теңдеулерді шешуге арналған әдістердің бірі. Жұмыстың мақсаты - $(1+1)$ -өлшемдегі сызықты емес Шредингер теңдеуінің регулярлық бір солитондық шешіміне сәйкес бет құру. Бұл жұмыста $(1+1)$ -өлшемдегі сызықты емес Шредингер теңдеуі және Фокас-Гельфанд мағынасындағы солитондық иммерсия қарастырылған. $(1+1)$ -өлшемде сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер нөлдік қисықтық шарты арқылы беріледі және сызықты теңдеулердің, Лакс жұпта-рының шарты болып табылады. Бұл жағдайда иммерсиялық функциясы бар бет табылады. Иммерсиялық функциясы арқылы анықталған бет үш өлшемді кеңістіктегі бетпен сәйкестендіріледі.

Түйін сөздер: сызықты емес теңдеу, иммерсия, бет, солитондық шешім, фундаменталдық форма, нөлдік қисықтық шарты.

1 Introduction

Some nonlinear differential equations in partial derivatives are integrable and have physical interesting exact solutions, moreover these integrable equations are solved by the inverse scattering problem [1]-[6]. Investigations of the integrable equations in $(1+1)$ -, $(2+1)$ -dimensions are topical with mathematical physics point of view [2]-[5]. The integrable equations allow different kind of solutions as one-soliton solution, domain wall, vortex etc. Moreover solutions of the integrable equations have geometric characteristics. To investigate the geometric characteristics of the solutions the theory of differential geometry of curves and surfaces are applied.

One of the well-known models is Heisenberg ferromagnetic model

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{xx},$$

where $\times$ is vector product, $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$, $\mathbf{S} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$.

Lakshmanan established that the model, which is applied in the physical applications, at $\mathbf{S}^2 = +1$ is equivalence to the nonlinear Schrodinger equation with gravity in geometrical sense. This equivalence is called by Lakshmanan equivalence. We note, that Lakshmanan equivalence is developed as integrable, as nonintegrable differential equations in partial derivatives and its application domain is limited by establishing of equivalence between a spin system and some nonlinear differential equation in partial derivatives, for example Schrodinger type. We note, that for integrable nonlinear differential equations in partial derivatives the Lakshmanan equivalence does not assume knowledge of Lax representation for these equations. Now some generalizations of the Heisenberg ferromagnetic model in $(2+1)$ -dimension are known. For example, in the work [5] a generalized Heisenberg ferromagnetic model is considered

$$\mathbf{S}_t = (\mathbf{S} \times \mathbf{S}_y + u\mathbf{S})_x,$$

$$u_x = -(\mathbf{S}, (\mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y)),$$

where $\mathbf{S}$ is spin vector, $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1$, $\times$ is vector product, u is scalar function. According to the work [2] we identify the spin vector $\mathbf{S}$ with vector $\mathbf{r}_x$

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{r}_x$$

Then the generalized Heisenberg ferromagnetic model takes the form

$$\mathbf{r}_{xt} = (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_{xy} + u\mathbf{r}_x)_x$$

$$u_x = -(\mathbf{r}_x, (\mathbf{r}_{xx} \times \mathbf{r}_{xy})).$$

A surface corresponding to the onesoliton solution of the generalized Heisenberg ferromagnetic model is found in our previous works [2]

$$S_3(x, y, t) = 1 - \frac{2\eta^2}{\eta^2 + \xi^2} \operatorname{sech}^2(\chi_{1R}),$$

$$S^+(x, y, t) = \frac{2\eta}{\eta^2 + \xi^2} [i\xi - \eta \operatorname{th}(\chi_{1R})] \operatorname{sech}(\chi_{1R}),$$

$$\chi_1 = \chi_{1R} + i\chi_{1I}, \quad \lambda_1 = \eta + i\xi,$$

$$m_1 = m_{1R}(\rho) + im_{1I}(\rho), \quad m_j(y, t) = m_j(\rho),$$

$$\chi_{1R} = \eta x + m_{1R}(\rho) + c_{1R}, \quad \rho = y + i\lambda_j t,$$

$$\chi_{1I} = \xi x + m_{1I}(\rho) + c_{1I}, \quad c = \ln(2\eta/\lambda_1^*),$$

$$m_{1R}(\rho) = \operatorname{Re}[m_1(\rho)], \quad m_{1I}(\rho) = \operatorname{Im}[m_1(\rho)],$$

The result is formulated and proved as the following theorem [5]

Theorem 1 *The onesoliton solution of the generalized Heisenberg ferromagnetic model can be represented by components of the vector $\mathbf{r}_x$, where*

$$r_1 = \frac{2\eta}{(\eta^2 + \xi^2)ch\chi_{1R}} + c_1,$$

$$r_2 = \frac{2\xi}{\eta^2 + \xi^2} \operatorname{arctg}(sh\chi_{1R}) + c_2,$$

$$r_3 = x - \frac{2\eta}{\eta^2 + \xi^2} th\chi_{1R} + c_3,$$

c_1, c_2, c_3 are constants. Solution in the form $\mathbf{r}_x$, corresponds a surface with coefficients of the first and second quadratic form

$$E = 1, \quad G = \frac{4m_{1Ry}^2}{(\eta^2 + \xi^2)ch^2\chi_{1R}},$$

$$F = \frac{2\eta m_{1Ry}}{(\eta^2 + \xi^2)ch^2\chi_{1R}}, \quad L = \frac{4\eta^3 \xi m_{1Ry}}{\sqrt{g}(\eta^2 + \xi^2)^2 ch^4\chi_{1R}},$$

$$M = \frac{4\eta^2 \xi m_{1Ry}^2}{\sqrt{g}(\eta^2 + \xi^2)^2 ch^4\chi_{1R}}, \quad N = \frac{4\eta \xi m_{1Ry}^3}{\sqrt{g}(\eta^2 + \xi^2)^2 ch^4\chi_{1R}}.$$

Thus, we have used the unified spin approach for investigating of geometric characteristics of the solution of nonlinear equation.

In this work we consider soliton immersion in Fokas-Gelfand sense [3]. In the modern literature the notion of immersion is widely expanded and related not only to the soliton theory. It is a transition from sophisticated origin problem to the simple problem.

2 Soliton immersion

According to the Fokas-Gelfand [3] work we present the description of the soliton immersion. In (1+1)-dimension the nonlinear differential equations are given in the form of zero curvature condition

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \quad (1)$$

where $[U, V] = UV - VU$, the matrix U is prescribed, and matrix V is expressed in the terms of elements matrix U .

One of the well-known nonlinear models is nonlinear Schrodinger equation with gravity which is important for physical applications

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2\beta|\psi|^2\psi = 0, \quad (2)$$

where $\beta = +1$, ψ is complex function.

Such nonlinear differential equations (1) are compatibility condition of the linear systems

$$\phi_x = U\phi, \phi_t = V\phi. \quad (3)$$

In this case there exists a surface with immersion function $P(x, t)$ defined by formulas $\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi$, $\frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi$. The surface defined by $P(x, t)$ identified to the surface in three-dimensional space defined by coordinates $x_j = P_j(x, t)$, $j = 1, 2, 3$. Frame on the surface is given by triple [3]

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \phi^{-1}X\phi, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = \phi^{-1}Y\phi, \quad N = \phi^{-1}J\phi,$$

where $J = \frac{[X, Y]}{[X, X]}$, $|X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$. Here by definition

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2}tr(XY),$$

where X, Y are some matrixes. The first and second fundamental forms in the Fokas-Gelfand sense are given as

$$I = \langle X, X \rangle dx^2 + 2 \langle X, Y \rangle dxdt + \langle Y, Y \rangle dt^2, \quad (4)$$

$$II = \langle \frac{\partial X}{\partial x} + [X, U], J \rangle dx^2 + 2 \langle \frac{\partial X}{\partial t} + [X, V], J \rangle dxdt + \langle \frac{\partial Y}{\partial t} + [Y, V], J \rangle dt^2. \quad (5)$$

As it is shown in the work [3] the immersion function P can be defined as

$$P = \gamma_0 \phi^{-1} \phi_\lambda + \phi^{-1} M_1 \phi = \sum_{j=1}^3 P_j f_j,$$

where M_1 is matrix function defined by λ, x, t . Здесь $f_j = -\frac{i}{2}\sigma_j$ is corresponding algebra basis, σ_j are Pauli matrixes and $[f_i, f_j] = f_k$. In this case, X, Y can be written

$$X = \gamma_0 U_\lambda + M_{1x} + [M_1, U], Y = \gamma_0 V_\lambda + M_{1t} + [M_1, V].$$

Let the matrixes X, Y, J have the forms

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

In this case elements of the matrix J are expressed through elements of the matrix X and Y in correspondence to the following formulas

$$c_{11} = \frac{a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21}}{|[X, Y]|}, \quad c_{21} = \frac{a_{21}(b_{11} - b_{22}) + b_{21}(a_{22} - a_{11})}{|[X, Y]|},$$

$$c_{12} = \frac{b_{12}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{11})}{|[X, Y]|}, \quad c_{22} = \frac{a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12}}{|[X, Y]|}. \quad (7)$$

Then the first fundamental form (4) of the surface $I = E dx^2 + 2F dx dt + G dt^2$, where

$$E = -\frac{1}{2}(a_{11}^2 + 2a_{12}a_{21} + a_{22}^2), \quad F = -\frac{1}{2}(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}), \quad (8)$$

$$G = -\frac{1}{2}(b_{11}^2 + 2b_{12}b_{21} + b_{22}^2). \quad (9)$$

As example of the soliton equation leading to the immersion we consider nonlinear Schrodinger equation (2). In this case the matrixes U, V take the forms [4]

$$U = \frac{\lambda \sigma_3}{2i} + U_0, \quad U_0 = i \begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3 + i|q|^2\sigma_3 - i\lambda \begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \bar{q}_x \\ -q_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

The lemma is valid.

L e m m a. *The second fundamental form in Fokas-Gelfand sense corresponding to the regular onesoliton solution q of the nonlinear Schrodinger equation has the form*

$$II = L dx^2 + 2M dx dt + N dt^2, \quad (11)$$

where

$$L = -\frac{1}{2}\{a_{11x}c_{11} + a_{12x}c_{21} + a_{21x}c_{12} + a_{22x}c_{22} - \lambda i(a_{21}c_{12} - a_{12}c_{21}) +$$

$$+ i q(a_{12}c_{11} + a_{22}c_{12} - a_{11}c_{12} - a_{12}c_{22}) + i \bar{q}(a_{21}c_{22} + a_{11}c_{21} - a_{22}c_{21} - a_{21}c_{11})\}, \quad (12a)$$

$$M = -\frac{1}{2}\{a_{11t}c_{11} + a_{12t}c_{21} + a_{21t}c_{12} + a_{22t}c_{22} + i(\lambda^2 + 2|q|^2)(a_{21}c_{12} - a_{12}c_{21}) +$$

$$+ (q_x + \lambda i q)(a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} - a_{12}c_{11} - a_{22}c_{12}) +$$

$$+ (\bar{q}_x - \lambda i \bar{q})(a_{11}c_{21} + a_{21}c_{22} - a_{21}c_{11} - a_{22}c_{21})\}, \quad (12b)$$

$$\begin{aligned}
N = & -\frac{1}{2}\{b_{11t}c_{11} + b_{12t}c_{21} + b_{21t}c_{12} + b_{22t}c_{22} + i(\lambda^2 + 2|q|^2)(b_{21}c_{12} - b_{12}c_{21}) + \\
& + (q_x + \lambda iq)(b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} - b_{12}c_{11} - b_{22}c_{12}) + \\
& + (\bar{q}_x - \lambda i\bar{q})(b_{11}c_{21} + b_{21}c_{22} - b_{21}c_{11} - b_{22}c_{21})\}, \tag{12c}
\end{aligned}$$

P r o o f. We substitute the matrixes (6), (10) to (5). After some algebra we get (11), (12a)-(12c). The lemma is proved.

3 Theorem about surface to regular onesoliton solution

We consider a particular case at $\gamma_0 = 1$, $M_1 = 0$. In the case we get

$$X = U_\lambda = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = V_\lambda = -i \begin{pmatrix} -\lambda & \bar{q} \\ q & \lambda \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{q}}{\sqrt{q\bar{q}}} \\ \frac{q}{\sqrt{q\bar{q}}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

and $P = \phi^{-1}\phi_\lambda$. In order to calculate the explicit expressions for immersion function P we consider the regular onesoliton solution of the nonlinear Schrodinger equation which has the form [4]

$$q(x, t) = 2\eta \frac{\exp(-2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t - i\delta)}{ch[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}, \tag{14}$$

where $x_0 = \frac{1}{2\eta} \ln \left| \frac{m_{02}}{m_{01}} \right|$, $\delta = \arg m_{02} - \arg m_{01}$, $\xi = \operatorname{Re} \lambda$, $\eta = \operatorname{Im} \lambda$.

Theorem. Regular onesoliton solution of the nonlinear Schrodinger equation corresponds to the surface in Fokas-Gelfand sense with the coefficients of the first fundamental form

$$E = \frac{64\eta^2(\xi^2 + \eta^2)}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}, \tag{15a}$$

$$F = \frac{128\eta^2\xi(\xi^2 + \eta^2)}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}, \tag{15b}$$

$$G = \frac{256\eta^2(\xi^2 + \eta^2)^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}, \tag{15c}$$

where $\lambda_1 = \text{const.}$

P r o o f. Solution of the linear system we find in the form

$$\psi = \phi e^{-(\frac{\lambda\sigma_3}{2i}x + \frac{i\lambda^2}{2}\sigma_3 t)}. \tag{16}$$

Taking into account (16) and applying (10) we get

$$\psi_x = (\frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0)\psi - \psi \frac{\lambda\sigma_3}{2i} = \frac{\lambda\sigma_3}{2i}\psi - \psi \frac{\lambda\sigma_3}{2i} + U_0\psi = [\frac{\lambda\sigma_3}{2i}, \psi] + U_0\psi. \tag{17}$$

We take

$$\psi = I - \frac{\tilde{A}}{\lambda - \lambda_1^*}, \quad \text{where } \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1^* = \text{const.} \tag{18}$$

We substitute (18) to (17)

$$\psi_x = U_0 - \frac{U_0 \tilde{A}}{\lambda - \lambda_1^*} - \frac{1}{2i} [\sigma_3, \tilde{A}] - \frac{\lambda_1^*}{2i(\lambda - \lambda_1^*)} [\sigma_3, \tilde{A}]. \quad (19)$$

On the other hand from (18) follows

$$\psi_x = -\frac{\tilde{A}_x}{\lambda - \lambda_1^*}. \quad (20)$$

From (19) and (20) we get

$$-\frac{\tilde{A}_x}{\lambda - \lambda_1^*} = U_0 - \frac{U_0 \tilde{A}}{\lambda - \lambda_1^*} - \frac{1}{2i} [\sigma_3, \tilde{A}] - \frac{\lambda_1^*}{2i(\lambda - \lambda_1^*)} [\sigma_3, \tilde{A}]. \quad (21)$$

Thus

$$\tilde{A}_x = U_0 \tilde{A} + \frac{\lambda_1^*}{2i} [\sigma_3, \tilde{A}], U_0 = \frac{1}{2i} [\sigma_3, \tilde{A}]. \quad (22)$$

We note, that

$$[\sigma_3, \tilde{A}] = \sigma_3 \tilde{A} - \tilde{A} \sigma_3 = 2 \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Then we substitute (23) to (7) and get

$$U_0 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Substituting (23) to (22) we get

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_x & \tilde{b}_x \\ \tilde{c}_x & \tilde{d}_x \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} \tilde{b}\tilde{c} & \tilde{b}\tilde{d} \\ -\tilde{c}\tilde{a} & -\tilde{c}\tilde{b} \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1^*}{i} \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b} \\ -\tilde{c} & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

From (10) and (24) we get

$$i \begin{pmatrix} 0 & \bar{q} \\ q & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i\bar{q} = \frac{1}{i}b \\ iq = -\frac{1}{i}c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\bar{q} \\ c = q. \end{cases} \quad (26)$$

Therefore, we have found the matrix $\tilde{A}$ in the explicit form with components (25). Using (14) we get

$$\tilde{a} = i2\eta th[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1. \quad (27)$$

From (25) follows $\tilde{a} = -\frac{i\tilde{c}_x}{c} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{a} = -\frac{1}{i} \int \bar{q} q dx$. Using (14) we get

$$\tilde{a}_x = \frac{1}{i} \tilde{b}\tilde{c} \Rightarrow \tilde{a}_x = \frac{1}{i} (-\bar{q})q, \quad (28)$$

Then

$$\tilde{a} = -\frac{iq_x}{q} - \lambda_1^*. \quad (29)$$

Consequently, from (25), (26) follow

$$\tilde{d} = \frac{i\tilde{b}_x}{\tilde{b}} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{d} = \frac{i(-\bar{q})_x}{(-\bar{q})} - \lambda_1^* \Rightarrow \tilde{d} = \frac{i\bar{q}_x}{\bar{q}} - \lambda_1^*. \quad (30)$$

From (25), (26) follow

$$\tilde{d}_x = -\frac{1}{i}\tilde{c}\tilde{b}, \quad (31)$$

Moreover from (23), (31) follow

$$\tilde{d} = \frac{1}{i} \int q\bar{q}dx \quad (32)$$

Taking into account (22), we get (28) in the form

$$\tilde{d} = -\tilde{a}. \quad (33)$$

Therefore,

$$\tilde{a} = -i2\eta th[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1. \quad (34)$$

Thus, the matrix $\tilde{A}$ for regular onesoliton solution (14) of the nonlinear Schrodinger equation takes the form

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} i2\eta th[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1 & -2\eta \frac{\exp\{i(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)\}}{ch[2\eta(x - x_0 + 4\xi t)]} \\ 2\eta \frac{\exp\{-i(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)\}}{ch[2\eta(x - x_0 + 4\xi t)]} & -i2\eta th[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

We take $\phi = I - \frac{A}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}$, where λ_1 is constant, then from (13) we get

$$P = \phi^{-1}\phi_\lambda = (I + \frac{\tilde{A}}{\lambda - \lambda_1})\frac{\tilde{A}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}. \quad (36)$$

On the other hand we get

$$P = \sum_{j=1}^3 P_j f_j = -\frac{i}{2} \sum_{j=1}^3 P_j \sigma_j = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}P_3 & -\frac{i}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2 \\ -\frac{i}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2 & \frac{i}{2}P_3 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

From (36), (37) by (31) we get $P_3 = \frac{2i\tilde{a}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}$. With help of (33) we find P_3 in the explicit form for regular onesoliton solution of the nonlinear Schrodinger equation

$$P_3 = -\frac{4\eta}{(\lambda - \bar{\lambda})^2} th[2\eta(x + 4\xi t - x_0)] + c_1. \quad (38)$$

From (36), (37) we get $P_2 = \frac{\tilde{c} - \tilde{b}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}$. Thus

$$P_1 = \frac{i(\tilde{c} + \tilde{b})}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad P_2 = \frac{(\tilde{c} - \tilde{b})}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}, \quad P_3 = \frac{2i\tilde{a}}{(\lambda - \bar{\lambda}_1)^2}.$$

From (36), (14) using the well-known formulas

$$sh\zeta = \frac{e^\zeta - e^{-\zeta}}{2}; \quad ch\zeta = \frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{2}; \quad cos\zeta = \frac{e^{i\zeta} + e^{-i\zeta}}{2}; \quad sin\zeta = \frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i}, \quad (39)$$

where $\zeta = 2\eta(x - x_0 + 4\xi t)$ we obtain the values for the components P_1, P_2 of the matrix P

$$P_1 = \frac{4\eta \sin(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)}{(\lambda - \bar{\lambda})^2 ch[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}, \quad (40a)$$

$$P_2 = \frac{4\eta \cos(2\xi x + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \delta)}{(\lambda - \bar{\lambda})^2 ch[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}. \quad (40b)$$

Then we calculate coefficients of the first fundamental form by formula

$$E = P_{1x}^2 + P_{2x}^2 + P_{3x}^2. \quad (41)$$

We calculate the derivatives P_{1x}, P_{2x}, P_{3x} . The square of the first derivatives is substituted to (41), then

$$E = \frac{64\eta^2(\xi^2 + \eta^2)}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}.$$

By the similar way we find

$$F = P_{1x}P_{1t} + P_{2x}P_{2t} + P_{3x}P_{3t}, \quad G = P_{1t}^2 + P_{2t}^2 + P_{3t}^2$$

we obtain the values

$$F = \frac{128\eta^2\xi(\xi^2 + \eta^2)}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}, \quad (42a)$$

$$G = \frac{256\eta^2(\xi^2 + \eta^2)^2}{(\lambda - \bar{\lambda})^4 ch^2[2\eta(x + 4\xi t - x_0)]}. \quad (42b)$$

Theorem is proved.

4 Conclusion

Thus, we investigate soliton immersion in (1+1)-dimension. As example, we have considered (1+1)-dimensional nonlinear Schrodinger equation with gravity. The first fundamental form with corresponding coefficients (15) for integrable surface corresponding to regular onesoliton solution of the nonlinear Schrodinger equation with gravity is found.

References

- [1] Ablowitz M.J., Clarkson P.A. Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering. - Cambridge: Cambridge University Press, 1992. - 516 p.
- [2] Myrzakulov R., Vijayalakshmi S. et al. A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterparts, solitons and localized coherent structures // J. Phys. Lett. A., - 1997. - №233A. - P. 391–396.
- [3] Ceyhan O., Fokas A.S., Gurses M. Deformations of surfaces associated with integrable Gauss-Mainardi-Codazzi equations // J. Math. Phys., - 2000. - №4. - P. 2551–2270.
- [4] Makhankov V.G., Myrzakuov R. Riemann Problem on a Plane and Nonlinear Schroedinger Equation // In book "Communication of the Joint Institute for Nuclear Research," P5-84-742, - Dubna, - 1984, - P. 6.
- [5] Zhunussova Zh. Geometrical features of the soliton solution // Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics, ISBN 978-3-319-12576-3, - 2015. - P. 671-677.
- [6] Zhunussova Zh. Reconstruction of surface corresponding to domain wall solution // Proceeding of the forth International conference "Modern problems of Applied mathematics and information technologies, Al-Khorezmiy 2014, Samarkand, - 2014. - P. 283.

УДК 517.956

Алдашев С.А.

Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: aldash51@mail.ru

Задачи Дирихле и Пуанкаре в многомерной области для одного класса сингулярных гиперболических уравнений

На плоскости было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики - изучение колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как доказано далее, задачи Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений. В работах автора изучены задачи Дирихле и Пуанкаре для линейных многомерных гиперболических уравнений, где показаны корректность этих задач, существенно зависящих от высоты рассматриваемой цилиндрической области. В данной работе найден многомерный область в которой, задачи Дирихле и Пуанкаре разрешимы для одного класса сингулярных гиперболических уравнений.

Ключевые слова: разрешимость задач, многомерная область, сингулярные уравнения, система уравнений.

Aldashev S.A.

Dirichlet and Poincare in the multidimensional field for a class of singular hyperbolic equations

It has been shown in a plane that one of fundamental problems of Math Physics, i.e. studying the behavior of a hesitating string, is not correct when boundary conditions are given on the whole boundary of the domain. As it is shown below, Dirichlet problem is incorrect not just for a wave equation but for general hyperbolic equations. In the works of the author studied the Dirichlet and Poincaré problem for linear multidimensional hyperbolic equations, which shows the correctness of these tasks, depending essentially on the height of the considered cylindrical domain. In this paper we find multi-dimensional area in which the Dirichlet and the Poincaré problem solved for a class of singular hyperbolic equations.

Key words: solvability problems, multidimensional domain, singular equations, system equations.

Алдашев С.А.

Сингулярлық гиперболалық теңдеулерге көп өлшемді облыста Дирихле және Пуанкаре есептері

Математикалық физиканың негізгі есептерінің бірі – ішектің тербелісін зерттеу. Егерде зерттеу облысының барлық шекарасында мән берілсе, онда бұл есеп жазықтықта біршешімді емес екен. Кейін көрсетілгендей, Дирихле есебі тек қана толқын теңдеуіне емес, және де басқа сызықтық гиперболалық теңдеулерге де біршешімді болмай шықты. Автордың жұмыстарында сызықтық көп өлшемді гиперболалық теңдеулерге Дирихле және Пуанкаре есептері зерттелген. Бұл есептердің біршешімділігі, қарастырылған цилиндрлік облыстың биіктігіне тікелей байланысты екендігі дәлелденген. Бұл жұмыста сингулярлық гиперболалық теңдеулерге көп өлшемді облыс табылған, онда Дирихле және Пуанкаре есебінің шешімділігі дәлелденген. **Түйін сөздер:** есептер шешімділігі, көп өлшемді, облыс, сингулярлық теңдеулер, теңдеулер жүйесі.

1 Введение

На плоскости было показано, что одна из фундаментальных задач математической физики - изучение колеблющейся струны некорректна, когда краевые условия заданы на всей границе области. Как показано далее, задачи Дирихле некорректна не только для волнового уравнения, но и для общих гиперболических уравнений.

Проблема корректности краевых задач с данными на всей границе области для гиперболических уравнений была объектом исследований многих авторов на плоскости [1 – 5] и в пространстве [6 – 10]. Задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерных сингулярных гиперболических уравнений изучались в [11, 12].

В данной работе найден многомерный область в которой, задачи Дирихле и Пуанкаре разрешимы для одного класса сингулярных гиперболических уравнений.

2 Постановка задачи и результат

Пусть Ω – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \dots, x_m, t)$, ограниченная при $t > 0$ конической поверхностью $K : t = \varphi(r)$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\varphi(r) \in C^1([0, 1]) \cap C^2((0, 1))$, $|\varphi'(r)| < 1$, $\varphi'(r) \neq 0$ и плоскостью $t = 0$ где $r = |x|$ – длина вектора $x = (x_1, \dots, x_m)$. Через S обозначим множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ точек из E_m .

В области Ω рассмотрим многомерные сингулярные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t - \frac{\alpha}{t} u_t + c(x, t) u = 0, \quad (1)$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_m$, $m \geq 2$, α – действительное число.

Через $u_\alpha(x, t)$ обозначим решение уравнения (1) при данном α .

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \dots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \dots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \dots, m-1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$.

В качестве многомерных задач Дирихле и Пуанкаре рассмотрим следующие

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области Ω из класса $C(\bar{\Omega} \setminus S) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_\alpha|_S = \tau(r, \theta), \quad u_\alpha|_K = \sigma(r, \theta), \quad \alpha < 1; \quad (2)$$

$$\frac{u_\alpha}{\ln t}|_S = \tau(r, \theta), \quad u_\alpha|_K = \sigma(r, \theta), \quad \alpha = 1; \quad (3)$$

$$(t^{\alpha-1} u_\alpha)|_S = \tau(r, \theta), \quad u_\alpha|_K = \sigma(r, \theta), \quad \alpha > 1. \quad (4)$$

Задача 2. Найти решение уравнения (1) в области Ω из класса $C(\bar{\Omega} \setminus S) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha (u_\alpha - u_{\alpha,2})_t = \nu(r, \theta), \quad u_\alpha|_K = \sigma(r, \theta), \quad \alpha < 1; \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t (\ln t)^2 \left(\frac{u_\alpha - u_{\alpha,1}}{\ln t} \right)_t = \nu(r, \theta), \quad u_\alpha|_K = \sigma(r, \theta), \quad \alpha = 1; \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{2-\alpha} [t^{\alpha-1} (u_\alpha - u_{\alpha,2})]_t = \nu(r, \theta), \quad u_\alpha|_K = \sigma(r, \theta), \quad \alpha > 1, \quad (7)$$

где $u_{\alpha,1}(r, \theta, t)$, $u_{\alpha,2}(r, \theta, t)$ вполне определенные функций, зависящие от $\nu(r, \theta)$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n , $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \dots$ – пространства Соболева.

Имеет место ([13])

Лемма 1. Пусть $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (8)$$

а также ряды, полученного из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того, чтобы $f(r, \theta) \in W_2^l(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (8) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const.}$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r, t)$, $a_{in}^k(r, t)$, $\tilde{b}_n^k(r, t)$, $\tilde{c}_n^k(r, t)$, ρ_n^k , $\bar{\tau}_n^k(r)$, $\bar{\nu}_n^k(r)$, $\bar{\sigma}_n^k(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (8), соответственно функций $a_i(r, \theta, t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r} \rho$, $b(r, \theta, t)\rho$, $c(r, \theta, t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \dots, m$, $\tau(r, \theta)$, $\nu(r, \theta)$, $\sigma(r, \theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H – единичная сфера в E_m .

Пусть $p \geq 0$ – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенствам $\alpha + 2p \geq m-1$, если $\alpha \leq 0$ и $2 - \alpha + 2p \geq m-1$, если $\alpha \geq 2$; $q \geq 0$ – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенствам $2 - \alpha + 2q \geq m-1$, если $0 < \alpha \leq 1$ и $\alpha + 2q \geq m-1$, если $1 \leq \alpha < 2$; а также s такое, что $s = [-\frac{\alpha}{2}]$, если $\alpha \leq 0$ и $s = [-\frac{\alpha}{2} - 1]$, если $\alpha \geq 2$, где $[\alpha]$ – целое часть числа α .

Введем обозначения $\beta = \max\{s+1, p\}$, $\gamma = \max\{s+1, q\}$.

Теорема. Если $a_i(r, \theta, t)$, $b(r, \theta, t)$, $c(r, \theta, t) \in W_2^l(\Omega)$, $i = 1, \dots, m$, $l \geq m+1$ и $\tau(r, \theta) = r^4 \tau^*(r, \theta)$, $\nu(r, \theta) = r^4 \nu^*(r, \theta)$, $\sigma(r, \theta) = r^4 \sigma^*(r, \theta)$, $\tau^*(r, \theta) \in W_2^\beta(S)$, $\nu^*(r, \theta) \in W_2^\gamma(S)$, $\sigma^*(r, \theta) \in W_2^{s+1}(S)$, при $\alpha \leq 0$ и $\alpha \geq 2$; $\tau^*(r, \theta)$, $\nu^*(r, \theta)$, $\sigma^*(r, \theta) \in W_2^{q+1}(S)$ при $0 < \alpha \leq 1$ и $1 \leq \alpha < 2$, то задача 1 и 2 имеет решение.

3 Сведения задачи 1 и 2 к двумерным задачам для систем дифференциальных уравнений

В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$L_\alpha u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(r, \theta, t) u_{x_i} + b(r, \theta, t) u_t - \frac{\alpha}{t} u_t + c(r, \theta, t) u = 0, \quad (9)$$

$$\delta \equiv - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1} \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\sin^{m-j-1} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right), \quad g_1 = 1, \quad g_j = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{j-1})^2, \quad j > 1.$$

Известно ([3]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n + m - 2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решения задач будем искать в виде

$$u_\alpha(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad (10)$$

где $\bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (10) в (9), умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H , для $\bar{u}_{\alpha,n}^k$ получим ([12, 14])

$$\begin{aligned} & \rho_0^1 \bar{u}_{\alpha,0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{\alpha,0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r} \rho_0^1 + \sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \right) \bar{u}_{\alpha,0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{\alpha,0t}^1 - \frac{\alpha \rho_0^1}{t} \bar{u}_{\alpha,0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_{\alpha,0}^1 + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \rho_n^k \bar{u}_{\alpha,nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{\alpha,ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r} \rho_n^k + \sum_{i=1}^m a_{in}^k \right) \bar{u}_{\alpha,nr}^k + \tilde{b}_n^k \bar{u}_{\alpha,nt}^k - \frac{\alpha \rho_n^k}{t} \bar{u}_{\alpha,nt}^k + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{c}_n^k - \frac{\lambda_n \rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k) \right] \bar{u}_{\alpha,n}^k \right\} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{\alpha,0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{\alpha,0tt}^1 + \frac{m-1}{r} \rho_0^1 \bar{u}_{\alpha,0r}^1 - \frac{\alpha}{t} \rho_0^1 \bar{u}_{\alpha,0t}^1 = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \rho_1^k \bar{u}_{\alpha,1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{\alpha,1tt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_1^k \bar{u}_{\alpha,1r}^k - \frac{\alpha}{t} \rho_1^k \bar{u}_{\alpha,1t}^k - \frac{\lambda_1}{r^2} \rho_1^k \bar{u}_{\alpha,1}^k \bar{u}_{\alpha,1}^k = \\ & = -\frac{1}{k_1} \left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1 \bar{u}_{\alpha,0r}^1 + \tilde{b}_0^1 \bar{u}_{\alpha,0t}^1 + \tilde{c}_0^1 \bar{u}_{\alpha,0}^1 \right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \rho_n^k \bar{u}_{\alpha,nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{\alpha,ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{\alpha,nr}^k - \frac{\alpha}{t} \rho_n^k \bar{u}_{\alpha,nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_{\alpha,n}^k = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^m a_{in-1}^k \bar{u}_{\alpha,n-1r}^k + \right. \\ & \left. + \tilde{b}_n^k \bar{u}_{\alpha,n-1t}^k + \left[\tilde{c}_{n-1}^k - \sum_{i=1}^m (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{\alpha,n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Суммируя уравнение (13) от 1 до k_1 , а уравнение (14) — от 1 до k_n , а затем сложив полученные выражения вместо с (12), приходим к уравнению (11).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_{\alpha,n}^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$ — решение системы (12) — (14), то оно является решением уравнения (11).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (12)–(14) можно представить в виде

$$\bar{u}_{\alpha,nrr}^k - \bar{u}_{\alpha,ntt}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{\alpha,nr}^k - \frac{\alpha}{t} \bar{u}_{\alpha,nt}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_{\alpha,n}^k = \bar{f}_{\alpha,n}^k(r, t), \quad (15)$$

где $\bar{f}_{\alpha,n}^k(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}_{\alpha,0}^1(r, t) \equiv 0$.

Произведя в (15) замену $\bar{u}_{\alpha,n}^k(r, t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_{\alpha,n}^k(r, t)$ получим

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^k = u_{\alpha,nrr}^k - u_{\alpha,ntt}^k - \frac{\alpha}{t} u_{\alpha,nt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_{\alpha,n}^k = f_{\alpha,n}^k(r, t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (16_\alpha)$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4}, f_{\alpha,n}^k(r, t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_{\alpha,n}^k(r, t).$$

Далее, из краевых условий (2)-(7) для функций $u_{\alpha,n}^k(r, t)$ в силу (10), с учетом леммы 1, соответственно, будем иметь

$$u_{\alpha,n}^k(r, 0) = \tau_n^k(r), u_{\alpha,n}^k(r, \varphi(r)) = \sigma_n^k(r), \alpha < 1, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (17)$$

$$\left(\frac{u_{\alpha,n}^k}{\ln t} \right) \Big|_{t=0} = \tau_n^k(r), u_{\alpha,n}^k(r, \varphi(r)) = \sigma_n^k(r), \alpha = 1, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (18)$$

$$(t^{\alpha-1} u_{\alpha,n}^k) \Big|_{t=0} = \tau(r, \theta), u_{\alpha,n}^k(r, \varphi(r)) = \sigma_n^k(r), \alpha > 1, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (19)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha (u_{\alpha,n}^k - u_{\alpha,n}^{k,2})_t = \nu_n^k(r), u_{\alpha,n}^k(r, \varphi(r)) = \sigma_n^k(r), \alpha < 1, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (20)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t(\ln t)^2 \left(\frac{u_{\alpha,n}^k - u_{\alpha,n}^{k,1}}{\ln t} \right) = \nu(r, \theta), u_{\alpha,n}^k(r, \varphi(r)) = \sigma_n^k(r), \alpha = 1, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (21)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{2-\alpha} [t^{\alpha-1} (u_{\alpha,n}^k - u_{\alpha,n}^{k,2})]_t = \nu(r, \theta), u_{\alpha,n}^k(r, \varphi(r)) = \sigma_n^k(r), \alpha > 1, k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (22)$$

$$\tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\tau}_n^k(r), \nu_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\nu}_n^k(r), \sigma_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\sigma}_n^k(r).$$

Таким образом, задачи 1 и 2 сведены к двумерным задачам для систем дифференциальных уравнений (12)-(14). Решение этих задач будем изучать в п.4 и п.5.

Наряду с уравнением (16_α) рассмотрим уравнение

$$L_0 u_{0,n}^k \equiv u_{0,nrr}^k - u_{0,ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} \bar{u}_{0,n}^k = f_n^k(r, t), \quad (16_0)$$

которое с помощью замены переменных $\xi = \frac{r+t}{2}$, $\eta = \frac{r-t}{2}$ сводится к уравнению

$$M u_{0,n}^k \equiv u_{0,n\xi\eta}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{(\xi + \eta)^2} u_{0,n}^k = f_n^k(\xi, \eta), \quad (23)$$

$$f_n^k(\xi, \eta) = f_{0,n}^k(\xi + \eta, \xi - \eta).$$

Решение задачи Коши для (23) с данными

$$u_{0,n}^k(\xi, \xi) = \tau_n^k(\xi), \left(\frac{\partial u_{0,n}^k}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{0,n}^k}{\partial \eta} \right) \Big|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi), 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$$

имеет вид ([14])

$$u_{0,n}^k(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \tau_n^k(\eta) R(\eta, \eta; \xi, \eta) + \frac{1}{2} \tau_n^k(\xi) R(\xi, \xi; \xi, \eta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\eta}^{\xi} [\nu_n^k(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta) - \tau_n^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) |_{\xi_1=\eta_1}] d\xi_1 + \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \int_0^{\eta} f_n^k(\xi_1, \eta_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\xi_1 d\eta_1, \quad (24)$$

где $\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\tau}_n^k(2\xi)$, $\nu_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{\nu}_n^k(2\xi)$, $R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = P_\mu \left[\frac{(\xi_1 - \eta_1)(\xi - \eta) + 2(\xi\eta + \xi_1\eta_1)}{(\xi_1 + \eta_1)(\xi + \eta)} \right] = P_\mu(z)$ — функция Римана для уравнения $Mu_{0,n}^k = 0$ [15], а $P_\mu(z)$ — функция Лежандра, $\mu = n + \frac{(m-3)}{2}$,

$$\frac{\partial}{\partial N} \Big|_{\xi=\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \Big|_{\xi=\eta}.$$

4 Функциональная связь между решениями задачи Коши для уравнений (16_α) и (16_0) .

Сначала приведем некоторые свойства оператора L_α , которые необходимы для дальнейших исследований.

1⁰. Если u_α — решение уравнения $L_\alpha u = 0$, то функция

$$u_{2-\alpha} = t^{\alpha-1} u_\alpha \quad (25)$$

является решением уравнения $L_{2-\alpha} u = 0$.

2⁰. Если u_α — решение уравнения $L_\alpha u = 0$, то функция

$$\frac{1}{t} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = u_{\alpha+2} \quad (26)$$

будет решением уравнения $L_{\alpha+2} u = 0$.

3⁰. Оператор L_α обладает свойством

$$L_\alpha u_\alpha = t^{1-\alpha} L_{2-\alpha} (t^{\alpha-1} u_\alpha). \quad (27)$$

Указанные свойства устанавливаются аналогично тому, как они были доказаны для многомерного уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона ([17 – 16])

$$\Delta_x u - u_{tt} - \frac{\alpha}{t} u_t = 0. \quad (28)$$

Из равенства (25) имеем $u_{2-\alpha-2p} = t^{\alpha+2p-1} u_{\alpha+2p}$ к которому применив p раз формулу (26), а затем (25), получим

$$u_{2-\alpha} = \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^p (t^{\alpha+2p-1} u_{\alpha+2p}). \quad (29)$$

Соотношение (29) является фундаментальной формулой ([17 – 16]) для решения задачи Коши.

Пусть $p \geq 0$, $q \geq 0$ — наименьшие целые числа, удовлетворяющие неравенствам $\alpha + 2p \geq m - 1$, $2 - \alpha + 2q \geq m - 1$.

Утверждение 1. Если $u_{0,n}^{k,2}(r, t)$ — решение задачи Коши для уравнения (16_0) удовлетворяющее условию

$$u_{0,n}^{k,2}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{k,2}(r, 0) = \nu_n^k(r), \quad (30)$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t) = \gamma_{-\alpha} t^{-\alpha} \int_0^1 u_{0,n}^{k,2}(r,\xi t) \xi (1-\xi^2)^{-\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv \gamma_{-\alpha} \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}} u_{0,n}^{k,2}(r,t), \quad (31)$$

при $\alpha < 0$ будет решением уравнения (16_α) , удовлетворяющим условию

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r,0) = 0, \lim_{t \rightarrow 0} t^\alpha \frac{\partial}{\partial t} u_{\alpha,n}^{k,2} = \nu_n^k(r). \quad (32)$$

Если же $0 < \alpha < 1$, то функция

$$\begin{aligned} u_{\alpha,n}^{k,2}(r,t) &= \gamma_{2-k+2q} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^q \left[t^{1-k+2q} \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t) (1-\xi^2)^{q-\frac{\alpha}{2}} d\xi \right] \equiv \\ &\equiv \gamma_{2-\alpha+2q} 2^{q-1} \Gamma\left(q - \frac{\alpha}{2} + 1\right) D_{0t^2}^{\frac{\alpha}{2}-1} \left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,t)}{t} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

является решением уравнения (16_α) с начальными данными (32), где $\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \gamma_\alpha = 2\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$, $\Gamma(z)$ – гамма-функция, D_{0t}^α – оператор Римана-Лиувилля [17], а $u_{0,n}^{k,1}(r,t)$ – решение уравнения (16_0) с начальными условиями

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0) = \frac{\nu_n^k(r)}{(1-\alpha)(3-\alpha)\dots(2q+1-\alpha)}, \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0. \quad (34')$$

Утверждение 2. Если $u_{0,n}^{k,1}(r,t)$ – решение задачи Коши для уравнения (16_0) удовлетворяющее условию

$$u_{0,n}^{k,1}(r,0) = \tau_n^k(r), \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{k,1}(r,0) = 0, \quad (34)$$

то функция

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r,t) = \gamma_\alpha \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t) (1-\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\xi \equiv 2^{-1} \gamma_\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{1-\alpha} D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r,t)}{t} \right], \quad (35)$$

при $\alpha > 0$ есть решение уравнения (16_α) , удовлетворяющее условию (34).

Утверждение 3. Если $u_{0,n}^{k,1}(r,t)$ – решение задачи Коши для уравнения (16_0) удовлетворяющее условию (34), то функция

$$u_{1,n}^{k,1}(r,t) = \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r,\xi t) (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \ln[t(1-\xi^2)] d\xi \quad (36)$$

является решением задачи для уравнения $L_1 u_{1,n}^k = f_{1,n}^k(r,t)$ с начальными данными

$$\left. \frac{u_{1,n}^{k,1}}{\ln t} \right|_{t=0} = \tau_n^k(r). \quad (37)$$

При этом функции $f_{\alpha,n}^k(r, t)$, $f_{0,n}^k(r, t)$ связаны формулами (31) и (33) в случае утверждения 1 и формулами (35) и (36) в случаях утверждений 2 и 3.

Доказательства приведенных утверждений устанавливаются аналогичным образом, как они доказаны для уравнения (28) и многомерного волнового уравнения $\Delta_x u - u_{tt} = 0$ ([14, 18 – 21]).

Приведем некоторые следствия из утверждений 2,3. Сначала рассмотрим случай $\alpha < 0$, $\alpha \neq -(2r + 1)$, $r = 0, 1, \dots$. Если $u_{0,n}^{k,1}(r, t)$ – решение задачи Коши для (16_α) с данными

$$u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = \frac{\tau_n^k(r)}{(\alpha - 1) \dots (\alpha + 2p - 1)}, \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad (38)$$

то из утверждения 2 следует, что

$$u_{\alpha+2p,n}^{k,1}(r, t) = \gamma_{\alpha+2p} \int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r, \xi t) (1 - \xi^2)^{\frac{\alpha}{2} + p - 1} d\xi$$

является решением уравнения $L_{\alpha+2p} u = f_{\alpha+2p,n}^k(r, t)$, удовлетворяющим начальному условию (38).

Тогда из соотношений (29) и (25) вытекает, что функция

$$u_{\alpha,n}^{k,1}(r, t) = t^{1-\alpha} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^p \left(t^{\alpha+2p-1} u_{\alpha+2p,n}^{k,1} \right) \equiv \gamma_{k+2p} 2^{p-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + p\right) t^{1-\alpha} D_{0t^2}^{-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r, t)}{t} \right] \quad (39)$$

есть решение уравнения (16_α) и удовлетворяет условию (34).

Теперь пусть $\alpha = -(2r + 1)$. Если $u_{0,n}^{k,1}(r, t)$ – решение задачи Коши для (16_0) с данными (34), то из (25), (29) и из утверждения 3 нетрудно получить, что

$$u_{-(2r+1),n}^{k,1}(r, t) = t^{2(r+1)} \left(\frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{r+1} \left[\int_0^1 u_{0,n}^{k,1}(r, \xi t) (1 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} \ln(t(1 - \xi^2)) d\xi \right] \quad (40)$$

является решением задачи Коши для (16_α) , удовлетворяющее условию (34).

Используя [17], соотношение (40) можно записать в виде

$$u_{-(2r+1),n}^{k,1}(r, t) = \frac{a}{2} t^{2(r+1)} D_{0t^2}^{r+\frac{1}{2}} \left[\frac{u_{0,n}^{k,1}(r, t)}{t} \right], \quad a = \frac{1}{2} \Gamma'(1) - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} - \ln t. \quad (41)$$

5 Доказательство теоремы для задачи 1

1) Случай $\alpha < 1$. Решение задачи (16_α) , (17) будем искать в виде

$$u_{\alpha,n}^k(r, t) = u_{\alpha,n}^{k,1}(r, t) + u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t), \quad (42)$$

где $u_{\alpha,n}^{k,1}(r, t)$ – решение задачи Коши (16_α) с данными (34), а $u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t)$ – решение задачи Дирихле для уравнения

$$L_\alpha u_{\alpha,n}^{k,2} = 0 \quad (43)$$

с условием

$$u_{\alpha,n}^{k,2}(r, 0) = 0, u_{\alpha,n}^{k,2}(r, \varphi(r)) = \sigma_n^k(r) - u_{\alpha,n}^{k,1}(r, \varphi(r)),$$

$$k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (44)$$

Учитывая формулы (35), (39) и (41) задача Коши (16_α) , (34) сводим к задачам Коши (16_0) , (38) и (16_0) , (34), решения которых имеет вид (24).

Далее, используя формулы (31), (33) задача Дирихле (43), (44) сводим к задаче Дирихле для уравнения

$$L_0 u_{0,n}^{k,2} = 0 \quad (45)$$

с данными

$$u_{0,n}^{k,2}(r, 0) = 0, u_{0,n}^{k,2}(r, \varphi(r)) = \sigma_{1n}^k(r), k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (46)$$

при $\alpha \leq 0$ и к задаче Пуанкаре для (45) с условием

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{0,n}^{k,2}(r, 0) = 0, u_{0,n}^{k,2}(r, \varphi(r)) = \sigma_{1n}^k(r), k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots, \quad (47)$$

при $0 < \alpha < 1$, где $\sigma_{1n}^k(r)$ — функция выражающихся через $\tau_n^k(r)$, $\sigma_n^k(r)$.

В [22] показано, что задачи (45), (46) и (45), (47) однозначны разрешимы.

Далее, используя утверждений 1-3, устанавливаются однозначные разрешимости задач (16_α) , (34) и (43), (44).

2) Случай $\alpha = 1$. Решение задачи (16_α) , (18) будем искать в виде (42), где $u_{1,n}^{k,1}(r, t)$ — решение задачи Коши (16_α) , (37), а $u_{1,n}^{k,2}(r, t)$ — решение задачи Пуанкаре для уравнения (43) с условием

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{1,n}^{k,2}(r, 0) = 0, u_{1,n}^{k,2}(r, \varphi(r)) = \sigma_n^k(r) - u_{1,n}^{k,1}(r, \varphi(r)),$$

$$k = \overline{1, k_n}, n = 0, 1, \dots. \quad (48)$$

В силу (36) задача (16_α) (37) сводится к задаче Коши (16_0) , (34). Учитывая формулу (35) задача Пуанкаре (43), (48) приводим к задаче Пуанкаре (45), (47).

Следовательно, задача (16_α) , (18) однозначно разрешима.

Используя формулы (27), (25) задачу (16_α) , (19) при $\alpha > 1$ сводим к исследованному случаю $\alpha < 1$.

Таким образом, сначала решив задачу (12), (17) ($n = 0$) и а затем (13), (17) ($n = 1$) и т.д. найдем все $u_{\alpha,n}^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$.

Итак, в области Ω , имеет место

$$\int_H \rho(\theta) LudH = 0. \quad (49)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ — плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((0, \varphi(\frac{1}{2})))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega)$ ([23]).

Отсюда и из (49), следует, что

$$\int_\Omega f(r, \theta, t) Lud\Omega = 0$$

и

$$Lu = 0, \quad \forall (r, \theta, t) \in \Omega.$$

Таким образом, ряд вида

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} u_{\alpha,n}^k(r, t) Y_{n,m}^k(\theta) \quad (50)$$

является решением задачи 1, где функции $u_{\alpha,n}^k(r, t)$ определяются из двумерных задач.

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r, \theta)$, $\sigma(r, \theta)$, леммы и формулы [24]

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dz^m} P_\mu(z) &= \frac{\Gamma(\mu + m + 1)}{2^m \Gamma(\mu - m + 1)} F(1 + m + \mu, m - \mu, m + 1; \frac{1-z}{2}), \\ \frac{\Gamma(z + \alpha)}{z + \beta} &= z^{\alpha-\beta} [1 + \frac{1}{2z}(\alpha - \beta)(\alpha - \beta - 1) + O(z^{-2})], \end{aligned} \quad (51)$$

а также оценки ([13])

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left| \frac{\partial^q}{\partial \theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta) \right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \dots, \quad (52)$$

где $F(a, b, c, z)$ — гипергеометрическая функция, α, β — произвольные действительные числа, как в [12, 20], можно показать, что полученное решение (50) принадлежит искомому классу.

6 Доказательство теоремы для задачи 2

1) Случай $\alpha < 1$. Решение задачи (16_α) , (20) будем искать в виде (42), где $u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t)$ — решение задачи Коши (16_α) , (32), а $u_{\alpha,n}^{k,1}(r, t)$ — решение задачи Пуанкаре для уравнения (43) с условием (48). В силу (31), (33) задача (16_α) , (32) приводится к задаче (45), (30) при $\alpha \leq 0$ и (45), (34') при $0 < \alpha < 1$.

Используя формулы (35), (39) и (41) задачу (43), (48) сводим к задаче Пуанкаре (45), (47).

Таким образом, задача (16_α) , (20) однозначно разрешима.

2) Случай $\alpha = 1$. Решение задачи (16_α) , (21) ищем в виде (42), где $u_{1,n}^{k,1}(r, t)$ — решение задачи Коши (16_α) , с данными

$$u_{1,n}^{k,1}(r, 0) = -\nu_n^k(r), \quad \frac{\partial}{\partial t} u_{1,n}^{k,1}(r, 0) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (53)$$

а $u_{\alpha,n}^{k,2}(r, t)$ — решение задачи Пуанкаре для (43) с условием (48).

Учитывая формулу (35) задача Коши (16_α) , (53) сводим к задаче Коши (16_0) , (53), а задачу (43), (48) — к задаче (45), (47), которое имеет единственное решение.

Значит задача (16_α) , (21) также однозначно разрешима.

Применяя формулу (27), (25) задачу (16_α) , (22) при $\alpha > 1$ сводим к случаю $\alpha < 1$.

Следовательно, функция (50) является решением задачи 2, где функции $u_{\alpha,n}^k(r, t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$ определяются из предыдущих двумерных задач и в силу формул (51), (52) принадлежит искомому классу.

Теорема доказана.

7 Заключение

В работе найден многомерный область в которой, задачи Дирихле и Пуанкаре разрешимы для одного класса сингулярных гиперболических уравнений.

Литература

- [1] *J.Hadamard* "Sur les problems aux derivees partielles et leur signification physique"// Princeton University Bulletin. -1902. -Vol.13, - P. 49-52.
- [2] *D.G.Bourgin and R.Duffin* "The Dirichlet problem the vibrating string equation"//Bulletin of the American Mathematical Society. -1939. -Vol.45, -P.851-858.
- [3] *Шабат Б.В.* Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // ДАН СССР. - 1957. Т.112, №3.-С.386-389.
- [4] *Бицадзе А.В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // ДАН СССР. -1958. Т.122, № 2.-С.167-170.
- [5] *D.W.Fox and C.Pucci* "The Dirichlet problem the wave equation"// Annali di Mathematica Pura ed Applicata. - 1958. Vol.46, - P. 155-182.
- [6] *Dunninger D.R., Zachmanoglou E.C.* The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains // J.Math.Mech.-1969. Vol.18,-P.8.
- [7] *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. -М.: Наука, 2006. - 287 с.
- [8] *Алдашев С.А.* О корректности задач Дирихле для многомерных волнового уравнения и уравнения Лаврентьева-Бицадзе//Укр.матем.журнал. - 1996. - Т.4(48). № 5.- С.701-705.
- [9] *Aldashev S.A.* The well - posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation// Mathematical problems Engineering. volume 2010, Article ID 653215, 7 pages.
- [10] *Aldashev S.A.* The well - posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher-dimensional wave equation// Journal of Mathematical Science. - 2011. - Vol. 173, № 2. -P.150-154.
- [11] *Алдашев С.А.* Критерий единственности решения задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для многомерного уравнения Эйлера-Дарбу-Пуассона// Дальневосточный матем. журн. - 2012. - Т. 12, № 1.- С. 3-12.
- [12] *Алдашев С.А.* Задачи Дирихле и Пуанкаре для одного класса многомерных сингулярных гиперболических уравнений// Научные ведомости БелГУ, Сер. "Математика, физика".- Белгород, 2016. №13 (234). вып. 43.- С. 18-23.
- [13] *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. -М.:Физматгиз,1962. - 254 с.
- [14] *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. -Алматы: Гылым, 1994. - 170 с.
- [15] *Copson E.T.* On the Riemann-Green function//J.Rath.Mech and Anal. - 1958, No.1. - P.324-348.
- [16] *Weinstein A.* // The Fifth simposium in applied Math.MCGraw-Hill. New York. - 1954. - P.137-147.
- [17] *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение: -Нальчик: КБНЦ РАН, 2000. -298 с.
- [18] *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. - Новосибирск: НГУ, 1973.-144 с.
- [19] *Алдашев С.А.* О некоторых краевых задачах для одного класса сингулярных уравнений в частных производных//Дифференц.уравнения. - 1976. - Т.12, №6. -С.3-14.
- [20] *Терсенов С.А.* Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени. - Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1982.-167 с.
- [21] *Алдашев С.А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. - Орал: ЗКАТУ, 2007. - 139 с.
- [22] *Алдашев С.А.* Корректности задач Дирихле и Пуанкаре в многомерной области для волнового уравнения // Укр. матем. журнал. -2014. - Т. 66, № 10. -С. 1414-1419.

- [23] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. - 543 с.
- [24] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: -М.: Наука, 1973. -Т.1. - 294 с.

References

- [1] J.Hadamard "Sur les problems aux derivees partielles et leur signification physique"// Princeton University Bulletin. -1902, -Vol.13, - P. 49-52.
- [2] D.G.Bourgin and R.Duffin "The Dirichlet problem the vibrating string equation"//Bulletin of the American Mathematical Society. -1939, -Vol.45, -P. 851-858.
- [3] Shabat B. V Examples of solutions of the Dirichlet problem for a mixed-type equation // DAN SSSR. - 1957. - Vol. 112, № 3. - P. 386-389.
- [4] Bitsadze A.B. The incorrectness of the Dirichlet problem for mixed-type equations in mixed areas // DAN USSR. - 1958. - Vol. 122, № 2. - P. 167-170.
- [5] D.W.Fox and C.Pucci "The Dirichlet problem the wave equation"// Annali di Mathematica Pura ed Applicata. -1958. - Vol. 46, -P. 155-182.
- [6] Dunninger D.R., Zachmanoglou E.C. The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hyperbolic equations in cylindrical domains // J.Math.Mech.-1969. Vol.18,-P.8.
- [7] Nakhushev A. M. Displacement problems for partial differential equation. - М.: Nauka, 2006. - 287 p.
- [8] Aldashev S.A. Aldashev S.A. Oh Dirichlet correctness task mnogomernix volnovogo equation and the equation Lavrenteva-Bicadze // Ukrainian . Math . Zh .- 1996. - Vol. 4(48). No 5. - P.701-705.
- [9] Aldashev S.A. The well - posedness of the Dirichlet problem in the cylindric domain for the multidimensional wave equation// Mathematical problems Engineering, volume 2010, Article ID 653215, 7 pages.
- [10] Aldashev S.A. The well - posedness of the Poincare problem in a cylindrical domain for the higher-dimensional wave equation// Journal of Mathematical Science. -2011. - Vol. 173, № 2. -P. 150-154.
- [11] Aldashev S.A. A uniqueness criterion for solutions of the Dirichlet problem and Poincare in a cylindrical domain for the multidimensional Euler-Poisson-Darboux // Far Mat. zhurn. - 2012. - Vol. 12, No 1. - P. 3-12.
- [12] Aldashev S.A. Dirichlet and Poincare for a class of multidimensional singular hyperbolic equations // Scientific statements BSU, Ser. "Mathematics, Physics".- Belgorod, 2016. Vol. 43. № 13 (234), - P. 18-23.
- [13] Mikhlin S.G. Multidimensijnal singular integrals and integral equations.-М.:Physmathgiz,1962.-254 p.
- [14] Aldashev S.A. Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations. -Almaty: Gylym, 1994. -170 p.
- [15] Copson E.T. On the Riemann-Green function // J.Rath.Mech and Anal. - 1958, № 1. - P. 324-348.
- [16] Weinstein A. // The Fifth simposium in applied Math. MCGraw-Hill. New York. - 1954. - P.137-147.
- [17] Nahushev A.M. Elements of fractional calculus and their application. -Nalchik: KBSC RAS, 2000,-298 p.
- [18] Tersenov S.A. Introduction to the theory of equations degenerating on the boundary.- Novosibirsk: NSU, 1973, - 144 p.
- [19] Aldashev S.A. Some boundary value problems for a class of singular partial differential equations derivatives // Differents.uravneniya. -1976. -Vol.12, №6.- P. 3-14.
- [20] Tersenov S.A. Introduction to the theory of parabolic equations with changing time direction. -Novosibirsk: Siberian Branch of the USSR MI, 1982, -167 p.
- [21] Aldashev S.A. Degenerate multidimensional hyperbolic equations. -Oral: ZKATU, 2007, -139 p.
- [22] Aldashev S.A. Correctness of Dirichlet and Poincare problems in a multidimensional area for wave equalization // Ukrainian math journal. -2014. - Vol. 66, № 10. - P. 1414-1419.
- [23] Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of function theory and functional analysis. -М.: Nauka, 1976. - 543 p.
- [24] G.Beitmen, A.Erdeyee Higher Transcendental Functions. -М.: Nauka, 1973. - Vol. 1. - 294 p.

УДК 517.984.5

Жуманова Л.К.^{1*}, Садыбеков М.А.^{2**}¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г.Алматы²Институт математики и математического моделирования, Республика Казахстан, г.Алматы

E-mail: *Lyazzat.Zhumanova@kaznu.kz, **sadybekov@math.kz

Первый регуляризованный след интегро-дифференциального оператора Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками при интегральном возмущении условий склеивания

Работа посвящена вычислению первого регуляризованного следа одного интегро-дифференциального оператора с главной частью типа Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками при интегральном возмущении условий "склейки". Рассматривается оператор Штурма-Лиувилля $-y''(x) + q(x)y(x) + \gamma \int_0^\pi y(t)dt = \lambda y(x)$, заданный на отрезках $\frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, $k = \overline{1, n}$; $n \geq 2$. На левом и правом концах отрезка $[0, \pi]$ задаются краевые условия типа Дирихле: $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Решениями являются непрерывные на $[0, \pi]$ функции, первые производные которых имеют скачки в точках $x = \frac{\pi}{n}k$. Величина скачков выражается формулой $y'(\frac{\pi k}{n} - 0) = y'(\frac{\pi k}{n} + 0) - \beta_k \int_0^\pi y(t)dt$, $k = \overline{1, n-1}$. Основным результатом работы является точная формула первого регуляризованного следа рассматриваемого дифференциального оператора.

Ключевые слова: Первый регуляризованный след, интегро-дифференциальный оператор, внутренне-краевое условие.

Zhumanova L.K., Sadybekov M.A.,

The first regularized trace of integro-differential Sturm-Liouville operator on the segment with punctured points at integral perturbation of transmission conditions

The paper is devoted to calculating a first regularized trace of one integro-differential operator with the main part of the Sturm-Liouville type on the segment with punctured points at integral perturbation of "transmission" conditions. The Sturm-Liouville operator $-y''(x) + q(x)y(x) + \gamma \int_0^\pi y(t)dt = \lambda y(x)$ given on the segments $\frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, $k = \overline{1, n}$; $n \geq 2$ is considered. Boundary conditions of the Dirichlet type: $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ are given on the left-hand and right-hand ends of the segment $[0, \pi]$. The functions continuous on $[0, \pi]$, the first derivatives of which have jumps at the points $x = \frac{\pi}{n}k$, are solutions. The value of jumps is expressed by the formula $y'(\frac{\pi k}{n} - 0) = y'(\frac{\pi k}{n} + 0) - \beta_k \int_0^\pi y(t)dt$, $k = \overline{1, n-1}$. The basic result of the paper is the exact formula of the first regularized trace of the considered differential operator. **Key words:** first regularized trace, integro-differential operator, inner-boundary condition.

Жуманова Л.К., Садыбеков М.А.,

Ойық нүктелі кесіндідегі желімдеу шарты интегралдық ауытқулармен берілген Штурм-Лиувилл интегро-дифференциалдау операторының бірінші регуляриланған ізі

Жұмыс ойық нүктелі кесіндідегі "желімдеу" шарты интегралдық ауытқулармен берілген басты бөлігі Штурм-Лиувилл тектес интегро-дифференциалдау операторының бірінші регуляриланған ізін есептеуге арналған. $\frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, $k = \overline{1, n}$; $n \geq 2$ кесіндісінде берілген $-y''(x) + q(x)y(x) + \gamma \int_0^\pi y(t)dt = \lambda y(x)$ Штурм-Лиувилл операторы қарастырылады. $[0, \pi]$ кесіндісінің оң жақ және сол жақ шеттерінде $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ түрдегі Дирихле тектес шарт беріледі. Шешімі $[0, \pi]$ аралығында үзіліссіз, бірінші ретті туындылары $x = \frac{\pi}{n}k$ нүктелерінде секіріске ие функция болады. Секіріс ұзындығы $y'(\frac{\pi k}{n} - 0) = y'(\frac{\pi k}{n} + 0) - \beta_k \int_0^\pi y(t)dt$, $k = \overline{1, n-1}$ формуласымен өрнектеледі. Жұмыстың негізгі нәтижесі қарастырылатын дифференциалдау операторының бірінші регуляризацияланған ізінің айқын формуласын анықтау болып табылады.

Түйін сөздер: бірінші регуляризацияланған із, интегро-дифференциалдау операторы, ішкі-шеттік шарт.

1 Введение

На сегодняшнем этапе своего развития спектральная теория обыкновенных дифференциальных операторов является одним из важных разделов общей спектральной теории и активно разрабатывается различными математическими школами. Одним из её направлений является теория следов дифференциальных операторов, которая разрабатывается, прежде всего, московской школой под руководством академика В. А. Садовниченко [1, 2]. Только за последние годы ими представлены формулы первого регуляризованного следа для дискретных операторов, регуляризованные следы сингулярных операторов, регуляризованные следы несамосопряженных дискретных операторов с неядерной резольвентой, формулы следа М. Г. Крейна на случай возмущения типа Гильберта–Шмидта, регуляризованный след операторного уравнения Штурма–Лиувилля на конечном отрезке, формула следа для потенциала, содержащего дельта-функции, формулы регуляризованных следов операторов с относительно компактным возмущением и т. д.

Однако ряд существенных проблем спектральной теории остается по-прежнему не разрешенным. К их числу относится нахождение регуляризованных следов дифференциальных операторов в областях с проколотыми точками. Данное направление тесно связано с исследованием операторов с потенциалами, содержащими дельта-функции, однако имеет и свои особенности. На сегодняшний день это направление находится на стадии накопления первичной информации, для чего необходимо получение формул явного вида вычисления регуляризованных следов различных конкретных дифференциальных операторов в областях с проколотыми точками.

2 Понятие регуляризованного следа

Теория регуляризованных следов линейных операторов берёт своё начало с фундаментального факта конечномерной теории — инвариантности матричного следа линейного оператора и совпадении его со спектральным следом, и исследует вопрос о распространении понятия инвариантности следа на неограниченные операторы.

Исследования регуляризованных следов операторов с дискретным спектром было начато в знаменитой работе И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [3], в которой авторы нашли след оператора в задаче Штурма–Лиувилля

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Для $q(x) \in C^1[0, \pi]$ при выполнении условия $\int_0^\pi q(x)dx = 0$ была получена формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \frac{1}{4}(q(0) + q(\pi)),$$

где λ_n - собственные значения задачи, а $\mu_n = n^2$ - собственные значения этой же задачи с $q(x) = 0$. Сумма ряда называется *первым регуляризованным следом оператора*. Формулы такого типа называются формулами первого регуляризованного следа. Одним из преимуществ подобных формул является то, что хотя собственные значения оператора при $q(x) \neq 0$ не могут быть вычислены в явном виде, сумма регуляризованного следа определяется точно и всегда может быть вычислена.

К аналогичным результатам пришел в том же году Л.А. Дикий, использовавший несколько иные методы. Получению формул регуляризованных следов для обыкновенных дифференциальных операторов были посвящены работы И.М. Гельфанда, М.Г. Гасимова, Р.Ф. Шевченко, А.Г. Костюченко, В.А. Садовниченко и многих других. Наиболее общие результаты для обыкновенных дифференциальных операторов получены В.Б. Лидским и В.А. Садовничим [4]. Ими было установлено, что вывод формул указанного типа для широкого класса краевых задач, порожденных обыкновенными дифференциальными выражениями на конечном отрезке со сложным вхождением спектрального параметра, сводится к изучению регуляризованных сумм корней целых функций с определенной асимптотической структурой.

3 Краткий обзор близких по тематике работ казахстанских авторов

Среди большого количества опубликованных работ по формулам регуляризованного следа дифференциального оператора необходимо отметить работы казахстанских математиков. Это прежде всего работы профессора Б.Е. Кангужина и его учеников и последователей.

В работе [5] предложена математическая модель о вынужденных колебаниях пакета плоских пластин с точечными упругими связями. В [6, 7] дано полное описание корректно разрешимых краевых задач для бигармонического оператора в круге и шаре, выписаны их корректно разрешимые конечномерные возмущения, возникающие при рассмотрении задачи в проколотой области. В [8] найдены тождества для собственных значений оператора, порожденного обыкновенным дифференциальным выражением с внутренне краевыми условиями. В работе [9] дано полное описание корректно разрешимых краевых задач для оператора Лапласа в круге и в проколотом круге, приведены формулы резольвент корректных задач. В [10] в гильбертовом пространстве изучен оператор Лапласа в проколотой области, получен аналог формулы Грина и описан класс самосопряженных расширений. В [11, 12] рассмотрен класс корректных задач для оператора m -Лапласа в проколотой области и получены формулы регуляризованного следа.

Наиболее близкой к настоящей работе по тематике является [14]. В ней получена формула первого регуляризованного следа одного дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками при интегральном возмущении условий "скачка" первых производных в этих проколотых точках. Приведем этот результат более подробно.

Рассмотрена задача на собственные значения:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad \frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k, \quad k = \overline{1, n}; \quad n \geq 2; \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad (2)$$

$$y\left(\frac{\pi k}{n} - 0\right) = y\left(\frac{\pi k}{n} + 0\right), \quad y'\left(\frac{\pi k}{n} - 0\right) = y'\left(\frac{\pi k}{n} + 0\right) - \beta_k \int_0^{\pi} y(t)dt, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (3)$$

где $q(x)$ – достаточное число раз дифференцируемая действительнoзначная функция; β_k – действительные константы, λ – спектральный параметр.

Отметим, что при $\beta_k = 0$, $k = \overline{1, n-1}$ для уравнения (1) с дополнительными слагаемыми вида $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k y\left(\frac{\pi k}{n}\right)$ в работах [13], [2, с. 112] были выписаны формулы первого

регуляризованного следа задачи. Данные работы вместе с [14] являются наиболее близкими по тематике к рассматриваемой нами задаче.

Основным результатом работы [14] является

ТЕОРЕМА 1 [14] *Для первого регуляризованного следа задачи (1) - (3) справедлива следующая формула:*

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n} \left(\lambda_{m,j} - (2nm + j)^2 - \left(1 + \frac{1}{2nm + j} \right) \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(t) dt \right) = \\ = -\frac{1}{4} (q(0) + q(\pi)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(t) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\lambda_{m,j}$ - собственные значения задачи (1) - (3). При этом собственные значения имеют асимптотику $\lambda_{m,j} = s_{m,j}^2$, где

$$s_{m,j} = (2nm + j) + \frac{c_{1,j}}{2nm + j} + \frac{c_{2,j}}{(2nm + j)^2} + O\left(\frac{1}{(2nm + j)^3}\right), \quad (5)$$

$$c_{1,j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(t) dt, c_{2,j} = \frac{1 - (-1)^j}{2} \frac{i}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} (\beta_k + \beta_{n-k}) e^{\frac{i\pi jk}{n}}, \quad (6)$$

$$j = \overline{1, 2n}, m = 0, 1, 2, \dots$$

4 Постановка задачи и формулировка основного результата

Рассмотрим задачу на собственные значения для интегро-дифференциального оператора:

$$-y''(x) + q(x)y(x) + \gamma \int_0^{\pi} y(t) dt = \lambda y(x), \quad \frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k, \quad k = \overline{1, n}; \quad n \geq 2; \quad (7)$$

с краевыми условиями (2) и с обобщенными условиями "склеивания" (3) в проколотых точках отрезка.

Нашей целью является построение формулы первого регуляризованного следа, наподобии формулы (4), для рассматриваемой спектральной задачи (7), (2), (3).

Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 2 *Для первого регуляризованного следа задачи (7), (2), (3) справедлива формула:*

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n} \left(\lambda_{m,j} - (2nm + j)^2 - \left(1 + \frac{1}{2nm + j} \right) \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(t) dt \right) = \\ = -\frac{1}{4} (q(0) + q(\pi)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} q(t) dt - \gamma\pi, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\lambda_{m,j}$ - собственные значения задачи (7), (2), (3). При этом собственные значения при больших m имеют асимптотику $\lambda_{m,j} = s_{m,j}^2$, $j = \overline{1, 2n}$, где величины $s_{m,j}$, $c_{1,j}$, $c_{2,j}$ определяются формулами (5) и (6) соответственно.

5 Краткий ход доказательства теоремы

Стандартными вычислениями на каждом интервале $I_k : \frac{\pi}{n}(k-1) < x < \frac{\pi}{n}k$, можно выписать асимптотики (при $|s| \rightarrow \infty$) двух линейно независимых решений уравнения (1):

$$y_{1,k}(x, s) \sim e^{isx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_{\nu,k}(x)}{s^{\nu}}, \quad y_{2,k}(x, s) \sim e^{-isx} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{a_{\nu,k}(x)}{s^{\nu}},$$

где $a_{0,k}(x) \equiv 1$,

$$a_{\nu,k}(x) = \frac{i}{2} \left\{ a'_{\nu-1,k}(x) - a'_{\nu-1,k} \left(\pi \frac{k-1}{n} \right) - \int_{\pi \frac{k-1}{n}}^x q(t) a_{\nu-1,k}(t) dt \right\}. \quad (9)$$

Здесь, как обычно, предполагается, что комплексная плоскость ($\lambda = s^2, s = \sqrt{\lambda}$) разбита на четыре сектора лучами $\arg s = 0$ и $\arg s = \frac{\pi}{2}$ и данная асимптотика имеется в каждом из четырех секторов.

Из рекуррентной формулы (7) получаем

$$a_{1,k}(x) = -\frac{i}{2} \int_{\pi \frac{k-1}{n}}^x q(t) dt, \quad a_{2,k}(x) = \frac{1}{4} \left\{ q(x) - q \left(\pi \frac{k-1}{n} \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{\pi \frac{k-1}{n}}^x q(t) dt \right)^2 \right\}, \dots,$$

$$a_{\nu,k} \left(\pi \frac{k-1}{n} \right) = 0, \nu = 1, 2, \dots;$$

$$y_{1,k} \left(\pi \frac{k-1}{n}, s \right) = e^{i \frac{\pi(k-1)s}{n}}, \quad y_{2,k} \left(\pi \frac{k-1}{n}, s \right) = e^{-i \frac{\pi(k-1)s}{n}}.$$

На каждом из интервалов I_k общее решение интегро-дифференциального уравнения (7) строим методом вариации произвольных постоянных. Представляем решение в виде

$$y(x) = A_k(x) y_{1,k}(x, s) + B_k(x) y_{2,k}(x, s).$$

Получаем представление общего решения уравнения (7). Это решение является двупараметрическим семейством. Обозначим эти константы через A_k^0, B_k^0 .

Удовлетворяя условиям краевым условиям (2) и обобщенным условиям "склеивания" (3), получаем относительно постоянных A_k^0, B_k^0 линейную систему из $2n$ уравнений, определитель $\Delta(s)$ которой и будет характеристическим определителем спектральной задачи (7), (2), (3).

Эта функция $\Delta(s)$ определяется следующим асимптотическим выражением:

$$\begin{aligned} \Delta(s) = & e^{i\pi s} \left\{ 1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 - (\beta_1 + \dots + \beta_{n-1}) + \gamma\pi}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right) \right\} + \\ & + e^{-i\pi s} \left\{ -1 + \frac{a_1}{s} - \frac{a_2 - (\beta_1 + \dots + \beta_{n-1}) + \gamma\pi}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right) \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} e^{i \frac{\pi k}{n} s} \left\{ \frac{\beta_k + \beta_{n-k}}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right) \right\} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{-i \frac{\pi k}{n} s} \left\{ \frac{\beta_k + \beta_{n-k}}{s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right) \right\} + \left\{ \frac{4i\gamma}{s^3} + O\left(\frac{1}{s^4}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$a_1 = -\frac{i}{2} \int_0^\pi q(t) dt, \quad a_2 = \frac{1}{4} \left\{ q(\pi) - q(0) - \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi q(t) dt \right)^2 \right\}.$$

Анализируя уравнение $\Delta(s) = 0$, получаем, что задача (7), (2), (3) имеет $4n$ серий собственных значений с асимптотиками (5), (6). Учитывая, что функция $\Delta(s)$ - нечетная, получаем, что вместе с собственными значениями $s_{m,j}$ из (5) числа $-s_{m,j}$ также являются корнями характеристического многочлена. Их мы обозначим через $s_{m,j+2n}$, $j = \overline{1, 2n}$. Отсюда получаем обращение в нуль коэффициентов $c_{2,j}$ из (6) с четными номерами j . Таким образом, в терминах спектрального параметра λ мы получим $2n$ серий собственных значений.

При этом функция $\Delta(s)$ принадлежит классу K целых функций первого порядка [4]. Поэтому для нее применима методика вычисления регуляризованной суммы корней квазимногочленов, основанная на построении дзета-функции, ассоциированной с функцией $\Delta(s)$ и использовании метода последовательных приближений Хорна (см. [4]).

Так как данная методика хорошо разработана, в силу громоздкости вычислений мы их здесь приводить не будем и на этом завершим доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1 В частном случае, когда $\gamma = 0$, задача (7), (2), (3) совпадает с задачей (1) - (3) и формула (8) теоремы 2 совпадает с результатом теоремы 1 - формулой (4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2 В частном случае, когда $\gamma = 0$, $\beta_k = 0$, $k = \overline{1, n-1}$, задача (7), (2), (3) совпадает с задачей Дирихле и основной результат теоремы 2 - формула (8) - совпадает с классическим результатом:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\lambda_m - m^2 - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi q(t) dt \right) = -\frac{1}{4} (q(0) + q(\pi)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi q(t) dt.$$

В заключение авторы выражают признательность Т.Ш. Кальменову, Б.Е. Кангужи-ну и всем участникам Общегородского научного семинара "Дифференциальные операторы и их приложения" за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0825/ГФ4.

Литература

- [1] Садовничий В.А. Теория операторов. - М.: "Дрофа", 2004. - 384 с.
- [2] Митрохин С.И. Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты. - М.: Интернет-Университет информационных технологий, 2009. - 364 с.
- [3] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. - 1953. - Т. 88. - С. 593-596.
- [4] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функциональный анализ и его приложения. - 1967. - Т.1. - №2. - С. 52-59.
- [5] Берикханова Г.Е., Жумагулов Б.Т., Кангужин Б.Е. Математическая модель колебаний пакета прямоугольных пластин с учетом точечных связей // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. - 2010. - № 1(9). С. 72-86.
- [6] Берикханова Г.Е., Кангужин Б.Е. Резольвенты конечномерных возмущенных корректных задач для бигармонического оператора // Уфимск. матем. журн. - 2010. - Т. 2, № 1. - С. 17-34.

- [7] Кангузин Б.Е., Кошанов Б.Д. Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре // Уфимск. матем. журн. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 41–52.
- [8] Кангузин Б.Е., Нурахметов Д.Б., Токмагамбетов Н.Е. Аппроксимативные свойства систем корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков // Уфимск. матем. журн. – 2011. – Т. 3, № 3. – С. 80–92.
- [9] Кангузин Б.Е., Аниyarov А.А. Корректные задачи для оператора Лапласа в проколотом круге // Матем. заметки – 2011. – Т. 89, № 6. – С. 856–867.
- [10] Кангузин Б.Е., Нурахметов Д.Б., Токмагамбетов Н.Е. Оператор Лапласа с δ -подобными потенциалами // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 2. – С. 9–16.
- [11] Кангузин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е. О формуле регуляризованного следа корректно возмущенного оператора Лапласа // Доклады РАН. – 2015. – Т. 460, № 1. – С. 7–10.
- [12] Кангузин Б.Е., Токмагамбетов Н.Е. О формулах регуляризованного следа корректно возмущенного оператора m -Лапласа // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51, № 12. – С. 1606–1611.
- [13] Мартинович М. Об одной краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 3. – С. 537–540.
- [14] Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. Первый регуляризованный след дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками // Вестник КазНУ. Сер. мат., мех., инф. – 2014. – № 2(81). – С. 66–71.

References

- [1] Sadovnichij V.A. Teorija operatorov. – M.: "Drofa", 2004, 384 s.
- [2] Mitrohin S.I. Spektral'naja teorija operatorov: gladkie, razryvnye, summiruemyekojefficienty. – M.: Internet-Universitet informacionnyh tehnologij, 2009, 364 s.
- [3] Gel'fand I.M., Levitan B.M. Ob odnom prostom tozhdestve dlja sobstvennyh znachenij differencial'nogo operatora vtorogo porjadka. // Dokl. AN SSSR, 1953, t. 88, s. 593–596.
- [4] Lidskij V.B., Sadovnichij V.A. Reguljarizovannye summy kornej odnogo klassa celyh funkcij. // Funkcional'nyj analiz i ego prilozhenija, 1967, t. 1, № 2, s. 52–59.
- [5] Berikhanova G.E., Zhmagulov B.T., Kanguzhin B.E. A mathematical model of vibrations for a stack of rectangular plates with allowance for pointlike constraints. // Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., 2010, № 1(9), s. 72–86.
- [6] Berikhanova G.E., Kanguzhin B.E. Resolvent of finite-dimensional perturbed of the correct problems for the biharmonic operator. // Ufmsk. Mat. Zh., 2010, t. 2, № 1, s. 17–34.
- [7] Kanguzhin B.E., Koshanov B.D. Resolvent of finite-dimensional perturbed of the correct problems for the biharmonic operator. // Ufmsk. Mat. Zh., 2010, t. 2, № 2, s. 41–52.
- [8] Kanguzhin B.E., Nurakhmetov D.B., Tokmagambetov N.E. Resolvent of finite-dimensional perturbed of the correct problems for the biharmonic operator. // Ufmsk. Mat. Zh., 2010, t. 3, № 3, s. 80–92.
- [9] Kanguzhin B.E., Aniyarov A.A. Well-posed problems for the Laplace operator in a punctured disk. // Mathematical Notes, 2011, t. 89, № 5–6, s. 819–829
- [10] Kanguzhin B.E., Nurakhmetov D.B., Tokmagambetov N.E. Laplace operator with δ -like potentials. // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2014, № 2, 9–16
- [11] Kanguzhin B.E., Tokmagambetov N.E. A Regularized Trace Formula for a Well-Perturbed Laplace Operator. // Doklady Mathematics, 2015, t. 91, № 1, s. 1–4.
- [12] Kanguzhin B.E., Tokmagambetov N.E.
On Regularized Trace Formulas for a Well-Posed Perturbation of the m -Laplace Operator. // Differential Equations, 2015, t. 51, № 12, s. 1583–1588.

-
- [13] *Martinovich M.* Ob odnoj kraevoj zadache dlja funkcional'no-differencial'nogo uravnenija // Differenc. uravnenija, 1982, t. 18 № 3, s. 537-540.
- [14] *Imanbaev N.S., Sadybekov M.A.* The first regularized trace of a differential operator of the Sturm–Liouville problem on the segment with punctured points. // ISSN 1563-0285. Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. 2014, № 2(81), s. 66-71.

УДК 517.956

Қытайбеков Е.

Казахский национальный педагогический университет имени Абая,
Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: Er-kaz_89@mail.ru

Разрешимость задачи Дирихле для трехмерных эллипτικο-параболических уравнений с вырождением типа и порядка

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. В работах С.А. Алдашева, показана однозначная разрешимость и получен явный вид задачи Дирихле в цилиндрической области для многомерных эллипτικο-параболических уравнений. В данной работе для трехмерных эллипτικο-параболических уравнений с вырождением типа и порядка в цилиндрической области показано разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле.

Ключевые слова: разрешимость, задачи Дирихле, вырождение типа и порядка, плотность.

Kitaybekov E.T.

Solvability Dirichlet problem for three-dimensional elliptic-parabolic equations with type and order extinction

Correctness of boundary problems in the plane for elliptic equations is well analyzed by analytic function theory of complex variable. There appear principal difficulties in similar problems when the number of independent variables is more than two. An attractive and suitable method of singular integral equations is less strong because of lack of any complete theory of multidimensional singular integral equations. In the works of S.A. Aldasheva, shows the unique solvability and obtained form of the explicit Dirichlet problem in the cylindrical domain for multidimensional elliptic-parabolic equations. In this paper, for the three-dimensional elliptic-parabolic equations with degeneration of the type and order in a cylindrical domain shown solvability and obtained in the form of a classical solution of the Dirichlet problem.

Key words: solvability, Dirichlet problem, degeneration of the type and order, density.

Қытайбеков Е.

Түрі мен реті азғындалған үш өлшемді эллипτικο-параболалық теңдеулерге Дирихле есебінің шешімділігі

Комплексті айнымалы аналитикалық функциялар теориясының әдісімен жазықтықта эллиптикалық теңдеулерге шеттік есептердің біршешімділігі жақсы қарастырылған. Тәуелсіз айнымалылар екіден көп болғанда, осы мәселелерді зерттегенде көп қиындықтар кездеседі. Көп өлшемді сингулярлық интегралдар теориясы толық емес болғандықтан, белгілі сингулярлық интегралдар әдісін пайдалану күшін жоғалтады. С.А. Алдашевтың жұмыстарында цилиндрлік облыста көп өлшемді эллипτικο-параболалық теңдеулерге Дирихле есебінің бір мәнділігі дәлелденген және нақты түрі келтірілген. Бұл жұмыста түрі мен реті азғындалған үш өлшемді эллипτικο-параболалық теңдеулерге цилиндрлік облыста Дирихле есебінің шешімділігі көрсетілген және нақты Дирихле есебінің шешімінің айқын түрі алынған.

Түйін сөздер: шешімділік, Дирихле есебі, түрі мен реті азғындалған, тығыздық.

1 Введение

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучены. При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи (или задача Дирихле) впервые осуществил Г. Фикера [1]. В обобщенных пространствах эта задача изучена в [2]. В [3,4] установлена корректности задачи Дирихле для вырождающихся многомерных эллиптико-параболических уравнений. В работе для трехмерных эллиптико-параболических уравнений с вырождением типа и порядка цилиндрической области показано разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле.

2 Постановка задачи и результат

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_3 точек (x_1, x_2, t) , ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, x_2)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ — части поверхности Γ , лежащие в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основания области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α и Ω_β представляющее множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_2 .

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим вырождающихся трехмерные смешанно эллиптико-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 p_i(t) u_{x_i x_i} + p_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^2 a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u, & t > 0, \\ \sum_{i=1}^2 g_i(t) u_{x_i x_i} - u_t + \sum_{i=1}^2 d_i(x, t) u_{x_i} + e(x, t) u, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $p_i(t) > 0$ при $t > 0$, $p_i(0) = 0$, $g_i(t) > 0$ при $t < 0$ и могут обращаться в нуль при $t = 0$, $p_i(t) \in C([0, \alpha]) \cap C^2((0, \alpha))$, $g_j(t) \in C([\beta, 0])$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$.

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат x_1, x_2, t с полярными r, θ, t : $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Задача 1 (Дирихле). Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t = 0$ из класса $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u \Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u \Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad (2)$$

$$u \Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \quad u \Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r, \theta). \quad (3)$$

при этом $\varphi_1(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta)$, $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$, $\psi_2(\beta, \theta) = \varphi_2(1, \theta)$.

Пусть $\frac{a_i(x,t)}{p_3(t)}, \frac{b(x,t)}{p_3(t)}, \frac{c(x,t)}{p_3(t)} \in C(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^1(\Omega_\alpha)$, $d_i(x,t), e(x,t) \in C^1(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$, $c(x,t) \leq 0, \forall (x,t) \in D_\alpha$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Если $\varphi_1(r, \theta), \varphi_2(r, \theta) \in C(\bar{S}) \cap C^2(S)$, $\psi_1(t, \theta) \in C(\bar{\Gamma}_\alpha) \cap C^2(\Gamma_\alpha)$, $\psi_2(t, \theta) \in C(\bar{\Gamma}_\beta) \cap C^2(\Gamma_\beta)$, то задача 1 разрешима.

3 Разрешимость задачи 1

Сначала покажем разрешимость задачи (1), (3). Ее решение будем искать в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = u_{10}(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{1n}(r, t) \cos n\theta + u_{2n}(r, t) \sin n\theta), \quad (5)$$

где $u_{10}(r, t), u_{1n}(r, t), u_{2n}(r, t)$ — функции, которые будут определены ниже.

Подставляя (4) в (1), в полярных координатах будем иметь

$$\begin{aligned} L_1 u \equiv & g_1(t) \left(\cos^2 \theta u_{10rr} + \frac{\sin^2 \theta}{r} u_{10r} \right) + g_2(t) \left(\sin^2 \theta u_{10rr} + \frac{\cos^2 \theta}{r} u_{10r} \right) - u_{10t} + \\ & + d_1(r, \theta, t) \cos \theta u_{10r} + d_2(r, \theta, t) \sin \theta u_{10r} + e(r, \theta, t) u_{10} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \left\{ g_1(t) \left[\cos^2 \theta (\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \frac{\sin^2 \theta}{r} (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \right. \right. \\ & + \frac{n \sin 2\theta}{r} (\sin n\theta u_{1nr} - \cos n\theta u_{2nr}) + \frac{n \sin 2\theta}{r^2} (\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) - \\ & - \frac{n^2 \sin^2 \theta}{r^2} (\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \left. \right] + g_2(t) \left[\sin^2 \theta (\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \right. \\ & + \frac{n \sin 2\theta}{r} (\cos n\theta u_{2nr} - \sin n\theta u_{1nr}) + \frac{\cos^2 \theta}{r} (\cos n\theta u_{1nr} - \sin n\theta u_{2nr}) + \\ & + \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) - \frac{n^2}{r^2} \cos^2 \theta (\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \left. \right] - \cos n\theta u_{1nt} - \\ & - \sin n\theta u_{2nt} + d_1 \left[\cos \theta (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n \sin \theta}{r} (\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) \right] + \\ & + d_2 \left[\sin \theta (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n \cos \theta}{r} (\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) \right] + \\ & + e(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Теперь полученное выражение (5) сначала умножим на $\rho(\theta) \neq 0$, а затем проинтегрируем от 0 до 2π . После несложных преобразований получим ряд

$$\begin{aligned} & \frac{(g_1 + g_2)}{2} \rho_{10} \left(u_{10rr} + \frac{1}{r} u_{10r} \right) - \rho_{10} u_{10t} + \frac{(g_1 - g_2)}{2} d_{10} \left(u_{10rr} - \frac{1}{r} u_{10} \right) + \\ & + a_{10}(r, t) u_{10r} + c_{10}(r, t) u_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\frac{(g_1 + g_2)}{2} \rho_{jn} (u_{jnrr} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{r} u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn}) - \rho_{jn} u_{jnt} + \frac{(g_1 - g_2)}{2} d_{jn} \left(u_{jnrr} - \frac{1}{r} u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn} \right) + \\ & + \frac{(g_2 - g_1)n}{2} e_{jn} \left(u_{jnr} - \frac{u_{jn}}{2r} \right) + a_{jn}(r, t) u_{jnr} + c_{jn}(r, t) u_{jn} \left. \right] \} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\rho_{1n} &= \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad \rho_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin n\theta d\theta, \quad d_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \cos n\theta d\theta, \\ d_{2n} &= \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \sin n\theta d\theta, \quad e_{1n} = - \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \sin n\theta d\theta, \quad e_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \cos n\theta d\theta, \\ a_{1n} &= \int_0^{2\pi} \rho(d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta) \cos n\theta d\theta, \quad a_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho(d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta) \sin n\theta d\theta, \\ c_{1n} &= \int_0^{2\pi} \rho \left[(d_1 \sin \theta - d_2 \cos \theta) \frac{n \sin n\theta}{r} + e \cos n\theta \right] d\theta, \\ c_{2n} &= \int_0^{2\pi} \rho \left[(d_2 \cos \theta - d_1 \sin \theta) \frac{n \cos n\theta}{r} + e \sin n\theta \right] d\theta, \quad n = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

Далее, рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t)\rho_{10} \left(u_{10rr} + \frac{1}{r}u_{10r} \right) - \rho_{10}u_{10t} = 0, \quad g(t) = \frac{g_1(t) + g_2(t)}{2}, \quad (7)$$

$$g(t)\rho_{j1} \left(u_{j1rr} + \frac{1}{r}u_{j1r} - \frac{u_{j1}}{r^2} \right) - \rho_{10}u_{j1t} = \frac{(g_2 - g_1)d_{10}}{2} \left(u_{10rr} - \frac{u_{10r}}{r} \right) - a_{10}u_{10r} - c_{10}u_{10}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned}g(t)\rho_{jn} \left(u_{jnrr} + \frac{1}{r}u_{jnr} - \frac{n^2}{r^2}u_{jn} \right) - \rho_{jn}u_{jnt} &= -\frac{(g_1 - g_2)d_{jn}}{2} \left(u_{jn-1rr} - \frac{1}{r}u_{jn-1r} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n-1)^2}{r^2}u_{jn-1} \right) - \frac{(g_2 - g_1)(n-1)}{r}e_{jn-1} \left(u_{jn-1r} - \frac{u_{jn-1}}{2r} \right) - \\ &\quad - a_{jn-1}u_{jn-1r} - c_{jn-1}u_{jn-1}, \quad j = 1, 2, \quad n = 2, 3, \dots\end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно показать, что если $\{u_{10}, u_{jn}\}$, $j = 1, 2$, $n = 1, 2, \dots$ — решение системы (7)-(9), то оно является и решением уравнения (6).

Далее, учитывая ортогональность [4] систем тригонометрических функций $\{\frac{1}{2}, \cos n\theta, \sin n\theta, n = 1, 2, \dots\}$ на отрезке $[0, 2\pi]$ из краевого условия (3) в силу (4) будем иметь

$$u_{10}(r, \beta) = \varphi_{210}(r), \quad u_{10}(1, t) = \psi_{210}(t), \quad (10)$$

$$u_{jn}(r, \beta) = \varphi_{2jn}(r), \quad u_{jn}(1, t) = \psi_{2jn}(t), \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$\varphi_{210}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(r, \theta) d\theta, \quad \varphi_{210}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(t, \theta) d\theta,$$

$$\varphi_{21n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(r, \theta) \cos n\theta d\theta, \quad \psi_{21n}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(t, \theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$\varphi_{22n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(r, \theta) \sin n\theta d\theta, \quad \psi_{22n}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(t, \theta) \sin n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, задача (1),(3) сведена к системе задач для уравнений (7) -(9) с данными (10) и (11). Теперь будем находить решения этих задач. Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)-(9) можно представить в виде

$$g(t) \left(u_{nrr}^k + \frac{1}{r} u_{nr}^k - \frac{n^2}{r^2} u_n \right) - u_{nt} = f_n^k(r, t), \quad (12)$$

где $f_n(r, t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0(r, t) \equiv 0$.

В [5] показана, что краевые задачи для уравнения (12) с условиями (10) и (11) имеют единственные решения.

Следовательно, сначала решив задачу (7), (10) ($j = 1, n = 0$), а затем (8), (11) ($j = 1, 2, n = 1$) и т. д. найдем последовательно все $u_{10}(r, t)$, $u_{jn}(r, t)$, $j = 1, 2, n = 1, 2, \dots$.

Итак, показано, что

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta) L_1 u d\theta = 0. \quad (13)$$

Пусть $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0, 1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty((0, 2\pi))$ — плотна в $L_2((0, 2\pi))$, а $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((\beta, 0))$. Тогда $f(r, \theta, t) \in V$, $V = V_0 \otimes (0, 2\pi) \otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega_\beta)$ [6].

Отсюда и из (13) следует, что

$$\int_{\Omega_\beta} f(r, \theta, t) L_1 u d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_1 u = 0, \quad \forall (r, \theta, t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1),(3) в области Ω_β является функция (4), где $u_{10}(r, t)$, $u_{jn}(r, t)$, $j = 1, 2, n = 1, 2, \dots$ определяются из предыдущих двумерных задач.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi_2(r, \theta)$, $\psi_2(t, \theta)$, аналогично, как в [3], можно показать, что полученное решение (4) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$.

Далее, из (4) при $t \rightarrow -0$ имеем

$$u(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta) = u_{10}(r, 0) + \sum_{n=0}^{\infty} (u_{1n}(r, 0) \cos n\theta + u_{2n}(r, 0) \sin n\theta), \quad (14)$$

при этом $\tau(r, \theta) \in C(\bar{S}) \cap C^2(S)$.

Следовательно, учитывая краевые условия (14) и (2) приходим в области Ω_α к задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических уравнений

$$L_2 u \equiv \sum_{i=1}^2 p_i(t) u_{x_i x_i} + p_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^2 a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u = 0,$$

с данными

$$u|_S = \tau(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_2(r, \theta),$$

которое имеет единственное решение [7].

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлено.

4 Заключение

В работе для трехмерных эллипτικο-параболических уравнений с вырождением типа и порядка в цилиндрической области показано разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле.

Литература

- [1] *Фикера Г.* К единой теории краевых задач для эллипτικο-параболических уравнений второго порядка // Сб. переводов. Математика, 1963.- Т.7. № 6 -С.99-121.
- [2] *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. -Новосибирск: НГУ, 1983. - 84 с.
- [3] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле для вырождающихся трехмерных эллипτικο-параболических уравнений // Журнал Вычислительной и прикладной математика. -Киев, 2014. - №3(117)-С. 17-22.
- [4] *Алдашев С.А.* Задача Дирихле в цилиндрической области для вырождающихся многомерных эллипτικο-параболических уравнений // Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных: Тез. докл. Межд. науч. конф. посв. 100 летию А.В. Бицадзе. - Москва, 2016. - С. 14.
- [5] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле для вырождающихся многомерных гипербола-параболических уравнений // Владикавказский мат. журнал. -2014.- Т.16, № 4. -С. 3-8.
- [6] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1976. – 543 с.
- [7] *Aldashev S. A., Kitaybekov E.T.* The correctness Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional elliptic equations with type and order extinction // Analysis and Applied Mathematics: Third Intern. Conf. on Institut of Mathematics and Mathematical Modelling. -Almaty: 2016. -P.30.

References

- [1] *Fichera G.* For a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of the second order // Coll. translations. Mathematics, 1963.- Vol. 7. No 6 -P. 99-121.
- [2] *Vragov V.N.* Boundary value problems for nonclassical equations of Math Physics. -Novosibirsk: NSU, 1983.- 84 p.
- [3] *Aldashev S. A.* The correctness of the Dirichlet problem for degenerate elliptic-dimensional parabolic equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. -Kyiv, 2014. -No.3 (117) -P. 17-22.
- [4] *Aldashev S. A.* The Dirichlet problem in a cylindrical domain for multidimensional degenerate elliptic-parabolic equations // Actual problems of the theory of partial differential equations: Abstracts Int. Conf. dedicated to the 100th anniversary of A. Bitsadze. -Moscow, 2016. - P. 14.
- [5] *Aldashev S. A.* Correctness of Dirichlet problem for degenerating multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations// Vladikavkaz math. journal. -2014. -Vol. 16, No.4. -P. 3-8.
- [6] *Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of function theory and functional analysis. –M.: Nauka, 1976. -543 с.
- [7] *Aldashev S. A., Kitaybekov E.T.* The correctness Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional elliptic equations with type and order extinction // Analysis and Applied Mathematics: Third Intern. Conf. on Institut of Mathematics and Mathematical Modelling. -Almaty: 2016. -P.30.

УДК 517.938

Молдабек Ж. Т*, Алдибеков Т. М**

Институт математики и механики, Республика Казахстан, Алматы;
Казахский национальный университет имени аль-Фараби,
Республика Казахстан, Алматы
E-mail: *zhanbolat_77@mail.ru, **tamash59@mail.ru

О равномерной оценке снизу решений нелинейной системы дифференциальных уравнений

Методом первого приближения исследуется нелинейная система дифференциальных уравнений в конечномерном векторном пространстве. Рассматривается система первого приближения т.е., линейная система дифференциальных уравнений с непрерывными и стремящимися к нулю коэффициентами на бесконечном промежутке. Особые показатели линейной системы дифференциальных уравнений в этом случае принимают критические т.е., нулевые значения, поэтому для применения являются негодными. В работе определяется обобщенный особый нижний показатель линейной системы дифференциальных уравнений с непрерывными и стремящимися к нулю коэффициентами. Приводится эквивалентное определение обобщенного особого нижнего показателя линейной системы дифференциальных уравнений с непрерывными и стремящимися к нулю коэффициентами. Применяя обобщенный нижний особый показатель линейной системы дифференциальных уравнений с непрерывными и стремящимися к нулю коэффициентами, получена равномерная оценка снизу решений нелинейной системы дифференциальных уравнений в определенном классе нелинейных дифференциальных систем. Приведено достаточное условие неустойчивости нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейные дифференциальные системы, особые показатели, нелинейные дифференциальные системы, оценка решений.

Moldabek Zh.T, Aldibekov T. M

The uniform lower bound of solutions of nonlinear system of differential equations

We study non-linear system of differential equations in finite-dimensional vector space with the method of the first approximation. A system of the first approximation were considered, i.e. a linear system of differential equations with continuous and tending to zero coefficients on infinite interval. Singular exponents of a linear system of differential equations, in this case taking the critical ie, zero values, so are unsuitable for use. The paper defined the generalized special lower rate of a linear system of differential equations with continuous and tending to zero coefficients. We present an equivalent definition of a generalized special low index of a linear system of differential equations with continuous and tending to zero coefficients. Applying a generalized lower specific indicator of a linear system of differential equations with continuous and tending to zero coefficients obtained uniform lower estimate of solutions of differential equations solving the nonlinear system in a certain class of nonlinear differential systems. Powered sufficient condition for the instability of the zero solution of nonlinear differential equations.

Key words: linear differential systems, singular exponents, nonlinear differential systems, bound of the solutions

Молдабек Ж.Т., Алдибеков Т.М.

Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімінің төменнен бірқалыпты бағалауы

Ақырлы өлшемді векторлық кеңістікте сызықты емес теңдеулер жүйесі бірінші жуықтау әдісімен зерттеледі. Бірінші жуықтау жүйесі, яғни шексіз аралықта коэффициенттері үзіліссіз және нөлге ұмтылатын дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйесі қарастырылады. Дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйесінің ерекше көрсеткіштері бұл жағдайда сыни, яғни нөлдік мән қабылдағандықтан, қолдануға жарамсыз болып қалады. Жұмыста коэффициенттері үзіліссіз және нөлге ұмтылатын дифференциалдық теңдеулердің сызықты жүйесінің жалпылама ерекше төменгі көрсеткіші анықталады. Коэффициенттері үзіліссіз және нөлге ұмтылатын сызықты дифференциалдық теңдеулердің жүйесінің жалпылама ерекше төменгі көрсеткішінің эквивалентті анықтамасы беріледі. Коэффициенттері үзіліссіз және нөлге ұмтылатын сызықты дифференциалдық теңдеулердің жүйесінің жалпылама ерекше төменгі көрсеткішін қолдану арқылы дифференциалдық теңдеулердің сызықты емес жүйесінің шешімдерінің сызықты емес жүйелердің белгілі класында төменнен бірқалыпты бағалауы алынды. Дифференциалдық теңдеулердің сызықты емес жүйесінің нөлдік шешімінің орнықсыздығының жеткілікті шарты келтірілген.

Түйін сөздер: сызықты дифференциалдық жүйелер, ерекше көрсеткіштер, сызықты емес дифференциалдық жүйелер, шешімдердің бағалаулары.

Введение

В работе методом первого приближения исследуется нелинейная система дифференциальных уравнений или векторное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = F(t, x), x \in R^n, t \geq t_0$$

где $F(t, x)$ непрерывная по первому аргументу и непрерывно дифференцируемая по второму векторному аргументу векторная функция. Предполагается $F(t, 0) = 0$. Векторная функция $F(t, x)$ по векторному аргументу разлагается в точке $x = 0$ по формуле Тейлора и векторное уравнение (0) сводится к векторному дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), x \in R^n, t \in I \equiv [t_0, +\infty), f(t, 0) = 0 \quad (0)$$

Как правило, рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений или система первого приближения

$$\dot{x} = A(t)x \quad (00)$$

Среди различных асимптотических характеристик линейной системы отметим верхнее и нижнее особые показатели. Особые показатели линейной системы (00) с непрерывными и ограниченными коэффициентами известны из работ К.П. Персидского [1]. Особые показатели прочны при малых возмущениях, поэтому находят широкое применения в теории устойчивости и в других областях. Позже стало известно, что эти характеристики под названием индекс были введены в работе [2] П. Боль, но осталась незамеченной. Подробное изложение теории особых показателей имеется в [3]. М.Г. Крейном [4] особые показатели распространены к дифференциальным уравнениям в Банаховом пространстве и называются генеральными показателями, там же имеется небольшой обзор. Имеется обзор в [5]. В [6] особые показатели в конечномерном пространстве распространены

на линейную систему (00) с непрерывными и неограниченными коэффициентами. Данная работа является продолжением работы [7], где особые показатели в конечномерном пространстве распространяются на линейные системы (00) с непрерывными и стремящимися к нулю коэффициентами. В этом случае система первого приближения (00) имеет нулевые особые показатели, поэтому для исследования эти системы они неадекватны. Для исследования таких систем т.е., в критическом случае особых показателей вводятся обобщенные особые показатели и исследуются нелинейные системы дифференциальных уравнений.

Постановка задачи

Определить обобщенные нижние особые показатели линейных систем дифференциальных уравнений. Установить равномерные оценки снизу решений использованием обобщенных нижних особых показателей в определенных классах нелинейных систем дифференциальных уравнений. Установить, что обобщенные особые показатели являются более устойчивыми характеристиками систем дифференциальных уравнений.

bf Линейные системы и определения обобщенного нижнего особого показателя или особого показателя относительно q .

П. Боль, изучая вопрос об устойчивости при постоянно действующих возмущениях пришел к понятию индекса. Индекс отличается знаком от верхнего особого показателя введенным К.П. Персидским. Нижний особый показатель П. Боль не рассматривал. П. Боль установил устойчивость верхнего особого показателя при малых возмущениях. К.П. Персидский пришел к понятию верхнего особого показателя, в связи с изучением вопроса об асимптотической устойчивости решений нелинейных конечных систем уравнений с нестационарной главной линейной частью. Следует отметить, что рассуждения П. Боля, отличаются от рассуждений К.П. Персидского. М.Г. Крейн распространил понятие особого показателя на линейные однородные уравнения с ограниченным переменным операторным коэффициентом в банаховом пространстве и выяснил роль отрицательности при изучении ограниченных решений неоднородного уравнения с ограниченным свободным членом. В данной работе исследуются дифференциальные системы, для которых понятия особых показателей не применимы. Определяются адекватные асимптотические характеристики в таких случаях. Ранее изучались, как правило верхние оценки решений. В данной работе получена нижняя оценка решений дифференциальных систем в определенном классе нелинейных систем дифференциальных уравнений. Рассматривается линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq t_0 \quad (1)$$

где матрица $A(t)$ непрерывна и удовлетворяет условию

$$\|A(t)\| \leq C_A \varphi(t), \quad t \geq t_0 \quad (2)$$

где C_A — постоянная, зависящая от выбора матриц A , $\varphi(t)$ — положительная непрерывная функция на промежутке $[t_0, +\infty]$ такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ и интеграл $I(\varphi) = \int_{t_0}^{\infty} \varphi(s) ds$ расходится.

Обозначим

$$q(t) = \int_{t_0}^t \varphi(s) ds. \quad (3)$$

Определение 1. Постоянная $n(q)$ называется обобщенной нижней относительно q для системы (1) с условием (2), если для любого $\varepsilon > 0$ для всех ненулевых решений $x(t)$ системы (1) осуществляются оценки

$$d_{n,\varepsilon} \exp\{[n(q) - \varepsilon]q(t)\} \leq \frac{|x(t)|}{|x(s)|} \quad (4)$$

для всех $t \geq s \geq t_0$, где $d_{n,\varepsilon}$ — константа, зависящая от выбора ε , $n(q)$ и функция $q(t)$ определена по формуле (3).

Множество $\{n(q)\}$ обобщенных верхних функций системы (1) называется нижним классом системы (1) относительно q и обозначается символом $H_0(A, q)$.

Определение 2. Число

$$\omega_0(A, q) = \sup_{n(q) \in H_0(A, q)} n(q) \quad (5)$$

называется обобщенным нижним особым показателем системы (1) относительно $q(t)$.

Примечание 1. Если рассматриваются линейные системы (1) с непрерывными ограниченными коэффициентами без условия (2) и $q(t) = t$, то обобщенные особые показатели превращаются в числа, введенные Бодем-Персидским.

Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $d_\varepsilon > 0$ и для матрицы Коши линейной системы (1) с условием (2) выполняется неравенство

$$d_\varepsilon e^{[\omega_0(A, q) - \varepsilon][q(t) - q(t_0)]} \leq |X(t, t_0)| \quad (6)$$

при всех $t \geq t_0$.

Примечание 2. Особые показатели Боля и Персидского системы (1) удовлетворяющие условию (2) равны нулю, т.е. имеют места критические случаи. Заметим, что для обобщенного нижнего особого показателя системы (1) относительно q , удовлетворяющие условию (2) имеет место равенство

$$\omega_0(A, q) = \lim_{t-s \rightarrow \infty} \frac{\ln |X(t, s)|}{q(t) - q(s)} \quad (7)$$

В самом деле из (6) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ для всех $t \geq s \geq t_0$ выполняется неравенство

$$\frac{\ln d_\varepsilon}{q(t) - q(s)} + \omega_0(A, q) - \varepsilon \leq \frac{\ln |X(t, s)|}{q(t) - q(s)}$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$\exists \gamma \equiv \lim_{t-s \rightarrow \infty} \frac{\ln |X(t, s)|}{q(t) - q(s)} \geq \omega_0(A, q) - \varepsilon$$

Отсюда устремляя $\varepsilon \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$\omega_0(A, q) \leq \gamma \quad (8)$$

Обратно, так как

$$\gamma = \lim_{t-s \rightarrow \infty} \frac{\ln |X(t, s)|}{q(t) - q(s)}$$

то, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\bar{t} - \bar{s} \geq 0$ и для всех $t - s \geq \bar{t} - \bar{s} \geq 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\ln |X(t, s)|}{q(t) - q(s)} \geq \gamma - \varepsilon$$

или

$$|X(t, s)| \geq \exp[(\gamma - \varepsilon)(q(t) - q(s))]$$

для всех $t - s \geq \bar{t} - \bar{s} \geq 0$. Учитывая отрезок $[t_0, \bar{t}]$, получаем, что для $\varepsilon > 0$ существует $\bar{d}_\varepsilon > 0$ и для матрицы Коши линейной системы (1) с условием (2) выполняется неравенство

$$|X(t, s)| \geq \bar{d}_\varepsilon e^{(\gamma - \varepsilon)(q(t) - q(s))}$$

при всех $t \geq s \geq t_0$. Так как число $\omega_0(A, q)$ точная верхняя грань чисел осуществляющее такую оценку, то имеет место неравенство

$$\omega_0(A, q) \geq \gamma \quad (9)$$

В силу (8) и (9) имеет место равенство (7).

Нелинейная система дифференциальных уравнений и оценка снизу решений в классе $L(\varphi(t))$.

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x) \quad t \in I \equiv [t_0; +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (10)$$

где матрица $A(t)$ непрерывна при $t \geq t_0$ и удовлетворяет условию (2), векторная функция $f(t, x)$ непрерывна в области $G = I \times \mathbb{R}^n$ и $f(t, 0) = 0$.

Обозначим через $L(\varphi(t))$ класс векторных функций $f(t, x)$ удовлетворяющих неравенству

$$|f(t, x)| \leq \delta(t)|x|, \quad (11)$$

где норма возмущения, непрерывная функция $\delta(t)$ при $t \geq t_0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\delta(t)}{\varphi(t)} = 0 \quad (12)$$

Теорема 1. Если в нелинейной системе дифференциальных уравнений (10), для системы первого приближения (1) выполняется условие (2) и возмущения $f(t, x) \in L(\varphi(t))$,

то для любого $\varepsilon > 0$ существуют $d_\varepsilon > 0$ такое, что для всех ненулевых решений системы (10) равномерно выполняются неравенство

$$|x(t)| \geq d_\varepsilon |x(t_0)| e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon][q(t)-q(t_0)]}$$

при всех $t \geq t_0$.

Доказательство

Как известно, решения нелинейной системы дифференциальных уравнений (10), удовлетворяют уравнению

$$x(t) = X(t, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^t X(t, s) f(s, x(s)) ds. \quad (13)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из (6) вытекает неравенство

$$|X(t, t_0)| \geq d_{\varepsilon_1} e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1][q(t)-q(t_0)]} \quad (14)$$

где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon/3, 1 \geq d_{\varepsilon_1} > 0$$

Используя (11) и (14) оценивая по норме (13) получим неравенство

$$|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1][q(t)-q(t_0)]} |x(t_0)| - \int_{t_0}^t |X(t, s)| \delta(s) |x(s)| ds \quad (15)$$

при всех $t \geq s \geq t_0$. Из (15) вытекает неравенство

$$e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t)} |x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t_0)} |x(t_0)| - e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t)} \int_{t_0}^t |X(t, s)| \delta(s) |x(s)| ds \quad (16)$$

Пологая

$$a(t) \equiv e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t)} \quad (17)$$

из (16) получим неравенство в следующем виде

$$a(t) |x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} a(t_0) |x(t_0)| - a(t) \int_{t_0}^t |X(t, s)| \delta(s) |x(s)| ds$$

или

$$a(t) |x(t)| + a(t) \int_{t_0}^t |X(t, s)| \delta(s) |x(s)| ds \geq d_{\varepsilon_1} a(t_0) |x(t_0)| \quad (18)$$

Из (18) в силу (14) вытекают следующие неравенства

$$\begin{aligned}
 a(t)|x(t)| + a(t) \int_{t_0}^t |X(t,s)|\delta(s)|x(s)|ds - d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)| &\geq a(t)|x(t)| + \\
 + a(t) \int_{t_0}^t d_{\varepsilon_1}e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1][q(t)-q(s)]}\delta(s)|x(s)|ds - d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)| &\geq 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

и рассмотрим неравенство

$$a(t)|x(t)| + a(t) \int_{t_0}^t d_{\varepsilon_1}e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1][q(t)-q(s)]}\delta(s)|x(s)|ds - d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)| \geq 0 \tag{20}$$

В (20) выносим функцию $e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t)}$ из под знака интеграла и учитывая, что $a(s) \equiv e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(s)}$ получим неравенство

$$a(t)|x(t)| + a(t) \int_{t_0}^t d_{\varepsilon_1}a(s)\delta(s)|x(s)|ds - d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)| \geq 0. \tag{21}$$

Положим

$$\nu(t) = a(t)|x(t)| \tag{22}$$

Теперь используя интегральное уравнение

$$I(\nu) \equiv \nu(t) + \int_{t_0}^t d_{\varepsilon_1}\nu(s)\delta(s)ds - C = 0 \tag{23}$$

оценим неравенство (21), где $C = d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)|$ константа. Из (23) переходя к дифференциальному уравнению получим

$$\dot{\nu}(t) + d_{\varepsilon_1}\delta(t)\nu(t) = 0$$

Отсюда, интегрируя получаем, что

$$\nu(t) = Ce^{-\int_{t_0}^t d_{\varepsilon_1}\delta(\tau)d\tau} \tag{24}$$

Заметим, что при $\nu_2(t) \geq \nu_1(t)$ имеет место

$$I[\nu_2] \geq I[\nu_1]$$

Следовательно, из (21) вытекает, что имеет место неравенство

$$a(t)|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1}a(t_0)|x(t_0)|e^{-\int_{t_0}^t d_{\varepsilon_1}\delta(\tau)d\tau} \tag{25}$$

Из (25) в силу (17) и учитывая, что $1 \geq d_{\varepsilon_1} > 0$ имеем

$$e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t)}|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t_0)}|x(t_0)| e^{-\int_{t_0}^t d_{\varepsilon_1} \delta(\tau) d\tau} \geq d_{\varepsilon_1} e^{-[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1]q(t_0)}|x(t_0)| e^{-\int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau} \quad (26)$$

Из (26) вытекает неравенство

$$|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon_1][q(t)-q(t_0)] - \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau} |x(t_0)| \quad (27)$$

Из (12) вытекает, что существует такое $T > t_0$ и для $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon/3)$ имеет место неравенство

$$\delta(t) \leq \varepsilon_2 \varphi(t)$$

при $t \geq T$. Поэтому в силу (3) из (27) вытекает, что имеет место неравенство

$$|x(t)| \geq d_{\varepsilon_1} d_{\varepsilon_2} e^{\int_{t_0}^t [\omega_0(A,q)-\varepsilon_1-\varepsilon_2] dq} |x(t_0)| \quad (28)$$

где $d_{\varepsilon_2} = e^{-\int_{t_0}^T \delta(\tau) d\tau} > 0$.

Теперь, полагая $d_\varepsilon = d_{\varepsilon_1} d_{\varepsilon_2}$ и учитывая, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon$ из (28) получаем, что равномерно для всех ненулевых решений системы (6) имеет место неравенство

$$|x(t)| \geq d_\varepsilon |x(t_0)| e^{[\omega_0(A,q)-\varepsilon][q(t)-q(t_0)]}$$

при всех $t \geq t_0$. Теорема 1 доказана.

Легко устанавливается следующее утверждение.

Теорема 2. Если линейная система (1) с условием (2) имеет положительный обобщенный нижний особый показатель т.е., $\omega_0(A, q) > 0$, то нулевое решение нелинейной системы дифференциальных уравнений (10), где $f(t, x) \in L(\varphi(t))$, является неустойчивым по Ляпунову при $t \rightarrow \infty$.

Примечание 3. Результаты полученные в работе [7] и в данной работе показывают, что обобщенные особые показатели верхнее и нижнее являются устойчивыми асимптотическими характеристиками дифференциальных систем.

Заключение

Определены обобщенные нижние особые показатели линейных систем дифференциальных уравнений. Установлены равномерные оценки снизу решений использованием обобщенных нижних особых показателей в определенных классах нелинейных систем дифференциальных уравнений. Установлены, что обобщенные особые показатели являются более устойчивыми характеристиками систем дифференциальных уравнений.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке грантового финансирование научной программы №311 от 13.05.2016

Литература

- [1] *Персидский К.П.* Об устойчивости движения по первому приближению // Математический сборник. - 1933. - Т. 40, №3. - с. 284-292.
- [2] *Bohl P.* Uber Differentialgleichungen // J. Reine und angew. Math. - 1913. -B. 144. - p. 284-318.
- [3] *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. - М., 1966.- 576 с.
- [4] *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1970. - 536 с.
- [5] *Изобов Н.А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Математический анализ. Итоги науки и техники. - 1974. - Т. 12. - С. 71-146.
- [6] *Алдибеков Т.М.* Обобщенные центральные и обобщенные особые показатели системы дифференциальных уравнений. // Математический журнал ИМ МОН РК. 2003.- Т. 3, №1(7). - С.15-18.
- [7] *Aldibekov T.M., Mirzakulova A.E., Aldazharova M.M.* Generalized singular exponent's linear system of differential equations // KazNU BULLETIN. Mathematics, Mechanics and Computer Science Series. 1(88) 2016. P.47-54.

References

- [1] *Persidskii K.P.* On the stability of motion in the first approximation // Mathematical collection. - 1933. - V. 40, №3. - p. 284-292.(in Russian)
- [2] *Bohl P.* Uber Differentialgleichungen // J. Reine und angew. Math. - 1913. -B. 144. - p. 284-318.
- [3] *Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemyskii V.V.* The theory of Lyapunov exponents and its application to stability issues. - M., 1966.- 576 p. (in Russian)
- [4] *Daletskii Y.L., Krein M.G.* Stability of solutions of differential equations in a Banach space. - M., Nauka, 1970. - 536 p. (in Russian)
- [5] *Izobov N.A.* Linear systems of ordinary differential equations // Mathematical analysis. The results of science and technology. - 1974. - Vol. 12. - p. 71-146. (in Russian)
- [6] *Aldibekov T.M.* Generalized central and generalized singular exponents of the system of differential equations // Mathematical journal IM MES RK. 2003.- Vol.3, No.1(7). - p.15-18.
- [7] *Aldibekov T.M., Mirzakulova A.E., Aldazharova M.M.* Generalized singular exponent's linear system of differential equations // KazNU BULLETIN. Mathematics, Mechanics and Computer Science Series. 1(88) 2016. P.47-54.

2-бөлім

Механика

Раздел 2

Механика

Section 2

Mechanics

UDC 621.01

Zhilkibayeva S. *, Utenov M.U., Utenova K.

al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty

*E-mail: saltanatzh.kz@gmail.com

Analytical method of definition of internal forces taking into account the distributed dynamical loads in links of robotic systems and mechanisms with statically indeterminate structures

In this paper the technique of analytical determination of internal forces in links of planar mechanisms and manipulators with statically indeterminate structures taking into account the distributed dynamical loads, a dead weight and the operating external loads is designed. The dynamic equilibrium equations for the discrete model of the element under the action of cross and axial inertial trapezoidal loads are derived. Also, the dynamic equilibrium equations for elements and joints that expressed in terms of the unknown parameters of the internal forces of elements under the action of the distributed trapezoidal loads are obtained. The compliance matrix of an element is received from the expressions of energy for rods, so as the replacement of construction by a set of discrete elements is based on the equality of the energies of the real structures and its discrete model. The programs in the MAPLE18 system are made on the given algorithm and animations of the motion of mechanisms with construction on links the intensity of cross and axial distributed inertial loads, the bending moments, cross and axial forces, depending on kinematic characteristics of links are obtained.

Key words: Mechanisms, Manipulators, Distributed inertial forces, Internal forces, Dynamic equilibrium, Linkage compliance, Kinematic parameters, Statically indeterminate mechanisms, CAD, Animation.

Жылқыбаева С., Утенов М.У., Утенова К.

Құрылымы статикалық анықталмаған механизмдер мен роботты-техникалық жүйелердің буындарындағы тарқалған динамикалық жүктемелерді ескеріп ішкі күштерді анықтаудың аналитикалық әдісі

Құрылымы статикалық анықталмаған жазық стерженді механизмдер мен манипуляторлардың буындарындағы ішкі күштерді тарқалған динамикалық жүктемелерді, салмақты және сыртқы күштерді ескеріп анықтаудың аналитикалық әдісі әзірленді. Қарқындылықтары трапеция түрінде таралған көлденең және бойлық инерция күштерінің әсерінде тұрған, сәйкесінше, қимасы тұрақты және сызықты өзгертін элементтердің дискретті модельдерінің динамикалық тепе-теңдік теңдеулері алынды. Сонымен бірге, элементтерге трапециялық таралған жүктемелер әсер еткендегі ішкі күштердің ізделінетін параметрлері арқылы өрнектелген, шарнирлі және қатаң түйіндердің тепе-теңдік теңдеулері алынды. Құрылымы статикалық анықталмаған механизмдердің буындарындағы ішкі күштерді анықтағанда, буындардың жаншылғыштық матрицасының қажеттілігі туады. Конструкцияны дискретті элементтердің жиынтығымен ауыстыру нақты конструкцияның және оның дискретті моделінің энергияларының теңдігіне негізделгендіктен, элементтердің жаншылғыштық матрицалары стержендердің энергиясын анықтау үшін жазылған өрнектерден табылды.

Келтірілген алгоритм бойынша MAPLE18 жүйесінде программалар құрылып, механизмдердің буындарына қойылған көлденең және бойлық таралған инерция күштерінің, ілді моменттерінің, бойлық және көлденең күштердің қарқындылықтары көрсетілген қозғалыс анимациялары алынды.

Түйін сөздер: механизмдер, манипуляторлар, тарқалған инерция күштері, ішкі күштер, динамикалық тепе-теңдік, буын жаншылғыштығы, кинематикалық параметрлер, статикалық анықалмаған механизмдер, программалау, анимация құру.

Жилкибаева С., Утепов М.У., Утепова К.

Аналитический метод определения внутренних усилий с учетом распределенных динамических нагрузок в звеньях робототехнических систем и механизмов со статически неопределимыми структурами

Разработана методика аналитического определения внутренних усилий в звеньях плоских стержневых механизмов и манипуляторов со статически неопределимыми структурами с учетом распределенных динамических нагрузок, собственного веса и от действующих внешних нагрузок. Выведены динамические уравнения равновесия для дискретной модели элемента под действием поперечных и продольных инерционных нагрузок трапецеидального вида. Также выявлены уравнения равновесия шарнирных и жестких узлов, выраженные через искомые параметры внутренних усилий элементов под влиянием распределенных нагрузок трапецеидального вида. Матрицы податливости элемента получены из энергетических выражений для стержней, так как замена конструкции совокупностью дискретных элементов основывается на равенстве энергии реальной конструкции и ее дискретной модели. По приведенному алгоритму составлены программы в системе MAPLE18 и получены анимации движения механизмов с построением на звеньях интенсивности поперечных и продольных распределенных инерционных нагрузок, изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, зависящие от кинематических характеристик звеньев.

Ключевые слова: механизмы, манипуляторы, распределенные инерционные силы, внутренние усилия, динамическое равновесие, податливость звеньев, кинематические параметры, статически неопределимые механизмы, программирование, анимация.

Introduction

There are a variety of graphic-analytical and numerical calculation methods of rod mechanisms and robotic systems on strength and rigidity, which don't consider the distributed inertia forces of complex nature [1-9]. Assur groups, that form the designed scheme of mechanism, can be statically determinate, and also statically indeterminate in concept of determination of internal forces. Statically indeterminate group will be those included in the calculated scheme of the mechanism, which consists of three or more basic joints, and the links are connected rigidly. In this paper we propose a new analytical approach of solution of problems of dynamic calculation on strength and rigidity taking into account the distributed dynamic loads in links of robotic systems and mechanisms with statically definable structures. The distributed inertia forces of complex nature appear in links of rod mechanisms within the motion process. The intensity of distribution of inertia forces along the link depends on the mass distribution along the link and the kinematic characteristics of the mechanism changing rapidly. Therefore, relations between the intensity of distributed inertia forces and link weight with geometrical, physical and kinematic characteristics are determined in our work. The distribution laws of inertia forces and dead weight, make it possible at each position of links deduce the laws of distribution of internal forces along the axis of the link, in which loads are found at any point of link. Their maximum values allow to optimize the design parameters of the link, providing the strength and rigidity of links and, entirely, of robotic systems and

mechanisms. As internal loads of each continued link are all defined by a set of internal loads in its separate cross-sections, and by the matrixes of approximations, so the task was to calculate the internal loads in finite number of cross-sections of elements. As a result, we refer to discrete model of elastic calculation of links of rod mechanisms. In the work of elastic calculation of planar rod mechanisms for each instantaneous position of the mechanisms they are brought to link structures, which degree of freedom is equal to zero based on D'Alembert's principle. For definition of internal loads in links of designed scheme of mechanism, the structure is divided into elements, and both pin and rigid joints. This is the first time the elements are divided into three types of beam. Discrete models of these beams having constant cross-sections which are under the action of cross and axial the distributed loads of a trapezoidal view are constructed. These constructed discrete models allow to determine the quantity of the independent dynamic equilibrium equations, components of a vector of forces in calculated cross-sections and to construct discrete model of all structure. The dynamic equilibrium equations for discrete model of an element of the link with constant cross-sections under the action of cross and axial inertial loads of a trapezoidal view are also received in this work as well as the equilibrium equations of pin and rigid joints expressed through required parameters of internal forces. If we integrate the equations of dynamic equilibrium of elements and joints in a single system, we will receive the equations of dynamic equilibrium of all discrete model of system. A sort of systems of equations is sufficient for definition of internal forces in links of mechanisms, which structure is statically definable. The vector of forces and vector of loads in calculated cross-sections of discrete models of mechanisms are formed from vectors of forces and vectors of loads in calculated cross-sections of their separate elements, respectively. For mechanisms, with the Assur groups in its structure and having statically indeterminate links, the number of equilibrium equations is less than the number of unknowns by the number of degree of statical indetermination of construction. Hence, for definition of internal forces of statically indeterminate mechanisms the flexibility matrixes were constructed optional for entire discrete model of rod mechanism. On the given algorithm the programs in the MAPLE system were made and animations of the motion of mechanisms with construction on links the intensity of cross and axial distributed inertial loads, the bending moments, cross and axial forces, depending on kinematic characteristics of links were obtained.

1 Inertia forces and the approximation matrix

Considering the plane-parallel motion of an k th link of mechanism with constant cross-sections comparatively fixed system of coordinates OXY , the following laws of distribution of the cross and axial inertia forces along a link, that arise from self mass of a link are defined [10]:

$$\begin{aligned} q_k(x'_k) &= a_{kq} + b_{kq}x'_k, \\ n_k(x'_k) &= a_{kn} + b_{kn}x'_k, \end{aligned} \quad (1)$$

where $a_{kq} = \gamma_k A_k \cos \theta_k - \frac{\gamma_k A_k}{g} \omega_{kp}^{y'_k}$, $b_{kq} = -\frac{\gamma_k A_k}{g} \varepsilon_k$, $a_{kn} = -\gamma_k A_k \sin \theta_k - \frac{\gamma_k A_k}{g} \omega_{kp}^{x'_k}$, $b_{kn} = \frac{\gamma_k A_k}{g} \varepsilon_k^2$, θ_k - an angle, which determines the position of the k th link comparatively fixed system of coordinates OXY , respectively, ω_k , ε_k - angular velocity and angular acceleration of the k th link, respectively, $\omega_{kp}^{y'_k}$, $\omega_{kp}^{x'_k}$ - components of P_k (pole) point acceleration of the k th link put

on the axis of link and perpendicular to it, respectively, γ_k - specific weight of material of the k th link, A_k - square of cross-section of the k th link, g - acceleration of gravity. The obtained expressions show that the distribution of cross and axial inertia forces along the axis of link with constant cross-sections is characterized by trapezoidal law. For the k th link, which is under the influence of axial trapezoidal distributed load (see fig. 1), the bending moments along the length of element are distributed by the law of polynomial of third-degree.

$$M_k(x'_k) = a_0 + a_1 x'_k + a_2 (x'_k)^2 + a_3 (x'_k)^3, \quad (2)$$

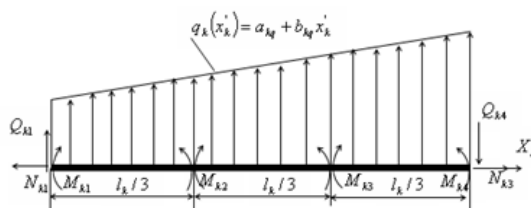


Figure 1 – Axial trapezoidal distributed load acting on the element

Now, let express the bending moments in x'_k cross-section through the sought bending moments $M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}, M_{k4}$ in the cross-sections demonstrated in Fig. 1, respectively. For this purpose it is enough to express coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 through $M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}, M_{k4}$. As a result we have [10]:

$$M_k(x'_k) = [1 - \frac{11}{2l_k} x'_k + \frac{9}{l_k^2} (x'_k)^2 - \frac{9}{2l_k^3}] M_{k1} + [\frac{9}{l_k} x'_k - \frac{45}{2l_k^2} (x'_k)^2 + \frac{27}{2l_k^3} (x'_k)^3] M_{k2} + [-\frac{9}{2l_k} x'_k + \frac{18}{l_k^2} (x'_k)^2 - \frac{27}{2l_k^3} (x'_k)^3] M_{k3} + [\frac{1}{l_k} x'_k - \frac{9}{2l_k^2} (x'_k)^2 + \frac{9}{2l_k^3} (x'_k)^3] M_{k4}. \quad (3)$$

Differentiating $M_k(x'_k)$ to x'_k gives the equation of shear force:

$$Q_k(x'_k) = [-\frac{11}{2l_k} + \frac{18}{l_k^2} x'_k - \frac{27}{2l_k^3} (x'_k)^2] M_{k1} + [\frac{9}{l_k} - \frac{45}{l_k^2} x'_k + \frac{81}{2l_k^3} (x'_k)^2] M_{k2} + [-\frac{9}{2l_k} + \frac{36}{l_k^2} x'_k - \frac{81}{2l_k^3} (x'_k)^2] M_{k3} + [\frac{1}{l_k} - \frac{9}{l_k^2} x'_k + \frac{27}{2l_k^3} (x'_k)^2] M_{k4}. \quad (4)$$

Let the element be affected by the axial trapezoidal distributed load, except the distributed shear force. In that case, the axial force in arbitrary cross-section of an element can be analogously expressed to previous by means of axial forces in calculated cross-sections as follows:

$$N_k(x'_k) = [1 - \frac{3}{l_k} x'_k + \frac{2}{l_k^2} (x'_k)^2] N_{k1} + [\frac{4}{l_k} x'_k - \frac{4}{l_k^2} (x'_k)^2] N_{k2} + [-\frac{1}{l_k} x'_k + \frac{2}{l_k^2} (x'_k)^2] N_{k3}, \quad (5)$$

Thus, for the element which is acted by cross and the axial trapezoidal distributed loads, the approximation matrix connecting internal loads in arbitrary cross-section of the element with values of internal loads in cross-sections has an appearance:

$$[H_k(x'_k)] = \begin{bmatrix} h_{11}(x'_k) & h_{12}(x'_k) & h_{13}(x'_k) & h_{14}(x'_k) & 0 & 0 & 0 \\ h_{21}(x'_k) & h_{22}(x'_k) & h_{23}(x'_k) & h_{24}(x'_k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{35}(x'_k) & h_{36}(x'_k) & h_{37}(x'_k) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Elements of the first line of this matrix can be seen from the equation (3), elements of the second line can be seen from the equation (4), and elements of the third line can be seen from the equation (5), respectively. The given expression of approximation matrix of loads defines dependence between a vector of forces $S_k(x'_k)$ in arbitrary section of an element and a vector of forces S_k in the appointed cross-sections. For an element of rod system the approximation matrix is accurately obtained as it is solved on the basis of known laws of distribution of sought forces. Note, the equations of the bending moment, the cross and axial forces (3,4,5) respectively, which are expressed by the same values in calculated cross-sections, show that for definition of internal loads of each element of the mechanism it is enough to know values of these loads in final number of cross-sections of each of these elements. Number of sections in which it is necessary to know values of internal loads, are defined by polynomial degrees of external actions. Thus, internal loads of each continual link are unambiguously determined by a set of internal loads in its separate cross-sections and by the approximation matrixes, therefore, the task is reduced to calculation of internal forces in final number of cross-sections of elements. Hence, we come to a discrete model of elastic calculation of links of rod mechanisms.

2 Discrete models of elastic calculation of elements and mechanisms in general

For elastic calculation of rod mechanisms based on D'alambert's principle, all inertial, external forces, gravity of links are loaded and the unknown driving moments (forces) are applied, providing the predetermined laws of motion. If the pin that connects drive link with the frame will be replaced by rigid fixing, then the structures with zero degree of freedom are received. For definition of internal loads in links (in elements) of calculated scheme of mechanism, the structure is divided into elements and joints. The link or its part can act as the elements, whereas the joints are the pins connecting links and cross-sections in the middle part, where concentrated external stress is occurred. For definition of internal loads in links (in elements) of designed scheme of mechanism, the structure is divided into elements and joints. As an element can be the link or half link, as the joints – the pin that joins adjacent links and sections loaded by intensive external forces. The process of structure sectioning is made up from giving function and signs for elements' calculated sections. While dividing the elements of calculated scheme of structure into calculated cross-sections and joints, it is necessary to set what internal relations between elements are remained or removed. If we reject any internal relations or their combinations in the element, so the element breaks up to two elements which can turn, move or be removed relatively each other. With the purpose to prevent it, internal forces-loads have to be applied at the joint rejecting places. Thereafter, these loads are regarded as primary unknowns. Let's decompose an element of planar rod mechanisms on three types of beams, for the convenience of composing of resolving equations to determine the internal loads in the appointed cross-sections of elements of the mechanism [10]. The first type is a beam, which both ends are fixed rigidly. Such beams can be the links of complex link, which are connected rigidly among them.

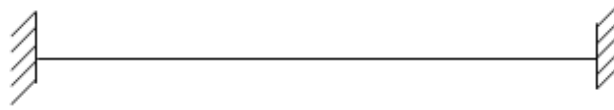


Figure 2 – Beam's both ends are fixed rigidly (first type of a beam)

For determination of coefficients of expressions of the bending moment, it is necessary to know values of the bending moments in four cross-sections, and for determination of coefficients of expressions of axial force, it is necessary to know values in three sections of an element. Therefore, we will choose four sections with unknown bending moments and three sections with unknown axial forces in this beam. Then, by means of conditional schemes with the corresponding unknown, we will construct discrete model of the considered beam as in figure 3.

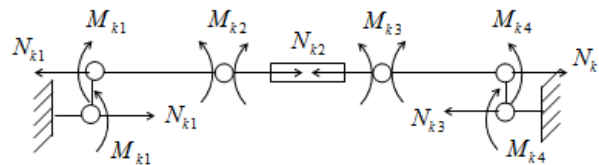


Figure 3 – Discrete model of the first type beam under the action of the distributed trapezoidal load

Then the vector of forces in calculated cross-sections of the beam's discrete model is expressed by the following vector:

$$\{S_k\} = \{M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}, M_{k4}, N_{k1}, N_{k2}, N_{k3}\}^T. \quad (7)$$

There is dependence between degree of freedom of discrete model m , number of the attached external loads n and degree of redundancy of calculated scheme k [10]:

$$m = n - k. \quad (8)$$

The matter is that total number of loads of calculated cross-sections is counted easily, and degree of redundancy of calculated scheme is obtained by formula $k=3K-III$, where K - number of the closed contours, III - number of simple (single) joints, k - degree of redundancy of calculated scheme of mechanism. Degree of freedom of discrete model m determines the quantity of necessary independent equations of statics.

For instance, the fourth class mechanism that is shown in fig. 4 can be considered as geometric stable system (see fig. 5), if the rotational kinematic pair of drive link and frame is replaced by rigid fixing.

To define the internal loads in links (in elements) of designed scheme of mechanism, we divide the structure into elements and joints (see fig. 6).

For determination whether the system statically indeterminate we use the formula [9]:

$$k = 3K - , \quad (9)$$

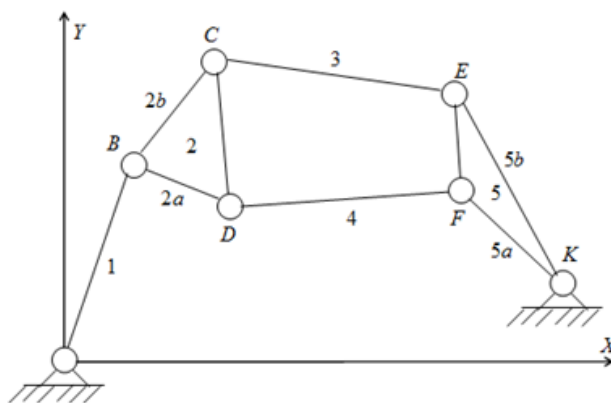


Figure 4 – The fourth class planar mechanism

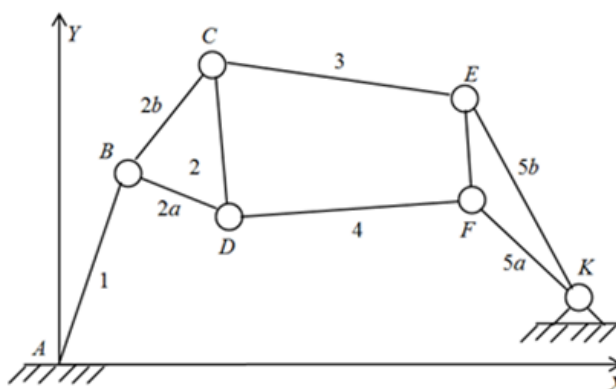


Figure 5 – A designed scheme of the fourth class planar mechanism

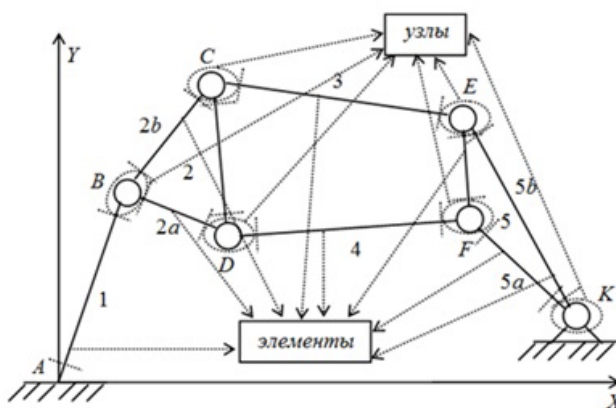


Figure 6 – Decomposing of structure into elements and joints

where K – the number of closed contours; III – the number of simple (single) pins; k – the degree of redundancy of designed scheme of mechanism. If the rods of basic links 2 and 5 are rigidly interconnected, the number of single pins will be equal to $III=6$ and $k=6$, and this system will be six times statically indeterminate. Now, we construct discrete model for calculation on elasticity of the fourth class mechanism (see fig. 4). Let all the rods of

mechanism have stable cross-sections, as well as the rods of basic links 2 and 5 are rigidly interconnected, as shown in figure 7.

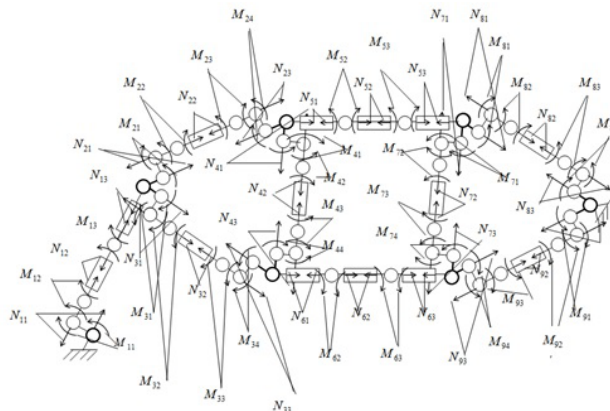


Figure 7 – The discrete model of the fourth class mechanism with stable cross-sections of links and statically indeterminate structure

Thus, we construct the vectors of forces in calculated cross-sections of links for investigated mechanism. So we have:

$$\begin{aligned} \{S_1\} &= \{M_{11}, M_{12}, M_{13}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\}^T; \{S_2\} = \{M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, N_{21}, N_{22}, N_{23}\}^T; \\ \{S_3\} &= \{M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{34}, N_{31}, N_{32}, N_{33}\}^T; \{S_4\} = \{M_{41}, M_{42}, M_{43}, M_{44}, N_{41}, N_{42}, N_{43}\}^T; \\ \{S_5\} &= \{M_{52}, M_{53}, N_{51}, N_{52}, N_{53}\}^T; \{S_6\} = \{M_{62}, M_{63}, N_{61}, N_{62}, N_{63}\}^T; \\ \{S_7\} &= \{M_{71}, M_{72}, M_{73}, M_{74}, N_{71}, N_{72}, N_{73}\}^T; \{S_8\} = \{M_{81}, M_{82}, M_{83}, M_{84}, N_{81}, N_{82}, N_{83}\}^T; \\ \{S_9\} &= \{M_{91}, M_{92}, M_{93}, M_{94}, N_{91}, N_{92}, N_{93}\}^T. \end{aligned}$$

The vector of forces in calculated cross-sections for discrete model of investigated the fourth class mechanism has the form:

$$\begin{aligned} \{S\} &= \{M_{11}, M_{12}, M_{13}, N_{11}, N_{12}, N_{13}, M_{21}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, N_{21}, N_{22}, N_{23}, \\ &M_{31}, M_{32}, M_{33}, M_{34}, N_{31}, N_{32}, N_{33}, M_{41}, M_{42}, M_{43}, M_{44}, N_{41}, N_{42}, N_{43}, \\ &M_{52}, M_{53}, N_{51}, N_{52}, N_{53}, M_{62}, M_{63}, N_{61}, N_{62}, N_{63}, M_{71}, M_{72}, M_{73}, M_{74}, N_{71}, N_{72}, N_{73}, \\ &M_{81}, M_{82}, M_{83}, M_{84}, N_{81}, N_{82}, N_{83}, M_{91}, M_{92}, M_{93}, M_{94}, N_{91}, N_{92}, N_{93}\}^T. \end{aligned}$$

3 Dynamic equilibrium equations of discrete models of elements and joints

Let's remove the equations of dynamic equilibrium of an element. From the attached concentrated external loads (Q_{k1}, M_{k1}) and from the cross trapezoidal distributed loads on the axis of element, in arbitrary cross-section of x'_k element, which is expressed through the sought moments in calculated cross-sections, is solved by the equation (3). If the equations (2) and (3) will be differentiated three times on x'_k , then they will be equated and substituted to value b'_k , respectively, then the primary equation of dynamic equilibrium of element will be:

$$-\frac{27}{l_k^3}M_{k1} + \frac{81}{l_k^3}M_{k2} - \frac{81}{l_k^3}M_{k3} + \frac{27}{l_k^3}M_{k4} = -\frac{y_k A_k}{g}\varepsilon. \quad (10)$$

Relation between the values of the unknown quantities of bending moments in the calculated cross-sections and geometric, physical and kinematic characteristics of k th element of mechanism is found. Thus, the second equation is expressed through relation of the sum of moments of all the acting forces on k - element to center of gravity of k th cross-section, (relatively to fig. 1):

$$Q_{k1}l_k + a_{kq}l_k^2 + b_{kq}\frac{l_k^3}{6} + M_{k1} - M_{k4} = 0, \quad (11)$$

where $Q_{k1} = -\frac{11}{2l_k}M_{k1} + \frac{9}{l_k}M_{k2} - \frac{9}{2l_k}M_{k3} + \frac{1}{l_k}M_{k4}$, this equations is easy to get, if the value $x'_k = 0$ is substituted into the equation (4).

Substituting the values Q_{k1} and a_{kq}, b_{kq} into equation (1), and summing the coefficients of same name unknowns, and also substituting the known quantities into the right end of the equation, the second equilibrium equation can be written as:

$$-\frac{9}{2}M_{k1} + 9M_{k2} - \frac{9}{2}M_{k3} = (\gamma_k A_k \cos \theta_k + \frac{\gamma_k A_k}{g}\omega_{k1}^{y'_k})\frac{l_k^2}{2} + \frac{\gamma_k A_k}{g}\varepsilon_k \frac{l_k^3}{6}. \quad (12)$$

From the axial trapezoidal distributed loads acting on the element, as well as from the force N_{k1} of $k1$ cross-section, in the x'_k cross-section of element the axial force is occurred, which can be solved by equation:

$$N_k(x'_k) = N_{k1} - a_{kn}x'_k - b_{kn}\frac{(x'_k)^2}{2}. \quad (13)$$

On the other hand, the axial force in the x'_k cross-section of the element, expressed by means of axial forces in the calculated cross-section, has the form (5). Differentiating twice on x'_k the equation (10 and 5), respectively, equating them and substituting the value b_{kn} , the third equation of equilibrium can be expressed as:

$$\frac{4}{l_k^2}N_{k1} - \frac{8}{l_k^2}N_{k2} + \frac{4}{l_k^2}N_{k3} = -\frac{\gamma_k A_k}{g}\omega_k^2. \quad (14)$$

Projecting all forces acting on the k th element on the x'_k axis and substituting the values a_{kn}, b_{kn} , the third equation of equilibrium is found. Thus

$$-N_{k1} + N_{k3} = (\gamma_k A_k \sin \theta_k + \frac{\gamma_k A_k}{g}\omega_{k1}^{x'_k})l_k - \frac{\gamma_k A_k}{g}\omega_k^2 \frac{l_k^2}{2}. \quad (15)$$

Obtained system of equation, which consists of equations (9), (11), (13) and (21) are assembled in a matrix form as:

$$[A_k]\{S_k\} = \{F_k\}, \quad (16)$$

where

$$[A_k] = \begin{bmatrix} -\frac{27}{l_k^3} & \frac{81}{l_k^3} & -\frac{81}{l_k^3} & \frac{27}{l_k^3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 9 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{l_k^2} & -\frac{8}{l_k^2} & \frac{4}{l_k^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{S_k\} = \{M_{k1}, M_{k2}, M_{k3}, M_{k4}, N_{k1}, N_{k2}, N_{k3}\}^T, \quad (17)$$

$$\{F_k\} = \{b_{kq}, -a_{kq}\frac{l_k^2}{2} - b_{kq}\frac{l_k^3}{6}, -b_{kn}, -a_{kn}l_k - b_{kn}\frac{l_k^2}{2}\}^T. \quad (18)$$

Let the two elements j and k of mechanism form a rotational kinematic pair, i.e. permit rotational motion relative to each other. Also let the elements have constant cross-sections along its length. We cut out a kinematic pair from mechanism with elements' surrounding cross-sections, constituting this pair. Then, in the cross-sections of the elements adjacent to the joint (to the kinematic pair) there are internal loads, as shown in figure 8. There are two equilibrium conditions for these joints:

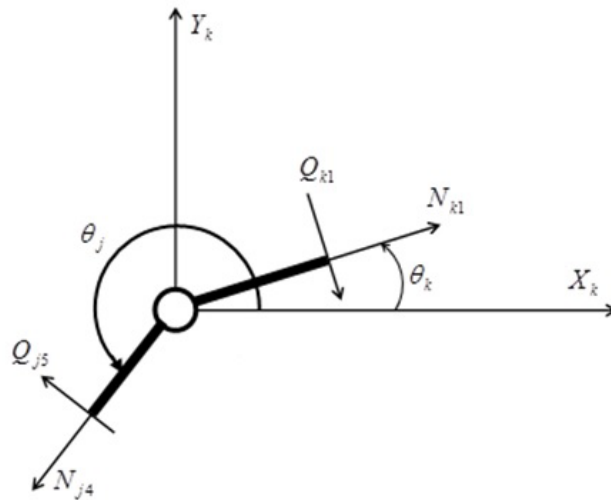


Figure 8 – The pin joint of mechanism with constant cross-sections of elements

The equilibrium equation for considered joint can be described as:

$$\begin{cases} N_{k1} \cos \theta_k + Q_{k1} \sin \theta_k + N_{j3} \cos \theta_j + Q_{j4} \sin \theta_j = 0; \\ N_{k1} \sin \theta_k - Q_{k1} \cos \theta_k + N_{j3} \sin \theta_j - Q_{j4} \cos \theta_j = 0. \end{cases}$$

Further, the values will be expressed by means of sought moments in the calculated cross-sections of discrete model of the element, for this purpose we use the equation (4), substituting here the values $x'_k = 0$ and $x'_j = l'_j$, respectively, hence:

$$\begin{aligned} Q_{k1} &= -\frac{11}{2l_k}M_{k1} + \frac{9}{l_k}M_{k2} - \frac{9}{2l_k}M_{k3} + \frac{1}{l_k}M_{k4}; \\ Q_{j4} &= -\frac{1}{l_j}M_{j1} + \frac{9}{2l_j}M_{j2} - \frac{9}{l_j}M_{j3} + \frac{11}{2l_j}M_{j4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Now, substituting the values Q_{k1} and Q_{j4} in the equation (17), the following equilibrium equations for the joint have an appearance:

$$\left\{ \begin{aligned} &-\frac{11 \sin \theta_k}{2l_k}M_{k1} + \frac{9 \sin \theta_k}{l_k}M_{k2} - \frac{9 \sin \theta_k}{2l_k}M_{k3} + \frac{\sin \theta_k}{l_k}M_{k4} + \cos \theta_k N_{k1} - \\ &-\frac{\sin \theta_j}{l_j}M_{j1} + \frac{9 \sin \theta_j}{2l_j}M_{j2} - \frac{9 \sin \theta_j}{l_j}M_{j3} + \frac{11 \sin \theta_j}{2l_j}M_{j4} + \cos \theta_j N_{j3} = 0; \\ &\frac{11 \cos \theta_k}{2l_k}M_{k1} + \frac{9 \cos \theta_k}{l_k}M_{k2} + \frac{9 \cos \theta_k}{2l_k}M_{k3} - \frac{\cos \theta_k}{l_k}M_{k4} + \sin \theta_k N_{k1} + \\ &+\frac{\cos \theta_j}{l_j}M_{j1} - \frac{9 \cos \theta_j}{2l_j}M_{j2} + \frac{9 \cos \theta_j}{l_j}M_{j3} - \frac{11 \cos \theta_j}{2l_j}M_{j4} + \sin \theta_j N_{j3} = 0. \end{aligned} \right.$$

The cross-sections of links can also be rigid joints, the concentrated external loads are attached here. For example, the concentrated force $P_k x'_k$, $P_k y'_k$ and the concentrated moment M_k are occurred in the G cross-section of k th link (see fig. 9). Then the k -link is divided into two elements, for k th and i th. If the cross-sections of elements are constant along the length of the link, then by means of cutting the G -joint out of mechanism, the scheme of G -joint with adjacent internal loads in cross-sections is displayed below. For this joint it is possible to write three equilibrium equations that are expressed through sought parameters of elements.

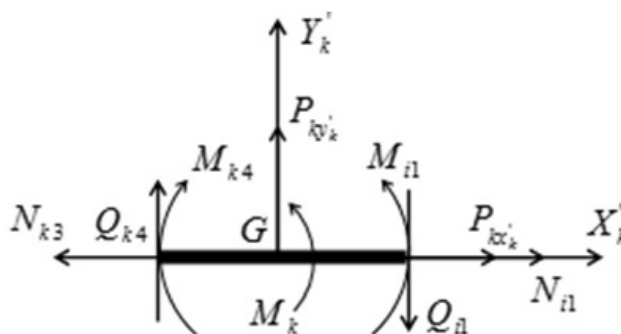


Figure 9 – Rigid joints of a link with a constant cross-sections of elements, where the external concentrated forces are applied

4 The matrix of compliance of the element with constant cross-sections under the distributed cross and axial trapezoidal loads

The approximation matrices allow defining the physical characteristics of the element, i.g. the matrix of compliance of discrete element $[D_k]$ [9]. The physical characteristics of the element can be obtained from the expressions of energy for rods, so as the replacement of construction by a set of discrete elements based on the equality of the energies of the real structures and its discrete model. The matrix of compliance of the element is defined by equation [9]:

$$[D_k] = \int_{l_k} [H_k(x'_k)]^T [D_{kx'_k}] [H_k(x'_k)] dx'_k. \quad (20)$$

where $[D_k]$ is a matrix of compliance of link cross-section. For the rods working on bending and stretching-shrunking the equation (20) is used:

$$[D_{kx'_k}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_k I_k} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{G_k A_k} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E_k A_k} \end{bmatrix}$$

where $\frac{1}{E_k I_k}$ - bending compliance of the cross-section; $\frac{\mu}{G_k A_k}$ - displacement compliance of the cross-section; $\frac{1}{E_k A_k}$ - stretching-shrunking compliance of the cross-section, $[H_k(x'_k)]$ is defined by equation (6). Therefore, the overall view of matrix of compliance taking into account the bending, stretching-shrunking and the actions of the distributed cross and axial trapezoidal loads has an appearance:

$$[D_k] = \begin{bmatrix} \frac{8l_k}{105E_k I_k} & \frac{33l_k}{560E_k I_k} & -\frac{3l_k}{140E_k I_k} & \frac{19l_k}{1680E_k I_k} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{33l_k}{560E_k I_k} & \frac{27l_k}{70E_k I_k} & -\frac{27l_k}{560E_k I_k} & -\frac{3l_k}{140E_k I_k} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3l_k}{140E_k I_k} & -\frac{27l_k}{560E_k I_k} & \frac{70E_k I_k}{70E_k I_k} & \frac{560E_k I_k}{560E_k I_k} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{19l_k}{1680E_k I_k} & -\frac{3l_k}{140E_k I_k} & \frac{33l_k}{560E_k I_k} & \frac{8l_k}{105E_k I_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2l_k}{15E_k I_k} & \frac{l_k}{15E_k I_k} & -\frac{l_k}{30E_k I_k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2l_k}{15E_k I_k} & \frac{l_k}{15E_k I_k} & -\frac{l_k}{30E_k I_k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_k}{30E_k I_k} & \frac{l_k}{15E_k I_k} & \frac{2l_k}{15E_k I_k} \end{bmatrix}$$

5 Resolving equations of determination of internal forces

By combining the equilibrium equations of elements and joints into a single system, the equilibrium equations of the discrete model of entire mechanism is obtained. They can be written in general form:

$$[A]\{S\} = \{F\}. \quad (21)$$

Such systems of equations are sufficient to determine the internal forces in the links of the mechanism, which frame includes a statically definable group of Assur. The matrix of equilibrium equations for the discrete model of mechanisms consists of matrices of equilibrium equations of their individual elements, as well as the equilibrium equations of their joints. The matrix of dynamic equilibrium equations of discrete models of mechanisms is as follows:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_1] & 0 \dots & 0 \\ 0 & [A_2] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [A_n] \end{bmatrix}$$

Uraavn.ravnovesiyauzlov.

For discrete models of mechanisms the vector of force and the vector of loads in calculated cross-sections are formed by vector of forces and loads in calculated cross-sections of their separate elements. These vectors have the following vector form, respectively:

$$\{F\} = \{\{F_1\}, \{F_2\}, \dots, \{F_n\}\}^T; \{S\} = \{\{S_1\}, \{S_2\}, \dots, \{S_n\}\}^T. \quad (22)$$

For determination of internal forces of statically indeterminate mechanisms (in the way of determination of internal forces), it is necessary to build a compliance matrix for the entire discrete model of the rod mechanism. The matrix of compliance $[D]$ for the entire discrete model of the rod mechanism consists of the matrixes of individual elements $[D_k]$ [10]. It is expressed in block-diagonal form:

$$\begin{bmatrix} [D_1] & 0 \dots & 0 \\ 0 & [D_2] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [D_n] \end{bmatrix}$$

where n is a number of the elements of discrete model of mechanism. A formula below is used to determine the components of the vector of loads $\{S\}$ [10]:

$$\{S\} = [K][A]^T([A][K][A]^T)^{-1}\{F\}, \quad (23)$$

$[K] = [D]^{-1}$ is taken into consideration.

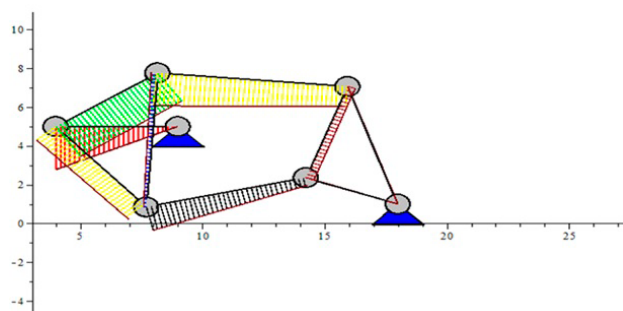


Figure 10 – The diagram of axial distributed inertial forces, originated from link weight of investigated mechanism

Now, for determination of internal loads in links, we give an example of four-bar second class statically indeterminate mechanism with single drive link as shown in figure 4. The computer programs for determination and construction of the inertia forces and internal

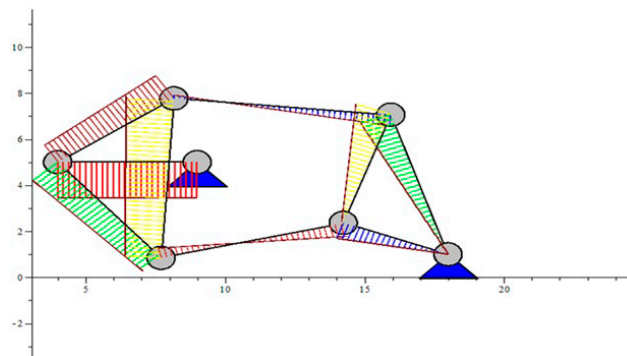


Figure 11 – The diagram of cross distributed inertial forces, originated from link weight of investigated mechanism

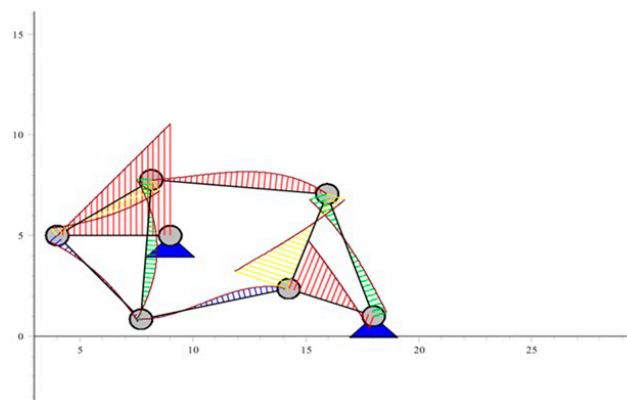


Figure 13 – The diagram of axial forces, originated from distributed inertial forces acting on links of mechanism with statically indeterminate structure

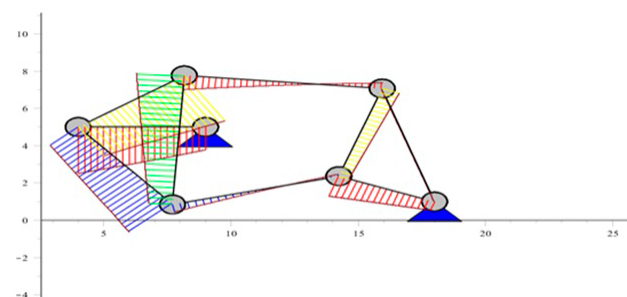


Figure 14 – The diagram of cross forces, originated from distributed inertial forces acting on links of mechanism with statically indeterminate structure

loads on the links by means of using the MAPLE18 system are made. Therefore, the results of obtained inertia forces and internal loads for some positions of the mechanism are shown in figures 10-13.

Conclusion

The technique of analytical determination of internal forces in links of planar mechanisms

and manipulators with statically indeterminate structures taking into account the distributed dynamical loads, a dead weight and the operating external loads is designed. The programs in the MAPLE18 system are made on the given algorithm and animations of the motion of mechanisms with construction on links the intensity of the distributed cross and axial inertial loads, the bending moments, the cross and axial forces, depending on kinematic characteristics of links are obtained. The developed technique can be applied in the study of stress-strain state of the projected and existing mobile and fixed beam systems with statically definable structures (planar link mechanisms, manipulators, frames, etc.).

Acknowledgements

This work was supported by the Committee of Science of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, (project №2019/GF4 MON RK).

References

- [1] *Strang G., Fix George J.* An Analysis of the Finite Element Method// Englewood Cliffs, N.J.:Prentice-Hall, Inc. — 1973. — P. 351.
- [2] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method// fifth edition. — London: Butterworth-Heinemann. — 2000. — Vol. 1: The basis. — P. 663.
- [3] The Finite Element Method in Structural Mechanics and Solid Mechanics// A bibliography. Foreign Literature. — 1973.
- [4] *Ciarlet P.G.* The Finite Element Method for Elliptic problems// Amsterdam: North-Holland. — 1978. — P. 529.
- [5] *Rozin L.A.* The Finite Element Method in the annex to the elastic system // M: Stroyizdat.— 1977. — P. 178.
- [6] *Korneev V.G.* Schemes of the finite element method of high orders of accuracy // L: University of Leningrad. — 1977. — P. 208.
- [7] *Alexandrov A.V., Smirnov V.A., Shaposhnikov N.N.* Methods of calculation of rod systems, plates and shells using a computer // M: Stroyizdat. — 1976. — P.1. — P. 248.
- [8] *Seegerlind Larry J.* Applied Finite Element Analysis// second edition. — the USA: Wily&Sons, Inc. — 1937. — P. 427.
- [9] *Chiras A.A.* Structural mechanics// M: Stroyizdat. — 1989. — P. 255.
- [10] *Utenov M.U.* The report on research work «Development of analytical prediction of the theory of strength and stiffness of robotic systems and mechanisms» (an interim report on the project GF4/2019 MON RK)// Almaty. — 2016. — P. 120.

3-бөлім

Информатика

Раздел 3

Информатика

Section 3

Computer
science

УДК 681.3.06

Бектемесов А.Т.^{1*}, Бурлибаев А.Ж.^{1**}, Илялетдинов Ф.А.^{1***}

¹ Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
 E-mail: *amanzhol.bektemessov@kaznu.kz, **aimurat.burlibaev@kaznu.kz
 ***iliyeldinov.farhad@kaznu.kz

Распределенные алгоритмы и их верификация с помощью Byzantine model checker

Каждый алгоритм системы является главным узлом для построения надежных распределенных систем. Для того, чтобы быть уверенным в том, что эти алгоритмы делают систему более надежной, мы должны гарантировать, что предлагаемые алгоритмы работают правильно. Однако, проверка на модели внедренной отказоустойчивости распределенных алгоритмов [1] в действительности возможно использовать только для очень маленьких систем, чтобы в конечном итоге иметь возможность автоматически проверять отказоустойчивость распределенных алгоритмов на больших системах. В этой статье мы рассмотрим моделирование и проверку алгоритма "Parsing" методом Broadcast вещания [2] с помощью Spin и ВуМС (Byzantine Model Checker [3]). Предлагаемые свойства обеспечивают безопасность и живучесть на LTL (Linear-temporal logic).

Ключевые слова: распределенные алгоритмы, параллельная программа, ВуМС, Model Checking, верификация.

Bektemessov A.T., Burlibaev A.Zh., Ilyaldinov F.A.

Distributed algorithms and their verification with Byzantine model checker

Every system algorithms are the main nodes for the construction of reliable distributed systems. To ensure that these algorithms make the system more reliable, we have to ensure that the proposed algorithms are working properly. However, check the model implemented fault tolerance of distributed algorithms [1] in real can be used for very small systems only. To finally, be able to automatically check the fault-tolerant distributed algorithms on large systems. Since they are aimed at improving the reliability of computer systems, it is important that these algorithms are correct and fully satisfy their requirements. Due to different sources of non-determinism is easy to fail in the arguments of the correctness of distributed algorithms on the level of temporality. Therefore, they are unreliable material for model checking. Nevertheless, the model checking method for distributed fault-tolerant algorithm is extremely difficult work. In this article we will discuss the modeling and verification of algorithm Broadcast "Parsing" by broadcasting [2] with Spin and ВуМС (Byzantine Model Checker [3]). The proposed properties are safety and liveness in the LTL(Linear-temporal logic).

Key words: Distributed algorithms, Parallel program, ВуМС, Model Checking, Verification.

Бектемесов А.Т., Бурлибаев А.Ж., Илялетдинов Ф.А.

Үлестірілген алгоритмдер және оларды Byzantine моделді тексеріс арқылы верификациялау

Жүйенің әрбір алгоритмдері сенімді үлестірілген жүйелерді құруда негізгі түйіндері болып табылады. Бұл алгоритмдер жүйенің сенімді болуына кепілдік беру үшін, біз осы алгоритмдер дұрыс жұмыс жасауына кепілдік беруіміз қажет. Алайда, бекемдікпен негізделген үлестірілген алгоритмдерге моделді тексеріс орындау тек кішігірім жүйелер үшін ғана болуы мәлім [1]. Соңғы нәтижесінде, үлкен жүйедегі бекемделген үлестірілген алгоритмдерді автоматты түрде тексеру қажет. Бұл есептеу жүйелерінің сенімділігін арттыруға бағытталғандықтан ол алгоритмдер талаптарына сай дұрыс жұмысын жасауы өте маңызды. Әр түрлі детерминисттік емес түйіндері үшін темпоралды деңгейде үлестірілген алгоритмдердің корректілік аргументінде қате кету өте оңай болмақ. Сондықтан олар модель тексеруге сенімді материалдар бола алмайды. Алайда, үлестірілген алгоритмдердің сенімділігіне модельді тексеру әдісі өте қиын.

Бұл мақалада, Spin және ВуМС (Byzantine Model Checker [3]) көмегімен "Parsing" алгоритмін Broadcast хабар таратушы [2] әдісімен моделдеп тексеруін қарастырамыз. Ұсынылатын LTL(Linear-temporal logic) қасиеттер қауіпсіздік және өмірсүргіштік.

Түйін сөздер: үлестірілген алгоритмдер, параллельді программа, ВуМС, модельді тексеріс, верификация.

Введение

Применение распределенных вычислений является способом решения трудоемких вычислительных задач с использованием нескольких компьютеров, объединенных в параллельную вычислительную систему. Распределенные вычисления применимы также в распределенных системах управления таких как Hadoop, MapReduce и MPJ [4]. Последовательные вычисления в распределенных системах выполняются с учетом одновременного решения многих задач. Особенностью распределенных многопроцессорных вычислительных систем является возможность неограниченного наращивания производительности за счет масштабирования, но исключение составляют локальные суперкомпьютеры. Для гарантированной работы между несколькими компьютерами репликация представляет собой классический подход, это значит, что компьютерная система является отказоустойчивой, то есть по-прежнему правильно выполняет свою задачу, даже если некоторые компоненты справляются не в полной мере. Основная идея репликации состоит в подтверждении дублирующихся компьютерных координат при работе нескольких компьютеров. Например, в случае репликации баз данных, происходит согласование на хранение одинаковой информации. При анализе параллельных процессов исключено делать предположений об относительных скоростях выполнения процессов или стратегии планировщика процессов. Большинство ошибок в параллельных программах – из-за непредвиденных перекрытий операций параллельных процессов.

```
byte state = 1;
proctype A() {byte tmp; (state==1) -> tmp = state; tmp = tmp+1; state = tmp}
proctype B() {byte tmp; (state==1) -> tmp = state; tmp = tmp -1; state = tmp}
init { run A(); run B() }
```

Если какой-нибудь процесс завершится до того, как другой процесс выполнит проверку `state==1`, то «запоздавший» процесс будет навсегда блокирован. Если проверка условия выполнится процессами до того, как другой процесс завершится, то оба процесса

завершатся, но значение переменной *state* будет непредсказуемым – она может принять любое значение: 0, 1 или 2. Более подробно исследовано в работе [5].

1 Постановка задачи

Согласование всех компьютеров на хранение одной и той же информации является нетривиальным из-за нескольких источников недетерминированности, что приведет к неопределенным задержкам сообщений и асинхронным шагам вычислений. Однако решение таких проблем как отказоустойчивость состояния репликации машин было рассмотрено ранее [6]. Так как они направлены на улучшение надежности вычислительных систем, очень важно, чтобы эти алгоритмы являлись правильными и полностью удовлетворяли их требованиям. Из-за различных источников недетерминированности легко потерпеть неудачу в аргументах корректности распределенных алгоритмов на уровне темпоральности. Как следствие они являются ненадежным материалом для проверки модели. Тем не менее, метод проверки на модели отказоустойчивых распределенных алгоритмов является чрезвычайно сложной работой [7], при этом возникают следующие проблемы:

- Параллелизм и выбор недетерминированности. Отказоустойчивые распределенные алгоритмы страдают от комбинаторного взрыва в пространстве состояний, а также от количества поведений.
- Корректность и решаемость проблем, в частности, степень параллелизма, задержки сообщений, а также сбой модели. Например, невозможно гарантировать правильное выполнение, если нет ограничений на количество неисправных компонентов в системе.
- Нет общей согласованной распределенной вычислительной модели, но существует довольно много вариантов, которые различаются тонкими деталями, такими как атомарность вычислительного шага.
- Распределенные алгоритмы обычно описываются псевдокодом, как правило, с использованием различных языковых псевдокодов, которые запутывают отношение формальных методов к псевдокодам, которые описывают достижение к основной цели модели.

2 Метод решения

2.1 Модельная проверка на безопасность

При разработке ПО необходимы свои разделы прикладной математики – это формальные методы, на которых основывается верификация. Используя разделы и методы, в конечном итоге мы должны гарантировать правильность поведения созданных нами систем. Требования к поведению систем для полной верификации необходимы для создания формальной спецификации системы. Одним из подходов к решению проблемы автоматизации отладки и проверки правильности программ является Model Checking. Для заданной анализируемой программы строится ее абстрактная формальная модель. Проверяемое свойство или требование выражается на формальном математическом языке в виде логической формулы:

$$M \models \phi \tag{1}$$

где некоторая булева формула удовлетворяет модели *M*. Рассмотрим множество ато-

марных высказываний AP . Пространство состояний моделируемой программы или программного комплекса можно формализовать, как модель Крипке (структуру Крипке). Моделью Крипке M над множеством атомарных высказываний AP называют четверку (S, S_0, R, L) , где:

S - конечное множество состояний;

$S_0 \in S$ - множество начальных состояний;

$R \in S \times S$ - отношение переходов, которые обязаны быть тотальным, т.е. для каждого состояния $s \in S$ должно существовать такое состояние $s' \in S$, что имеет место $R(s, s')$;

$L : S \rightarrow 2^A$ - функция, которая помечает каждое состояние множеством атомарных высказываний, истинных в этом состоянии.

Путь в модели M из состояния s - это бесконечная последовательность состояний $\pi = s_0 s_1 \dots$, такая, что $s_0 = s$ и для всех $i \geq 0$ выполняется $R(s_i, s_{i+1})$.

Моделируемый программный модуль на каждом состоянии выявляются множеством значений переменных $V = v_0, v_1, \dots$, принимающих значения на конечном множестве D и определяющих отдельные компоненты и выполнение взаимодействие между ними. Множество AP состоит из $v_i = d_i$, где $d_i \in D$. Таким образом, что каждое состояние s в M представляет $V \rightarrow D$.

Отношение R определяется следующим образом. Пусть имеются два состояния, s_1 и s_2 . Если в s_1 имеется компонент, который может выполнить атомарный переход, в результате выполнения которого система будет находиться в состоянии s_2 , тогда состояния s_1 и s_2 связаны отношением перехода: $(s_1, s_2) \in R$. В случае, если нет такого состояния s_2 , для которого бы выполнялось $R(s_1, s_2)$, полагается $R(s_1, s_1)$, т.е. "тупиковое" состояние, связанное отношением перехода в рекурсиях [8]. Проверка живучести двух процессов в критических интервалах $@crit1$ и $@crit2$:

$$AG(@crit1 \wedge @crit2) \quad (2)$$

Таким образом, верификация программы сводится к проверке выполнимости формализованного требования спецификации на абстрактной модели программ.

2.2 Обеспечение безопасности распределенных вычислений или алгоритм византийского соглашения

В вычислительной технологии эксперимент призван показать проблему синхронизации состояния систем в случае, когда коммуникации являются надежными, а процессы могут быть дефектными и ненадежными. Часть процессов, включая главный процесс, могут быть противниками. Нужно построить единую стратегию действий, которая будет выигрышной для не дефектных процессов. Алгоритм решения можно представить следующим образом:

Шаг 1: Каждый из процессов посылает остальным сообщение, где указывает значение состояния. Дефектные процессы могут указать различные значения в разных сообщениях, а правильные указывают верные значения. Процесс p_1 указал p'_1 , процесс p_2 - p'_2 , процесс p_3 который является дефектным, соответственно указал трем остальным процессам неверные значения x, y, z , процесс p_4 - p'_4 .

Шаг 2: Каждый из процессов вычисляет свой вектор из полученной информации. Получается: $vect_1(p_1, p_2, x, p_4)$, $vect_2(p_1, p_2, y, p_4)$, $vect_3(p_1, p_2, p_3, p_4)$, $vect_4(p_1, p_2, z, p_4)$.

Шаг 3: Процессы посылают свои вектора другим процессам. Процесс p_3 вновь посылает произвольные значения (Таблица 1).

Шаг 4: Каждый из процессов проверяет каждый элемент в полученных векторах. В том случае, если одно значение совпадает как минимум в двух векторах, оно помещается в результирующий вектор, в противном случае, соответствующий элемент помечается как «неисправен». В итоге все процессы получают один вектор $(p'_1, p'_2, \text{неисправен}, p'_4)$. Следовательно, согласие на решения задач достигнуто. Для $n=3$ и $m=1$ согласие не достигнуто.

Таблица 1 – Результаты векторов от всех процессов

p_1	p_2	p_3	p_4
(p'_1, p'_2, y, p'_4)	(p'_1, p'_2, x, p'_4)	(p'_1, p'_2, x, p'_4)	(p'_1, p'_2, x, p'_4)
(a, b, c, d)	(e, f, g, h)	(p'_1, p'_2, y, p'_4)	(p'_1, p'_2, y, p'_4)
(p'_1, p'_2, z, p'_4)	(p'_1, p'_2, z, p'_4)	(p'_1, p'_2, z, p'_4)	(i, j, k, l)

Исходя из примера, мы понимаем, что алгоритм византийского соглашения позволяет нам произвести модельную проверку распределенных алгоритмов среди неисправных процессов [9].

3 Алгоритм Parsing

Рассмотрим распределенную работу алгоритма Parsing. Этот алгоритм предназначен для обработки больших данных. Работа с большими данными требует достаточно много ресурсов. Рассматриваемый алгоритм является очень простым, но распределение при параллелизме требует тщательного анализа для выявления тонких ошибок. Допустим, обработка на Hadoop 209k pdf текста для 16 узлов системы займет около 26 часов [10]. Но, к сожалению, неполадки внутри алгоритма вернут все труды назад.

Пошаговое выполнение алгоритма Parsing можно проиллюстрировать семью шагами:

1. Программа обработки находит первое предложение и переходит в пункт 2.
2. Зафиксирует предложение. Берет первое слово и переходит в пункт 3.
3. Сохраняет полученное слово.
4. Считает все вхождения этого слова в тексте.
5. Если предложение не закончено, добавляет к слову следующее слово и переходит в пункт 4. Если предложение закончилось, переходит в пункт 6
6. Если слово, с которого начиналось словосочетание, не последнее в предложении, то фиксирует следующее слово в этом предложении и переходит в пункт 3. Если слово последнее, то переходит в пункт 7.
7. Если текст не закончился, переходит на следующее предложение и дальше в пункт 2.

На первый взгляд алгоритм очень простой, конечно, если учитывать саму разработку, то прилагается не малый труд. Есть некоторые подводные камни, например, в ходе тестирования и анализа алгоритма Parsing разработчики выявили, что не всегда

бывают идеально написанные статьи в файле формата pdf. Дублированные и лишние ключевые символы приведут программу к сбою или внесут некорректную информацию в базу.

3.1 Проверка алгоритма Parsing через Spin

Для алгоритма Parsing была создана модель на языке Promela (Process Meta Language), что можно сформировать и на ВуМС:

```
active [N] proctype p(){
if :: BUF == 0 -> BUF = 1 - BUF; pro1=true;
```

Конечно же, запускаем исключительный подбор всех состояний процессов:

```
do ::(i < num) -> j=0;
  do ::(j< num) ->
if ::(filenm[i] != Chfilenm[j]) -> Chfilenm[j] = filenm[i];
goto q1;
  :: else -> skip;
fi; j++;
  ::else -> break;
od;
  :: else -> break;
q1:i++;
od;
BUF = 1 - BUF; pro2=false;
```

где `filenm[]` - модель обрабатываемых файлов, `Chfilenm[]` - буфер проверки файлов на дублирование. Цифры использованы вместо файлов и текстов в качестве моделей. Подобраны несколько LTL спецификаций на корректность. Требования оказались положительным для следующих формул безопасности на Spin:

$$FG(pr1 \text{ AND } pr2) \quad (3)$$

$$GF(pr1 \text{ AND } pr2) \quad (4)$$

где $pr1(pro1 == true)$ и $pr2(pro2 == true)$

Выявлена ошибка взаимного исключения - дедлок (Рисунок 1).

Проблема заключалась в атомарности оператора $BUF = 1 - BUF$. Так как, оператор верхнего порога делится без атомарности на несколько операций, вычислительная машина сотни миллисекундах не разбирает привилегии в простых арифметических операциях. То есть, если в процессе p_0 обрабатывается операция присвоения $BUF = 1$, чтобы вычесть $1 - BUF$. И в этих миллисекундах процесс с номером p_1 может выполнить проверку для входа в критический интервал, и он входит, потому что значение BUF еще не успело поменяться на 1, а p_0 еще не вышел из критического интервала. Если алгоритм требует улучшения по времени и обработки больших данных, можно предугадать ошибки параллельно-модернизированного алгоритма.

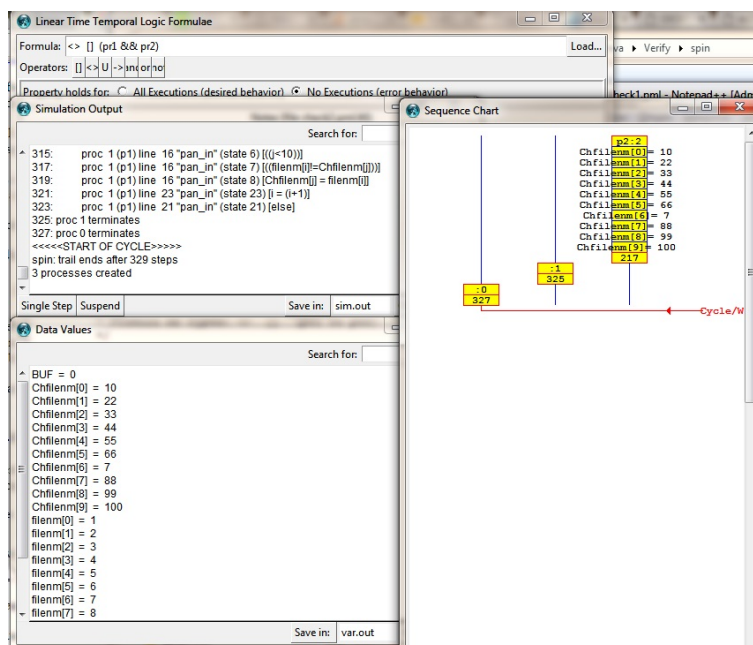


Рисунок 1 –Верификация параллельного алгоритма "Parsing"в системе Spin

Параллельные программы могут годами сохранять ошибки, проявляющиеся после долгой эксплуатации как реакция на возникшую специфическую комбинацию многочисленных факторов, в частности, непредсказуемых скоростей выполнения отдельных процессов в параллельных программах.

При параллельном программировании обычно имеем дело с такой концепцией как рандеву, но серьезной проблемой при разработке адекватного кода бывает координация доступа к данным, совместно используемым в нескольких потоках управления. Итогами попыток обеспечения для этого взаимного исключения при слишком слабой или слишком высокой синхронизации являются конфликты при доступе к данным, тупик синхронизации (deadlock) и невысокая масштабируемость.

Полученный результат показывает, что требования (3,4) нарушились, и система остановила дальнейшую проверку на состоянии 327. Автомат бесконечных выполнений обнаружил изменения направления на замке never claim. И тем самым предоставил контр-пример траектории нарушения.

Однако, надо учитывать, что проверялись только некоторые спецификации требований по свойству алгоритма. Проблема автоматизации применения требований еще не решилась в сфере верификации параллельных и распределенных систем. Поэтому, утверждаем, что верификация проводилась не в полной мере. С другой стороны, в количестве 9 процессов, система вышла с аварийным предупреждением: out of memory, что является результатом комбинаторного взрыва.

3.2 Проверка алгоритма Parsing через BuMC.

BuMC включает в себе алгоритм Византийского соглашения и совокупность различных методов верификации, таких как, модифицированный Spin с входным языком Promela и Yices, который, контролирует параметризацию абстракции модели и выполне-

```

12 S{bymc_kP={0,0,0,0,2,0,0,0,1,1,2,0,0,0,0,0},nsnt=2}
13 S{bymc_kP={0,0,0,0,2,0,0,0,1,2,2,0,0,0,0,0},nsnt=2}
14 S{bymc_kP={0,0,0,0,2,0,0,0,1,2,2,0,0,0,0,0},nsnt=2}
15 S{bymc_kP={0,0,0,0,1,0,0,0,1,2,2,0,0,0,0,0},nsnt=2}
16 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,1,2,2,0,0,0,0,0},nsnt=2}
17 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,3,2,0,0,0,0,0,0},nsnt=2}
18 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,3,2,0,0,0,0,0,0},nsnt=2}
19 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,3,3,0,0,0,0,0,0},nsnt=2}
20 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,2,3,0,0,0,0,0,0},nsnt=2}
21 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,3,0,0,0,0,0},nsnt=2}
22 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,0,0},nsnt=2}
23 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,1},nsnt=2}
24 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,1},nsnt=2}
<<<<START OF CYCLE>>>>
25 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,1},nsnt=2}
26 S{bymc_kP={0,0,0,0,0,0,0,0,0,3,0,0,0,0,1},nsnt=2}

(status trace-refined)
(status trace-refined)
Refinement step #9.
Converting the spec: !((([](<>( ! in_transit_A))) && ([]( !
( ! ex_acc_E) || (<>all_acc_A))))...
Generating pan...
+ spin -a -N relay.never abs-counter.prm

```

Рисунок 2 –Верификация параллельного алгоритма "Parsing"в системе ВуМС

ния контрпримера с входной формулой SMT. Для автоматизации абстрагирования модели выполняется компонент технологии CEGAR[11]. ВуМС считается единой системой с несколькими верификаторами для полной верификации распределенных алгоритмов.

Рассмотрим модельную проверку алгоритма Parsing на верификаторе ВуМС. Поскольку установка и обучение системе требует отдельного труда, мы решили показать только результаты, полученные при верификации ВуМС. Реализация и внедрение алгоритма Parsing на данной нетривиальной системе привела алгоритм к изменению. В алгоритм внедрялись: пороговая граница для процессоров, система отслеживания искусственного контрпримера и т.п. Поскольку, распределенные алгоритмы требуют высокого контроля в плане абстракции, модель уменьшилась до пороговой границы. Генерация осуществлялась в ходе верификации через Yices. Были внесены дополнительные параметры $N; T; F$, которые реализуют тестирование отказоустойчивости данного алгоритма, где N - лояльные процессоры, T - пороговая граница, F - дефектные процессы. Для этих параметров существует предкомпиляционная область определение $assume(N > 3 * T \text{ AND } T \geq 1 \text{ AND } 0 \leq F \text{ AND } F \leq T)$.

Утверждение $\exists i \text{ } rcvd_i < nsnt$ описывает глобальное состояние, в котором сообщения еще находятся в пути. Отсюда следует, что формула ϕ определяется как

$$GF(rcvd_i < nsnt) \quad (5)$$

где, $rcvd_i$ - принятые локальные переменные, $nsnt$ - общие переменные для каждого процессора. По результатам верификации алгоритма Parsing на ВуМС (Рисунок 2), выявлены одни и те же результаты, что и при верификации в Spin. Однако, если учитывать в плане автоматизации абстрагирование и недетерминированный подбор требований на несколько тысяч вариантов (что составляет в сумме 5936 [12]), система ВуМС превосходит по качеству и количеству проверяемых процессов на аппаратном и программном уровне. В Spin количество процессов было ограничено до 9, на ВуМС количество процессов динамически менялось и было доведено до 16.

Заключение

Было проведено сравнительное исследование верификации параллельного алгоритма Parsing на верификаторе Spin и модернизированного варианта Spin - ВуМС. ВуМС показал лучшие результаты в плане верификации больших систем и по количеству проверяемых процессов на распределенном алгоритме Parsing. Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 5033/ГФ4*

Литература

- [1] *Lamport L.* A new solution of Dijkstra's concurrent programming problem. // Commun. ACM 17(8), - 1974. - P. 453–455.
- [2] *Srikanth T., Toueg S.* Simulating authenticated broadcasts to derive simple fault-tolerant algorithms. // Distributed Computing 2, - 1987. - P. 80–94.
- [3] *John A., Konnov I., Schmid U., Veith H., Widder J.* Counter Attack on Byzantine Generals: Parameterized Model Checking of Fault-tolerant Distributed Algorithms. // Cornell University Library. Ithaca. NY. - V2. - 2013. - P. 56-75.
- [4] *Miner D., Shook A.* MapReduce Design Patterns. Building Effective Algorithms and Analytics for Hadoop and Other Systems. // Ottawa. Canada. ACM. NY. - 2012. - P. 204–213.
- [5] *Ахмед-Заки Д.Ж., Бектемесов А.Т.* Симмуляция распределенных программ при использовании транзакционной памяти. // Вестник КазНУ. Алматы – 2014. – С. 26-33.
- [6] *Charron-Bost B., Pedone F., Schiper A.* Replication: Theory and Practice // Lecture Notes in Computer Science. Springer. - V 5959. - 2010. - P. 156-167.
- [7] *Bokor P., Kinder J., Serafini M., Suri N.* Efficient model checking of fault-tolerant distributed protocols. // In: DSN. - 2011. - P. 73–84.
- [8] *Clarke E. M., Grumberg O., Peled D.A.* Model Checking // The MIT Press. London. England. - 1999. –330 p.
- [9] *John A., Konnov I., Schmid U., Veith H., Widder J.* Starting a dialog between model checking and fault-tolerant distributed algorithms // arXiv CoRR abs/1210.3839. - 2012.
- [10] *Aubakirov S., Trigo P. and Ahmed-Zaki D.* Comparison of Distributed Computing Approaches to Complexity of n-gram Extraction // Agent and Systems Modeling, Portugal Proceedings of DATA, - 2016. –P. 25–30.
- [11] *Clarke E., Grumberg O., Jha S., Lu Y., Veith H.* Counterexample-guided abstraction refinement for symbolic model checking. // J.ACM 50(5). - 2003. - P. 752–794
- [12] Benchmarks Spin2013 ByMC 0.9.5: Byzantine model checker, <http://forsyte.tuwien.ac.at/software/bymc/> (Application date: 05.08.2016)

References

- [1] *Lamport L.* A new solution of Dijkstra's concurrent programming problem. // Commun. ACM 17(8), - 1974. - P. 453–455.
- [2] *Srikanth T., Toueg S.* Simulating authenticated broadcasts to derive simple fault-tolerant algorithms. // Distributed Computing 2, - 1987. - P. 80–94.
- [3] *John A., Konnov I., Schmid U., Veith H., Widder J.* Counter Attack on Byzantine Generals: Parameterized Model Checking of Fault-tolerant Distributed Algorithms. // Cornell University Library. Ithaca. NY. - V2. - 2013. - P. 56-75.
- [4] *Miner D., Shook A.* MapReduce Design Patterns. Building Effective Algorithms and Analytics for Hadoop and Other Systems. // Ottawa. Canada. ACM. NY. - 2012. - P. 204–213.

-
- [5] *Akhmed-Zaki D.Zh., Bektemessov A.T.* Simulation of distributed programm with transactional memory. // Buletin KazNU. Almaty – 2014. – P. 26-33.
 - [6] *Charron-Bost B., Pedone F., Schiper A.* Replication: Theory and Practice // Lecture Notes in Computer Science. Springer. - V 5959. - 2010. - P. 156-167.
 - [7] *Bokor P., Kinder J., Serafini M., Suri N.* Efficient model checking of fault-tolerant distributed protocols. // In: DSN. - 2011. - P. 73–84.
 - [8] *Clarke E. M., Grumberg O., Peled D.A.* Model Checking // The MIT Press. London. England. - 1999. –330 p.
 - [9] *John A., Konnov I., Schmid U., Veith H., Widder J.* Starting a dialog between model checking and fault-tolerant distributed algorithms // arXiv CoRR abs/1210.3839. - 2012.
 - [10] *Aubakirov S., Trigo P. and Ahmed-Zaki D.* Comparison of Distributed Computing Approaches to Complexity of n-gram Extraction // Agent and Systems Modeling, Portugal Proceedings of DATA, - 2016. –P. 25–30.
 - [11] *Clarke E., Grumberg O., Jha S., Lu Y., Veith H.* Counterexample-guided abstraction refinement for symbolic model checking. // J.ACM 50(5). - 2003. - P. 752–794
 - [12] Benchmarks Spin2013 ByMC 0.9.5: Byzantine model checker, <http://forsyte.tuwien.ac.at/software/bymc/> (Application date: 05.08.2016)

УДК 004.056

Дусекеев Р.М.* , Мутанов Г.М., Мамыкова Ж.Д.**.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы

E-mail: *Ruslan.Dussekeev@kaznu.kz, **Zhanl.Mamykova@kaznu.kz

Роль информационной безопасности в развитии ИТ-инфраструктуры и повышении конкурентоспособности университета

В настоящее время сфера образования развивается необычайно динамично, приобретая новые черты, трансформируются ее функциональные, структурные, организационные, идеологические, ценностные характеристики. Кардинальные преобразования происходят в высшей школе. Все это порождает проблему поиска новых источников повышения конкурентоспособности вуза.

Статья посвящена роли информационной безопасности (ИБ) в повышении конкурентоспособности вузов. Уровень ИБ, наряду с основными показателями эффективности работы университетов, такими как: качество образовательного процесса, подготовка будущих специалистов-выпускников, количество и качество научных исследований, высококвалифицированный профессорско-преподавательский состав, является важным показателем, так как качество обеспечения информационной безопасности в вузе непосредственно влияет на репутацию и соответственно на его конкурентоспособность. На сегодняшний день в учреждениях высшего образования отсутствуют формализованные процедуры, действия или меры по защите ИТ-инфраструктуры, нет управляющей модели обеспечения информационной безопасности.

В данной работе проведен анализ основных угроз безопасности информационных систем (ИС) вузов, на основании его результатов предлагается управляющая модель, которая может быть использована в качестве основы при создании собственной системы информационной безопасности университетов. Использование такой модели позволит эффективно предупреждать и заранее выявлять угрозы информационной безопасности ИТ-инфраструктуры и обеспечит надлежащий уровень информационной безопасности, одного из показателей конкурентоспособности организации.

Ключевые слова: модель обеспечения информационной безопасности, ИТ-инфраструктура, корпоративная информационная система, вуз, информационная безопасность.

Dussekeyev R.M., Mutanov G.M., Mamykova Zh.D.

The role of information security in the development of IT infrastructure and increasing the competitiveness of the university

Currently the education sector is developing extremely rapidly, acquiring new features, its functional, structural, organizational, ideological and value characteristics are transformed. The dramatic transformation is taking place in higher education. All this creates the problem of finding new sources of increasing the competitiveness of the university. The article is devoted to the role of information security to increase the competitiveness of universities. The level of information security, together with key performance indicators of the work of universities, such as: the quality of the educational process, training of future specialists-graduates, the number and quality of scientific research, highly qualified teaching staff, is an important indicator, since the quality of information security at the university directly affects the reputation and thus its competitiveness. Nowadays, the higher education institutions have not formalized procedures, actions, or measures for the protection of IT infrastructure, there is no a management model of information security. This paper analyzes the main threats to the security of information systems (IS) of higher education institutions, based on the results the management model that can be used as a basis for creating own information security system of universities is proposed.

Using this model will effectively prevent and proactively identify threats to information security of IT infrastructure and ensure an appropriate level of information security, one of the indicators of competitiveness of the organization.

Key words: model of information security provision, IT infrastructure, corporate information system, university, information security.

Дусекеев Р.М., Мұтанов Ғ.М., Мамыкова Ж.Д.

**Университеттің ИТ-инфрақұрылымын дамыту мен бәсекеге қабілеттілігін
арттыруында ақпараттық қауіпсіздігінің рөлі**

Қазіргі уақытта білім беру секторы жаңа сипаттарды алып, өте тез дамып келеді, оның функционалдық, құрылымдық, ұйымдастырушылық, идеологиялық және құндылықты сипаттамалары өзгеріп келеді. Жоғары білім мектебінде өте маңызды трансформациялар болып жатыр. Осының барлығы университеттің бәсекеге қабілеттілігін арттыру үшін жаңа көздерін табу мәселесін тудырады. Мақала жоғары оқу орындарының бәсекеге қабілеттілігін арттыру үшін ақпараттық қауіпсіздіктің (АҚ) рөліне арналған. АҚ деңгейі, университеттердің жұмысының тиімділігінің негізгі көрсеткіштері: білім беру үдерісінің сапасы, болашақ мамандар-түлектерінің дайындығы, ғылыми зерттеулердің саны мен сапасы, жоғары білікті профессор-оқытушылар құрамымен бірге маңызды көрсеткіш болып табылады, өйткені жоғары оқу орында ақпараттық қауіпсіздікті қамтамасыз ету сапасы, оның беделіне және, осылайша, бәсекеге қабілеттілігіне тікелей әсер етеді. Бүгінгі күні, жоғары оқу орындарында АТ-инфрақұрылымды қорғау үшін нысандандырылған рәсімдер, іс-әрекеттер немесе шаралар және ақпараттық қауіпсіздікті басқару моделі жоқ. Бұл еңбекте жоғары оқу орындарының ақпараттық жүйелердің (АЖ) қауіпсіздігі үшін негізгі қауіп-қатерлеріне талдау жасалған, оның нәтижелері негізінде жоғары оқу орындарының өз ақпараттық қауіпсіздік жүйесін құру үшін негіз ретінде пайдалануға болатын басқару моделі ұсынылады. Осы модельді пайдалануы АТ-инфрақұрылымының ақпараттық қауіпсіздігі үшін қатерлерін тиімді алдын алуға және алдын-ала анықтауға мүмкіндік береді және ұйымның бәсекеге қабілеттілігін көрсеткіштерінің бірі, ақпараттық қауіпсіздіктің тиісті деңгейін қамтамасыз етеді.

Түйін сөздер: ақпараттық қауіпсіздікті қамтамасыз ету моделі, АТ-инфрақұрылым, корпоративтік ақпараттық жүйесі, ЖОО, ақпараттық қауіпсіздік.

1 Введение

Вуз обладает рядом особенностей, связанных с многопрофильным характером деятельности, множеством форм и методов учебной работы, наличием развитой структуры вспомогательных подразделений и служб, отсутствием общепринятой формализации деловых процессов, необходимостью электронного взаимодействия с вышестоящими организациями, частым изменением статуса сотрудников и обучаемых, многообразием источников финансирования, пространственной распределенностью инфраструктуры [1]. Мы видим, что вуз – это самостоятельная организация, которая оказывает образовательные услуги с целью подготовки высококвалифицированных и востребованных кадров для экономики страны. В этой связи для вуза является важным наличие такого качества, как конкурентоспособность, чтобы быть привлекательным и интересным для научных деятелей и будущих студентов. Важными показателями конкурентоспособности университета являются качество образовательного процесса, подготовка будущих специалистов-выпускников, количество и качество научных исследований, высококвалифицированный профессорско-преподавательский состав, инфраструктура [2]. В связи с отсутствием формализации бизнес-процессов менее заметным остается такой показатель, как уровень информационной безопасности высшего образовательного учрежде-

ния. Тем не менее, данный показатель является особенно важным, так как качество обеспечения информационной безопасности в вузе непосредственно влияет на репутацию и соответственно на его конкурентоспособность. В университете, как часть непрерывного процесса оказания образовательных услуг, хранится и обрабатывается огромное количество различных данных, связанных не только с обеспечением учебного процесса, но и с научно-исследовательскими и проектно-конструкторскими разработками, персональные данные студентов и сотрудников, служебная, коммерческая и иная конфиденциальная информация. Мы видим, что университет обладает большим количеством информации, использование и обеспечение безопасности которой регламентируется действующими законодательными актами. Таким образом, обеспечение надлежащего уровня информационной безопасности университета в связи с положениями Закона РК от 21 мая 2013 года № 94-V "О персональных данных и их защите", Закона РК от 27 июля 2007 года № 319-III "Об образовании" и Закона РК от 24 ноября 2015 года № 418-V "Об информатизации" также становится актуальной задачей.

На основании выше изложенного мы пришли к выводу, что для университета необходимо сформировать бизнес-процесс обеспечения информационной безопасности посредством разработки нормативно-регламентирующих документов и контролирующих мер.

2 Текущее состояние ИТ-инфраструктуры вуза и базовая модель обеспечения информационной безопасности

Для построения базовой модели обеспечения информационной безопасности необходимо определить компоненты ИТ-инфраструктуры вуза и выделить среди них объекты информационной безопасности, определить угрозы, а также определить основные проблемы, препятствующие реализации данной базовой модели.

Мы видим, что компонентами ИТ-инфраструктуры практически любого высшего учебного заведения являются определённое аппаратное и программное обеспечение [3].

К аппаратному обеспечению относится:

Сетевая инфраструктура – состоит из системно-коммуникационных узлов сети; структурированной кабельной системы; активного сетевого оборудования; IP-телефонии; локального IP-телевидения; системы управления, контроля и мониторинга безопасности сети.

Серверная инфраструктура – включает в себя: сервера; системы хранения данных; вычислительные системы научных расчетов; системы резервного копирования и восстановления; средства виртуализации; системы администрирования вычислительных системных ресурсов и сервисов; систему гарантированного электропитания; систему контроля и мониторинга окружающей среды; систему пожаротушения.

Мультимедийное технико-технологическое обеспечение – это парк компьютерной техники и оргтехники; интерактивное мультимедийное оборудование; система видеоконференцсвязи; аппаратные средства мобильного обучения; система аудио-видео сопровождения; учебное программное обеспечение.

К программному обеспечению относится:

Корпоративная информационная система управления вузом (КИС) – представляет собой комплекс программ, направленных на автоматизацию и управление различными

бизнес-процессами вуза, базирующихся на процессном подходе, что позволяет системно развивать каждое направление деятельности вуза и организовывать работы по созданию и сопровождению программных разработок работниками информационных подразделений вуза.

Корпоративная информационная система управления вузом содержит следующие категории информации, подлежащие защите:

- 1) информация, содержащая персональные данные работников, обучающихся вуза.
- 2) информация, содержащая коммерческую тайну.
- 3) информация, предназначенная для конкретных лиц, либо группы лиц, с ограниченным доступом.

Как видно из описания компонентов ИТ-инфраструктуры, каждый из них представляет собой объект информационной безопасности. Следовательно, нужно по каждому объекту определить угрозы, процедуру организации и систему мер по обеспечению информационной безопасности.

Первоисточниками угроз информационной безопасности являются интернет и интранет среды. В соответствии с рисунком 1 мы видим категории угроз со стороны интернет и интранет.

К основным угрозам, исходящим из обозначенных на рисунке 1 источников, можно отнести следующие:

- внедрение вирусов и других разрушающих программных воздействий;
- нарушение целостности исполняемых файлов;
- использование ошибок кода и конфигурации программного обеспечения (ПО), активного сетевого оборудования;
- анализ и модификация ПО;
- наблюдение за работой системы путем использования программных средств анализа сетевого трафика и утилит операционных систем (ОС), позволяющих получать информацию о системе и о состоянии сетевых соединений;
- использование уязвимостей ПО для взлома программной защиты с целью получения несанкционированного доступа к информационным ресурсам или нарушения их доступности;
- выполнение одним пользователем несанкционированных действий от имени другого пользователя;
- раскрытие, перехват и хищение секретных кодов и паролей;
- чтение остаточной информации в оперативной памяти (ОП) компьютеров и на внешних носителях;
- загрузка и установка в системе не лицензионного, непроверенного системного и прикладного ПО;
- блокирование работы пользователей системы программными средствами;
- перехват информации на линиях связи путем использования различных видов анализаторов сетевого трафика;
- замена, вставка, удаление или изменение данных пользователей в информационном потоке;
- перехват информации (например, пользовательских паролей), передаваемой по каналам связи, с целью ее последующего использования для обхода средств сетевой аутентификации;

- статистический анализ сетевого трафика (например, наличие или отсутствие определенной информации, частота передачи, направление, типы данных и т.п.);
- размещение конфиденциальной/провокационной информации в сети Интернет;
- атаки типа "отказ в обслуживании" (DoS) т. е. атаки на вычислительную систему с целью довести её до отказа, создание таких условий, при которых добросовестные пользователи системы не могут получить доступ к предоставляемым системным ресурсам (серверам), либо этот доступ затруднён;
- кража важных данных с помощью карманных носителей информации (flash-накопителей, внешних жестких дисков и т. д.);
- фишинг, т. е. интернет мошенничество с использованием социальной инженерии для получения доступа к конфиденциальной информации пользователей – логинам и паролям;
- низкая квалификация ИТ-специалистов, администраторов и разработчиков программного и технического обеспечения;

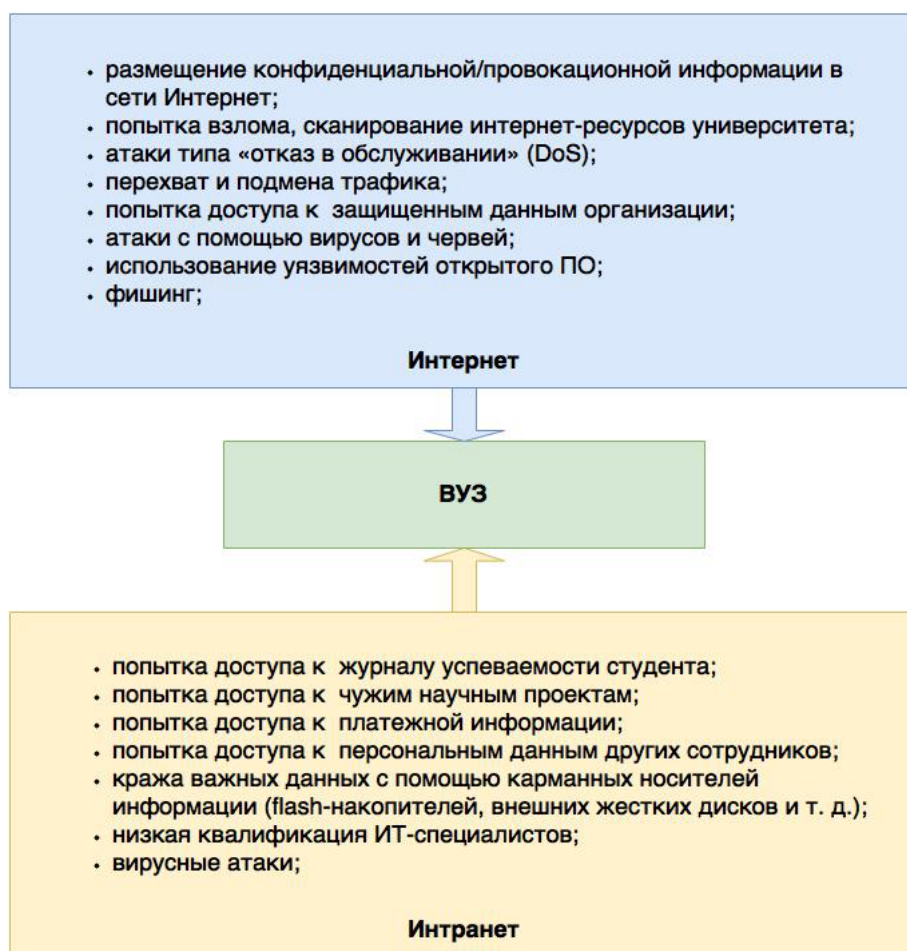


Рисунок 1 – Схема возможных угроз ИБ для вуза

Из анализа угроз информационной безопасности можно сделать вывод, что в вузе присутствует ряд проблем, препятствующих реализации процедуры организации и системы мер по обеспечению информационной безопасности:

- 1) отсутствие или недостаток специалистов ИБ в вузе;

2) дороговизна средств мониторинга и диагностики сетевого, серверного и программного обеспечения;

3) отсутствие общепринятой формализации деловых процессов, в том числе процессов по обеспечению информационной безопасности;

4) реагирование по факту произошедшего инцидента информационной безопасности и отсутствие упреждающих действий по предотвращению угроз.

Определив объекты, угрозы, а также проблемы информационной безопасности, как практическую часть реализации базовой модели информационной безопасности, необходимо использовать основной набор защитных инструментов, среди них:

Средства авторизации – предоставление определённому лицу или группе лиц прав на выполнение определённых действий; а также процесс проверки (подтверждения) данных прав при попытке выполнения этих действий. Часто можно услышать выражение, что какой-то человек "авторизован" для выполнения данной операции – это значит, что он имеет на неё право.

Журналирование – процесс записи информации о происходящих с каким-то объектом (или в рамках какого-то процесса) событиях в журнал / лог-файл (например, в файл).

Антивирусные средства – специализированная программа для обнаружения компьютерных вирусов, а также нежелательных (считающихся вредоносными) программ вообще и восстановления заражённых (модифицированных) такими программами файлов, а также для профилактики – предотвращения заражения (модификации) файлов или операционной системы вредоносным кодом.

Межсетевые экраны – программный или программно-аппаратный элемент компьютерной сети, осуществляющий контроль и фильтрацию проходящего через него сетевого трафика в соответствии с заданными правилами.

Системы резервного копирования – процесс создания копии данных на носителе, предназначенном для восстановления данных в оригинальном или новом месте их расположения в случае их повреждения или разрушения.

Системы бесперебойного питания – вторичный источник электропитания, предназначенный для электропитания при кратковременном отключении основного источника электропитания, а также для защиты от существующих помех в сети с сохранением допустимых параметров для сети основного источника.

Системы аутентификации – средство защиты, устанавливающее подлинность лица, получающего доступ к автоматизированной системе, путем сопоставления сообщенного им идентификатора и предъявленного подтверждающего фактора.

Средства контроля доступа в помещения – совокупность программно-аппаратных технических средств безопасности, имеющих целью ограничение и регистрацию входа-выхода объектов (людей, транспорта) на заданной территории через "точки прохода": двери, ворота, КПП.

3 Управляющая модель обеспечения информационной безопасности

Для обеспечения более высокого и качественного уровня защиты объектов ИТ-инфраструктуры от вышеуказанных угроз образовательная организация должна уметь

руководствоваться существующими законодательными документами об информационной безопасности, а также обладать исчерпывающими организационными положениями касательно процедур обеспечения информационной безопасности. Нормативные регламентирующие документы должны содержать конкретные программно-технические решения общие для всех образовательных учреждений с учетом их особенностей в защите информации.

На сегодняшний день в учреждениях высшего образования отсутствует формализованные процедуры, действия или меры по защите ИТ-инфраструктуры. Таким образом университеты не обладают формализованной управляющей моделью обеспечения информационной безопасности.

В связи с вышеизложенным мы видим необходимость создания управляющей модели обеспечения информационной безопасности, которая будет состоять из вышеописанной базовой модели и дополнительных мер, и процедур, описанных ниже:

Шаг 1. Определение объектов информационной безопасности.

1.1 Определение объектов защиты ИТ-инфраструктуры - анализ и выявление ценных информационных объектов, например, конфиденциальные данные организации, серверные, сетевые и информационные ресурсы и т.д. Эти объекты защиты будут использованы для определения угроз, которые могут нанести ущерб данным объектам.

1.2 Определение угроз информационной безопасности ИТ-инфраструктуры – анализ и выявление потенциально возможных событий, действий, процессов или явлений, которые могут привести к нанесению ущерба. Для определения угроз необходимо оценить имеющиеся уязвимости, т. е. присущие объекту ИТ-инфраструктуры причины, приводящие к нарушению информационной безопасности. Определив угрозы, можно точно понять и определить, каких последствий от них ожидать в случае их реализации.

1.3 Определение последствий реализации угроз – анализ и выявление возможных действий реализации угрозы при взаимодействии источника угрозы через имеющиеся уязвимости. После определения последствий будет сформирована вся цепочка объектов информационной безопасности, которую можно использовать, как входные данные для составления организационных процедур информационной безопасности.

Шаг 2. Организация процедур информационной безопасности.

2.1 Формирование матрицы доступа к объектам ИТ-инфраструктуры (серверные, сетевые и информационные ресурсы) – таблицы, отображающей правила доступа субъектов к объектам ИТ-инфраструктуры, данные о которых хранятся в диспетчере доступа. Определив соответствующую матрицу, доступ необходимо каким-то образом физически разграничить. Для этой и других целей нужно использовать защитные инструменты.

2.2 Использование базового набора защитных инструментов – программно-технических способов и средств обеспечения информационной безопасности. В итоге будет создана базовая модель обеспечения информационной безопасности. Но мало просто использовать данную модель, нужно контролировать правильность и эффективность ее использования и производить мониторинг состояния информационной безопасности.

Шаг 3. Реализация и внедрение мер, выработка решений мониторинга и контроля информационной безопасности.

3.1 Формирование набора нормативных документов – документов, содержащих положения относительно обеспечения информационной безопасности, созданных и регулируемых как самой организацией, так и государством. Создав такой набор документов

можно определить меры и конкретные, выражаемые в числах, показатели информационной безопасности.

3.2 Определение показателей оценки информационной безопасности – например, это могут быть количество вирусов, обнаруженных за месяц, количество попыток загрузки вредоносных файлов на сервер через сайты организации, сроки окончания лицензий различных ПО, количество одновременных пользователей на сайте в среднем каждый день, число сбоев, когда внутренние системы и сайты организации останавливали свою работу, данные конфигурации баз данных и серверов, данные о загрузенности центрального процессора серверов, количество новых персональных компьютеров (ПК) без установленных программ обеспечения безопасности. Данные показатели должны быть отражены в соответствующих протоколах принятия решений при преодолении последствий случившихся инцидентов и использоваться для принятия решений при планировании модернизации ИТ-инфраструктуры, например, покупки дополнительных средств защиты, а также при выработке каких-либо упреждающих действий по защите. По данным показателям возможно и желательно построить ИС мониторинга, к которой будут иметь доступ руководство ИТ-подразделения для того, чтобы оперативно принимать решение о состоянии информационной безопасности ИТ-инфраструктуры вуза.

4 Заключение

В связи с вышеизложенным нами разработана управляющая модель обеспечения информационной безопасности для вузов, состоящая из следующих компонентов – это нормативно-регламентирующие документы, системы мониторинга, анализа и контроля, набор показателей оценки информационной безопасности.

Использование такой модели позволит эффективно предупреждать и заранее выявлять угрозы информационной безопасности ИТ-инфраструктуры, и своевременно информировать руководство вуза о текущем состоянии программно-технического комплекса, и понимать его уровень защищенности, и оценить надёжность его защиты.

Таким образом, реализация вышеописанной модели позволит подтвердить, что вузом, в частности его руководством, приняты все необходимые меры по обеспечению надлежащего уровня информационной безопасности, и способствовать устойчивому развитию конкурентоспособности вуза.

Литература

- [1] Проталинский О.М., Ажмухамедов И.М. Информационная безопасность вуза // Вестник Астраханского государственного технического университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2009. – № 1. – С.18-23.
- [2] Белоусова Е.В., Савченко И.И. Особенности оценки конкурентоспособности вуза на рынке образовательных услуг // Известия Дальневосточного федерального университета. Экономика и управление. – 2006. – № 1. – С.11-18.
- [3] Иванов И.П. ИТ-инфраструктура современного университета // Science Time. - 2015. – № 2(14). – С.53-56.

References

- [1] Protalinskiy O.M., Azhmuhamedov I.M. Information security of institute of higher education // Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Management, Computer Science and Informatics. – 2009. – No 1. – P.18-23.

- [2] *Belousova E.V., Savchenko I.I.* Features of university competitiveness assessment in the market of educational services // Izvestia of Far Eastern Federal University. Economics and Management. – 2006. – No 1. – P.11-18.
- [3] *Ivanov I.P.* IT-infrastructure of the modern university // Science Time. – 2015. – No 2(14). – P.53-56.

4-бөлім

Раздел 4

Section 4

Қолданылмалы
математикаПрикладная
математикаApplied
Mathematics

УДК 519.63; 665.6/.7; 614.8.027.1

Асылбекулы А. *, Абдибекова А.У., Жумагулов Б.Т.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы

E-mail: *asylbekuly@mail.ru

Математическое моделирование миграций нефтяного пятна и оценка ареала на поверхности Каспийского моря в зависимости от метеоусловий

В данной работе рассматривается процесс разлива и миграция горючего топлива – нефти в Каспийском море в зависимости от метеоусловий. Как правило, экологам, осуществляющим анализ данной чрезвычайной ситуации, необходимо знать в каком направлении будет двигаться нефтяное пятно, образовавшееся в результате разлива, какую площадь займет нефтяное пятно, как изменится состав нефти, какой объем нефти испарится и ряд других вопросов, на которые можно ответить с использованием математического моделирования. Теоретическая основа математической модели для рассматриваемого процесса составляют уравнения гидродинамики моря, уравнения переноса и изменения концентрации компонентов нефти, а также учитывается уравнение неразрывности, выражающее собой неизменность общего количества массы вылитой нефти, образовавшей пленку на поверхности моря. В результате определена траектория миграции, изменение концентрации и температуры нефтяного пятна на поверхности моря со стационарного источника в зависимости от метеоусловий. Данная модель позволяет рассчитывать площадь и определять траекторию миграции нефтяного пятна по акваторию Каспийского моря в зависимости от метеоусловий, а также проводить численное моделирование разливов нефти в открытое море при различных начальных массах разлитой нефти.

Ключевые слова: разлив нефти, нефтяное пятно, Каспийское море, охрана окружающей среды, метеоусловия, математическое моделирование.

Assylbekuly A., Abdibekova A.U., Zhumagulov B.T.

Mathematical modeling of oil spill migration on the surface of the Caspian Sea depending on weather conditions.

This paper considers the process of filling and migration of fossil fuels - oil - in the Caspian Sea, depending on the weather conditions. As a rule, for environmentalists performing analysis of the emergency, it is necessary to know in which direction will move the oil slick, formed because of the spill, how to change the composition of the oil, how much oil will evaporate and a number of other questions that can be answered using mathematical modeling. The theoretical basis of a mathematical model for the process consists of the hydrodynamics equations of the sea, equations of transfer and changes in the concentration of the oil component, as well as the continuity equation is taken into account, expressing the an invariance of the total amount of mass of poured oil, which have formed a film on the surface of the sea. As a result, the migration trajectory, the change in concentration and temperature of the oil slick on the sea surface from a fixed source, depending on weather conditions are defined. This model allows to calculate the area and determine the migration trajectory of the oil slick on the Caspian sea depending on the weather conditions, and carry out the numerical simulation of oil spills in the open sea at different initial masses of spilled oil.

Key words: oil spill, the Caspian Sea, oil slick, the environment, weather conditions, mathematical modeling.

Асылбекұлы А., Абдибекова А.У., Жумагулов Б.Т.

Каспий теңізі бетінде ауа райы жағдайына байланысты мұнай дағының таралу аймағының бағалауын және орын ауысуын математикалық модельдеу

Бұл жұмыста Каспий теңізінде ауа райы жағдайына байланысты мұнай төгілуін және жанар отынның орын ауысу процестері қарастырылады. Әдетте төтенше жағдайды талдау кезінде, экологтарға төгілу нәтижесінде пайда болған мұнай дағының қай бағытта жылжитынын, мұнай дағының қандай аймақ алатындығын, мұнайдың құрамы қалай өзгертіндігін, мұнайдың қандай бөлігі буланатындығын білу қажет, осындай және басқа да бірқатар мәселелер туғызатын сұрақтарға математикалық модельдеу арқылы жауап беруге болады. Қарастырылатын процесс үшін математикалық модельдердің теориялық негізі гидродинамика теңдеулері, тасымал теңдеуі және мұнай компоненттері қоспасының теңдеуі, сондай-ақ теңіз бетіне төгілген мұнайдың салдарынан пайда болған қабықтың жалпы массасының саны өзгермеуін білдіретін үзіліссіздік теңдеуі есепке алынады. Нәтижесінде ауа райы жағдайына байланысты теңіз бетіне стационарлы көзден төгілген мұнай дағының орын ауысу траекториясы, температурасы мен қоспасының өзгерісі анықталды. Бұл модель Каспий теңізі акваториясында ауа райы жағдайына байланысты мұнай дағының орын ауысу траекториясын анықтауға және төгілген мұнай дағының аймағын есептеуге, сондай-ақ бастапқы массасы әр түрлі болатын мұнайдың ашық теңізде төгілуін сандық модельдеуге мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: мұнай төгілуі, мұнай дағы, Каспий теңізі, қоршаған ортаны қорғау, ауа райы жағдайлары, математикалық модельдеу.

1 Введение

Разливы нефти имеют огромный потенциал для причинения серьезного вреда морской среде и способны вызвать широкий экономический и экологический ущерб. Исследование методов и средств ликвидации последствий аварий, а также методы, которые могут быть приняты, чтобы избежать аварийных ситуаций и применение их на практике является сегодня особо актуальной задачей.

Северный Каспий занимает всего 0.5% от общего объема воды в море. В результате интенсификации процессов освоения углеводородного сырья как в прибрежной, так и в шельфовой зоне, море подвергается загрязнению нефтепродуктами и сопутствующим им токсикантами. Кроме того, Каспийское море принимает стоки рек, несущих с собой различные загрязняющие вещества. Всё это определяет повышенный уровень антропогенной загрязненности моря. Как известно, нефтяная отрасль по глубине и многообразию негативных воздействий на окружающую среду превосходит все другие отрасли топливно-энергетического комплекса. Наиболее ощутимо эти воздействия проявляются в условиях добычи, подготовки, переработки и транспорта углеводородного сырья и нефтепродуктов [1-3].

Источники загрязнения Каспия многообразны и расположены на территории всех Прикаспийских государств, включая их морские акватории. Большую потенциальную угрозу для Каспия из-за подъёма уровня моря представляют законсервированные нефтяные скважины и прибрежные нефтепромыслы, аварии на разведочных скважинах и транспортных средствах, а также трансграничный перенос загрязняющих веществ (металлов, нефтепродуктов и т.д.) по рекам Волга, Урал и др.

В данной работе рассматривается процесс разлива и миграция горючего топлива – нефти в Каспийском море в зависимости от метеоусловий. Как правило, экологам, осуществляющим анализ данной чрезвычайной ситуации, необходимо знать в каком направлении будет двигаться нефтяное пятно, образовавшееся в результате разлива, ка-

кую площадь займет нефтяное пятно, как изменится состав нефти, какой объем нефти испарится и ряд других вопросов, на которые можно ответить с использованием математического моделирования [4].

2 Постановка задачи

Теоретическую основу математических моделей для рассматриваемого процесса растекания нефтяного пятна основана на решении уравнения импульса для смеси, уравнения неразрывности для смеси, уравнения переноса концентрации:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f} + \rho Q^V \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = Q^V, \\ \frac{\partial c_k}{\partial t} + \nabla \cdot (c_k \mathbf{v}_k) = F_k, \quad k = 1 \dots N \end{cases} \quad (1)$$

где $F_k = \frac{k_1 x_k p_k \Delta t M}{RT}$ – испарение; k_1 – коэффициент массопередачи; x_k – доля k -го компонента нефти; p_k – давление насыщенных паров для k -го компонента нефти; Δt – рассматриваемый временной промежуток; M – молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; T – температура воздуха; $\mathbf{v}_k$ – скорость движения компоненты; $\mathbf{v}$ – скорость смеси; Q_k^M – массовый источник, который определяется химическими превращениями, $\sum_{k=1}^N Q_k^M = 0$; p – давление; $\mathbf{f} = (0, -\rho g)$ – вектор внешних сил; g – ускорение свободного падения.

Объемный источник смеси:

$$Q^V = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\rho_k^0} Q_k^M \quad (2)$$

В качестве скорости смеси $\mathbf{v}$ берется среднеобъемная скорость:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^N c_k \mathbf{v}_k \quad (3)$$

3 Численный метод

Численная реализация составленной модели имеет следующий алгоритм: на первом этапе решается уравнение Навье-Стокса без учета давления, на втором этапе решается уравнение Пуассона, полученное из уравнения неразрывности с учетом поля скоростей первого этапа, при использовании матричной прогонки. Полученное поле давления на следующем этапе используется для пересчета окончательного поля скоростей [5]. На последнем этапе по найденному полю скоростей решается уравнение для получения концентрации компонентов вязкой жидкости.

Промежуточное поле скорости находится при использовании схемы Кранка-Николсона в комбинации с методом пятиточечной прогонки.

Рассмотрим горизонтальную составляющую компоненты скорости u_1 в точке сетки $(i + \frac{1}{2}j)$.

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial x_2} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \quad (4)$$

При применении схемы Кранка-Николсона уравнение (4) примет вид:

$$\begin{aligned} u_{1i+\frac{1}{2}j}^{*n+1} - u_{1i+\frac{1}{2}j}^n &= -\frac{3t}{2} [hx]_{i+\frac{1}{2}j}^n + \frac{t}{2} [hxp]_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} + t [ax]_{i+\frac{1}{2}j}^n + \\ &+ \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^2} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1} + \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^2} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^{n+1} \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} [hx]_{i+\frac{1}{2}j}^n &= \left(\frac{\partial u_1 u_1}{\partial x_1} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^n + \left(\frac{\partial u_1 u_2}{\partial x_2} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^n \\ [hxp]_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} &= \left(\frac{\partial u_1 u_1}{\partial x_1} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} + \left(\frac{\partial u_1 u_2}{\partial x_2} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} \\ [ax]_{i+\frac{1}{2}j}^n &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^n + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right)_{i+\frac{1}{2}j}^n \right] \end{aligned}$$

Далее левую часть уравнения (5) обозначим через $q_{i+\frac{1}{2}j}$

$$q_{i+\frac{1}{2}j} \equiv u_{1i+\frac{1}{2}j}^{*n+1} - u_{1i+\frac{1}{2}j}^n \quad (6)$$

Найдем $u_{1i+\frac{1}{2}j}^{*n+1}$ из уравнения (6)

$$u_{1i+\frac{1}{2}j}^{*n+1} = q_{i+\frac{1}{2}j} + u_{1i+\frac{1}{2}j}^n$$

Заменяя все $u_{1i+\frac{1}{2}j}^{*n+1}$ из уравнения (5) получим

$$\begin{aligned} q_{i+\frac{1}{2}j} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} \right)_{i+\frac{1}{2}j} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \right)_{i+\frac{1}{2}j} &= \\ &= -\frac{3t}{2} [hx]_{i+\frac{1}{2}j}^n + \frac{t}{2} [hxp]_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} + 2 \cdot t [ax]_{i+\frac{1}{2}j}^n \end{aligned} \quad (7)$$

Приведем уравнение (7) в вид

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] q_{i+\frac{1}{2}j} = d_{i+\frac{1}{2}j} \quad (8)$$

где

$$d_{i+\frac{1}{2}j} = -\frac{3t}{2} [hx]_{i+\frac{1}{2}j}^n + \frac{t}{2} [hxp]_{i+\frac{1}{2}j}^{n-1} + 2 \cdot t [ax]_{i+\frac{1}{2}j}^n$$

Чтобы получить второй порядок точности по времени напишем

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right] \left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] q_{i+\frac{1}{2}j} = d_{i+\frac{1}{2}j} \quad (9)$$

Чтобы определить $q_{i+\frac{1}{2}j}$ уравнение (9) решается в 2-х этапах.

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right] A_{i+\frac{1}{2}j} = d_{i+\frac{1}{2}j}$$

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] q_{i+\frac{1}{2}j} = A_{i+\frac{1}{2}j}$$

На первом этапе $A_{i+\frac{1}{2}j}$ ищется в направлении координаты x_1 :

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right] A_{i+\frac{1}{2}j} = d_{i+\frac{1}{2}j}$$

$$A_{i+\frac{1}{2}j} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}\right)_{i+\frac{1}{2}j} = d_{i+\frac{1}{2}j}$$

$$A_{i+\frac{1}{2}j} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{-A_{i+\frac{5}{2}j} + 16 \cdot A_{i+\frac{3}{2}j} - 30 \cdot A_{i+\frac{1}{2}j} + 16 \cdot A_{i-\frac{1}{2}j} - A_{i-\frac{3}{2}j}}{12\Delta x_1^2} = d_{i+\frac{1}{2}j}$$

$$s_1 \cdot A_{i+\frac{5}{2}j} - 16 \cdot s_1 \cdot A_{i+\frac{3}{2}j} + (1 + 30 \cdot s_1) \cdot A_{i+\frac{1}{2}j} - 16 \cdot s_1 \cdot A_{i-\frac{1}{2}j} + s_1 \cdot A_{i-\frac{3}{2}j} = d_{i+\frac{1}{2}j} \quad (10)$$

где $s_1 = \frac{t}{24 \cdot \text{Re} \cdot \Delta x_1^2}$

Данное уравнение (10) решается методом пятиточечной прогонки, в результате применения которого находится $A_{i+\frac{1}{2}j}$.

На втором этапе $q_{i+\frac{1}{2}j}$ ищется в направлении координаты x_2 :

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] q_{i+\frac{1}{2}j} = A_{i+\frac{1}{2}j}$$

$$q_{i+\frac{1}{2}j} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2}\right)_{i+\frac{1}{2}j} = A_{i+\frac{1}{2}j}$$

$$q_{i+\frac{1}{2}j} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{-q_{i+\frac{1}{2}j+2} + 16 \cdot q_{i+\frac{1}{2}j+1} - 30 \cdot q_{i+\frac{1}{2}j} + 16 \cdot q_{i+\frac{1}{2}j-1} - q_{i+\frac{1}{2}j-2}}{12\Delta x_2^2} = A_{i+\frac{1}{2}j}$$

$$s \cdot q_{i+\frac{1}{2}j+2} - 16 \cdot s \cdot q_{i+\frac{1}{2}j+1} + (1 + 30 \cdot s) \cdot q_{i+\frac{1}{2}j} - 16 \cdot s \cdot q_{i+\frac{1}{2}j-1} + s \cdot q_{i+\frac{1}{2}j-2} = A_{i+\frac{1}{2}j} \quad (11)$$

где $s = \frac{t}{24 \cdot \text{Re} \cdot \Delta x_2^2}$

Данное уравнение (11) решается методом пятиточечной прогонки, в результате применения которого находится $q_{i+\frac{1}{2}j}$.

После того как мы определили значение $q_{i+\frac{1}{2}j}$ мы находим $u_{1i+\frac{1}{2}j}^{*n+1}$.

$$u_{1i+\frac{1}{2}j}^{*n+1} = q_{i+\frac{1}{2}j} + u_{1i+\frac{1}{2}j}^n$$

Компонент скорости $u_{2ij+\frac{1}{2}}^{*n+1}$ находится аналогично.

Разработанная математическая модель и алгоритм ее реализации – на основе произведенных расчетов с реальными и актуальными данными позволяет определить траектория миграции нефтяного пятна. В результате моделирования стало возможным получать максимально объективные данные, столь необходимые для прогноза. С применением, реальных данных преобразованных векторных ветров в табличные данные, адаптированных для расчетов, позволило определить траекторию растекания и определить будущее местонахождение нефтяного пятна. Опережающее определение местонахождение нефтяного разлива эффективно ускоряет процесс реагирования специалистов по чрезвычайным ситуациям техногенного характера, что позволит уменьшить подследственный ущерб экологического загрязнения.

4 Результаты моделирования

Таким образом, на основе разработанной математической модели произведен расчет движения нефтяного пятна в зависимости от направления ветра и температуры воздуха; установлено изменение концентрации каждого компонента нефти в результате испарения; изменение толщины, площади и массы нефтяного пятна; определена траектория движения пятна в зависимости от направления ветра.

Был построен программный модуль для преобразования и считывания реальных метеорологических данных в вычислительные данные для применения в расчетах математического моделирования (Рисунки 1 - 9). Таким образом, разработан актуальный программный модуль основанный на реальных данных метеоусловий.

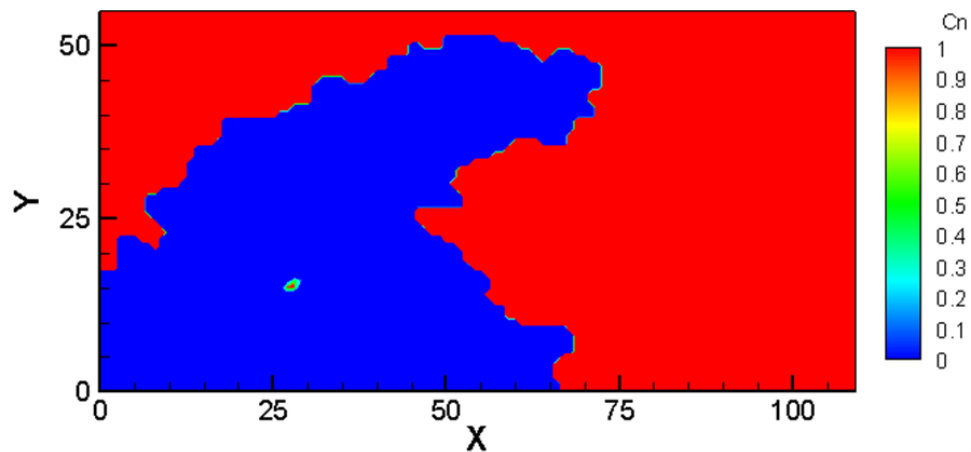


Рисунок 1 - Распределение массы вылитой нефти, ее движение с учетом изменений концентрации разлитого нефтяного пятна в Каспийском море по истечении 30 минут

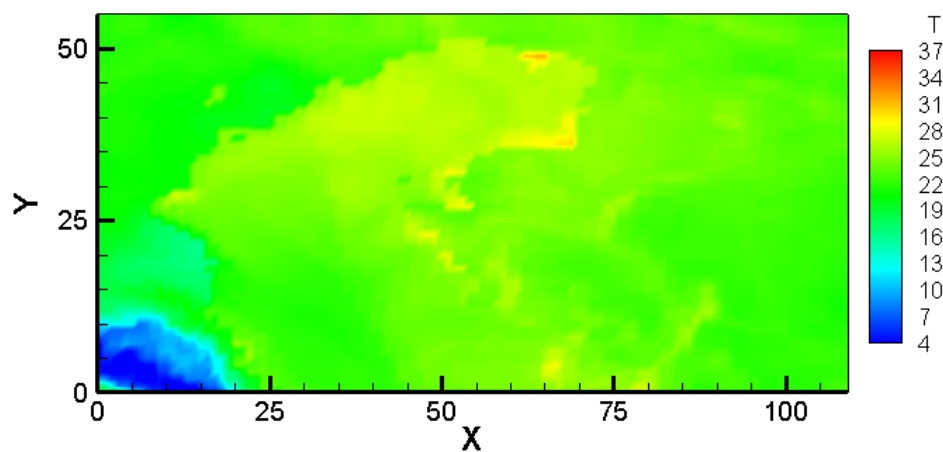


Рисунок 2 - Изменение температуры разлитого нефтяного пятна в Каспийском море по истечении 30 минут

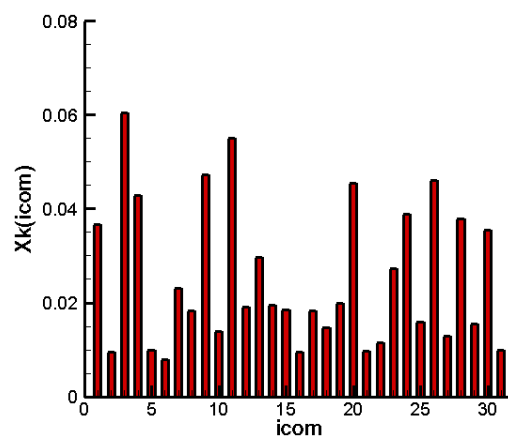


Рисунок 3 - Покомпонентное распределение разлитого нефтяного пятна в Каспийском море по истечении 30 минут

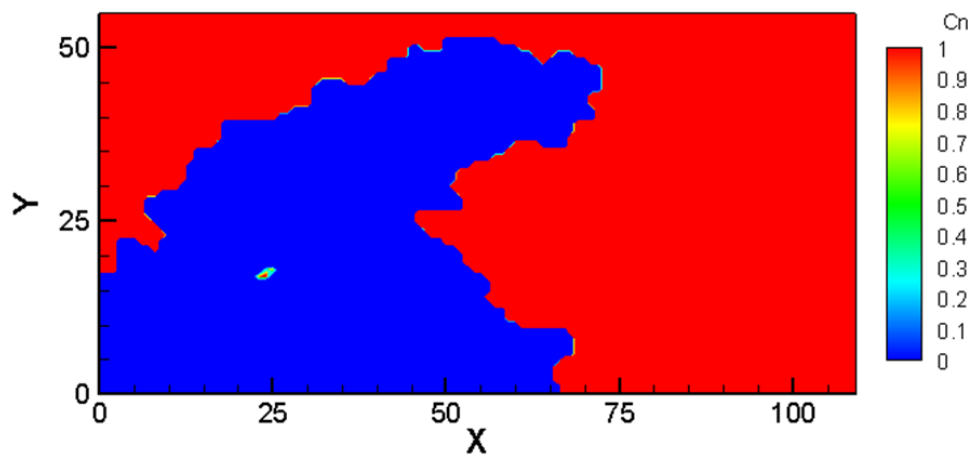


Рисунок 4 - Распределение массы вылитой нефти, ее движение с учетом изменений концентрации разлитого нефтяного пятна в Каспийском море по истечении 50 минут

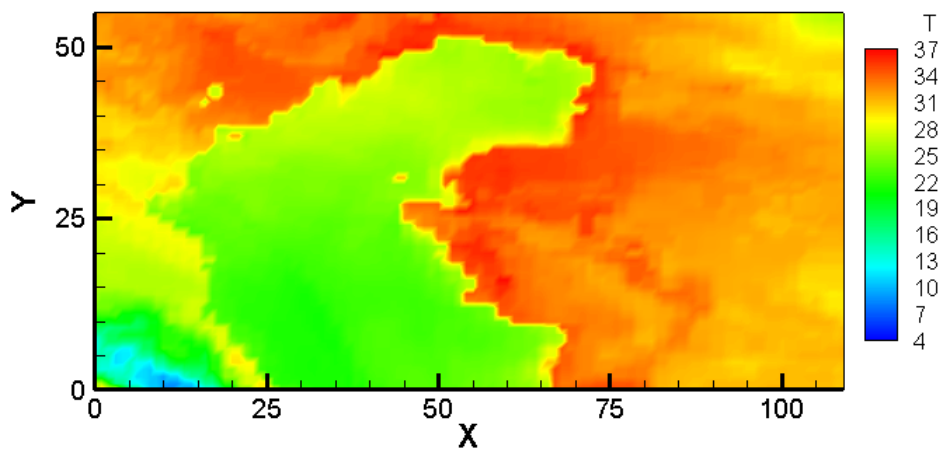


Рисунок 5 - Изменение температуры разлитого нефтяного пятна в Каспийском море по истечении 50 минут

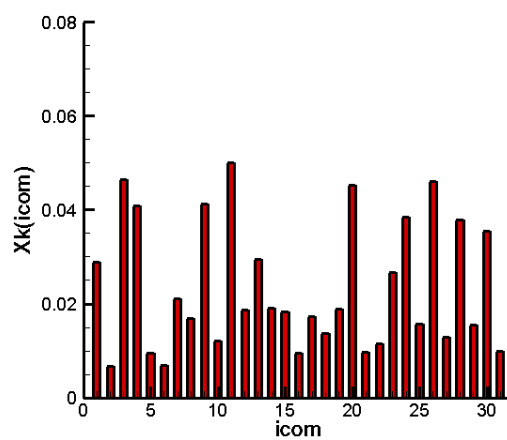


Рисунок 6 - Покомпонентное распределение разлитого нефтяного пятна в Каспийском море после истечения 50 минут

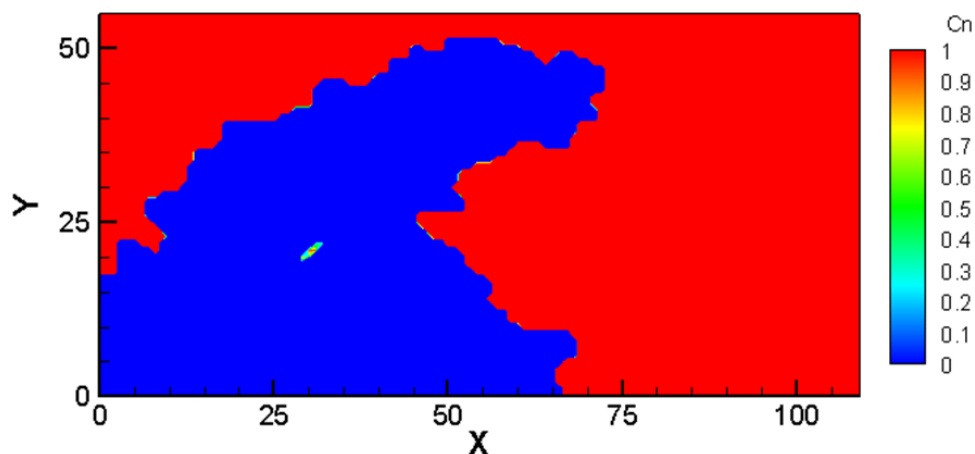


Рисунок 7 - Распределение массы вылитой нефти, ее движение с учетом изменения концентрации разлитого нефтяного пятна в Каспийском море по истечении 1 час 10 минут.

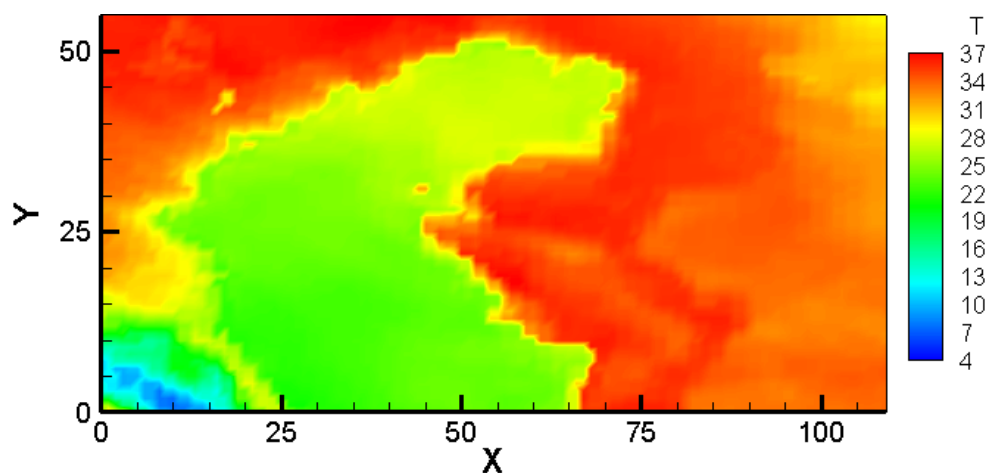


Рисунок 8 - Изменение температуры разлитого нефтяного пятна в Каспийском море по истечении 1 час 10 минут.

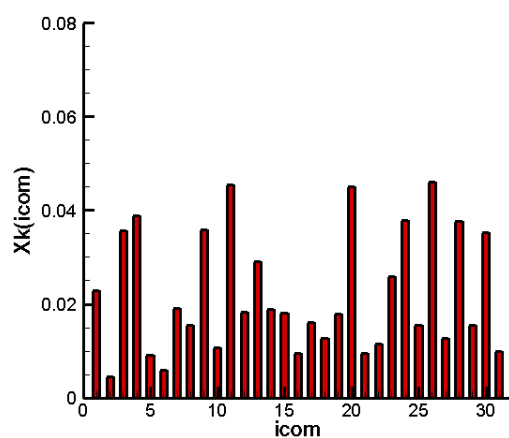


Рисунок 9 - Покомпонентное распределение разлитого нефтяного пятна в Каспийском море по истечении 1 час 10 минут.

Наглядно представлено, что в зависимости от направления ветра меняется траектория движения пятна, от скорости ветра – зависит испарение отдельных компонентов нефти. Приняты следующие обозначения: $icom$ – компоненты рассматриваемой нефти, $Xk(icom)$ – концентрация. Рисунки иллюстрируют результат о том, что при разливе нефти в море происходит изменение концентрации нефти за счет испарения, при этом сначала испаряются легкие фракции нефти, затем тяжелые, наравне с этим происходит изменение вязкости самой нефти.

При решении данной задачи, с целью демонстрации разработанной модели и получения объективных данных процесса были взяты за основу реальные метеорологические условия, что исключает искажение результатов моделирования. Был разработан программный модуль для преобразования метеорологических данных для построенной модели. По движению пятна, иллюстрация которого представлена на рисунках, указанных выше, можно судить о рассматриваемом направлении нефтяного пятна с учетом погодных условий.

Производя анализ результатов можно заключить, что на рисунках 1-3 иллюстрировано изменение, распределение концентрации, температуры нефтяного пятна с учетом ветра 7.8 м/с, что в результате указывает на сохранение исходной массы нефтяного пятна. На рисунках 4-6 указано время истечения 50 минут после аварийной ситуации, изменилась площадь распространения нефтяного пятна, где с учетом скорости восточно-западного ветра 9.3 м/с, отражены изменение концентрации разлитого нефтяного пятна, за счет испарения легкой фракции нефти на 0.3%, увеличилась концентрация тяжелой фракции, где масса нефти изменилась. На рисунках 7-9 виден результат воздействия скорости ветра 12.2 м/с, где испарение легкой фракции достигла значения 0.5%, а площадь растекания нефти увеличилась на 2 км². Очевидно, что с увеличением концентрации высоковязких компонентов, процесс испарения замедляется.

Следует отметить преимущество разработанной математической модели и алгоритма ее реализации – в каждый момент времени, на основе реальных метеорологических данных и произведенных расчетов, можно дать информацию распространения в зависимости от направления и скорости ветра, что позволяет исследователям, занимающимся оценкой экологического ущерба, получить самый объективный результат процесса растекания нефти и нефтепродуктов.

5 Заключение

Таким образом, проведена разработка математической модели для реализации расчета и оценки ареала, определена траектория миграции нефтяного пятна на поверхности моря со стационарного источника в зависимости от метеоусловий. Разработанные модели распространения нефтяного пятна по поверхности морской воды позволяют рассчитать площадь и определять траекторию миграции нефтяного пятна по акваторию Каспийского моря в зависимости от метеоусловий, а также проводить численное моделирование разливов нефти в открытое море при различных сценариях, включающих различную начальную массу разлитой нефти, движение источника загрязнения, различные типы нефти, добываемые и транспортируемые через Каспийское море.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант №1905/ГФ4.

Литература

- [1] *Mackay D., Lee S.Chi, Ma K., Shiu W.Y.* Handbook of Physical-Chemical Properties and Environmental Fate for Organic Chemicals. - Boca Raton: Taylor and Francis, 2006. - 4216 p.
- [2] *Boehm P.D., Fiest D.L., Mackay D., Paterson S.* Physical-chemical weathering of petroleum hydrocarbons from the IXTOC I blowout: chemical measurements and a weathering model // Environ. Sci. Technol. - 1982. - №16(8). - P. 498–505.
- [3] *Самойлов Н.А., Консейсао А.А.* Математическое моделирование испаряемости нефти и нефтепродуктов при их аварийных разливах // Известия Самарского научного центра РАН, Самара, -2010. - №1(9). - С. 2251–2254.
- [4] *Zhumagulov B.T., Monakhov V.N.* The Fluid dynamics of oil production: Translated & ed. by AgipK CO. - Milan: Interservice, 2003. - 307 p.
- [5] *Abdibekov U.S., Zhumagulov B.T., Zhakebaev D.B., Zhubat K.Z.* Modelling of the decay of isotropic turbulence by the LES // Mathematical Models and Computer Simulations. - 2013. - №4(5). - P 360–370.

References

- [1] *Mackay D., Lee S.Chi, Ma K., Shiu W.Y.* Handbook of Physical-Chemical Properties and Environmental Fate for Organic Chemicals. - Boca Raton: Taylor and Francis, 2006. - 4216 p.
- [2] *Boehm P.D., Fiest D.L., Mackay D., Paterson S.* Physical-chemical weathering of petroleum hydrocarbons from the IXTOC I blowout: chemical measurements and a weathering model // Environ. Sci. Technol. - 1982. - №16(8). - P. 498–505.
- [3] *Samoilov N.A., Conceicao A.A.* Mathematical modeling of the evaporation of oil and petroleum products in the event of spills // Proceedings of the Samara scientific center of RAS, Samara, -2010. - №1(9). - P. 2251–2254.
- [4] *Zhumagulov B.T., Monakhov V.N.* The Fluid dynamics of oil production: Translated & ed. by AgipK CO. - Milan: Interservice, 2003. - 307 p.
- [5] *Abdibekov U.S., Zhumagulov B.T., Zhakebaev D.B., Zhubat K.Z.* Modelling of the decay of isotropic turbulence by the LES // Mathematical Models and Computer Simulations. - 2013. - №4(5). - P 360–370.

УДК 004.421

Бейсенбекова Г.Ж.*, Урмашев Б.А., Макашев Е.П.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы

*E-mail: gulnazbeisenbekova.gb@gmail.com

Моделирование процесса горения метана (CH_4) в программном комплексе PrIme

Моделирование горения метана в воздухе осуществлялось в среде моделирования химических процессов программный комплекс Process Informatics Model (PrIme). Для исследования горения метана в воздухе в программе PrIme был выбран механизм GRI 3.0, который описывает горение метана и других углеводородов (ацетилен, пропан). Кинетический механизм GRI 3.0 описывают реакций происходящие на молекулярном уровне, в котором рассматриваются в каком порядке разрываются или формируются связи. Механизм, выбранный из базы программы PrIme, состоит из 309 реакции и 53 реагентов, а так же для моделирования горения был выбран Plug Flow Reactor (PFR), реактор идеального вытеснения, стехиометрическая смесь горения метана в воздухе. Входе моделирования горения метана в воздухе при низком давления можно увидеть, что химические реакции почти не протекают, а с ростом температуры реакции протекают быстрее, так же при пиролизе топлива содержащий радикалов азота приводит к образованию азот оксидов NO_x .

Ключевые слова: метан, программный комплекс PrIme, горение, механизм, стехиометрия, скорость горения.

Beisenbekova G.Zh., Urmashhev B.A., Makashev E.P.

Modelling of the combustion process of methane (CH_4) in the software package PrIme

Modeling of methane combustion in air carried out in environment modeling of chemical processes software package Process Informatics Model (PrIme). To investigate the methane combustion in air in a program PrIme was chosen mechanism GRI 3.0, which describes burning of methane and other hydrocarbons (acetylene, propane). Kinetic mechanism GRI 3.0 describe the reactions taking place at the molecular level, which deals with the order in which communications are broken or formed. The mechanism chosen from base of the PrIme program consists of the 309th reaction and 53 reagents, and also for modeling of burning Plug Flow Reactor (PFR), the reactor of ideal replacement, has been chosen stoichiometric mix of burning of methane in air. Modeling methane inlet combustion air at a low pressure can be seen that almost no chemical reactions occur, but with increasing temperature the reaction proceed faster also can be seen that the fuel in the pyrolysis of nitrogen containing radicals leads to the formation of nitrogen oxides NO_x .

Key words: methane, PrIme software system, combustion mechanism, stoichiometry, combustion rate.

Бейсенбекова Г.Ж., Урмашев Б.А., Макашев Е.П.

Метанның (CH_4) жану процесін PrIme бағдарламалық кешенінде моделдеу

Метанның ауада жануын зерттеу химиялық процесстерді модельдеуге арналған Process Informatics Model (PrIme) бағдарламалық кешенінде жүргізілді. Модельдеу үшін метанның ауада жануын сипаттайтын механизм таңдалып алынады. Механизм бағдарламаның деректер қорындағы табиғи газдың жануын сипаттайтын 309 реакция, 53 реагенттен тұратын GRI 3.0 механизмі алынды. GRI 3.0 кинетикалық механизмі байланыстардың қандай тәртіппен үзіліп немесе құрылатындығын молекулярлық деңгейде сипаттайды, сонымен қатар модельдеу Plug Flow Реактор (PFR) реакторында, метанның ауада жануының стехиометриялық қоспасымен жүргізілді. Метанның ауада жануын модельдеу барысында қысым төмен болғанда реакцияның жүрмейтіндігін, ал температура артқан сайын реакция тез жүретінін байқауға болады. Сонымен қатар құрамында азот радикалдары бар отындардың пиролизінің нәтижесі азот оксидтерінің NO_x түзілуіне алып келетінін көреміз.

Түйін сөздер: метан, жану, PrIme бағдарламалық кешені, механизм, стехиометрия, жану жылдамдығы.

1 Введение

Современные методы моделирования горения топлив разработаны для определения высокой эффективности сгорания и минимального выброса загрязняющих веществ в атмосферу. Они широко используются в проектировании и оптимизаций практических систем сгорания, так как, по сравнению с экспериментальным тестированием и макетированием затраты на разработку математического и компьютерного моделирования очень низкие. На сегодняшний день никакие реальные прогрессы в разработке или оптимизации не могут обойтись без численного или компьютерного моделирования.

Важность сжигания топлив в различных приложениях показывают, что эта область исследований остается своевременной и полезной. Горение играет важную роль в следующих областях: 1. выработка электроэнергии (например, частицы угля сжигаются в топках электростанций при производстве пара для приведения в движение турбин с целью выработки электроэнергии), транспорт (двигатели внутреннего сгорания в автомобилях). 2. производство конструкционных материалов в перерабатывающей промышленности (например, производство железа, стали, стекла, очищенного топлива и т.д., посредством процессов термического нагрева). 3. бытового и промышленного отопления (например, систем отопления домов, заводов, офисов, больниц, школ и других типов зданий). 4. защита безопасности от нежелательного горения (например, предотвращение пожара лесов и строительства, сокращение промышленных взрывов) [1].

В данной статье рассматривается: механизм реакции – полный набор элементарных реакций вместе с их коэффициентом скорости, которая входит в раздел химической кинетики; среда моделирования химических процессов в программном комплексе PrIme (Process Informatics Model); влияние температуры и давления на образования вредных веществ при моделировании горения метана. Практическая значимость предсказательного моделирования процессов горения непрерывно возрастает. Влияние давления на химию горения, как известно, проявляется в том, что концентрация веществ с ростом давления увеличивается, что, соответственно, приводит к росту скоростей реакций, а также в том, что константы скорости многих реакций зависят от давления и температуры. В этой статье рассматривается задача моделирования горения метана при низкой давлений.

2 Химическая кинетика

Химическая кинетика – раздел физической химии, в котором изучаются закономерности протекания во времени химических реакций и их механизмов. Механизмы описывают реакций происходящие на молекулярном уровне, в котором рассматриваются в каком порядке разрываются или формируются связи. Таким образом, понимание свойств реагентов и продуктов является обязательным.

В состав химического механизма входит термодинамические и транспортные свойства реакции. Состав данных кинетического механизма показано в рисунке 1. Для каждой химической реакций определяется A - предэкспоненциальный множитель в уравнении Аррениуса (характеризует частоту столкновений реагирующих молекул), E_a - энергия активации.

REACTIONS	MOLES	KELVINS	$k_j(T) = A_j T^{n_j} \exp(-E_{a,j} / RT)$		
1			A	n	Ea
H2+CH2(S) = CH3+H			7.230E+13	.0000	.00
2			3.970E+13	.0000	28631.22
CH4+O2 = CH3+HO2					
3			5.000E+13	.0000	12085.64
CH4+C = CH+CH3					
4			6.600E+08	1.6000	5420.00
CH4+H = CH3+H2					
5			3.010E+13	.0000	-199.66
CH4+CH = C2H4+H					
6			4.300E+12	.0000	5051.72
CH4+CH2 = 2CH3					
7			7.000E+13	.0000	.00
CH4+CH2(S) = 2CH3					

Рисунок 1 – Кинетический механизм: реакции и их скорости

На рисунке 2 показаны термодинамические данные. В термодинамическом свойстве механизма приводятся данные: имя реагента, элементы, диапазон температуры, переходная температура между высокой и низкой температуры, а также соответственные данные для высоких и низких температур.

Name	Elements					Temperature range			Junction
N2	0N	2C	0H	0O	0G	0300.00	5000.00	1000.00	1
2.9266400E+00	1.4879770E-03	-5.6847603E-07	1.0097040E-10	-6.7533509E-15					2
-922.76760E+00	5.9805290E+00	3.2986770E+00	1.4082399E-03	-3.9632218E-06					3
5.6415148E-09	-2.4438540E-12	-1020.9000E00	3.9503720E+00						4

High temperature coefficients

Low temperature coefficients

Рисунок 2 – Описание термодинамического свойства реагентов

На рисунке 3 приведены транспортные данные кинетического механизма. Транспортные данные включают в себя: имя реагента (имя должно быть идентичным с именем реагента в термодинамическом файле), индекс указывающий на геометрическую конфигурацию реагента, глубина потенциальной ямы (потенциальная яма–область пространства, где присутствует локальный минимум потенциальной энергии частицы), диаметр столкновения, дипольный момент (дипольный момент связи (m)–векторная величина, характеризующая полярность связи: $|m| = l * q$, где l–длина связи, q–эффективный заряд, который приобретают атомы при смещении электронной плотности. Вектор дипольного момента направлен от положительного заряда к отрицательному), поляризуемость, вращательное число столкновений релаксации при 298 К [2].

H2	1	38.000	2.920	0.000	0.790	280.000
HE	0	10.200	2.576	0.000	0.000	0.000
C6H6	2	468.500	5.230	0.000	10.30	1.000
H2O	2	572.400	2.605	1.844	0.000	4.000

Name of the species (must be the same reported in the thermodynamic and kinetic files)
 An index indicating the geometrical configuration. If the index is 0, the molecule is a single atom. If the index is 1 it is linear, and if it is 2, the molecule is nonlinear.
 The potential well depth (in K).
 The collision diameter (in angstroms)
 The dipole moment (in Debye)
 The polarizability (in cubic angstroms)
 The rotational relaxation collision number at 298 K

Рисунок 3 – Транспортные данные кинетического механизма

Во многих случаях результаты моделирования позволяют не только понять основные особенности химических процессов, но и могут также иметь существенное практическое значение. Из базы данных программного комплекса PrIme выбирается механизм GRI-Mech 3.0, так как наиболее популярным на сегодняшний день является механизм окисления метана, разработанный командой Университета Беркли (США). Механизм GRI-Mech был опубликован в нескольких электронных версиях, и создавался, в первую очередь, для описания горения метана и природного газа. Достоверность данного механизма приводятся во многих исследовательских работах [3-5]. GRI-Mech 3.0 представляет собой оптимизированный механизм, предназначенный для моделирования горения природного газа, в том числе образования NO_x и повторного горения. Поскольку природный газ содержит пропан (и некоторые высшие углеводороды), то в минимальный набор кинетики входит пропан, в виде незначительной составляющей [6].

3 Рабочая среда программного комплекса PrIme (Process Informatics Model)

Среда моделирования химических процессов программном комплексе PrIme - новая парадигма для построения моделей сложных химических реакций. Инструмент анализа модели разработан профессором М.Френкляхом и его коллегами. Он сочетает в себе:

- экспериментальные данные с моделями неопределенности;
- основные численные задачи для наилучшей согласованности механизма оптимизации;
- оптимизация с ограничениями;
- методы решения;
- надежная теория управления;
- анализ всех доступных данных;
- гарантирует непротиворечивость набора данных;
- динамическая генерация прогнозирующих моделей на основе всего набора данных.

Анализ согласованности данных механизма определяет его достоверность и целостность, экспериментальные цели или параметров модели, которые приводят к непоследовательности данных. Этот анализ повышает качество экспериментальных данных,

принятых для оптимизации параметров модели на области допустимых значений параметра пространства. Рабочая среда программы показано на рисунке 4. На рисунке 5 показана визуализация выходных параметров, т.е. результаты моделирования.

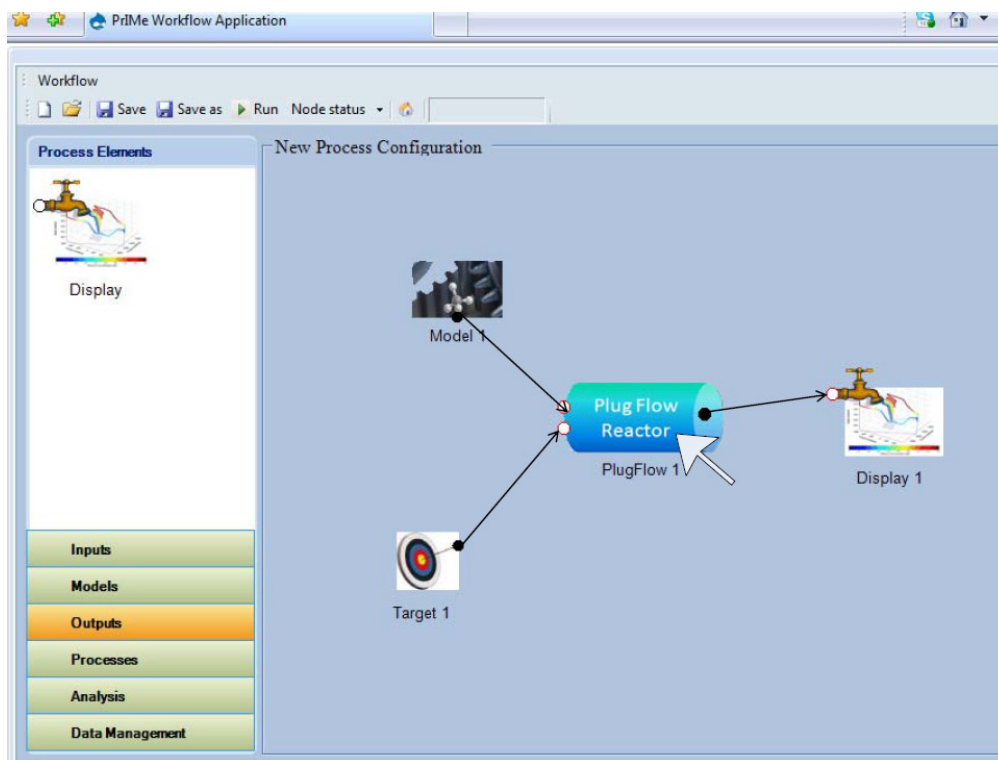


Рисунок 4 – Рабочая среда программы PrIME

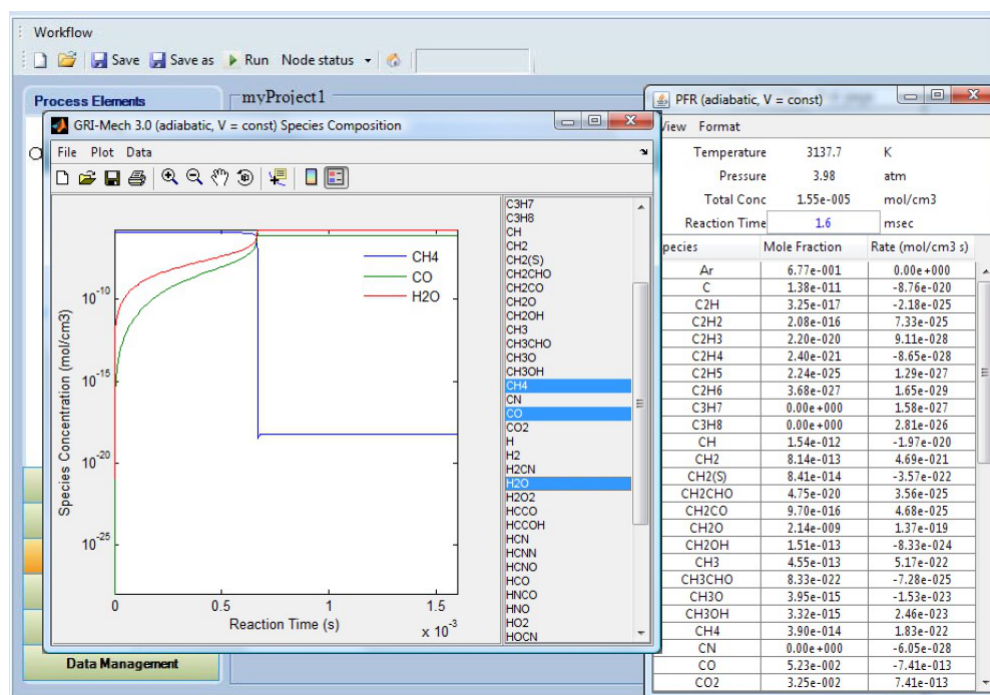
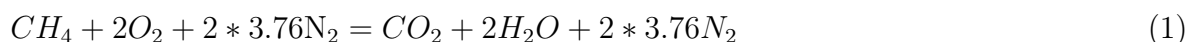


Рисунок 5 – Визуализация выходных данных в программе PrIME

4 Моделирование процесса горения метана (CH_4) в программном комплексе PrIMe

Для моделирования процесса горения метана в программе PrIMe был выбран реактор "Plug Flow Reactor", (PFR) из группы "Kinetic reactor", т.е. стехиометрическая смесь горения метана в воздухе:



PFR модель позволяет описать эволюцию состава смеси и параметров (температура, скорость, давление) по длине реактора в одном или квази- одномерном приближении. PFR используется очень часто, для того, чтобы изучить такие важные процессы, как выделение тепла и процесс плазмы в химических реакциях в быстрых потоках газа. Можно также смоделировать процессы при постоянном давлении или температуре. Исходные данные и параметры для этой модели являются: массовый расход, температура, давление, химический состав, удельные потери тепла на единицу длины реактора. Во многих случаях результаты моделирования позволяют не только понять основные особенности химических процессов, но и имеют существенное практическое значение. Пожалуй, наиболее подробно было исследовано горение метана-водородных смесей. Это связано с тем, что из-за относительно низкой реакционной способности метана, он имеет довольно узкие пределы воспламенения, что не позволяет использовать его в режиме горения бедных смесей [6]. Как было показано, добавка водорода к метан-воздушной смеси позволяет расширить пределы его воспламенения, и тем самым повысить эффективность использования топлива и снизить уровень экологически вредных выбросов [7]. Входные данные для моделирования: 1. состав стехиометрической смеси: $CH_4 = 3.33\%$, $O_2 = 6.66\%$, $N_2 = 90\%$, с учетом что 1 моль = 100%; 2. начальная температура $T = 1688$ K; 3. давление $p = 0,39$ bar, 4. время пребывания в реакторе $t = 3$ s.

В результате мы получаем скорости прямой и обратной реакций, так же можем увидеть концентрацию и скорости образования каждого реагента, образования углеводородов и расходования метана в зависимости от температуры.

Скорость реакций как основная характеристика химической кинетики зависит не только от концентрации (давления) частиц и температуры, но и от катализаторов, формы и размеров сосуда, материалов и состояния стенок. Под скоростью реакций обычно понимают изменение количества вещества, вступающего в реакцию или образующегося в результате реакции, в единицу времени в единице объема:

$$\omega = \pm \frac{1}{V} * \frac{dn}{dt} \quad (2)$$

Скорость большинства химических реакции растет с повышением температуры. Химические реакции протекают быстрее, чем при низких температурах. При повышении температуры на 10^0C скорость реакции возрастает 2-4 раза.

Основное влияние температуры на скорость реакции осуществляется через изменение константы скорости реакций. Константа скоростей хорошо выражается законом Аррениуса:

$$\kappa = A * T^n * e^{\frac{E_a}{RT}} \quad (3)$$

Скорости некоторых прямых и обратных реакции можно увидеть в следующей таблице 1.

Таблица 1 – Скорости некоторых реакции (прямая и обратная скорость)

Реакции	Прямая скорость	Обратная скорость
$CH + O \rightleftharpoons CO + H$	2.66e-16	1.94e-17
$O + CH_2 \rightleftharpoons HCO + H$	2.21e-16	2.56e-16
$O + CH_2^* \rightleftharpoons H_2 + CO$	3.37e-18	1.39e-19
$CH_3 + O \rightleftharpoons CH_2O + H$	2.33e-16	1.52e-16
$CH_4 + O \rightleftharpoons CH_3 + OH$	6.29e-18	5.42e-18
$CO + O \rightleftharpoons CO_2$	3.92e-07	1.30e-08

Механизм образования сажи (дисперсного углерода) при горении реактивного топлива и в общем случае при химических превращениях углеродсодержащих веществ изучен еще недостаточно. Исследователи основную роль отводят полимеризации или цепным разветвленным реакциям. Частицы сажи, в зависимости от аэродинамики потоков в топке, могут находиться в факеле или вне его. Частицы сажи, выпавшие из факела и попавшие в зону температур ниже 800°C , не сгорают и выносятся за пределы топочной камеры, а находящиеся в факеле, продолжают гореть до тех пор, пока температура продуктов горения под действием экранных поверхностей нагрева не упадет. На рисунке 6 показано образование вредных веществ. Весь процесс горения происходит в зависимости от температуры в промежутке времени $1 - 1.5 \cdot 10^{-3}$.

На рисунке 7 показана изменение концентрации метана. Здесь можно увидеть расхождение метана в зависимости от температуры и по времени.

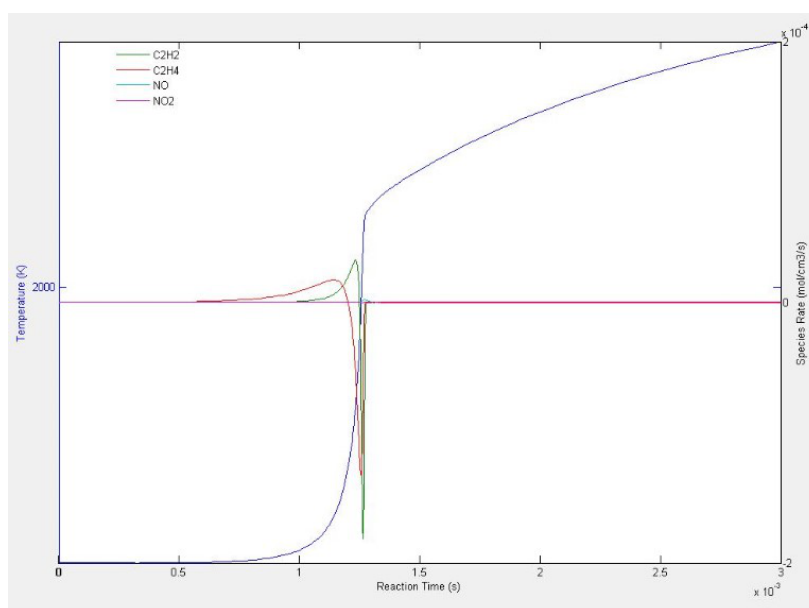
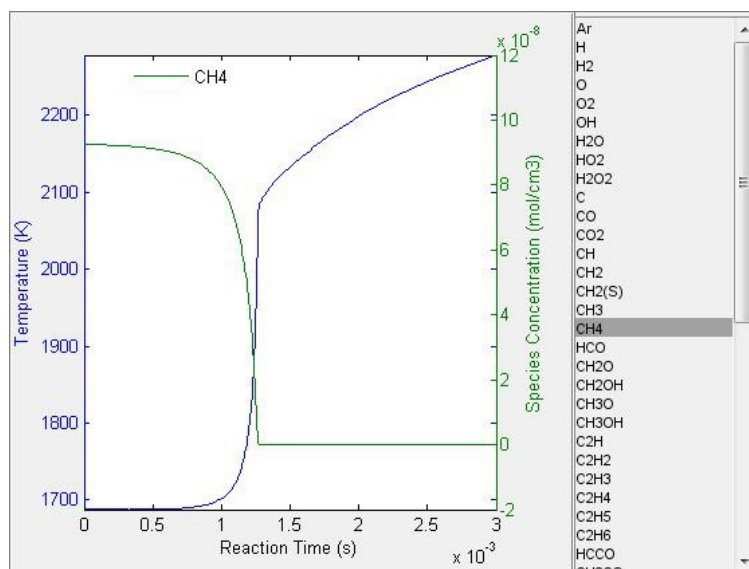
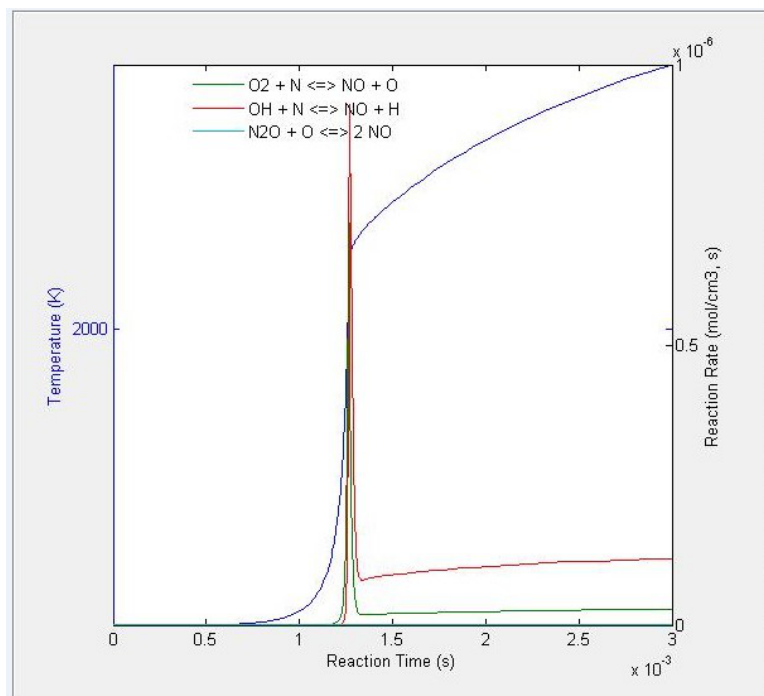


Рисунок 6 – Образование загрязняющих веществ


 Рисунок 7 – Концентрация метана CH_4

Так же имеются другие загрязняющие вещества, которые образуются при процессе горения. В зоне реакции процесс образования NO_x зависит от скорости расходования активных частиц и кислорода. На рисунке 8 показаны реакции образования NO_x .


 Рисунок 8 – Образования NO_x

Взаимодействие образующихся в результате пиролиза топлива атомов и радикалов с азотом, содержащимся в метано-воздушной смеси (МВС), приводит в конечном итоге к образованию NO_x . Скорость подобных превращений зависит от ряда факторов:

концентрации азота в зоне реакции, скорости сгорания топливовоздушной смеси, скорости конкурирующих реакций активных центров и кислорода. В температурном уровне менее 1500 К, где имеется недостаток окислителя азота воздуха, кроме столкновения молекул азота с молекулами кислорода происходит взаимодействие молекулярного азота с углеводородными фрагментами, образующимися в результате пиролиза молекулы CH_4 . При этом, в качестве промежуточных продуктов выступают соединения типа HCN и CN, участвующие в последующем цепном механизме образования NO [8].

5 Заключение

В результате проведенного моделирования можно сделать выводы:

- при горении метана (углеводорода) образовывается достаточное количество вредных веществ;
- в результате пиролиза топлива атомов и радикалов с азотом, содержащимся в метано-воздушной смеси (МВС), приводит в конечном итоге к образованию NO_x ;
- скорость большинства химических реакции растет с повышением температуры;
- при низких температурах химические реакции почти не протекают.

Литература

- [1] Kuo Kenneth K. Principles of Combustion. - Hoboken New Jersey, 2nd Edition, 2005.
- [2] Левтеров А.М., Левтерова Л.И. "Анализ математических моделей механизма сажеобразования при сжигании углеводородных топлив". - ISSN 2222-0631. Вісник НТУ «ХПІ». 2013. №5 (979)
- [3] Peterson E.L., Davidson D.F., Rohrig M., Hanson R.K., Bowman C.T. High-pressure methane oxidation behind reflected shock waves // Twenty-Sixth Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute. - 1996. - P. 799-806.
- [4] Sausa R.C. Detailed structure of a low pressure, stoichiometric $H_2/N_2O/Ar$ flame // Combustion and Flame. - 1993. - V. 94. - P. 407-425.
- [5] Dean A.M. Profiles of CH_2O in CH_2O-O_2-Ar mixture // Combustion and Flame. - 1980. - V.37. - P.41.
- [6] Chen Q. Effect of Pressure on the Oxidative Coupling of Methane in the Absence of Catalyst // AIChE journal. - 1994. - V. 40. - № 3. - P. 521-535.
- [7] Gersen S. Ignition properties of methane/hydrogen mixtures in a rapid compression machine // International journal of Hydrogen Energy. - 2008. - V.
- [8] Лопатин О. П. Химизм процесса образования оксидов азота в цилиндре газодизеля с турбонаддувом // Молодой ученый. - 2015. - №9. - С. 265-268.

References

- [1] Kuo Kenneth K. Principles of Combustion. - Hoboken New Jersey, 2nd Edition, 2005.
- [2] Levterov A.M., Levterova M.I. "Analiz matematicheskikh modelei mehanizma sazheobrazovaniya pri szhigani uglevodorodnyh topliv" // ISSN 2222-0631. Visnik NTU «ХПІ». 2013. №5 (979)
- [3] Peterson E.L., Davidson D.F., Rohrig M., Hanson R.K., Bowman C.T. High-pressure methane oxidation behind reflected shock waves // Twenty-Sixth Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute. - 1996. - P. 799-806.
- [4] Sausa R.C. Detailed structure of a low pressure, stoichiometric $H_2/N_2O/Ar$ flame // Combustion and Flame. - 1993. - V. 94. - P. 407-425.

- [5] *Dean A.M.* Profiles of CH₂O in CH₂O-O₂-Ar mixture //Combustion and Flame. – 1980. – V.37. – P.41.
- [6] *Chen Q.* Effect of Pressure on the Oxidative Coupling of Methane in the Absence of Catalyst//AIChE journal. – 1994. – V. 40. – № 3. – P. 521–535.
- [7] *Gersen S.* Ignition properties of methane/hydrogen mixtures in a rapid compression machine // International journal of Hydrogen Energy. – 2008. – V.
- [8] *Lopatin O. P.* . Chemism of process of formation of nitrogen oxides in the gas-diesel cylinder with a turbo-supercharging//the Young scientist. — 2015. — No. 9. — Page 265-268.

УДК 681.5

Ширяева О.И.^{1*}, Абжанова Л.К.^{2**}

^{1,2}Казахский национальный исследовательский технический университет
имени К.И. Сатпаева, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: *oshiryayeva@gmail.com, **laulasyn@mail.ru

Синтез управления нелинейной многосвязной системы на основе геометрического подхода

Данная статья посвящена синтезу управления для многосвязного нелинейного энергетического объекта на основе геометрического подхода. Для сложной системы управления энергетическим объектом применена процедура децентрализации. На основе методологии геометрического подхода для декомпозированной системы выведено условие наличия линейного эквивалента нелинейных систем. В основе условия лежит процедура доказательства образования нелинейной многосвязной системы векторных полей. Для этого исходная декомпозированная система представляется в канонической форме Бруновского. Синтез управления нелинейной многосвязной системы на основе геометрического подхода реализован с помощью получения линейных эквивалентов на условиях инволютивности, не равенстве нулю операторов алгебр Ли в точке равновесия и ее окрестности, линейной независимости векторов операторов алгебр Ли в точке равновесия и ее окрестности.

Ключевые слова: сложная система, многосвязная система, нелинейная система, геометрический подход, энергетическая система.

Shiryayeva O.I., Abzhanova L.K.

Synthesis of nonlinear multiply control system based on geometric approach summary

This article focuses on the synthesis of control for nonlinear multivariable energy facility on the basis of the geometric approach. For complex energy management systems the subject of decentralization procedure applied. Based on the methodology for the geometric approach decomposed system derived the condition of having a linear equivalent of nonlinear systems. The basis of the conditions of the procedure is proof of the formation of nonlinear multiply connected systems of vector fields. To do this, the original system appears to decompose in the canonical form Brunovsky. Synthesis based on geometric approach nonlinear control systems multiply realized by obtaining linear equivalents conditions involutiveness not vanishing operators Lie at the equilibrium point and its surroundings, are linearly independent operators Lie at the equilibrium point and its surroundings.

Key words: multiply input - multiply output control system, nonlinear system, geometric approach, energy system.

Ширяева О.И., Абжанова Л.К.

Геометриялық әдіс негізінде бейсызықты көпбайланысты жүйені басқару принципі

Берілген мақала геометриялық әдіс негізінде көпбайланысты бейсызықты энергетикалық объектінің басқару синтезіне арналған. Энергетикалық объектінің күрделі басқару жүйесі үшін децентрализация процедурасы қолданылған. Декомпозициялы жүйе үшін геометриялық әдістің методологиясы негізінде бейсызықты жүйелердің сызықты эквивалентінің бар болу шарты қалыптастырылған.

Шарт негізінде көпбайланысты бейсызықты жүйелердің векторлық өрістерді құра алу мүмкіндігін дәлелдеу процедурасы бар. Ол үшін бастапқы декомпозициялы жүйе Бруновскийдің канондық түрімен беріледі. Күрделі байланыстары бар бейсызықты жүйенің геометриялық әдіс негізіндегі басқару синтезі инволютивтілік шарттарына негізделген сызықты эквиваленттерді алу көмегімен іске асырылған, яғни Ли алгебрасы операторының тепе-теңдік нүктесі мен оның айналасында операторларының нөлге тең емес болуы, Ли алгебрасы операторының тепе-теңдік нүктесі мен оның айналасында сызықты тәуелсіздігі.

Түйін сөздер: күрделі жүйе, көпбайланысты жүйе, бейсызықты жүйе, геометриялық әдіс, энергетикалық жүйе.

1 Введение

Задача синтеза САУ, способной точно управлять технологическим объектом, приводит к необходимости описания их как нелинейных и многосвязных САУ. Работы, связанные с синтезом управления таких систем, где учитывается и многосвязность и нелинейность представляют большой интерес. В настоящее время имеют место работы, связанные с вопросами синтеза управления на основе геометрического подхода для нелинейных одномерных систем [1-5]. Проблема построения регуляторов для нелинейных систем, в отличие от линейных, все еще далека от решения. Тем не менее, идея использования хорошо разработанной теории построения линейных регуляторов для нелинейных систем на основе геометрического подхода является актуальной. В данной статье разрабатывается методология синтеза управления на основе геометрического подхода для нелинейного многосвязного объекта. Особенностью является то, что нелинейные системы рассматриваются как аффинные системы, и рассматриваются на основе группового подхода.

2 Развитие теории геометрического подхода нелинейной многосвязной системой

Пусть задана многомерная система S , декомпозированная на s подсистем S_i , $i = \overline{1, s}$, которая описывается следующим уравнением:

$$\dot{x}_i = A_{ij}x_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s A_{ij}x_j + bx_i u_i, i = \overline{1, s} \quad (1)$$

где $x_i \in R^{n \times 1}$ – вектор состояний объекта управления; $u_i \in R^n$ – управления, из заданного постоянного множества U ; A_{ij} , $i = j = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ – матрица состояний, размерности $(n \times n)$ $A_{ij}(i \neq j) = \{a_{ij} : i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}\}$ – матрица взаимосвязей между подсистемами b – матрица управления, размерности $(n \times m)$.

Слагаемые $\sum A_{ij}x_j$, содержащие все остальные переменные x_j , кроме собственного вектора x_i подсистемы S_i , отображают связи между подсистемами.

Главная задача при применении геометрического подхода к сложным нелинейным системам (1), заключается в том, чтобы найти диффеоморфизм (гладкий изоморфизм) между исходной нелинейной системой и некоторой линейной системой [6].

Наличие преобразования, позволяющего перейти от сложной нелинейной системы к линейной, сводится к условию существования группы симметрий для сложной нелинейной системы управления. В [6] получено, что для автономных управляемых систем $\dot{x} = f(x, u)$ группа симметрии действует на множестве решений данной системы, если диффеоморфизм имеет следующую структуру: $u' = u'(x, u)$, $x' = x'(x)$, где (x, u) – старые локальные координаты и управление, (x', u') – соответственно новые.

В данной статье рассматривается класс сложных нелинейных динамических систем линейных по управлению (1), класс так называемых аффинных систем. То есть систему (1) можно представить в виде системы уравнений:

$$\dot{x}_i = f_1(x)x_i + f_2(x)u_i, x_i \in M^{n \times 1}, f_2(x_0) \neq 0, \quad (2)$$

где M^n – гладкое многообразие; x_0 – равновесная точка; $f_1(x)$, $f_2(x)$ – гладкие векторные поля на M^n :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= [\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)]^T \\ f_2(x) &= [\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)]^T \end{aligned} \quad (3)$$

Если векторные поля рассматриваются как дифференциальные операторы гладких функций, определенных на многообразии M^n , то они представляются в виде [7]

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, f_2(x) = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4)$$

Постановка задачи. Найти такие преобразования для гладкой замены координат $y = y(x)$ и управления $v = v(x, u)$ (статическая обратная связь), что система (2) приводится к некоторой изоморфной ей системе вида

$$dy/dt = A_C y + B_C v, \quad (5)$$

где A_C , B_C – матрицы канонической формы Бруновского.

В соответствии с методологией дифференциального подхода, для системы дифференциальных уравнений (5) формируется совокупность инфинитезимальных операторов, которые формируют базис алгебры Ли [7]. Если совокупность формируется, то для системы управления удовлетворяются динамические свойства.

Каноническая форма Бруновского для систем со скалярным управлением имеет следующий вид:

$$dy_1/dt = y_2; \quad \dots dy_{n-1}/dt = y_n; \quad dy_n/dt = \nu. \quad (6)$$

Получим преобразования нахождением производных Ли вдоль векторного поля:

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= y_2 = L_{f_1+f_2u}f_1(T_1(x)) = f_1(T_1(x)) + u f_2(f_1(T_1(x))) = f_1(T_1(x)) \\ dy_2/dt &= y_3 = L_{f_1+f_2u}f_1(T_1(x)) = f_1^2(T_1(x)) + u f_2(f_1^2(T_1(x))) = f_1^2(T_1(x)) \\ &\vdots \\ dy_n/dt &= \nu = L_{f_1+f_2u}f_1^{n-1}(T_1(x)) = f_1^n(T_1(x)) + u f_2(f_1^{n-1}(T_1(x))) \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что в формуле (7) и ниже под $f_1^i(T_1(x))$ понимается производная Ли i -го порядка функции $T_1(x)$ вдоль векторного поля $f_1(x)$:

$$f_1^i(T_1(x)) = f_1(f_1(\dots f_1(T_1(x)) \dots)). \quad (8)$$

Итак, из (7) и (8) имеем

$$f_2(f_1^i(T_1(x))) = 0, i = \overline{2, n-2}, \quad (9)$$

$$d_n/dt = \nu = L_{f_1+f_2u}f_1^{n-1}(T_1(x)) = f_1^n(T_1(x)) + uf_2(f_1^{n-1}(T_1(x))) \quad (10)$$

Для того чтобы из (10) определить u , необходимо обязательно выполнить условие

$$f_2(f_1^{n-1}(T_1(x))) \neq 0 \quad (11)$$

Из анализа (9)-(11) можно сделать следующие выводы. Преобразование (невырожденная замена координат) $y_1 = T_1(x)$ определяется из решения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (9), (11), т.е.

$$f_2(f_1^i(T_1(x))) = 0, i = \overline{2, n-2}, \quad (12)$$

$$f_2 = (f_1^{n-1}(T_1(x))) \neq 0 \quad (13)$$

Остальные координаты получим из (7), т.е.

$$y_i = f_1^{n-1}(T_i(x)), i = \overline{2, n}, \quad (14)$$

Формулу (14) можно записать в более привычной форме

$$y_i = T_i(x) = f_1(T_{i-1}(x)) = (\partial T_{i-1}(x)/\partial x, f_1(x)), \quad i = \overline{2, n} \quad (15)$$

где (d, r) – скалярное произведение векторов d и r .

Для аффинных систем (2) система дифференциальных уравнений в частных производных (12), (13), из которой находится преобразование $T_1(x)$, эквивалентна системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, определенных последовательным дифференцированием векторного поля $f_2(x)$ вдоль векторного поля $f_1(x)$ и последующим дифференцированием функции $T_1(x)$ вдоль полученных векторных полей, т.е.

$$(ad_{f_1}^i f_2)(T_1(x)) = 0, i = \overline{0, n-2} \quad (16)$$

$$(ad_{f_1}^{n-1} f_2)(T_1(x)) \neq 0 \quad (17)$$

где $ad_{f_1}^i f_2$ – производная Ли векторного поля $ad_{f_1}^{n-1} f_2$ вдоль векторного поля $f_1(x)$ причем для

$$i = 0 : \quad ad_{f_1}^0 f_2(x) = f_2(x)$$

$$i = 1 : \quad \begin{aligned} ad_{f_1}^1 f_2(x) &= L_{f_1} f_2(x) = (f_1 f_2 - f_2 f_1)(x) = [f_1 f_2](x) = \\ &= ((\partial f_2(x) \partial x) f_1(x) - (\partial f_1(x) / \partial x) f_2(x))(x) \end{aligned}$$

$$i = k : \quad ad_{f_1}^1 f_2(x) = L_{f_1} ad_{f_1}^{i-1} f_2(x) = [f_1, ad_{f_1}^{i-1} f_2(x)]$$

где $[f_1 f_2](x)$ – скобка (коммутатор) Ли векторных полей $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Для $i = 0 : ad_{f_1}^0 f_2(T_1(x)) = f_2(T_1(x)) = 0$ и первые уравнения (12), (13) и (16) совпадают. Для

$$i = 1 : \quad \begin{aligned} (ad_{f_1}^1 f_2)(T_1(x)) &= L_{f_1} f_2(T_1(x)) = (f_1 f_2 - f_2 f_1)(T_1(x)) = \\ &= (f_1(f_2(T_1(x)))) - f_2(f_1(T_1(x))) = -f_2(f_1(T_1(x))) \end{aligned},$$

так как $f_2(T_1(x)) = 0$. Выше было использовано свойство производной Ли:

$$L_{[f_1, f_2]}(T_1(x)) = [L_{f_1}, L_{f_2}](T_1(x)).$$

Исходя из определения скобок Ли и непосредственными вычислениями можно показать, что для

$$\begin{aligned} i = k : \quad (ad_{f_1}^k f_2)(T_1(x)) &= L_{f_1}(ad_{f_1}^{k-1} f_2)(T_1(x)) = \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j C_j^k f_1^{k-j} f_2 f_1^j(T_1(x)) = (-1)^k f_2 f_1^k(T_1(x)) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

так как

$$f_2 f_1^j(T_1(x)) = 0, \quad j = \overline{0, k-1}, \quad (19)$$

причем в (18)

$$C_j^k = \frac{k!}{j!(k-j)!}.$$

Формулы (18), (19) справедливы для $k = \overline{0, n-2}$. Для $k = n-1$

$$(ad_{f_1}^{n-1} f_2)(T_1(x)) = (-1)^{n-1} f_2 f_1^{n-1}(T_1(x)) \neq 0 \quad (20)$$

Эквивалентность формул (12), (13), (16), (17) доказана.

Функция $T_1(x)$ определяется из системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (18), (19), но при этом векторные поля $ad_{f_1}^i f_2(x)$, $i = \overline{0, n-2}$, должны подчиняться условию их совместной интегрируемости и условию инволютивности.

Заметим, что при $f_2(x) = f_2 = const$

$$(ad_{f_1}^i f_2)(T_1(x)) = (-1)^i (f_2 f_1^i)(T_1(x)), \quad i = \overline{0, n-1} \quad (21)$$

и формулы (12), (13) и (16) полностью совпадают.

Инволютивность является краеугольным камнем при выводе условий интегрируемости уравнений в частных производных и фактически при этом является синонимом термина «интегрируемость».

Говорят, что множество векторных полей $\{f_{11}(x), \dots, f_{1m}(x)\}$ инволютивно, если существуют такие скалярные поля (функции) $\alpha_{ijk}(x)$, что

$$[f_{1i}, f_{2j}](x) = \sum_{k=1}^m \alpha_{ijk}(x) f_{1k}(x) \quad (22)$$

В этом случае совокупность $\{f_{11}(x), \dots, f_{1m}(x)\}$ определяет алгебру Ли $\{f_{11}(x), \dots, f_{1m}(x)\}_{LA}$ относительно бинарной операции $[\cdot, \cdot]$. Фробениус показал, что система векторных полей тогда и только тогда интегрируема, когда она инволютивна. Сначала рассмотрим только класс так называемых инволюционных систем. Система векторных полей $S = (f_{11}(x), \dots, f_{1m}(x))$ находится в инволюции, т.е. векторные поля попарно коммутируют, если

$$f_{1i} f_{1j}(z(x)) = f_{1j} f_{1i}(z(x)), \quad i, j = \overline{1, m}$$

или

$$[f_{1i} f_{1j}](x) = (f_{1i} f_{1j} - f_{1j} f_{1i})(x) = 0 \quad (23)$$

для любой дважды и более дифференцируемой функции $z(x)$, т.е. условия (23) совпадают с (22) для $\alpha_{ijk} = 0$. Покажем, что любая инволютивная система векторных полей имеет в качестве канонического (исходного) базиса инволюционную систему, из которой она определяется умножением на некоторые гладкие функции, определяя тем самым то же самое гладкое инволютивное распределение Δp размерности p , что и исходная инволюционная система.

3 Синтез управления нелинейной многосвязной системы на основе геометрического подхода

Пусть $S = \{f_{11}(x), \dots, f_{1n-1}(x)\}$ – инволюционная система на подмногообразии V .

Пусть из системы S получена новая система $S = \{f_{21}(x), \dots, f_{2n-1}(x)\}$ умножением векторных полей f_{11} на гладкие функции $g_i(x)$, $i = \overline{1, n-1}$, не обращающиеся в нуль в окрестности точки x_0 . В этом случае S_1 определяет то же распределение Δ_{n-1} , но с другой параметризацией. Например, для $n-1 = 2$ имеем $f_{21} = g_1(x)f_{11}$, $f_{22} = g_2(x)f_{12}$.

Тогда

$$\begin{aligned} [f_{21}, f_{22}]f(x) &= (\gamma_1(x)f_{21} + \gamma_2(x)f_{22}(x) + \gamma_3(x)[f_{11}, f_{12}])f(x) = \\ &= (\gamma_1(x)f_{21} + \gamma_2(x)f_{22}(x))f(x). \end{aligned}$$

так как из (23) $[f_{21}, f_{22}] = 0$. Функции $\gamma_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ находятся из следующих соотношениях:

$$\gamma_1(x) = (-g_2(x)f_{12}(g_1(x)))/g_1(x),$$

$$\gamma_2(x) = (-g_1(x)f_{11}(g_2(x)))/g_2(x),$$

$$\gamma_3(x) = g_1(x) \cdot g_2(x).$$

Видно, что если $S = \{f_{11}, \dots, f_{1n-1}\}$ – инволюционная система на подмногообразии V , то $S_1 = \{f_{21}, \dots, f_{2n-1}\}$ определяет инволютивную систему на том же подмногообразии.

Что касается исходной системы $S = \{f_{11}(x), \dots, f_{1n-1}(x)\} = \{ad_{f_1}^i f_2(x), i = \overline{0, n-2}\}$ определяющей систему (18), то из вывода уравнений (14) следует, что в общем случае это инволютивная система на подмногообразии V , так как из условия $[f_{1i}f_{1j}]f(x) \forall f_{1i} \in \Delta_{n-1}$ не обязательно следует, что $[f_{1i}f_{1j}] = 0$

Вопрос о существовании преобразования $y = T(x)$, $v = v(x, u)$ для исходной системы (2) сводится к проблеме наличия группы симметрий – группы диффеоморфизмов, переводящих решения управляемой системы (10) в решения системы (5) и наоборот. Здесь основную роль играет теорема Софуса Ли (аналог теоремы Руффини-Абея-Галуа о разрешимости алгебраического уравнения в радикалах) о разрешимости линейного дифференциального уравнения в частных производных $Az = 0$.

Эта теорема приводит к следующим условиям наличия у (2) группы симметрий:

$$1) f_{1i}(T_1(x)) = 0, \quad i = \overline{1, n-1} \quad (24)$$

$$f_{1n}(T_1(x)) \neq 0, \quad (25)$$

2) система $S = \{f_{11}(x), \dots, f_{1n-1}(x)\} = \{ad_{f_1}^i f_2(x), i = \overline{0, n-2}\}$ – является инволютивной;

3) векторные поля $\{f_{11}(x), \dots, f_{1n-1}(x)\} = \{ad_{f_1}^i f_2(x), i = \overline{0, n-1}\}$ – линейно независимы в окрестности равновесной точки x_0 .

Формулы (24), (25) в точности повторяют условия (12), (13) или (16), (17), условия 2) выполнены для S и единственным дополнительным условием существования является 3).

Если равновесная точка $x_0 \neq 0$, тогда преобразование

$$y_1 = T_1(x) - T_1(x_0) \quad (26)$$

позволяет получить интегральное многообразие, проходящее через данную точку x_0 .

Суммируя вышесказанное, сформулируем основную теорему о наличии линейных эквивалентов у системы (2).

Условие. Нелинейная система (2) тогда и только тогда имеет линейный эквивалент – систему (5) в окрестности равновесной точки x_0 , когда выполнены следующие условия:

- 1) система $S = \{ad_{f_1}^i f_2(x), i = \overline{0, n-2}\}$ – инволютивна;
- 2) $ad_{f_1}^{n-1} f_2 \neq 0$ в точке равновесия и ее окрестности;
- 3) векторы $ad_{f_1}^i f_2(x), i = \overline{0, n-1}$ линейно независимы в точке равновесия и ее окрестности;
- 4) преобразование $T_1(x)$, полученное из системы дифференциальных уравнений (18), связано с переменной y_1 соотношением (26), остальные преобразования находятся из (7), (10);
- 5) статическая обратная связь определяется из уравнения

$$\nu = f_1^{n-1}(T_1(x)) + u \cdot ad_{f_1}^{n-1} f_2(T_1(x)).$$

откуда после нахождения $\nu = \nu(y)$ и замены $y = T(x)$ получим обратную связь в исходной системе

$$u(x) = \frac{\nu(T(x)) - f_1^{n-1}(T_1(x))}{ad_{f_1}^{n-1} f_2(T_1(x))}. \quad (27)$$

4 Заключение

В статье синтезируется управление для многосвязного нелинейного объекта на основе геометрического подхода.

Для сложной системы управления данным объектом применена процедура децентрализации и выведено условие наличия линейного эквивалента нелинейных систем.

В данной статье рассматривается синтез управления для многосвязного нелинейного энергетического объекта на основе геометрического подхода. Для сложной системы управления энергетическим объектом применена процедура децентрализации. На основе методологии геометрического подхода для декомпозированной системы выведено условие наличия линейного эквивалента нелинейных систем. В основе условия лежит процедура доказательства образования нелинейной многосвязной системы векторных полей. Для этого исходная декомпозированная система представляется в канонической форме Бруновского. Синтез управления нелинейной многосвязной системы на основе

геометрического подхода реализован с помощью получения линейных эквивалентов на условиях инволютивности, не равенстве нулю операторов алгебр Ли в точке равновесия и ее окрестности, линейной независимости векторов операторов алгебр Ли в точке равновесия и ее окрестности.

Литература

- [1] Bloch A., Colombo L., Gupta R., Diego D. A Geometric Approach to the Optimal Control of Nonholonomic Mechanical Systems // Analysis and Geometry in Control Theory / Springer International Publishing Switzerland. – 2015. – p.35-64.
- [2] Гайдук А.Р. Условия разрешимости задачи синтеза инвариантных систем управления // Известия Южного федерального университета / Технические науки. – 2008. – № 7 (87) – стр.116-122.
- [3] Wang L., Su R., Huang Z., Wang X., Wang W., Grebogi C., Lai Y. A geometrical approach to control and controllability of nonlinear dynamical networks // NATURE COMMUNICATIONS – 2016. – p.1-11.
- [4] Murray R.M. Geometric Approaches to Control in the Presence of Magnitude and Rate Saturation // Astrom Symposium on Control. – 1999. – P. 43-72.
- [5] Satpute S., Mehra R., Kazi F., Singh N.M. Geometric-PBC Approach for Control of Circular Ball and Beam System // 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems – 2014 – p.1238-1243
- [6] Бутковский А.Г. Кибернетика и структуры // Проблемы управления и информатика – 1996.– №1 (2) – С.8-20.
- [7] Методы классической и современной теории автоматического управления. учебник в 5-и тт. – Изд.2-е, перераб. и доп. Т.5: Методы современной теории, автоматического управления /под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с.

References

- [1] Bloch A., Colombo L., Gupta R., Diego D. A Geometric Approach to the Optimal Control of Nonholonomic Mechanical Systems // Analysis and Geometry in Control Theory / Springer International Publishing Switzerland – 2015. – p.35-64.
- [2] Gajduk A.R. Usloviya razreshimosti zadachi sinteza invariantnyh sistem upravleniya // Izvestiya Juzhnogo federal'nogo universiteta / Tehnicheskie nauki – 2008. – № 7 (84) – str.116-122.
- [3] Wang L., Su R., Huang Z., Wang X., Wang W., Grebogi C., Lai Y. A geometrical approach to control and controllability of nonlinear dynamical networks // NATURE COMMUNICATIONS – 2016. – p.1-11.
- [4] Murray R.M. Geometric Approaches to Control in the Presence of Magnitude and Rate Saturation // Astrom Symposium on Control – 1999. – P. 43-72.
- [5] Satpute S., Mehra R., Kazi F., Singh N.M. Geometric-PBC Approach for Control of Circular Ball and Beam System // 21st International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems – 2014 – p.1238-1243
- [6] Butkovskij A.G. Kibernetika i struktury // Problemy upravleniya i informatika – 1996.– №1 (2). – S.8-20.
- [7] Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya: Uchebnik v 5-i tt.; Izd 2-e., pererab. i dop. T.5: Metody sovremennoy teorii, avtomaticheskogo upravleniya /pod red. K.A. Pupkova, N.D. Egupova. — M.: Izdatel'stvo MGTU im. N.Je. Baumana, 2004. – 784 s.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Абдибекова Айгерим Уалиханова* - старший преподаватель механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби, PhD
2. *Абжанова Лауласын Косылгановна* - докторант Казахского национального исследовательского технического университета имени К.И. Сатпаева
3. *Алдашев Серик Аймурзаевич* - профессор Казахского национального педагогического университета им.Абая
4. *Алдибеков Тамаша Молдабекович* - и.о. профессора Казахского национального университета им. аль-Фараби, доктор физико-математических наук
5. *Асылбекулы Айдар* - младший научный сотрудник НИИ математики и механики Казахского национального университета им. аль-Фараби
6. *Ахметова Айдана Жанатбековна* - докторант Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева
7. *Бейсенбекова Гульназ Жанибековна* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
8. *Бектемесов Аманжол Тохтямович* - и.о. доцента Казахского национального университета им. аль-Фараби, PhD
9. *Бурлибаев Аймурат Жабылович* - докторант Казахского национального университета им. аль-Фараби
10. *Дусекеев Руслан Маратович* - инженер-программист Казахского национального университета им. аль-Фараби
11. *Жылжибаева Салтанат* - докторант Казахского национального университета им. аль-Фараби
12. *Жумагулов Бакытжан Турсынович* - президент Национальной инженерной академии Республики Казахстан, доктор технических наук, профессор
13. *Жуманова Ляззат Кенесовна* - доцент механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
14. *Жунисова Жанат Хафизовна* - доцент механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
15. *Илялетдинов Фарид Асхатович* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
16. *Китайбеков Ерлан Толепович* - докторант Казахского национального педагогического университета им. Абая
17. *Ла Лира Львовна* - и.о. доцента Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева, кандидат физико-математических наук
18. *Мамыкова Жанл Джумангалиевна* - директор Института информационных технологий и инновационного развития Казахского национального университета им. аль-Фараби, кандидат технических наук
19. *Молдабек Жанболат Тамашаулы* - младший научный сотрудник НИИ математики и механики Казахского национального университета им. аль-Фараби

20. *Мутанов Галимжаир Мутанович* - ректор Казахского национального университета им. аль-Фараби, академик НАН РК, доктор технических наук, профессор
21. *Макашев Ерлан Прмаганбектович* - доцент кафедры информатики Казахского национального университета им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
22. *Садыбеков Мазмуд Абдысаметович* - заведующий отделом Института математики и математического моделирования, ГНС, доктор физико-математических наук
23. *Урмашев Байдаулет Амантаевич* - заведующий кафедры информатики Казахского национального университета им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
24. *Утенов Муратулла* - профессор Казахского национального университета им. аль-Фараби, доктор технических наук
25. *Утенова Камила* - магистрант Казахского национального университета им. аль-Фараби
26. *Ширяева Ольга Ивановна* - доцент Казахского национального исследовательского технического университета имени К.И. Сатпаева, кандидат технических наук

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набранные только в текстовом формате $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat-dairbayeva@mail.ru (ответственному секретарю редколлегии, Дайрбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ или формат eps [см. п.7]. Указывается код по УДК. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.

5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 15 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 5 страниц. В начале работы после заголовка и фамилий авторов работы помещается её аннотация в объеме 200-250 слов на том же языке, на котором набран основной текст. Кроме сведений, которые можно почерпнуть из заголовка, аннотация должна отражать методы исследования, основные результаты статьи, их новизну и указывать на смежные работы.

После аннотации задаются ключевые слова. Для каждой работы задайте 5-6 ключевых слов в порядке их значимости, т.е. самое важное ключевое слово статьи должно быть первым в списке.

Название работы, ФИО авторов, аннотация и ключевые слова должны быть представлены в статье на трех языках: казахском, русском и английском.

Использованная литература должна быть оформлена в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления". Список литературы должен состоять не более чем из 20 наименований. Ссылки на источники в тексте статьи даются только в квадратных скобках (без цитирования [12], при цитировании или пересказе авторского текста [12, с. 29]). Нумерация ссылок в статье производится по порядковому номеру источника в приставном списке литературы. Архивные материалы в список не включаются, ссылки на них помещаются в тексте в круглых скобках. При использовании в статье источников из электронных ресурсов или удаленного доступа (Интернета) в списке литературы приводится библиографическая запись источника и ссылка на сетевой ресурс с полным сетевым адресом в Интернете. Желательно указывать дату обращения к ресурсу.

Список литературы на языке оригинала сопровождается списком литературы (references) в английской транслитерации.

6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов $\text{\LaTeX}$ 2 ϵ и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами amsmath и amssymb. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps , либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета Latexcad. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера Conversion Artist. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ

1-бөлім

Математика

Akhmetova A.Zh., La L.L.

About the group approach in the task of fuzzy synthetic evaluation 3

Zhunossova Zh.Kh.

Soliton immersion for nonlinear Schrodinger equation with gravity 11

Алдашев С. А.

Задачи Дирихле и Пуанкаре в многомерной области для одного класса сингулярных гиперболических уравнений 20

Жуманова Л.К., Садыбеков М.А.

Первый регуляризованный след интегро-дифференциального оператора Штурма-Лиувилля на отрезке с проколотыми точками при интегральном возмущении условий склеивания 32

Қытайбеков Е.

Разрешимость задачи Дирихле для трехмерных эллипτικο-параболических уравнений с вырождением типа и порядка 40

Молдабек Ж.Т., Алдибеков Т.М.

О равномерной оценке снизу решений нелинейной системы дифференциальных уравнений 46

2-бөлім

Механика

Zhilikbayeva S., Utenov M.U., Utenova K.

Analytical method of definition of internal forces taking into account the distributed dynamical loads in links of robotic systems and mechanisms with statically indeterminate structures..... 55

3-бөлім

Информатика

Бектемесов А.Т., Бурлибаев А.Ж., Илялетдинов Ф.А.

Распределенные алгоритмы и их верификация с помощью Byzantine model checker 70

Дусекеев Р.М., Мутанов Г.М., Мамыкова Ж.Д.

Роль информационной безопасности в развитии ИТ-инфраструктуры и повышении конкурентоспособности университета 80

Раздел 1

Математика

Раздел 2

Механика

Раздел 3

Информатика

4-бөлім**Қолданылмалы
математика***Асылбекулы А., Абдибекова А.У., Жумагулов Б.Т.*

Математическое моделирование миграций нефтяного пятна и оценка ареала на поверхности Каспийского моря в зависимости от метеоусловий 89

Бейсенбекова Г.Ж., Урмашев Б.А., Макашев Е.П.

Моделирование процесса горения метана (CH_4) в программном комплексе PrIme. 100

Ширяева О.И., Абжанова Л.К.

Синтез управления нелинейной многосвязной системы на основе геометрического подхода 110

Сведения об авторах 119

К сведению авторов 121

Раздел 4**Прикладная
математика**

CONTENTS

Section 1

Mathematics

Akhmetova A.Zh., La L.L.

About the group approach in the task of fuzzy synthetic evaluation 3

Zhununsova Zh.Kh.

Soliton immersion for nonlinear Schrodinger equation with gravity 11

*Aldashev S.A.*Dirichlet and Poincare in the multidimensional field for
a class of singular hyperbolic equations 20*Zhumanova L.K., Sadybekov M.A.*The first regularized trace of integro-differential Sturm-Liouville operator on the segment
with punctured points at integral perturbation of transmission conditions 32*Kitaybekov E.T.*Solvability Dirichlet problem for three-dimensional elliptic-parabolic equations
with type and order extinction 40*Moldabek Zh., Aldibekov T.*

The uniform lower bound of solutions of nonlinear system of differential equations 46

Section 2

Mechanics

*Zhil kibayeva S., Utenov M.U., Utenova K.*Analytical method of definition of internal forces taking into account the distributed dynamical loads in links
of robotic systems and mechanisms with statically indeterminate structures..... 55

Section 3

Computer science

Bektemessov A.T., Burlibaev A.Zh., Ilyaletdinov F.A.

Distributed algorithms and their verification with Byzantine model checker 70

*Dussekeyev R.M., Mutanov G.M., Mamykova Zh.D.*The role of information security in the development of IT
infrastructure and increasing the competitiveness of the university 80

Section 4

Applied Mathematics

Assylbekuly A., Abdibekova A.U., Zhumagulov B.T.

Mathematical modeling of oil spill migration on the surface of
the Caspian Sea depending on weather conditions. 89

Beisenbekova G.Zh., Urmashev B.A., Makashev E.P.

Modelling of the combustion process of methane (CH_4) in the software package PrIMe 100

Shiryayeva O.I., Abzhanova L.K.

Synthesis of nonlinear multiply control system based
on geometric approach summary 110

Сведения об авторах 119

К сведению авторов 121