

ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ҚазҰУ ХАБАРШЫСЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК КазНУ

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

KazNU BULLETIN

Mathematics, Mechanics, Computer Science Series

№ 3 (91)

Алматы
«Қазақ университеті»
2016

Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного
согласия Республики Казахстан, свидетельство № 956-Ж от 25.11.1999 г.
(Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.)
Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия:

научный редактор: М.А. Бектемесов - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби
заместитель научного редактора: А.Б. Кыдырбекулы - д.т.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби
ответственный секретарь: Г.М. Даирбаева - к.ф.-м.н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби

Члены редколлегии:

Айсағалиев С.А. - д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Алиев Ф.А. - д.ф.-м.н., профессор, академик Национальной академии наук Азербайджана, Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан
Ахмед-Заки Д.Ж. - д.т.н., КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Бадаев С.А. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Жайнаков А.Ж. - д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Кыргызской Республики, Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Кыргызстан
Кабанихин С.И. - д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия
Калтаев А.Ж. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Кангужин Б.Е. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Майнке М. - профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института Аэродинамики, Германия
Мальшикин В.Э. - д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия
Мейрманов А.М. - д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, Россия
Мухамбетжанов С.Т. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Отелбаев М.О. - д.ф.-м.н., профессор, академик Национальной академии наук РК, Евразийский национальный университета им. Л.Н. Гумилева, Казахстан
Панфилов М. - д.ф.-м.н., профессор, Национальный политехнический институт Лотарингии, Франция
Ружанский М. - д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания
Тайманов И.А. - д.ф.-м.н., профессор, академик Российской академии наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия
Тукеев У.А. - д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Шокин Ю.И. - д.ф.-м.н., профессор, академик Российской академии наук, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия
Юлдашев З.Х. - д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан

Научное издание

Вестник КазНУ

Серия математика, механика, информатика

№ 3(91) 2016

Редактор: Г.М. Даирбаева

Компьютерная верстка: Б.А. Аетова

ИБ N 10056

Подписано в печать 27.06.2016 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Объем 9.9 п.л. Тираж 500 экз. Заказ N 4366.

Издательский дом "Қазақ университеті"

Казахского национального университета им. аль-Фараби.

050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома "Қазақ университеті".

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

УДК 517

Бекмаганбетов К.А., Төлеуғазы Е.*

КФ МГУ им. М.В. Ломоносова, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,
Республика Казахстан, г. Астана

* E-mail: erzhan1996@yandex.ru

**Интерполяционные свойства анизотропных пространств
Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ и теоремы вложения**

В статье изучаются интерполяционные свойства анизотропных пространств Никольского-Бесова относительно анизотропной интерполяции $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}$, где $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$. Показано, что в случае $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ пространства Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ являются ретрактом пространств $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))$, и соответствующая интерполяционная теорема вытекает из интерполяционных свойств анизотропных пространств $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)$. В качестве следствия описаны интерполяционные свойства анизотропных пространств Соболева с доминирующей смешанной производной $W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$. Во второй части работы доказано неравенство разных метрик Никольского для тригонометрических полиномов со спектром из параллелепипедов в анизотропных пространствах Лоренца $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$. На основе данного неравенства и интерполяционных теорем получены теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ и анизотропных пространств Лоренца $L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$. Соотношения, связывающие параметры пространств α , \mathbf{p} и \mathbf{q} , то есть $\alpha = (\mathbf{1}/\mathbf{p} - \mathbf{1}/\mathbf{q})$ являются предельными и неупрощаемыми. Полученные теоремы обобщают соответствующие результаты из работ Бекмаганбетова К.А. и Нурсултанова Е.Д., полученные для случая $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$.

Ключевые слова: анизотропные пространства Никольского-Бесова, анизотропные пространства Лоренца, вложение, ретракт, неравенство разных метрик.

Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Ye.

**Interpolation properties of anisotropic $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Nikol'skii-Besov spaces
and embedding theorems**

In this paper we study interpolation properties of anisotropic spaces of Nikol'skii-Besov with respect to the anisotropic interpolation $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}$, where $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$. It shows that in the case $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ and $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ the Nikol'skii-Besov spaces $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ are the retract spaces $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))$, and corresponding interpolation theorem follows from the interpolation properties of anisotropic $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)$ spaces. The interpolation properties of anisotropic Sobolev spaces $W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ with dominant mixed derivative are described as a corollary. In the second part of the work the Nikol'skii inequality of different metrics for trigonometric polynomials with the spectrum from parallelepipeds in the anisotropic Lorentz spaces $L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ is proved. On the basis of the inequality and interpolation theorems the embedding theorems for anisotropic Nikol'skii-Besov spaces $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ and anisotropic Lorentz spaces $L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ are obtained. The relations, which connect the spaces parameters α , \mathbf{p} and \mathbf{q} , i.e. $\alpha = (\mathbf{1}/\mathbf{p} - \mathbf{1}/\mathbf{q})$ are the limiting. This relations also can not be improved. The obtained theorems generalize the corresponding results from the works of K.A. Bekmaganbetov and E.D. Nursultanov for the case $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$.

Key words: anisotropic Nikol'skii-Besov spaces, anisotropic Lorentz spaces, embedding, retract, inequality of different metrics.

Бекмағанбетов Қ.А., Төлеуғазы Е.

Никольский-Бесов $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ анизотроптық кеңістіктерінің қасиеттері және ену теоремалары

Бұл мақалада анизотропты $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{q}}$ интерполяцияға қатысты анизотропты Никольский-Бесов кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттері зерттеледі, мұнда $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$. Параметрлер $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ және $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n)$ болған жағдайда $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Никольский-Бесов кеңістіктері $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))$ кеңістіктерінің ректракты болатындығы, және сәйкес интерполяциялық теорема $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)$ анизотроптық кеңістіктерінің интерполяциялық қасиеттерінен шығатыны көрсетілген. Салдар ретінде үстем аралас туындысы бар анизотропты $W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Соболев кеңістігінің интерполяциялық қасиеттері сипатталды. Жұмыстың екінші бөлігінде спектры анизотропты $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Лоренц кеңістігіндегі параллелепипедтерден тұратын тригонометриялық полиномдар үшін Никольскийдің әр түрлі метрикалық теңсіздігі дәлелденді. Осы теңсіздік және интерполяциялық теоремалар негізінде анизотропты $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Никольский-Бесов кеңістіктері және анизотропты $L_{\mathbf{qr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ Лоренц кеңістіктері үшін ену теоремалары алынды. Кеңістіктерді байланыстыратын параметрлер қатынастары α , \mathbf{p} және \mathbf{q} , яғни, $\alpha = (\mathbf{1}/\mathbf{p} - \mathbf{1}/\mathbf{q})$ шекті және жақсартылмайтын болады. $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ жағдайы үшін алынған теоремалар Бекмағанбетов Қ.А. және Нұрсұлтанов Е.Д. жұмыстарында алынған сәйкес нәтижелерді жалпылайды.

Түйін сөздер: Никольский-Бесов анизотроптық кеңістіктері, Лоренц анизотроптық кеңістіктері, ену, ректракт, әр түрлі метрикалық теңсіздіктер.

1 Введение

Теория вложения пространств дифференцируемых функций берет начало с работы С.Л. Соболева [1]. Эта теория изучает важные связи и соотношения дифференциальных (гладких) свойств функций в различных метриках. Дальнейшее развитие данной теории связано с новыми классами функциональных пространств С.М. Никольского [2], О.В. Бесова [3], П.И. Лизоркина [4], Х. Трибеля [5] и других и определялось как собственной внутренней проблематикой, так и ее приложениями в теории краевых задач математической физики [6] – [8].

Настоящая работа посвящена исследованию интерполяционных свойств анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$, которые имеют гибридный характер, смесь обычных пространств и пространств со "смешанной гладкостью".

Перейдем к краткому описанию работы. В разделе 2 приведены необходимые определения и вспомогательные результаты. В разделе 3 определены анизотропные пространства Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$, изучены их интерполяционные свойства относительно метода анизотропной интерполяции. В разделе 4 на основе неравенств разных метрик для тригонометрических полиномов и интерполяционных теорем получены предельные теоремы вложения между анизотропными пространствами Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ и анизотропными пространствами Лоренца $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$.

2 Необходимые определения и вспомогательные результаты

Пусть $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$, тогда $\mathbb{T}^{\mathbf{d}} = \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) : \mathbf{x}_i \in [0, 2\pi)^{d_i}, i = 1, \dots, n\}$.

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ измеримая в $\mathbb{T}^{\mathbf{d}}$ функция. Через $f^*(\mathbf{t}) = f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ последовательно по мультипеременным $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ при фиксированных остальных переменных.

Пусть мультииндексы $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ такие, что если $1 \leq p_i < \infty$, то $1 \leq r_i \leq \infty$, если же $p_i = \infty$, то и $r_i = \infty$, $i = 1, \dots, n$.

Анизотропным пространством Лоренца $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d)$ [9] назовем множество функций, для которых конечна следующая величина

$$\|f\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d)} = \left(\int_0^{(2\pi)^{d_n}} \left(t_n^{1/p_n} \dots \left(\int_0^{(2\pi)^{d_1}} \left(t_1^{1/p_1} f^{*1, \dots, *n}(t_1, \dots, t_n) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n}.$$

При $r_i = \infty$ выражение $\left(\int_0^{(2\pi)^{d_i}} |f(t_i)|^{r_i} \frac{dt_i}{t_i} \right)^{1/r_i}$ понимается как $\sup_{0 \leq t < 2\pi} |f(t_i)|$.

Пусть $E = \{\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) : \varepsilon_i = 0 \text{ или } \varepsilon_i = 1, i = 1, \dots, n\}$ – вершины n -мерного единичного куба в \mathbb{R}^n , $\mathbf{A} = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – семейство банаховых пространств, являющихся подпространствами некоторого линейного хаусдорфова пространства, которое называется совместимым семейством банаховых пространств [10]. Для элемента a пространства $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$ определим функционал

$$K(\mathbf{t}, a; \mathbf{A}) = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{t}^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{A_\varepsilon},$$

где $\mathbf{t}^\varepsilon = t_1^{\varepsilon_1} \dots t_n^{\varepsilon_n}$.

Пусть $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Через $\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}} = (A_\varepsilon; \varepsilon \in E)_{\theta\mathbf{r}}$ обозначим линейное подмножество множества $\sum_{\varepsilon \in E} A_\varepsilon$, для элементов которого верно

$$\|a\|_{\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}}} = \left(\int_0^\infty \left(t_n^{-\theta_n} \dots \left(\int_0^\infty \left(t_1^{-\theta_1} K(\mathbf{t}, a; \mathbf{A}) \right)^{r_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{r_2/r_1} \dots \right)^{r_n/r_{n-1}} \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/r_n} < \infty.$$

Лемма 1 ([9]) Пусть $\mathbf{0} < \theta < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} \leq \infty$, $\mathbf{A} = \{A_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$, $\mathbf{B} = \{B_\varepsilon\}_{\varepsilon \in E}$ – два совместимых семейства банаховых пространств. Если найдутся два вектора $\mathbf{M}_0 = (M_1^0, \dots, M_n^0)$, $\mathbf{M}_1 = (M_1^1, \dots, M_n^1)$ с положительными компонентами такие, что для линейного оператора имеет место $T : \mathbf{A}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{B}_\varepsilon$ с оценкой нормы $C_\varepsilon \prod_{i=1}^n M_i^{\varepsilon_i}$ для любого $\varepsilon \in E$, то

$$T : \mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{B}_{\theta\mathbf{r}},$$

с нормой $\|T\|_{\mathbf{A}_{\theta\mathbf{r}} \rightarrow \mathbf{B}_{\theta\mathbf{r}}} \leq \max_{\varepsilon \in E} C_\varepsilon \prod_{i=1}^n (M_i^0)^{1-\theta_i} (M_i^1)^{\theta_i}$.

Для мультииндексов $\mathbf{b}_0 = (b_1^0, \dots, b_n^0)$, $\mathbf{b}_1 = (b_1^1, \dots, b_n^1)$ и $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ введем обозначение $\mathbf{b}_\varepsilon = (b_1^{\varepsilon_1}, \dots, b_n^{\varepsilon_n})$.

Лемма 2 ([9]) а) Пусть $\mathbf{1} \leq \mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r}_0 = (r_1^0, \dots, r_n^0)$, $\mathbf{r}_1 = (r_1^1, \dots, r_n^1) \leq \infty$. Тогда для $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ справедливо равенство

$$(L_{\mathbf{p}_\varepsilon \mathbf{r}_\varepsilon}(\mathbb{T}^d); \varepsilon \in E)_{\theta \mathbf{q}} \hookrightarrow L_{\mathbf{p} \mathbf{q}}(\mathbb{T}^d),$$

где $\mathbf{1}/\mathbf{p} = (\mathbf{1} - \theta)/\mathbf{p}_0 + \theta/\mathbf{p}_1$.

б) Пусть $\mathbf{1} \leq \mathbf{p}_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0) < \mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \infty$. Тогда для $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ справедливо равенство

$$(L_{\mathbf{p}_\varepsilon}(\mathbb{T}^d); \varepsilon \in E)_{\theta \mathbf{q}} = L_{\mathbf{p} \mathbf{q}}(\mathbb{T}^d),$$

где $\mathbf{1}/\mathbf{p} = (\mathbf{1} - \theta)/\mathbf{p}_0 + \theta/\mathbf{p}_1$ и $L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^d)$ - пространство Лебега со смешанной метрикой

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^d)} = \left(\int_{\mathbb{T}^{d_n}} \left(\dots \left(\int_{\mathbb{T}^{d_1}} |f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n|^{p_1} d\mathbf{x}_1 \right)^{p_2/p_1} \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} d\mathbf{x}_n \right)^{1/p_n} < \infty.$$

Лемма 3 Пусть $\alpha_1 < \alpha < \alpha_0$, $1 \leq q \leq \infty$. Для последовательности неотрицательных чисел $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ определим преобразования

$$I_0(a; j) = \sum_{k=-\infty}^j 2^{\alpha_0(k-j)} a_k, \quad (1)$$

$$I_1(a; j) = \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{\alpha_1(k-j)} a_k. \quad (2)$$

Тогда справедливы неравенства

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{\alpha j} I_0(a; j))^q \right)^{1/q} \leq C_1 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{\alpha j} a_j)^q \right)^{1/q}, \quad (3)$$

$$\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{\alpha j} I_1(a; j))^q \right)^{1/q} \leq C_2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{\alpha j} a_j)^q \right)^{1/q}. \quad (4)$$

Доказательство. Докажем неравенство (3). Выберем число κ_0 так, что $\alpha < \kappa_0 < \alpha_0$. Тогда применяя неравенство Гельдера и изменяя порядок суммирования получаем

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{\alpha j} I_0(a; j))^q \right)^{1/q} &= \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} \sum_{k=-\infty}^j 2^{\alpha_0(k-j)} a_k \right)^q \right)^{1/q} = \\ &= \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{(\alpha - \alpha_0)j} \sum_{k=-\infty}^j 2^{(\alpha_0 - \kappa_0)k + \kappa_0 k} a_k \right)^q \right)^{1/q} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(\alpha-\alpha_0)qj} \left(\sum_{k=-\infty}^j 2^{(\alpha_0-\kappa_0)q'k} \right)^{q/q'} \sum_{k=-\infty}^j (2^{\kappa_0 k} a_k)^q \right)^{1/q} = \\ &= C \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(\alpha-\kappa_0)qj} \sum_{k=-\infty}^j 2^{\kappa_0 qk} a_k^q \right)^{1/q} = C \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\kappa_0 qk} a_k^q \sum_{j=k}^{\infty} 2^{(\alpha-\kappa_0)qj} \right)^{1/q} = \\ &= C_1 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{\alpha j} a_j)^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Неравенство (3) доказано.

Докажем неравенство (4). Выберем число κ_1 так, что $\alpha_1 < \kappa_1 < \alpha$. Тогда также как и в предыдущем случае получаем

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{\alpha j} I_1(a; j))^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha j} \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{\alpha_0(k-j)} a_k \right)^q \right)^{1/q} = \\ &= \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(2^{(\alpha-\alpha_1)j} \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{(\alpha_1-\kappa_1)k+\kappa_1 k} a_k \right)^q \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(\alpha-\alpha_1)qj} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{(\alpha_1-\kappa_1)q'k} \right)^{q/q'} \sum_{k=j+1}^{\infty} (2^{\kappa_1 k} a_k)^q \right)^{1/q} = \\ &= C \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(\alpha-\kappa_1)qj} \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{\kappa_1 qk} a_k^q \right)^{1/q} = C \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\kappa_1 qk} a_k^q \sum_{j=-\infty}^{k-1} 2^{(\alpha-\kappa_1)qj} \right)^{1/q} = \\ &= C_2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} (2^{\alpha j} a_j)^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Неравенство (4) доказано.

Лемма полностью доказана.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$. Через $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)$ мы будем обозначать мультипоследовательность $\{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n}$ со значениями в A , для которой конечна норма

$$\|a\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A)} = \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} (2^{(\alpha, \mathbf{k})} \|a_{\mathbf{k}}\|_A)^{\mathbf{q}} \right)^{1/\mathbf{q}},$$

здесь $(\alpha, k) = \sum_{j=1}^n \alpha_j k_j$.

Теорема 1 Пусть $\alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \neq \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1)$, $\varepsilon \in E$, $\alpha_{\varepsilon} = (\alpha_1^{\varepsilon_1}, \dots, \alpha_n^{\varepsilon_n})$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q}_{\varepsilon} = (q_1^{\varepsilon_1}, \dots, q_n^{\varepsilon_n}) \leq \infty$. Тогда для $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ справедливо равенство

$$(l_{\mathbf{q}_{\varepsilon}}^{\alpha_{\varepsilon}}(A); \varepsilon \in E)_{\theta \mathbf{q}} = l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(A),$$

где $\alpha = (\mathbf{1} - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Доказательство. Шаг 1. В силу вложений

$$l_1^\alpha(A) \hookrightarrow l_{\mathbf{q}}^\alpha(A) \hookrightarrow l_\infty^\alpha(A),$$

достаточно доказать вложения

$$(l_\infty^{\alpha_\varepsilon}(A); \varepsilon \in E)_{\theta_{\mathbf{q}}} \hookrightarrow l_{\mathbf{q}}^\alpha(A), \quad (5)$$

и

$$l_{\mathbf{q}}^\alpha(A) \hookrightarrow (l_1^{\alpha_\varepsilon}(A); \varepsilon \in E)_{\theta_{\mathbf{q}}}, \quad (6)$$

где $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Шаг 2. Докажем вложение (5). Если $a = \{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \in l_\infty^{\alpha_1}(A)$, то

$$\begin{aligned} K(\mathbf{t}, a; l_\infty^{\alpha_\varepsilon}(A); \varepsilon \in E) &= \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{t}^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{l_\infty^{\alpha_\varepsilon}(A)} = \\ &= \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{t}^\varepsilon \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})} \|a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)}\|_A = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})} \|a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)}\|_A \geq \\ &\geq \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)}\|_A = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \sum_{\varepsilon \in E} \|a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)}\|_A \geq \\ &\geq \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \left\| \sum_{\varepsilon \in E} a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)} \right\|_A = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A = \\ &= \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A. \end{aligned}$$

Так как $\alpha_0 > \alpha_1$, то \mathbb{R}_+^n можно разбить на параллелепипеды вида $[2^{(\alpha_0 - \alpha_1)(\mathbf{j} - 1)}; 2^{(\alpha_0 - \alpha_1)\mathbf{j}}]$, $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \|a\|_{(l_\infty^{\alpha_\varepsilon}(A); \varepsilon \in E)_{\theta_{\mathbf{q}}}} &= \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (\mathbf{t}^{-\theta} K(\mathbf{t}, a; l_\infty^{\alpha_\varepsilon}(A); \varepsilon \in E))^{\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right)^{1/\mathbf{q}} \geq \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\mathbf{t}^{-\theta} \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right)^{1/\mathbf{q}} = \\ &= \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \int_{2^{(\alpha_0 - \alpha_1)(\mathbf{j} - 1)}}^{2^{(\alpha_0 - \alpha_1)\mathbf{j}}} \left(\mathbf{t}^{-\theta} \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right)^{1/\mathbf{q}} \geq \\ &\geq C_1 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \left(2^{-(\theta(\alpha_0 - \alpha_1)\mathbf{j})} \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (2^{(\varepsilon(\alpha_0 - \alpha_1)\mathbf{j}) + (\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{1/\mathbf{q}} = \\ &= C_1 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \left(\sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (2^{((\varepsilon - \theta)(\alpha_0 - \alpha_1)\mathbf{j}) + (\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{1/\mathbf{q}} = \end{aligned}$$

$$= C_1 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \left(\sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (2^{((\varepsilon-\theta)(\alpha_0-\alpha_1)+\alpha_\varepsilon \mathbf{j})+(\alpha_\varepsilon, (\mathbf{k}-\mathbf{j}))}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A) \right)^q \right)^{1/q}.$$

Так как для любого $\varepsilon \in E$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} (\varepsilon - \theta)(\alpha_0 - \alpha_1) + \alpha_\varepsilon &= (\varepsilon - \theta)(\alpha_0 - \alpha_1) + (\mathbf{1} - \varepsilon)\alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 = \\ &= (\mathbf{1} - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = \alpha, \end{aligned}$$

то далее получаем

$$\begin{aligned} \|a\|_{(l_\infty^{\alpha_\varepsilon}(A); \varepsilon \in E)_{\theta \mathbf{q}}} &\geq C_1 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \left(\sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (2^{(\alpha \mathbf{j})+(\alpha_\varepsilon, (\mathbf{k}-\mathbf{j}))}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A) \right)^q \right)^{1/q} = \\ &= C_1 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha \mathbf{j})} \sup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (2^{(\alpha_\varepsilon, (\mathbf{k}-\mathbf{j}))}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A) \right)^q \right)^{1/q} \geq \\ &\geq C_1 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} (2^{(\alpha \mathbf{j})} \|a_{\mathbf{j}}\|_A)^q \right)^{1/q} = C_1 \|a\|_{l_q^\alpha(A)}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает вложение (5).

Шаг 3. Докажем вложение (6). Пусть $a = \{a_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \in l_q^\alpha(A)$. Далее

$$\begin{aligned} K(\mathbf{t}, a; l_1^{\alpha_\varepsilon}(A); \varepsilon \in E) &= \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{t}^\varepsilon \|a_\varepsilon\|_{l_1^{\alpha_\varepsilon}(A)} = \\ &= \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} \mathbf{t}^\varepsilon \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})} \|a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)}\|_A = \inf_{a = \sum_{\varepsilon \in E} a_\varepsilon} \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})} \|a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)}\|_A \leq \\ &\leq \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A, \end{aligned}$$

здесь мы положили $a_{\mathbf{k}}^{(\varepsilon)} = a_{\mathbf{k}}$ для того ε , которому соответствует $\min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})})$.

Так как и на шаге 2, получаем, что

$$\begin{aligned} \|a\|_{(l_1^{\alpha_\varepsilon}; \varepsilon \in E)_{\theta \mathbf{q}}} &= \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (\mathbf{t}^{-\theta} K(\mathbf{t}, a; l_1^{\alpha_\varepsilon}(A); \varepsilon \in E))^q \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(\mathbf{t}^{-\theta} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^q \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right)^{1/q} = \\ &= \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \int_{2^{(\alpha_0-\alpha_1)(\mathbf{j}-1)}}^{2^{(\alpha_0-\alpha_1)\mathbf{j}}} \left(\mathbf{t}^{-\theta} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (\mathbf{t}^\varepsilon 2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^q \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right)^{1/q} \leq \\ &\leq C_2 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \left(2^{-(\theta(\alpha_0-\alpha_1)\mathbf{j})} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (2^{(\varepsilon(\alpha_0-\alpha_1)\mathbf{j})+(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^q \right)^{1/q} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_2 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha - \alpha_0 \mathbf{j})} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (2^{(\varepsilon(\alpha_0 - \alpha_1) \mathbf{j}) + (\alpha_\varepsilon, \mathbf{k})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{1/\mathbf{q}} = \\
&= C_2 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha \mathbf{j})} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \min_{\varepsilon \in E} (2^{(\alpha_\varepsilon, \mathbf{k} - \mathbf{j})}) \|a_{\mathbf{k}}\|_A \right)^{\mathbf{q}} \right)^{1/\mathbf{q}} = \\
&= C_2 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} \left(2^{(\alpha \mathbf{j})} \sum_{\varepsilon \in E} I_\varepsilon(\|a\|_A; \mathbf{j}) \right)^{\mathbf{q}} \right)^{1/\mathbf{q}} \leq C_2 \sum_{\varepsilon \in E} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} (2^{(\alpha \mathbf{j})} I_\varepsilon(\|a\|_A; \mathbf{j}))^{\mathbf{q}} \right)^{1/\mathbf{q}},
\end{aligned}$$

где $I_\varepsilon(\|a\|_A; \mathbf{j}) = I_{\varepsilon_n}(\dots I_{\varepsilon_1}(\|a\|_A; \mathbf{j}))$ – композиция преобразований (1) и (2).

Далее используя неравенства Минковского, (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned}
\|a\|_{(l_1^{\alpha_\varepsilon}; \varepsilon \in E)_{\theta_{\mathbf{q}}}} &\leq C_2 \sum_{\varepsilon \in E} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} (2^{(\alpha \mathbf{j})} I_\varepsilon(\|a\|_A; \mathbf{j}))^{\mathbf{q}} \right)^{1/\mathbf{q}} = \\
&= C_2 \sum_{\varepsilon \in E} \left(\sum_{j_n = -\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha_{i_n} j_{i_n}} \dots \left(\sum_{j_1 = -\infty}^{\infty} (2^{\alpha_{i_1} j_{i_1}} \times \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times I_{\varepsilon_{i_n}}(\dots I_{\varepsilon_{i_1}}(\|a\|_A; \mathbf{j}))^{q_{i_1}} \right) \dots \right)^{q_{i_n}/q_{i_{n-1}}} \right)^{1/q_{i_n}} \\
&\leq C_2 \sum_{\varepsilon \in E} \left(\sum_{j_n = -\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha_{i_n} j_{i_n}} I_{\varepsilon_{i_n}} \left(\dots \left(\sum_{j_1 = -\infty}^{\infty} (2^{\alpha_{i_1} j_{i_1}} \times \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. \times \dots I_{\varepsilon_{i_1}}(\|a\|_A; \mathbf{j}))^{q_{i_1}} \right) \dots \right) \right)^{q_{i_n}/q_{i_1}} \right)^{1/q_{i_n}} \\
&\leq C_3 \sum_{\varepsilon \in E} \left(\sum_{j_n = -\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha_{i_n} j_{i_n}} \dots \left(\sum_{j_1 = -\infty}^{\infty} (2^{\alpha_{i_1} j_{i_1}} \|a_{j_1, \dots, j_n}\|_A)^{q_{i_1}} \right) \dots \right)^{q_{i_n}/q_{i_{n-1}}} \right)^{1/q_{i_n}} = \\
&= C_4 \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^n} (2^{(\alpha \mathbf{j})} \|a_{\mathbf{j}}\|_A)^{\mathbf{q}} \right)^{1/\mathbf{q}} = C_4 \|a\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha(A)}}.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство означает вложение (6).

Теорема доказана полностью.

3 Интерполяция анизотропных пространств Никольского-Бесова

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ и $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$.

Для тригонометрического ряда $f \sim \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{d}}}$ обозначим через

$$\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{k}} e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{d}}},$$

где $\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{d}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} k_j^i x_j^i$ – скалярное произведение, а $\rho(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbf{d}} : [2^{s_i-1}] \leq \max_{j=1, \dots, d_i} |k_j^i| < 2^{s_i}, i = 1, \dots, n\}$.

По аналогии с [9], [11] анизотропным пространством Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ назовем множество рядов $f \sim \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\mathbf{d}}} a_{\mathbf{k}} e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{d}}}$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = \|\{\|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}\}\|_{l_{\alpha}^{\mathbf{q}}}.$$

Замечание 1 *Определенное таким образом анизотропное пространство Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ в случае $n = 1$ совпадает с изотропным пространством типа Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}(\mathbb{T}^{d_1})$ [8, 10], а в случае $\mathbf{d} = (1, \dots, 1)$ – с анизотропным пространством с доминирующей смешанной производной типа Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$ [12].*

Определение 1 Пусть A и B – два нормированных банаховых пространства. Оператор $R \in L(A, B)$ называется ретракцией, если существует оператор $S \in L(B, A)$, такой, что

$$RS = E \quad (\text{тождественный оператор из } L(B, B)).$$

При этом оператор S называется коретракцией (соответствующей R).

Лемма 4 Пусть $-\infty < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$. Тогда пространство $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ является ретракцией пространства $l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))$.

Доказательство. Шаг 1. Для функции $f \in B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ определим оператор S следующим образом

$$Sf = \{\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\}_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^n} = \{(\Delta_{\mathbf{s}} * f)(\mathbf{x})\}_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^n},$$

здесь $\Delta_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ – ядро Дирихле, соответствующее блоку $\rho(\mathbf{s})$.

Тогда согласно определению имеем

$$\|Sf\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))} = \|\{\Delta_{\mathbf{s}}(f, \cdot)\}\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}))} = \|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})},$$

что означает выполнение S -свойства.

Шаг 2. Для последовательности $f = \{f_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\}_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^n}$ определим оператор

$$Rf = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^n} (\Delta_{\mathbf{s}} * f_{\mathbf{s}})(\mathbf{x}).$$

Тогда согласно неравенства М. Рисса об ограниченности параллелепипедных частичных сумм, получим

$$\|\Delta_{\mathbf{m}} * f\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d)} \leq C \|f\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d)},$$

где C – абсолютная постоянная, и далее

$$\begin{aligned} \|Rf\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^d)} &= \|\{(\Delta_{\mathbf{s}} * f_{\mathbf{s}}) * \Delta_{\mathbf{s}}\}\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d))} = \\ &= \|\{\Delta_{\mathbf{s}} * f_{\mathbf{s}}\}\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d))} \leq C \|\{f_{\mathbf{s}}\}\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d))} = \\ &= C \|f\|_{l_{\mathbf{q}}^{\alpha}(L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d))}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство означает выполнение R -свойства.

Шаг 3. Покажем, что $RS = E$. Действительно

$$\begin{aligned} RSf(\mathbf{x}) &= R(\{\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x})\}) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^n} (\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) * \Delta_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})) = \\ &= \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_+^n} ((S_{2^{\mathbf{s}}} - S_{2^{\mathbf{s}-1}}) * f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Лемма полностью доказана.

Теорема 2 Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $\mathbf{q}_0 = (q_1^0, \dots, q_n^0)$, $\mathbf{q}_1 = (q_1^1, \dots, q_n^1) \leq \infty$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$. Тогда для $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ справедливо равенство

$$(B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\varepsilon\mathbf{q}}(\mathbb{T}^d); \varepsilon \in E)_{\theta\mathbf{q}} = B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^d),$$

где $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Доказательство следует из леммы 4 и теоремы 1. □

Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ и $I = (i_1, \dots, i_n)$, $i_j \in \{1, \dots, d_j\}$ для всех $j = 1, \dots, n$. Анизотропным пространством Соболева $W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^d)$ назовем множество тригонометрических рядов $f \sim \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})_d}$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^d)} = \sum_I \left\| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \Lambda_{\mathbf{k}}(I) a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})_d} \right\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d)},$$

здесь $\Lambda_{\mathbf{k}}(I) = \prod_{j=1}^n \max(1, |k_{i_j}^j|^{\alpha_j})$.

Следствие 1 Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$, $-\infty < \alpha_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) < \alpha_1 = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_n^1) < \infty$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$. Тогда для $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) < \mathbf{1}$ и $\mathbf{1} \leq \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \leq \infty$ справедливо равенство

$$(W_{\mathbf{pr}}^{\alpha\varepsilon}(\mathbb{T}^d); \varepsilon \in E)_{\theta\mathbf{q}} = B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^d),$$

где $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$.

Доказательство следует из теоремы 2 и вложений $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha 1}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha \infty}(\mathbb{T}^d)$. \square

Замечание 2 Интерполяционные свойства изотропных пространств Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля были изучены в работах И. Асекритовой, Н. Кругляка, Л. Малигранда, Л. Николовой и Л.-Е. Персона [14], К.А. Бекмаганбетова и Е.Д. Нурсултанова [15], В.Л. Крепкогорского [16, 17], Д. Петре [18], К.А. Бекмаганбетова [19] и других авторов.

4 Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского-Бесова и Лоренца

В данном разделе получены предельные теоремы вложения разных метрик для анизотропных пространств Никольского-Бесова и анизотропных пространств Лоренца.

Лемма 5 (Неравенство разных метрик) Пусть $T_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ тригонометрический полином порядка не выше $\mathbf{s} = (s_1^1, \dots, s_{d_1}^1; \dots; s_1^n, \dots, s_{d_n}^n)$ по мультипеременной $\mathbf{x} = (x_1^1, \dots, x_{d_1}^1; \dots; x_1^n, \dots, x_{d_n}^n)$. Тогда при $\mathbf{1} < \mathbf{p}_1 = (p_1^1, \dots, p_n^1) \leq \mathbf{p}_2 = (p_1^2, \dots, p_n^2) < \infty$, $\mathbf{0} < \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \leq \infty$ имеет место неравенство

$$\|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p}_2 \mathbf{r}}(\mathbb{T}^d)} \leq C \prod_{\{i: p_i^1 < p_i^2\}} \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p}_1 \mathbf{r}}(\mathbb{T}^d)}, \tag{7}$$

где C - положительная постоянная, не зависящая от \mathbf{s} .

Доказательство. Из условия леммы мультииндексы $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}_1}$ и $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}_2}$ принадлежат открытому параллелепипеду $(0; 1)^n$. Следовательно, существует параллелепипед $Q_h(\mathbf{0})$ с центром в нуле такой, что $Q_h(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}_1}) \subset (0; 1)^n$ и $Q_h(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}_2}) \subset (0; 1)^n$, здесь сторона h зависит только от параметров \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 . Отметим, что для вершин $\left\{ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}_1^\varepsilon} \right\}_{\varepsilon \in \mathbf{E}}$ и $\left\{ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}_2^\varepsilon} \right\}_{\varepsilon \in \mathbf{E}}$ параллелепипедов $Q_h(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}_1})$ и $Q_h(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}_2})$ имеет место равенство

$$\frac{1}{p_1^\varepsilon} - \frac{1}{p_2^\varepsilon} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}, \quad \varepsilon \in E.$$

Из неравенства разных метрик для пространств Лебега со смешанной метрикой для тригонометрических полиномов имеют место

$$\|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p}_2^\varepsilon}(\mathbb{T}^d)} \leq C_1 \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p}_1^\varepsilon}(\mathbb{T}^d)}, \quad \varepsilon \in E,$$

где C_1 - абсолютная постоянная.

Далее согласно предыдущего неравенства и теоремы М. Рисса об ограниченности частичных сумм в пространстве Лебега со смешанной метрикой получаем

$$\|S_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p}_2^\varepsilon}(\mathbb{T}^d)} \leq C_1 \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|S_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p}_1^\varepsilon}(\mathbb{T}^d)} \leq$$

$$\leq C_2 \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|f\|_{L_{\mathbf{p}_1^i}(\mathbb{T}^d)}, \quad \varepsilon \in E.$$

Применяя леммы 1 и 2 б) к оператору $S_{\mathbf{s}}(f)$ получаем

$$\|S_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{p}_2^{\mathbf{r}}}(\mathbb{T}^d)} \leq C \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|f\|_{L_{\mathbf{p}_1^{\mathbf{r}}}(\mathbb{T}^d)}.$$

Для доказательства точности в смысле порядка неравенства (7) достаточно рассмотреть полиномы $T_{\mathbf{s}}^{(\beta)}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n T_{s_i}^{(\beta_i)}(x_i)$, где $T_{s_i}^{(\beta_i)}(x_i) = \sum_{k_i=1}^{s_i} \frac{\cos k_i x_i}{k_i^{\beta_i}}$, так как согласно теоремы Харди-Литтлвуда в пространствах Лоренца $L_{pr}(\mathbb{T}^d)$ [12] при $\beta_i \neq 1/p'_i$ имеем

$$\|T_{\mathbf{s}}^{(\beta)}\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d)} = \prod_{i=1}^n \|T_{s_i}^{(\beta_i)}\|_{L_{p_i r_i}(\mathbb{T})} \sim \prod_{i=1}^n \left(\sum_{l_i=1}^{s_i} l_i^{(1/p'_i - \beta_i)r_i - 1} \right)^{1/r_i} \sim \prod_{i=1}^n s_i^{1/p'_i - \beta_i}.$$

Замечание 3 Аналогично доказывается следующий вариант неравенства разных метрик. Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Тогда справедливо неравенство

$$\|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p}_2^{\mathbf{r}}}(\mathbb{T}^d)} \leq C \prod_{\{i: p_i^1 < p_i^2\}} \prod_{j=1}^{d_i} (s_j^i)^{1/p_i^1 - 1/p_i^2} \|T_{\mathbf{s}}\|_{L_{\mathbf{p}_1}(\mathbb{T}^d)}, \quad (8)$$

где C - положительная постоянная, не зависящая от \mathbf{s} .

Теорема 3 Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$. Тогда при $\alpha = \left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}$ имеет место вложение

$$B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow L_{\mathbf{qr}}(\mathbb{T}^d).$$

Доказательство. Согласно неравенства Минковского и неравенства разных метрик (7) получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{\mathbf{qr}}(\mathbb{T}^d)} &= \left\| \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \Delta_{\mathbf{k}}(f) \right\|_{L_{\mathbf{qr}}(\mathbb{T}^d)} \leq \\ &\leq \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{qr}}(\mathbb{T}^d)} \leq \sum_{\mathbf{k}=0}^{\infty} 2^{((\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}})\mathbf{d}, \mathbf{k})} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^d)} = \|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{1}}(\mathbb{T}^d)}, \end{aligned}$$

где $\alpha = \left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}$.

Таким образом, при $\alpha = \left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}}\right)\mathbf{d}$ справедливо вложение

$$B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{1}}(\mathbb{T}^d) \hookrightarrow L_{\mathbf{qr}}(\mathbb{T}^d).$$

Зафиксируем $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ и подберем параметры $\alpha_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$ и $\mathbf{q}_i = (q_1^i, \dots, q_n^i)$ так, что $\alpha_j^i = \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^i}\right) d_j$, $i = 0, 1, j = 1, \dots, n$. Тогда для любого $\varepsilon \in E$ имеем, что

$$B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\varepsilon\mathbf{1}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow L_{\mathbf{q}\varepsilon\mathbf{r}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}).$$

Согласно леммы 2 а) и теоремы 2 получаем

$$(B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\varepsilon\mathbf{1}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E)_{\theta, \tau} \hookrightarrow (L_{\mathbf{q}\varepsilon\mathbf{r}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E)_{\theta, \tau}$$

или

$$B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}),$$

где $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}} = \frac{1 - \theta}{\mathbf{q}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{q}_1}$.

Проверим соотношение между параметрами α , \mathbf{p} и \mathbf{q}

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = (1 - \theta) \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}_0}\right) \mathbf{d} + \theta \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}_1}\right) \mathbf{d} = \\ &= \left(\frac{1 - \theta}{\mathbf{p}} + \frac{\theta}{\mathbf{p}}\right) \mathbf{d} - \left(\frac{1 - \theta}{\mathbf{q}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{q}_1}\right) \mathbf{d} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right) \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Теорема 4 Пусть $\mathbf{1} < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \infty$, $\mathbf{1} \leq \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \leq \infty$. Тогда при $\alpha = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right) \mathbf{d}$ имеет место вложение

$$L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}).$$

Доказательство. Согласно неравенства разных метрик (8) и теореме М. Рисса об ограниченности параллелепипедных частичных сумм получим

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\infty}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} &= \sup_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} 2^{(\alpha, \mathbf{k})} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq \\ &\leq C_1 \sup_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} 2^{(\alpha + (\frac{1}{\mathbf{q}} - \frac{1}{\mathbf{p}})\mathbf{d}, \mathbf{k})} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} = C_1 \sup_{\mathbf{k} \geq \mathbf{0}} \|\Delta_{\mathbf{k}}(f)\|_{L_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})} \leq C_2 \|f\|_{L_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})}, \end{aligned}$$

так как $\alpha = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right) \mathbf{d}$.

Таким образом, при $\alpha = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}}\right) \mathbf{d}$ справедливо вложение

$$L_{\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\infty}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}).$$

Зафиксируем $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ и подберем параметры $\alpha_i = (\alpha_1^i, \dots, \alpha_n^i)$ и $\mathbf{q}_i = (q_1^i, \dots, q_n^i)$ так, что $\alpha_j^i = \left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j^i}\right) d_j$, $i = 0, 1, j = 1, \dots, n$. Тогда для любого $\varepsilon \in E$ имеем, что

$$L_{\mathbf{q}\varepsilon}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\varepsilon\infty}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}).$$

Согласно леммы 2 б) и теоремы 2 получаем

$$(L_{\mathbf{q}_\varepsilon}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E)_{\theta, \tau} \hookrightarrow (B_{\mathbf{pr}}^{\alpha_\varepsilon \infty}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}); \varepsilon \in E)_{\theta, \tau}$$

или

$$L_{\mathbf{q}\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}) \hookrightarrow B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\tau}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}}),$$

где $\alpha = (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $\frac{1}{\mathbf{q}} = \frac{1 - \theta}{\mathbf{q}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{q}_1}$.

Проверим соотношение между параметрами α , \mathbf{p} и \mathbf{q}

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - \theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 = (1 - \theta) \left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}_0} \right) \mathbf{d} + \theta \left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}_1} \right) \mathbf{d} = \\ &= \left(\frac{1 - \theta}{\mathbf{p}} + \frac{\theta}{\mathbf{p}} \right) \mathbf{d} - \left(\frac{1 - \theta}{\mathbf{q}_0} + \frac{\theta}{\mathbf{q}_1} \right) \mathbf{d} = \left(\frac{1}{\mathbf{p}} - \frac{1}{\mathbf{q}} \right) \mathbf{d}. \end{aligned}$$

Замечание 4 Можно показать, что условия теорем 3 и 4 неулучшаемы.

5 Заключение

В данной работе изучены интерполяционные свойства анизотропных пространств Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ относительно анизотропного метода интерполяции. Как следствие описаны интерполяционные свойства анизотропных пространств Соболева $W_{\mathbf{pr}}^{\alpha}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$.

Также получены предельные теоремы вложения между анизотропными пространствами Никольского-Бесова $B_{\mathbf{pr}}^{\alpha\mathbf{q}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$ и Лоренца $L_{\mathbf{pr}}(\mathbb{T}^{\mathbf{d}})$.

Отметим, что полученные интерполяционные теоремы и теоремы вложения являются аппаратом исследования для некоторых задач гармонического анализа, теории приближений и теории краевых задач математической физики.

Литература

- [1] Соболев С. Об одной теореме функционального анализа // Матем. сб. – 1938. – Т. 4(46), № 3. – С. 471 – 497.
- [2] Никольский С.М. Неравенства для целых функций конечной степени и их приложение в теории дифференциальных функций многих переменных. // Труды МИАН: Сб. статей, посв. 60-летию акад. И.М.Виноградова. – М.: АН СССР, – Т. 38. – 1951. – С. 244 – 278.
- [3] Бесов О.В. Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Труды МИАН: Сб. статей, посв. 60-летию акад. М.А.Лаврентьева. – М.: АН СССР, – Т. 60. – 1961. – С. 42 – 81.
- [4] Лизоркин И.П. Пространства $L_p^r(\Omega)$. Теоремы продолжения и вложения // Докл. АН СССР, –Т. 145. – 1962. – С. 527-530.
- [5] Triebel H. Spaces of distributions of Besov type on Euclidean n -space. Duality, interpolation // Ark. Mat. – V. 11, № 1-2. – 1973. – P. 13 – 64.
- [6] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука. – 1969.
- [7] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука. – 1975.

- [8] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 400 с.
- [9] *Нурсултанов Е.Д.* Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Доклады РАН. – 2004. – Т. 394, № 1. – С. 1 – 4.
- [10] *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.
- [11] *Bazarkhanov D.B.* Estimates for the widths of classes of periodic functions of several variables - I // Eurasian mathematical journal. – 2010. – V. 1, № 3. – P. 11–26.
- [12] *Бекмаганбетов К.А., Нурсултанов Е.Д.* Теоремы вложения анизотропных пространств Бесова $B_{p\mathbf{r}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$ // Известия РАН. Серия математическая. – 2009. – Т. 73, № 4. – С. 3 – 16.
- [13] *Нурсултанов Е.Д.* О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p -пространств // Известия РАН. Сер. матем. – 2000. – Т. 64, № 1. – С. 95 – 122.
- [14] *Asekritova I., Krugljak N., Maligranda L., Nikolova L. and Persson L.-E.* Lions-Peetre reiteration formulas for triples and their applications // Studia Math. – 2001, – V. 145, – P. 219 – 254.
- [15] *Bekmaganbetov K.A. and Nursultanov E.D.* Method of multiparameter interpolation and embedding theorems in Besov spaces $B_{p\mathbf{r}}^{\alpha}[0, 2\pi)$ // Analysis Math. – 1998, – V. 24. – P. 241 – 263.
- [16] *Krepkogorskii V.L.* Interpolation in Lizorkin-Triebel and Besov spaces // Mat. sbornik. – 1994, – V. 73, № 4. – P. 63 – 76.
- [17] *Krepkogorskii V.L.* Realization of interpolation Sparr method in the class of spaces of smooth funtions // Matem. Zametki. – 2001, – V. 70, № 4. – P. 581 – 590.
- [18] *Peetre J.* Thoughts on Besov spaces: Lecture notes. – Lund. – 1966.
- [19] *Бекмаганбетов К.А.* Теорема интерполяции для пространств $l_q^{\sigma}(L_{p\tau})$ и $L_{p\tau}(l_q^{\sigma})$ // Вестник КазНУ. – 2008, –Т. 56 № 1. – С. 30 – 42.

References

- [1] *Sobolev S.* On a theorem of functional analysis. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 34, – 1963, – P. 39 – 68.
- [2] *Nikol'skij S.M.* Inequalities for entire functions of finite degree and their application to the theory of differentiable functions of several variables. // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. – V. 80. – 1969. – P. 1 – 38.
- [3] *Besov O.V.* Investigation of a family of function spaces in connection with theorems of imbedding and extension // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. – V. 40. – 1964. – P. 85 – 126.
- [4] *Lizorkin P.I.* $L_p^r(\Omega)$ spaces. Extension and imbedding theorems // Soviet Math. Dokl., – V. 3. – 1962. – P. 1053-1057.
- [5] *Triebel H.* Spaces of distributions of Besov type on Euclidean n -space. Duality, interpolation // Ark. Mat. – V. 11, № 1–2. – 1973. – P. 13 – 64.
- [6] *Nikol'skij S.M.* Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. – Springer-Verlag, New York – Heidelberg: Grundlehren Math. Wiss. – V. 205. – 1975.
- [7] *Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skij S.M.* Integral representations of functions and imbedding theorems. – V. I, II. – Winston, Washington, DC. Wiley, New York – Toronto, ON – London. – 1979.
- [8] *Triebel H.* Interpolation theory, function spaces, differential operators. North-Holland Library. – V. 18. North-Holland, Amsterdam – New York – Oxford, 1978.
- [9] *Nursultanov E.D.* Interpolation theorems for anisotropic function spaces and their applications // Doklady. Mathematics. 2004, vol. 69, №, pp. 16-19.
- [10] *Bergh J. and Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 223, Springer-Verlag, Berlin – Hiedelburg – New York 1976.

- [11] *Bazarkhanov D.B.* Various representations and equivalent normalizations of Nicol'skii-Besov and Lizorkin-Triebel spaces of the generalized mixed smoothness. Dokl. Akad. nauk. Vol. 402, No. 3, – pp. 298 – 302.
- [12] *Bekmaganbetov K.A. and Nursultanov E.D.* Embedding theorems for anisotropic Besov spaces $B_{\mathbf{p}\mathbf{r}}^{\alpha\mathbf{q}}([0, 2\pi)^n)$ // *Izvestiya: Mathematics* (2009), 73(4):655. – pp. 3 – 16.
- [13] *Nursultanov E.D.* On the coefficients of multiple Fourier series from L_p -spaces. (Russian) // *Izvestiya: Mathematics* (2000), 64: 1, – pp. 93 – 120.
- [14] *Asekritova I., Krugljak N., Maligranda L., Nikolova L. and Persson L.-E.* Lions-Peetre reiteration formulas for triples and their applications // *Studia Math.* – 2001, – V. 145, – P. 219 – 254.
- [15] *Bekmaganbetov K.A. and Nursultanov E.D.* Method of multiparameter interpolation and embedding theorems in Besov spaces $B_{\mathbf{p}}^{\alpha}[0, 2\pi)$ // *Analysis Math.* – 1998, – V. 24. – P. 241 – 263.
- [16] *Krepkogorskii V.L.* Interpolation in Lizorkin-Triebel and Besov spaces // *Mat. sbornik.* – 1994, – V. 73, № 4. – P. 63 – 76.
- [17] *Krepkogorskii V.L.* Realization of interpolation Sparr method in the class of spaces of smooth funtions // *Matem. Zametki.* – 2001, – V. 70, № 4. – P. 581 – 590.
- [18] *Peetre J.* Thoughts on Besov spaces: Lecture notes. – Lund. – 1966.
- [19] *Bekmaganbetov K.A.* Interpolation theorem for $l_q^{\sigma}(L_{p\tau})$ and $L_{p\tau}(l_q^{\sigma})$ spaces // *Vestnik KazNU.* – 2008, V. 56, № 1. – P. 30 – 42.

УДК 517.938

Кабидолданова А.А.

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: kabasem@mail.ru

К решению задачи выпуклого программирования

В данной работе предлагается подход к решению задачи выпуклого программирования. Характерной особенностью рассматриваемой задачи является то, что ее система ограничений содержит только линейные равенства. Эта особенность является основой для замены в окрестности исследуемой точки нелинейной целевой функции функцией линейной, благодаря чему решение исходной задачи сводится к последовательному решению задач линейного программирования. Полученная задача линейного программирования решается путем корректировки значения целевой функции на множестве допустимых решений и определяются допустимые и оптимальные решения. Далее вычисляются и сравниваются значения исходной целевой функции в найденных допустимых и оптимальной точках и определяется вспомогательное приближение. Следующее приближение определяется как выпуклая комбинация предыдущего и вспомогательного приближений. Следует отметить, что, в отличие от метода множителей Лагранжа, разработанный метод может быть применен и к задачам, для которых соответствующая функция Лагранжа не имеет седловой точки. Работа содержит описание метода, обоснование его сходимости, схемы алгоритмов и результаты экспериментов. Предлагаемый алгоритм сочетает идеи метода условного градиента [1] и метода решения задачи линейного программирования [2].

Ключевые слова: выпуклое программирование, линейные ограничения, линеаризация, допустимое решение, вспомогательное приближение, оптимальное решение, оптимизационная задача.

Kabidoldanova A.A.

On solving convex programming problem

In this paper an algorithm for solving convex programming problem is proposed. The specific feature of the considered problem is that its constraints contain only linear equalities. This feature is a basis for the replacement the nonlinear objective function in the neighbourhood of the tested point by a linear one, due to what solving an original problem is reduced to sequential solving linear programming problems. The obtained linear programming problem is solved by sequential correction the value of an objective function on a set of admissible solutions and an admissible as well as optimal solutions are found. Further values of an original objective function at the found admissible and optimal points are calculated and an auxiliary approach is determined. The next approach is defined as a convex combination of a previous and an auxiliary approaches. Note that unlike the Lagrange multipliers method the developed method is applied to problems with the Lagrange function which hasn't a saddle point. The paper contains a description of the method, a proof of its convergence, schemes of algorithms and experimental results. The proposed algorithm combines ideas of the conditional gradient method [1] and a method for solving linear programming problem [2].

Key words: convex programming, linear constraints, linearization, admissible solution, auxiliary approximation, optimal solution, optimization problem.

Кабидолданова А.А.

Дөңес программалау есебін шешу туралы

Жұмыста дөңес программалау есебін шешу жолы ұсынылады. Қарастырылып отырған есептің ерекшелігі оның шектеулерінің жүйесі тек сызықты теңдіктерден тұратындығында. Осы ерекшелігі сызықты емес мақсатты функцияны зерттеліп отырған нүктенің маңайында сызықты функциямен ауыстыруға негіз болып табылады. Нәтижесінде қойылған есеп сызықты программалау есептерін шешуге әкелінеді. Алынған есеп сызықты программалау есебі мүмкін болатын шешімдердің жиынында мақсатты функцияның мәнін түзету арқылы шешіліп, мүмкін болатын және тиімді шешімдер табылады. Табылған мүмкін болатын және тиімді нүктелерде мақсатты функцияның мәндері есептеліп, көмекші жуықтау анықталады. Келесі жуықтау алдыңғы және көмекші жуықтаулардың комбинациясы ретінде анықталады. Лагранж көбейткіштері әдісімен салыстырғанда ұсынылып отырған әдіспен сәйкес Лагранж функциясының қайқы нүктесі жоқ болатын есептерді де шешуге болады. Жұмыста әдістің сипаттамасы, оның жинақталуының дәлелдеуі, алгоритмдер және эксперименттер нәтижелері келтірілген. ұсынылып отырған алгоритм шартты градиент әдісі [1] және сызықты программалау әдісі [2] идеяларын қамтиды.

Түйін сөздер: дөңес программалау, сызықты шектеулер, линеаризациялау, мүмкін болатын шешім, көмекші жуықтау, тиімді шешім, тиімділеу есебі.

1 Введение

Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий), например, при решении проблем управления и планирования производственных процессов, в проектировании и перспективном планировании, в военном деле и т.д. Раздел математического программирования, где изучаются задачи с нелинейной целевой функцией и (или), когда нелинейна хотя бы одна из функций системы ограничений, называется нелинейным программированием. Методы нелинейного программирования получили широкое применение при расчете экономически выгодных партий запуска деталей в производство, при определении экономически выгодной партии поставки, поставочного комплекта, размеров запасов, распределении ограниченных ресурсов, размещении производительных сил, в тарном хозяйстве, при решении многих производственно-экономических задач и т.д. Широкий класс задач математического программирования связан с минимизацией выпуклых функций многих переменных, определенных на выпуклом множестве. Такие задачи называют задачами выпуклого программирования. Метод множителей Лагранжа является классическим методом решения задач математического программирования (в частности выпуклого). К сожалению, при практическом применении метода могут встретиться значительные вычислительные трудности, сужающие область его использования [3]. Решение задачи методом Лагранжа получается ценой повышения ее размерности за счет введения неопределенных множителей Лагранжа, число которых равно числу уравнений связи. Поэтому с повышением числа переменных и ограничений целесообразно переходить к численным методам математического программирования. Кроме того, метод множителей Лагранжа сводит решение исходной задачи к поиску седловой точки функции Лагранжа. Однако существуют задачи нелинейного программирования, имеющие решение, но их функция Лагранжа не имеет седловых точек.

За последние годы появилось большое количество работ, посвященных численным методам решения задач математического программирования, основанным на построении модифицированных функций Лагранжа. Метод модифицированных функций Лагранжа позволяет расширить область применения метода множителей Лагранжа и имеет своей целью повысить эффективность вычислительных процессов отыскания седловых точек. Однако, так же как и классический метод множителей Лагранжа, для разрешимых задач, соответствующие модифицированные функции Лагранжа которых не имеет седловых точек, этот метод не применим. Численная реализация метода модифицированных функций Лагранжа связано с вычислением вторых производных, которые не определены всюду для многих известных модифицированных функций Лагранжа [4]. Метод проекции градиента применяют на множестве такого вида, что задача отыскания проекции некоторой точки является достаточно простой с точки зрения ее численной реализации, так как решение этой задачи и определяет направление спуска. В методах штрафных и барьерных функций целевая функция заменяется некоторой обобщенной функцией, значения которой совпадают со значениями исходной функции внутри допустимой области, но при приближении к границе области, а тем более при выходе из нее резко возрастают за счет второго слагаемого обобщенной функции. Поиск точки минимума методами штрафных и барьерных функций усложняется, если экстремум достигается на границе области. Поскольку значения обобщенной функции при приближении к границе области определяются главным образом величиной второго слагаемого, экстремум не всегда может быть вычислен с заданной точностью [3]. Предприняты попытки построить штрафные функции, параметры которых остаются конечными. К сожалению, такие штрафные функции, как правило, оказываются либо недифференцируемыми [5-7], либо лишь локально дифференцируемыми [8]; их использование нередко не позволяет свести решение задачи минимизации с ограничениями к решению задач безусловной минимизации и сопряжено с необходимостью отыскания стационарной, или седловой, точки для заданной штрафной функции [9-14]. Модификация метода логарифмических барьерных функций, основанная на идее параметрического смещения ограничений исходной задачи, предложена в работе [15].

В работе [16] предложен алгоритм учета ограничений равенств, основанный на процедуре рекуррентного псевдообращения для задач с квадратичной целевой функцией. Возможности применения расширенных штрафных функций для регуляризации и оптимальной коррекции задач выпуклого программирования исследованы в [17]. Применение симплекс-метода, основанного на методе жордановых исключений, к решению задачи выпуклого программирования показано в [18].

В данной работе предлагается подход к решению задачи выпуклого программирования, который сочетает идеи метода условного градиента [1] и метода решения задачи линейного программирования [2]. Характерной особенностью рассматриваемой задачи является то, что ее система ограничений содержит только линейные равенства. Эта особенность является основой для замены в окрестности исследуемой точки нелинейной целевой функции функцией линейной, благодаря чему решение исходной задачи сводится к последовательному решению задач линейного программирования.

Известно, что наиболее употребительным алгоритмическим аппаратом линейного программирования является симплекс-метод, разработанный Дж. Данцингом [19]. Симплекс-метод прост как для математического интуитивного понимания, так и для реали-

зации. Недостатком симплекс-метода является его чувствительность к вырожденности задачи, что может привести к бесконечному числу итераций и невозможности построения последовательности управляющих воздействий. Численный метод исследования разрешимости и построения решения задачи линейного программирования, разработанный С.А. Айсагалиевым [2], применим как к вырожденным, так и невырожденным задачам линейного программирования.

2 Постановка задачи

Рассмотрим задачу следующего вида

$$J(u) \rightarrow \inf, \quad (1)$$

$$u \in U = \{u \in R^n / u \in U_0, g(u) = Au - b = 0\}, \quad (2)$$

где $J(u) \in C^1(U_0)$ - выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве U_0 , $b \in R^m$ - заданный вектор, A - заданная матрица порядка $m \times n$, $U_0 = \{u \in R^n / u_j \geq 0, j \in I\}$, $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

Пусть $u_0 \in U$ - произвольная точка. Определим вспомогательное приближение $\bar{u}_k \in U$, $k = 0, 1, 2, \dots$ из условия

$$J(\bar{u}_k) = \min\{J(u_{dk}^m), m = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (3)$$

где u_{dk}^m , $m = 0, 1, 2, \dots$ - допустимые решения задачи

$$J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k \rangle \rightarrow \inf, \quad u \in U. \quad (4)$$

Отметим, что среди допустимых решений u_{dk}^m , $m = 0, 1, 2, \dots$ задачи (4) содержится и оптимальное ее решение.

Следующее приближение строится по формуле

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\bar{u}_k - u_k), \quad (5)$$

здесь α_k определяется из условия

$$f_k(\alpha_k) = \min f_k(\alpha), \quad \alpha \in [0, 1], \quad f_k(\alpha) = J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)). \quad (6)$$

3 Определение вспомогательного приближения

Как следует из (3), для определения вспомогательного приближения $\bar{u}_k \in U$, $k = 0, 1, 2, \dots$, необходимо найти допустимые решения u_{dk}^m , $m = 0, 1, 2, \dots$ задачи (4). Допустимыми решениями задачи (4) являются точки множества U .

3.1 Оптимизационная задача

Задача (4) решается [2] путем сведения к задаче следующего вида

$$J_{1k}(u, \gamma) = [J_k(u) - \gamma]^2 + [Au - b]^*[Au - b] \rightarrow \inf, \quad (7)$$

$$u \in U_0, \quad \gamma \in \Gamma_k, \quad \Gamma_k = \{\gamma \in R^1 / \gamma \leq \gamma_{dk}\}, \quad (8)$$

здесь $\gamma_{dk} = J_k(u_d)$, $u_d \in U$ - произвольная точка.

Рассмотрим задачу (7), (8) для фиксированных значений k и $\gamma = \bar{\gamma}_k \in \Gamma_k$. Теперь задача (7), (8) примет вид

$$F(u) = J_{1k}(u, \bar{\gamma}_k) = [J_k(u) - \bar{\gamma}_k]^2 + [Au - b]^*[Au - b] \rightarrow \inf, \quad (9)$$

$$u \in U_0. \quad (10)$$

Лемма 1 Пусть $\inf_{u \in U_0} F(u) = F(u_{dk}) = 0$. Тогда $u_{dk} \in U_0$ - допустимое решение задачи (4).

Доказательство. Пусть $\inf_{u \in U_0} F(u) = F(u_{dk}) = 0$, т.е. $[J_k(u_{dk}) - \bar{\gamma}_k]^2 + [Au_{dk} - b]^*[Au_{dk} - b] = 0$, $u_{dk} \in U_0$. Отсюда следует, что $J_k(u_{dk}) = \bar{\gamma}_k$, $Au_{dk} = b$, $u_{dk} \in U_0$. Следовательно, $u_{dk} \in U$. Другими словами, u_{dk} - допустимое решение задачи (4). Лемма доказана.

Как следует из леммы 1, для построения допустимых решений задачи (4) необходимо решить задачу (7), (8) для различных значений $\bar{\gamma}_k$ и определить такие значения $(u, \bar{\gamma}_k)$, при которых $\inf_{u \in U_0} J_{1k}(u, \bar{\gamma}_k) = \inf_{u \in U_0} F(u) = 0$. Если $\inf_{u \in U_0} J_{1k}(u, \bar{\gamma}_k) = \inf_{u \in U_0} F(u) > 0$, то не существует точки на множестве U , при которой целевая функция $J_k(u)$ принимает заданное значение $\bar{\gamma}_k$.

3.2 Свойства вспомогательной целевой функции

Лемма 2 Функция $F(u)$ выпукла на выпуклом множестве U_0 .

Доказательство. Отметим, что множество U_0 выпукло, т.е. $\alpha u^1 + (1 - \alpha)u^2 \in U_0 \quad \forall u_1, u_2 \in U_0, \quad \alpha \in [0, 1]$. Функция $F(u) \in C^2(U_0)$, частные производные

$$F'(u) = 2J'(u_k)[J_k(u) - \bar{\gamma}_k] + 2A^*[Au - b],$$

$$F''(u) = 2J'(u_k)(J'(u_k))^* + 2A^*A \geq 0.$$

Тогда согласно критерию выпуклости дважды непрерывно-дифференцируемых на выпуклом множестве функций, функция $F(u)$ выпукла на U_0 . Лемма доказана.

Лемма 3 Производная

$$F'(u) = 2J'(u_k)[J_k(u) - \bar{\gamma}_k] + 2A^*[Au - b] \quad (11)$$

удовлетворяет условию Липшица на множестве U_0 , т.е.

$$|F'(u) - F'(v)| \leq L|u - v|, \quad \forall u, v \in U_0, \quad L = \text{const} > 0. \quad (12)$$

Доказательство. Производная $F'(u)$ может быть представлена в виде $F'(u) = S_k u + d_k$, где $S_k = 2[J'(u_k)(J'(u_k))^* + A^*A]$, $d_k = -2[J'(u_k)(J'(u_k))^*u_k + J'(u_k)\bar{\gamma}_k + A^*b]$. Тогда

$$|F'(u) - F'(v)| = |S_k u + d_k - S_k v - d_k| = |S_k(u - v)| \leq L|u - v|,$$

где $L = \|S_k\|$. Лемма доказана.

3.3 Решение оптимизационной задачи

Для решения задачи (9), (10) строим последовательность $\{u_n\}$ на основе формул (11), (12) по следующему правилу

$$u_{n+1} = P_{U_0}[u_n - F'(u_n)], \quad 0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{L + 2\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (13)$$

здесь L - постоянная Липшица из (12).

Теорема 1 Последовательность $\{u_n\} \subset U_0$ определяется по формуле (13), множество $M(u_0) = \{u \in U_0 / F(u) \leq F(u_0)\}$ ограничено. Тогда:

1) последовательность $\{u_n\} \subset M(u_0)$ является минимизирующей, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F_* = \inf_{u \in U_0} F(u);$$

2) последовательность $\{u_n\} \subset U_0$ сходится к множеству U_{0*} , $U_{0*} \neq \emptyset$, т.е. $u_n \rightarrow u_*$, при $n \rightarrow \infty$, $u_* \in U_{0*}$;

3) справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq F(u_n) - F_* \leq \frac{c^2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{n}, \quad (14)$$

где $c = \sup_{u \in M(u_0)} |F'(u)| + \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{d}$, \bar{d} - диаметр множества $M(u_0)$.

Доказательство. Поскольку $u_{n+1} \in U_0$ является проекцией точки $u_n - \alpha_n F'(u_n) \in R^n$, то $\langle u_{n+1} - u_n + \alpha_n F'(u_n), u - u_{n+1} \rangle \geq 0, \forall u, u \in U_0$. Отсюда получим

$$\langle F'(u_n), u - u_{n+1} \rangle \geq \frac{1}{\alpha_n} \langle u_n - u_{n+1}, u - u_{n+1} \rangle, \quad \forall u, u \in U_0, n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Поскольку функция $F(u) \in C^{1,1}(U_0)$, то справедливо неравенство

$$F(u_n) - F(u_{n+1}) \geq \langle F'(u_n), u_n - u_{n+1} \rangle - \frac{L}{2} |u_n - u_{n+1}|^2, \quad \forall u_n, u_{n+1} \in U_0. \quad (16)$$

Из (15), (16), с учетом неравенства $0 \leq \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq 2/(L + 2\varepsilon_1)$, имеем

$$F(u_n) - F(u_{n+1}) \geq \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{L}{2}\right) |u_n - u_{n+1}|^2 \geq \varepsilon_1 |u_n - u_{n+1}|^2, \quad (17)$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \forall u_n, u_{n+1} \in U_0, n = 0, 1, 2, \dots$$

Из (17) следует, что числовая последовательность $\{F(u_n)\}$ строго убывает, и она сходится в силу того, что функция $F(u) \geq 0, \forall u, u \in U_0$ ограничена снизу. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} [F(u_n) - F(u_{n+1})] = 0$ и из (17) имеем $|u_n - u_{n+1}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Множество $M(u_0)$ - компактно, $\{u_n\} \subset M(u_0)$ в силу того, что $F(u_{n+1}) < F(u_n) < \dots < F(u_1) \leq F(u_0)$, где $u_0 \in V$ - начальная точка для последовательности $\{u_n\} \subset U_0$. Множество $U_{0*} \subset M(u_0)$

и функция $F(u)$ достигает нижней грани на множестве $M(u_0)$. Следовательно, $U_{0*} \neq \emptyset$. Легко убедиться в том, что множество $M(u_0)$ выпукло.

Покажем, что последовательность $\{u_n\} \subset M(u_0)$ минимизирующая. Поскольку функция $F(u) \in C^1(M(u_0))$ выпукла на выпуклом множестве $M(u_0)$, то необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$F(u) - F(\varpi) \geq \langle F'(\varpi), u - \varpi \rangle, \quad \forall u, \varpi \in M(u_0).$$

Отсюда следует

$$F(\varpi) - F(u) \leq \langle F'(\varpi), \varpi - u \rangle, \quad \forall u, \varpi \in M(u_0). \quad (18)$$

Из (18), в частности, когда $u = u_* \in M(u_0)$, $\varpi = u_n \in M(u_0)$, имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq F(u_n) - F(u_*) &\leq \langle F'(u_n), u_n - u_* \rangle = \langle F'(u_n), u_n - u_{n+1} \rangle - \langle F'(u_n), u_{n+1} - u_* \rangle \leq \\ &\leq \langle F'(u_n), u_n - u_{n+1} \rangle - \frac{1}{\alpha_n} \langle u_n - u_{n+1}, u_* - u_{n+1} \rangle, \end{aligned}$$

в силу неравенства (15). Следовательно

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n = F(u_n) - F(u_*) &\leq \langle F'(u_n) - \frac{1}{\alpha_n}(u_* - u_{n+1}), u_n - u_{n+1} \rangle \leq \\ &\leq |F'(u_n) - \frac{1}{\alpha_n}(u_* - u_{n+1})| |u_n - u_{n+1}| \leq \left(\sup_{u \in M(u_0)} |F'(u)| + \frac{\bar{d}}{\varepsilon_0} \right) |u_n - u_{n+1}| = c |u_n - u_{n+1}|. \end{aligned}$$

Так как по доказанному $|u_n - u_{n+1}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F_*$. Это означает, что последовательность $\{u_n\}$ является минимизирующей и в силу компактности множества $M(u_0)$ и непрерывности $F(u)$ на $M(u_0)$ все предельные точки $\{u_n\} \subset M(u_0)$ принадлежат множеству $U_{0*} \subset M(u_0)$. Из неравенств $0 \leq a_n = F(u_n) - F_* \leq c |u_n - u_{n+1}|$, $F(u_n) - F(u_{n+1}) \geq \varepsilon_1 |u_n - u_{n+1}|^2$ следует оценка (14). Теорема доказана.

3.4 Алгоритм построения вспомогательного приближения

1. Вводятся точности вычислений $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$;
2. Вводится точка $u_k \in U$;
3. Выбирается произвольно элемент множества U , обозначим его через u_{dk}^0 . Вычисляется значение $\gamma_{dk} := J_k(u_{dk}^0) = \langle J'(u_k), u_{dk}^0 - u_k \rangle$;
4. Определяется шаг $\Delta\gamma$ (например можно выбрать $\Delta\gamma := |\gamma_{dk}|/2$. Если $\gamma_{dk} = 0$, то $\Delta\gamma := 1$);
5. $b := \gamma_{dk}$, $i = 0$, $m = 1$;
6. Задается значение $\bar{\gamma}_k := b - \Delta\gamma$ и решается задача (9), (10); В результате определяется $\inf_{u \in U_0} F(u) = F(u_{dk}) = F_*$.

7. Если $F_* > \varepsilon$, то $i := i + 1$, $a = \bar{\gamma}_k$;
 Если же $F_* \leq \varepsilon$, то $b := \bar{\gamma}_k$, $m = m + 1$, $u_{dk}^m := u_{dk}$;
 Если $i > 0$, то $\Delta\gamma := (b - a)/2$;
8. Если $\Delta\gamma > \delta$, то переходим к шагу 5;
9. Вычисляются значения $J(u_{dk}^m)$, $m = 1, 2, \dots$ и определяется $J(u_{dk}^*) = \min_{m=1,2,\dots} J(u_{dk}^m)$;
 $\bar{u}_k := u_{dk}^*$ - вспомогательное приближение.

4 Сходимость последовательности

Итак, вспомогательное приближение $\bar{u}_k \in U$, $k = 0, 1, 2, \dots$ строится по изложенному выше алгоритму (см. п.3.4), а шаг метода α_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, может быть определен с использованием одного из методов минимизации функции одной переменной. Тогда по правилу (5) вычисляется каждый элемент последовательности $\{u_k\}$. Следующая теорема отвечает на вопрос о сходимости данной последовательности к решению исходной задачи (1), (2).

Теорема 2 Если функция $J(u) \in C^{1,1}(U_0)$ выпукла на U_0 , последовательность $\{u_k\}$ определяется по формуле (5), (6), (3), то последовательность $\{u_k\}$ является минимизирующей и любая ее предельная точка принадлежит множеству U_* . Справедлива оценка

$$J(u_k) - J_* \leq \frac{c}{n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} J(u_k) - J(u_{k+1}) &\geq J(u_k) - J(u_k + \alpha(\bar{u}_k - u_k)) \geq \alpha \langle J'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle - \frac{\alpha^2}{2} L |\bar{u}_k - u_k|^2 = \\ &= \alpha J_k(\bar{u}_k) - \frac{\alpha^2}{2} L |\bar{u}_k - u_k|^2 \geq \alpha \inf_{u \in U} J_k(u) - \frac{\alpha^2}{2} L |\bar{u}_k - u_k|^2 = \\ &= \alpha J_k(\bar{u}_k^*) - \frac{\alpha^2}{2} L D^2 \geq \alpha |J_k(\bar{u}_k^*)| - \frac{\alpha^2}{2} L D^2 \end{aligned} \quad (20)$$

так как $J_k(\bar{u}_k^*) \leq 0 = J_k(u_k)$ в силу того, что $J_k(\bar{u}_k^*) = \inf_{u \in U} J_k(u) \leq J_k(u)$, $\forall u \in U$.

Из соотношений (20) имеем

$$0 \leq |J_k(\bar{u}_k^*)| \leq \frac{\alpha}{2} L D^2 + \frac{J(u_k) - J(u_{k+1})}{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Заметим, что поскольку $f_k(\alpha_k) \leq f_k(\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, то $f_k(\alpha_k) \leq f_k(0)$. Так как $f_k(\alpha_k) = J(u_{k+1})$, $f_k(0) = J(u_k)$, то имеет место неравенство $J(u_{k+1}) \leq J(u_k)$. Значит, последовательность $\{J(u_k)\}$ не возрастает в силу того, что множество $U_* \neq \emptyset$, $J(u_k) \geq J_*$. Отсюда следует, что $\{J(u_k)\}$ сходится, т.е. $J(u_k) - J(u_{k+1}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Теперь, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, из (21) имеем

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |J_k(\bar{u}_k^*)| \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |J_k(\bar{u}_k^*)| \leq \frac{\alpha}{2} L D^2, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Отсюда при $\alpha \rightarrow 0$ получим $J_k(\bar{u}_k^*) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Поскольку функция $J(u) \in C^{1,1}(U)$ выпукла на выпуклом множестве U_0 , то необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$J(u) - J(v) \geq \langle J'(v), u - v \rangle, \quad \forall u, v \in U_0.$$

Отсюда в частности при $v = u_k$, $u = u_*$, где $u_* \in U_*$,

$$0 \leq J(u_k) - J(u_*) \leq \langle J'(u_k), u_k - u_* \rangle = -J_k(u_*) \leq -J_k(\bar{u}_k^*), \quad k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = J_* = J(u_*)$ в силу доказанного $J_k(\bar{u}_k^*) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это означает, что последовательность $\{u_k\}$ - минимизирующая.

Докажем справедливость оценки (19). Обозначим через $a_k = J(u_k) - J_*$. Теперь неравенства (20), (22) запишутся так

$$a_k \leq -J_k(\bar{u}_k^*), \quad a_k - a_{k+1} \geq \alpha |J_k(\bar{u}_k^*)| - \frac{\alpha^2}{2} LD^2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Заметим, что максимум функции $\alpha |J_k(\bar{u}_k^*)| - \frac{\alpha^2}{2} LD^2$ по α достигается при $\alpha = \bar{\alpha} = |J_k(\bar{u}_k^*)| / LD^2$, причем при $k \geq k_0$ значение $0 \leq \bar{\alpha} \leq 1$ так как $|J_k(\bar{u}_k^*)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Подставляя значение $\alpha = \bar{\alpha}$ в (23), получим

$$a_k \leq -J_k(\bar{u}_k^*), \quad a_k - a_{k+1} \geq |J_k(\bar{u}_k^*)|^2 \frac{1}{2LD^2}, \quad k \geq k_0. \quad (24)$$

Отсюда следует, что

$$a_k - a_{k+1} \geq a_k^2 / 2LD^2, \quad k \geq k_0.$$

Тогда согласно лемме о числовой последовательности верна оценка

$$a_k \leq \frac{2LD^2(k_0 + 1)}{k}, \quad k \geq k_0.$$

Отсюда следует, что существует постоянная $c = 2LD^2(k_0 + 1) > 0$ такая, что справедлива оценка (19).

5 Алгоритм решения задачи

1. Вводятся точности вычислений $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$;
2. $k := 0$;
3. Выбирается произвольно элемент u_k из множества U ;
4. Если $\|J'(u_k)\| < \varepsilon$, то переходим к шагу 9;
5. Строится вспомогательное приближение $\bar{u}_k \in U$ по алгоритму 1 (пп. 3-9);
6. Определяется $\alpha_k \in [0, 1]$ путем решения задачи (6);
7. Строится следующее приближение $u_{k+1} = u_k + \alpha_k(\bar{u}_k - u_k)$;
8. Если $\|u_{k+1} - u_k\| > \varepsilon$, то $k := k + 1$ и переходим к шагу 5.
9. Итерационный процесс прекращается: u_k - точка минимума, $J(u_k)$ - минимальное значение функции.

6 Пример

Рассмотрим задачу

$$I(v) = v_1^2 + 3v_2^2 - 3v_1v_2 + v_1 - 6v_2 \rightarrow \inf \quad (25)$$

$$v \in V = \{v \in R^2 / v \in V_0, \quad \bar{g}_1(v) = v_1 + v_2 - 3 \leq 0, \quad \bar{g}_2(v) = -2v_1 + v_2 - 2 \leq 0\}, \quad (26)$$

$$V_0 = \{v \in R^2 / v_1 \geq 0, \quad v_2 \geq 0\}, \quad v = (v_1, v_2).$$

Множество V_0 выпукло, функции $\bar{g}_1(v), \bar{g}_2(v)$ выпуклы. отсюда следует, что множество V выпукло. Функция $I(v)$ выпукла на V_0 , так как

$$I''(v) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} > 0, \quad \langle I''(v)\xi, \xi \rangle > 0, \quad \forall \xi \in R^2, \quad \forall v, v \in V_0.$$

Следовательно, задача (25), (26) является задачей выпуклого программирования.

Введем переменные u_3, u_4 , и перепишем ограничения $\bar{g}_1(v) = v_1 + v_2 - 3 \leq 0, \quad \bar{g}_2(v) = -2v_1 + v_2 - 2 \leq 0$ в виде $g_1(v, u_3, u_4) = v_1 + v_2 + u_3 - 3 = 0, \quad g_2(v, u_3, u_4) = v_1 + v_2 + u_4 - 3 = 0$. Теперь заменим v_1, v_2 на u_1, u_2 соответственно, обозначим $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ и перепишем задачу в виде

$$J(u) = u_1^2 + 3u_2^2 - 3u_1u_2 + u_1 - 6u_2 \rightarrow \inf \quad (27)$$

$$u \in U = \{u \in R^4 / u \in U_0, \quad g_1(u) = u_1 + u_2 + u_3 - 3 = 0, \quad g_2(u) = -2u_1 + u_2 + u_4 - 2 = 0\}, \quad (28)$$

$$U_0 = \{u \in R^4 / u_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}\}.$$

Для данной задачи матрица A и вектор b имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Частные производные

$$J'(u) = \begin{pmatrix} 2u_1 - 3u_2 + 1 \\ 6u_2 - 3u_1 - 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда функция

$$J_k(u) = \langle J'(u_k), u - u_k \rangle = (2u_1 - 3u_2 + 1)(u_1 - u_{k1}) + (6u_2 - 3u_1 - 6)(u_2 - u_{k2}).$$

Вектор

$$Au - b = \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + u_3 - 3 \\ -2u_1 + u_2 + u_4 - 2 \end{pmatrix},$$

тогда

$$[Au - b]^*[Au - b] = (u_1 + u_2 + u_3 - 3)^2 + (-2u_1 + u_2 + u_4 - 2)^2.$$

Для определения вспомогательного приближения \bar{u}_k необходимо решить задачу (см. ((7), (8)):

$$J_{1k}(u, \gamma) = [(2u_1 - 3u_2 + 1)(u_1 - u_{k1}) + (6u_2 - 3u_1 - 6)(u_2 - u_{k2}) - \gamma]^2 +$$

$$+(u_1 + u_2 + u_3 - 3)^2 + (-2u_1 + u_2 + u_4 - 2)^2 \rightarrow \inf, \quad (29)$$

$$u \in U_0, \quad \gamma \in \Gamma_k, \quad \Gamma_k = \{\gamma \in R^1 / \gamma \leq \gamma_{dk}\}. \quad (30)$$

Шаг α_k определяется путем минимизации функции

$$f_k(\alpha) = [u_{k1} + \alpha(\bar{u}_{k1} - u_{k1})]^2 + 3[u_{k2} + \alpha(\bar{u}_{k2} - u_{k2})]^2 - 3[u_{k1} + \alpha(\bar{u}_{k1} - u_{k1})][u_{k2} + \alpha(\bar{u}_{k2} - u_{k2})] + [u_{k1} + \alpha(\bar{u}_{k1} - u_{k1})] - 6[u_{k2} + \alpha(\bar{u}_{k2} - u_{k2})], \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (31)$$

Численные расчеты. В качестве начального приближения выбрана точка $u_0 = (0.18884, 0.28649, 2.5247, 2.0912)$. Нетрудно убедиться в том, что $g_1(u_0) = 0$, $g_2(u_0) = 0$, т.е. $u_0 \in U$. При этом значение целевой функции $J(u_0) \approx -1.41$. Это означает, что минимальное значение функции $J(u)$ на множестве U таково, что $J(u_*) \leq -1.41$. Следовательно, $\gamma_{d0} = -1.41$. В качестве начального значения $\bar{\gamma}_0$ выбрано значение $-1.62 < \gamma_{d0} = -1.41$. После неоднократного решения задачи (9), (10) для различных значений $\bar{\gamma}_0$, варьируемых в зависимости от значения F_* по алгоритму 1, найдены $u_{d0}^m, m = \overline{1, 140}$, при которых $\inf_{u \in U_0} F(u) = F(u_{d0}^m) = F_* < \varepsilon$ для всех $m = \overline{1, 140}$. Затем найдено $\min_{m=\overline{1, 140}} J(u_{dk}^m) = -3.22$, которое достигается при $m = 42$, т.е. $u_{d0}^* = u_{d0}^{42} = (0.11671, 1.1046, 1.7787, 1.1289)$. Эта точка и будет начальным вспомогательным приближением: $\bar{u}_0 = (0.11671, 1.1046, 1.7787, 1.1289)$. Отметим, что $g_1(\bar{u}_0) = 0$, $g_2(\bar{u}_0) = 0$. Далее найдено $\alpha_0 = 0.91$ из условия минимума функции (31) с использованием метода дихотомического поиска. Тогда $u_1 = (0.12292, 1.0341, 1.8429, 1.2117)$. Линеаризуя исходную целевую функцию $J(u)$ в найденной точке $u_1 = (0.12292, 1.0341, 1.8429, 1.2117)$ и используя алгоритм 1, определена точка $\bar{u}_1 = (1.427, 1.573, 0, 3.2809)$. При этом функция $f_1(\alpha) = J(u_1 + \alpha(\bar{u}_1 - u_1))$, $\alpha \in [0, 1]$, достигает минимума при $\alpha = 1$. Следовательно, $\alpha_1 = 1$, $u_2 = \bar{u}_1 = (1.427, 1.573, 0, 3.2809)$. Повторяя описанную процедуру, получаем точку u_3 такую, что $|u_3 - u_2| < \varepsilon$. Отсюда следует, что точкой минимума для рассматриваемой задачи является вектор $u_* = (1.427, 1.573, 0, 3.2809)$, минимальное значение $J(u_*) \approx -5.2857$. Полученное предлагаемым методом минимальное значение совпадает со значением, найденным методом множителей Лагранжа.

7 Заключение

В работе рассматривался подход к оптимизации значения выпуклой функции на выпуклом множестве, заданном линейными равенствами, основанный на сведении задачи выпуклого программирования к последовательности задач линейного программирования с некоторой погрешностью. Для этого выпуклая целевая функция аппроксимирована линейной. Далее задача линейного программирования решается путем корректировки значения целевой функции на множестве допустимых решений. Следует отметить, что, в отличие от метода множителей Лагранжа, разработанный метод может быть применен и к задачам, для которых соответствующая функция Лагранжа не имеет седловой точки. Кроме того, метод, использованный для решения полученной задачи линейного программирования, позволяет решать и вырожденные задачи. Приведено обоснование метода, описание алгоритмов решения вспомогательной и основной задач. Численные расчеты показали работоспособность описанного подхода. В дальнейшем планируется распространение изложенного метода на случай произвольного выпуклого множества.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов комитетом науки МОН РК, грант №3311/ГФ4.

Литература

- [1] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
- [2] *Айсағалиев С.А., Айсағалиев Ж.К.* Исследование по математическому программированию // Вестник КазНУ. Сер. мат., мех., инф. – 2013. – № 2(77). – С. 4-20.
- [3] *Кузнецов А.В., Сакович А.В., Холод Н.И.* Высшая математика. Математическое программирование. – Минск: Вышэйшая школа, 1973. – 470 с.
- [4] *Карманов В. Г.* Математическое программирование. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 264 с.
- [5] *John C. Chambers, S. K. Mullick, and D. Smith* How to Choose the Right Forecasting Technique // Harvard Business Review. – 1971. – P. 45-74.
- [6] *Egan M.* Interfaces Between Tourism and outdoor Recreation // Paper presented at the Western Economic Association Annual Conference. – San Diego, California, 1975.
- [7] *Holman M.A.* A National Time - Budget for Year 2000 // Sociology and Social Res., 42,1. – 1961.
- [8] *Burd O.R., Brewer D.* Estimation of Net Social Benefits from Outdoor Recreation // Econometrica. – 9, N 5. – P. 813-827.
- [9] *Gearing C.E.* Determining the Optimal Investment policy for the Tourism sector of a Developing Country // Management Sci, Part I. – 1973. – 20, N 4. – P. 487-497.
- [10] *Gearing C.E.* Establishing a Measure of Touristic Attractiveness // J. travel Res., XII. – 1974. – N 4(1-8).
- [11] *Gearing C.E.* A Multi-Period Planning Model for Tourism Development // Paper presented at the TIMS XXII International Meeting. – Kyoto, Japan, 1975.
- [12] *Gearing C.E.* Planning for Tourism Development: Quantitative Approaches, Praeger Publishers. – New York, 1976.
- [13] *Arcger B.H.* The Primary and Secondary Beneficiaries of Touristspending // Tourist Rev., 27. – 1972. – P. 42-45.
- [14] *Crampton L.J.* Factors Influencing Travel Flow into and within the Pacific Basin // Paper presented at the ORSA/TIMS Joint national Meeting. – San Juan, Puerto Rico, 1974. – P. 16-18.
- [15] *Попов Л.Д.* Об одной модификации метода логарифмических барьерных функций в линейном и выпуклом программировании // Труды ИММ УрО РАН. – 2008. 14, № 2. – С. 103-114.
- [16] *Вылегжанин О.Н., Шкатова Г.И.* Учет ограничений равенств при решении оптимизационных задач с линейными ограничениями // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312, № 5. – С. 76-78.
- [17] *Скарин В.Д.* Аппроксимационные и регуляризующие свойства расширенных штрафных функций в выпуклом программировании // Труды ИММ УрО РАН. – 2009. – Т. 15, N 4. – С. 234-250.
- [18] *Зильберова И.Ю., Маилья А.Л., Баркалов С.А., Уксусов С.Н.* Метод Штифеля в выпуклом программировании // Интернет-журнал "НАУКОВЕДЕНИЕ". – 2015. – Т. 7, №6. – URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/122TVN615.pdf>.
- [19] *Данциг Дж.Б.* Линейное программирование, его применения и обобщения. (Linear programming and Extensions, 1963) Перевод с английского Г.Н. Андрианова, Л.И. Горькова, А.А. Корбута, А.Н. Ляпунова. Общая редакция и предисловие Н.Н. Воробьева. – Москва: Изд-во Прогресс, 1966.

References

- [1] *Vasilyev F.P.* Numerical methods for solving extremal problems. – M.: Nauka, 1988. – 552 p. (in Russian)
- [2] *Aisagaliev S.A., Aisagaliev Zh.K.* Research on mathematical programming // The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. –2013. – № 2(77). –P. 4-20.(in Russian)
- [3] *Kuznetsov A.V., Sakovich A.V., Holod N.I.* Higher mathematics. Mathematical programming. – Minsk: Vysshaya shkola, 1973. – 470 p. (in Russian)
- [4] *Karmanov V.G.* Mathematical programming. – M.: Fizmatlit, 2004. – 264 p.(in Russian)
- [5] *John C. Chambers, S. K. Mullick, and D. Smith* How to Choose the Right Forecasting Technique // Harvard Business Review. – 1971. – P. 45-74.
- [6] *Egan M.* Interfaces Between Tourism and outdoor Recreation // Paper presented at the Western Economic Association Annual Conference. – San Diego, California, 1975.
- [7] *Holman M.A.* A National Time - Budget for Year 2000 // Sociology and Social Res., 42,1. – 1961.
- [8] *Burd O.R., Brewer D.* Estimation of Net Social Benefits from Outdoor Recreation // Econometrica. – 9, N 5. – P. 813-827.
- [9] *Gearing C.E.* Determining the Optimal Investment policy for the Tourism sector of a Developing Country // Management Sci, Part I. – 1973. – 20, N 4. – P. 487-497.
- [10] *Gearing C.E.* Establishing a Measure of Touristic Attractiveness // J. travel Res., XII. – 1974. – N 4(1-8).
- [11] *Gearing C.E.* A Multi-Period Planning Model for Tourism Development // Paper presented at the TIMS XXII International Meeting. – Kyoto, Japan, 1975.
- [12] *Gearing C.E.* Planning for Tourism Development: Quantitative Approaches, Praeger Publishers. – New York, 1976.
- [13] *Arcger B.H.* The Primary and Secondary Beneficiaries of Tourist spending // Tourist Rev., 27. – 1972. – P. 42-45.
- [14] *Crampon L.J.* Factors Influencing Travel Flow into and within the Pacific Basin // Paper presented at the ORSA/TIMS Joint national Meeting. – San Juan, Puerto Rico, 1974. – P. 16-18.
- [15] *Popov L.D.* Ob odnoi modifikacii metoda logarifmicheskikh bariernykh funkciy v lineinom i vypuklom programmirovanii // Trudy IMM UrO RAN. – 2008. 14, № 2. – P. 103-114.(in Russian)
- [16] *Vylegzhanin O.N., Shkatova G.I.* uchet ogranicheniy ravenstv pri reshenii optimizacionnykh zadach s lineinymi ogranicheniyami // Izvestiya Tomskogo politehnicheskogo universiteta. – 2008. – T. 312, № 5. – P. 76-78.(in Russian)
- [17] *Skarin V.D.* Approksimacionnye i regulyariizuiuschie svoistva rasshirenykh shtrafnnykh funkciy v vypuklom programmirovanii // Trudy IMM UrO RAN. – 2009. – T. 15, N 4. – P. 234-250.(in Russian)
- [18] *Zilberova I.Iu., Mailyan A.L., Barkalov S.A., Uksusov S.N.* Metod Shtifelya v vypuklom programmirovanii // Internet-journal "Naukovedenie". –2015. –T. 7, №6. –URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/122TVN615.pdf>.(in Russian)
- [19] *Dantzig J.B.* Linear programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963.

УДК 512.54+510.5

Коньрханова А.А., Нуризинов М.К., Тюлюбергенов Р.К., Хисамиев Н.Г*.

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,
Республика Казахстан, г. Усть-Каменогорск

*E-mail: Nhisamiev@mail.ru

Ректракты группы унитарных матриц над кольцом

Ретрактом группы G называется такая её подгруппа H , для которой существует эндоморфизм $\varphi : G \rightarrow H$, тождественный на H . Это понятие идет из топологии. Описание ретрактов для важных классов групп представляет актуальную задачу. В абелевых группах прямые множители исчерпывают все множество ретрактов. В общем случае проблема описания ретрактов гораздо сложнее. Доказано, что уже в классе конечно порожденных нильпотентных групп ступени нильпотентности два проблема определения, является ли ретрактом заданная конечным множеством порождающих элементов подгруппа, алгоритмически неразрешима. В данной работе получено необходимое и достаточное условие ретрактности абелевой подгруппы группы унитарных матриц произвольной размерности над кольцом целых чисел. Также доказано, что любой ретракт группы унитарных матриц размерности три над кольцом, аддитивная группа которого локально циклична, изоморфен этой аддитивной группе. Отсюда в качестве следствия вытекает, что существует алгоритм, который по любой подгруппе группы всех унитарных матриц размерности три определяет, является ли данная подгруппа ретрактом или нет. Также установлено существование алгоритма, который по любому ретракту такой группы определяет, является ли данный ретракт трансвекционным или существенно стандартным. Доказана вычислимость любого ретракта разрешимой группы без кручения конечной размерности, изолятор коммутанта которой совпадает с коммутантом. Отсюда, в частности, следует, что любой ретракт группы всех треугольных матриц любого конечного размера с положительными диагональными элементами над полем рациональных чисел вычислимы.

Ключевые слова: ретракт группы, унитарная группа матриц над кольцом, стандартный ретракт, трансвекционный ретракт, существенно стандартный ретракт, вычислимая группа.

Konyrkhanova A.A., Nurizhinov M.K., Tyulyubergeney R.K., Khisamiev N.G.

Retracts of group of unitriangular matrices over the ring

Retract of G group is its H subgroup for which endomorphism $\varphi : G \rightarrow H$ is in existence identical to H . This notion comes from topology. Description of retracts for important group grades is an up-to-date target. Direct factors in Abelian groups deflate all plenty of retracts. In the general case the problem of retracts description is far more complicated. It is proved that in the category of finitely generated nilpotent groups of nilpotency step two, sub-group prescribed by finite collection of generating elements is algorithmically unresolvable. In this work we obtained necessary and sufficient condition to be retract for Abelian sub-group of arbitrary dimensionality unitriangular matrices group above ring of integers. It was also proved that any retract of unitriangular matrices group of dimensionality three above ring is isomorphic to its additive group which is locally cyclic. This yields the conclusion that existing algorithm determines whether the given sub-group is a retract or not according to any sub-group of dimensionality three unitriangular matrices group. It is also established that the algorithm is available which determines whether the given retract is transvectional or essentially conventional according to any retract of such a group. Calculability of any retract of solvable group was proved that is torsion-free of finite dimension, and its commutant isolation coincide with commutant. In particular it follows that any retract of group of all triangular matrices group of any finite size with positive diagonal elements above the field of rational numbers is calculable.

Key words: retract of group, unitriangular group of matrices over the ring, conventional retract, transvectional retract, essentially conventional retract, computable group.

Коньрханова А.А., Нуризинов М.К., Тюлюбергенов Р.К., Хисамиев Н.Г.
Сақинадағы унишбұрышты матрицалар тобының ретрактілері

G тобының H ішкі тобына тепе-тең болатындай $\varphi : G \rightarrow H$ эндоморфизмі бар болса, онда H ішкі тобын G тобының ретрактісі деп атаймыз. Бұл ұғым топологиядан келген. Топтардың маңызды класстары үшін ретрактілерді сипаттау өзекті мәселелердің бірі болып табылады. Абельдік топтарда тура көбейтінділер ретрактілердің барлық жиынын толығымен сипаттайды. Жалпы жағдайда, ретрактілерді сипаттау мәселесі аса күрделі. Ақырлы туындаған екінші сатылы нильпотентті топтар класында тудырушы элементтері ақырлы жиын болатын ішкі топтардың ретракті болуы жөніндегі мәселені анықтау алгоритмдік шешілімді еместігі дәлелденіп қойған. Бұл жұмыста бүтін сандар сақинасындағы кез келген өлшемді унишбұрышты матрицалар тобының абельдік ішкі топтарының ретракті болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Сонымен қатар, аддитивті тобы локальді циклдік болатын сақинадағы үш өлшемді унишбұрышты матрицалар тобының кез келген ретрактісі осы аддитивті топқа изоморфты екендігі дәлелденген. Бұдан, сандар ретінде барлық үш өлшемді унишбұрышты матрицалар тобының кез келген ішкі тобы ретракті бола ма, әлде жоқ па екендігін анықтайтын алгоритм бар болатындығы шығады. Сондай-ақ, осындай топтың кез келген ретрактісі трансвекциялық ретракті ме, әлде елеулі стандартты ретракті ме екендігін анықтайтын алгоритмнің бар болатындығы анықталған. Коммутантының изоляторы коммутантымен беттесетін ақырлы өлшемді айналымсыз шешілімді топтың кез келген ретрактісі есептелімді болатындығы дәлелденген. Бұдан, дербес жағдайда, рационал сандар өрісіндегі кез келген ақырлы өлшемді оң диагональдық элементті барлық үшбұрышты матрицалар тобының кез келген ретрактісі есептелімді екендігі шығады.

Түйін сөздер: топтың ретрактісі, сақинадағы унишбұрышты матрицалар тобы, стандартты ретракт, трансвекциялық ретракт, елеулі стандартты ретракт, есептелімді топ.

1 Введение

Ретрактом группы G называется такая её подгруппа H , для которой существует эндоморфизм $\rho : G \rightarrow H$, тождественный на H . Такой эндоморфизм называется *ретракцией*. Любой идемпотентный эндоморфизм $\rho : G \rightarrow G$, $\rho^2 = \rho$, определяет ретракцию группы G на подгруппу $\rho(G)$.

Легко доказать (см., например [1]), что подгруппа H является ретрактом группы G тогда и только тогда, когда существует нормальная подгруппа U группы G такая, что выполнены следующие условия:

$$G = H \cdot U = \{hu | h \in H, u \in U\}, H \cap U = \{1\}. \quad (1)$$

Любой элемент g группы G однозначно записывается в виде hu , где $h = h(g) \in H$, $u = u(g) \in U$. Ретракция $\rho : G \rightarrow H$ определяется отображением $\rho(g) = h(g)$, $g \in G$. Нормальная подгруппа U совпадает с ядром $\ker(\rho)$ эндоморфизма ρ и называется *ядром ретракции*.

Очевидно, что прямые и свободные множители в группах являются их ретрактами. В абелевых группах прямые множители исчерпывают все множество ретрактов. В общем случае проблема описания ретрактов гораздо сложнее. В [2] доказано, что уже в классе конечно порожденных нильпотентных групп степени два проблема определения, является ли заданная конечным множеством порождающих элементов подгруппа ретрактом, алгоритмически неразрешима. Это отвечает на вопрос Мясникова № 9а из [3].

Ретракты связаны с вербально и алгебраически замкнутыми подгруппами групп.

Пусть G – группа. Подгруппа $H \leq G$ называется вербально замкнутой в группе G , если для любого группового слова $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n без констант и любого элемента $h \in H$ уравнение

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_n) = h \quad (2)$$

разрешимо в группе G тогда и только тогда, когда оно разрешимо в подгруппе H .

Подгруппа H группы G называется алгебраически замкнутой в группе G , когда для любого набора групповых слов $\omega_i(x_1, x_2, \dots, x_t), i = 1, 2, \dots, m$, с константами из H от независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n система уравнений

$$\omega_i(x_1, x_2, \dots, x_t) = 1, i = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

имеет решение в группе G тогда и только тогда, когда она имеет решение в H .

Очевидно, что любой ретракт произвольной группы является алгебраически замкнутой, и тем более вербально замкнутой подгруппой этой группы. В [4] доказано, что в классе конечно определенных групп любая конечно порожденная алгебраически замкнутая подгруппа является ретрактом.

Так как любая конечно порожденная нильпотентная группа конечно определена, а любая её подгруппа конечно порождена (см., например, [5]), в классе конечно порожденных нильпотентных групп свойства "быть алгебраически замкнутой подгруппой" и "быть ретрактом" равносильны.

В [4] был сформулирован вопрос об описании алгебраически, вербально и экзистенциально замкнутых подгрупп свободных нильпотентных групп произвольного конечного ранга любой степени нильпотентности. В [5] был дан исчерпывающий ответ на этот вопрос для алгебраически и вербально замкнутых подгрупп. Оказалось, что множества ретрактов свободной нильпотентной группы $N_{r,k}$ ранга $r \geq 1$ степени нильпотентности $k \geq 1$ совпадает с множествами её вербально замкнутых подгрупп, алгебраически замкнутых подгрупп, а также с множеством свободных множителей группы $N_{r,k}$ в многообразии N_k всех нильпотентных групп степени нильпотентности не выше, чем k .

В [6] получен критерий того, что данная неабелева подгруппа группы G , коммутант которой локально циклическая группа, является ретрактом группы G . Там же доказано, что любой ретракт группы унитарных матриц $UT_n(\mathbb{Q}), n \geq 3$ над полем рациональных чисел \mathbb{Q} является вычислимо перечислимой подгруппой данной группы. Отсюда как следствие выводится, что любой ретракт группы $UT_n(\mathbb{Q})$ вычислим.

Унитарная группа матриц $G = UT_n(\mathbb{Z}), n \geq 3$ над кольцом целых чисел \mathbb{Z} , является классическим объектом алгебры. Теория этих групп находит применение в различных областях науки: в математике, физике, механике и т.д. Поэтому представляет интерес описание структуры такой группы, важной составной частью которой являются ретракты.

В данной работе дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная абелева подгруппа группы G была ретрактом. Доказано, что любой ретракт группы $UT_3(K)$, где K – ассоциативное и коммутативное кольцо, аддитивная группа которого локально циклическа, изоморфен этой аддитивной группе. Из этих результатов выводятся критерии для того, чтобы данная подгруппа группы $G = UT_3(\mathbb{Z})$ была ретрактом, а если

она ретракт, то эти критерии определяют будет ли этот ретракт трансвекционным или существенно стандартным.

Доказана вычислимость любого ретракта разрешимой группы без кручения конечной размерности, изолятор коммутанта которой совпадает с коммутантом. Отсюда, в частности, следует, что любой ретракт группы всех треугольных матриц с положительными диагональными элементами любого конечного размера над полем рациональных чисел вычислим.

2 Сервантные абелевы подгруппы группы $UT_n(\mathbb{Z})$

Пусть $G = UT_n(\mathbb{Z})$ – группа всех унитарных матриц размерности n , $n \geq 3$ над кольцом \mathbb{Z} целых чисел. В данном пункте описаны сервантные абелевы подгруппы группы G имеющие единичное пересечение с коммутантом этой группы.

Лемма 1. Если H – абелева сервантная подгруппа группы G ранга $r(H) \geq 2$, и

$$H \cap G' = \{1\}, \quad (4)$$

то существуют: число $1 \leq s_0 < n$, элемент $h^{(0)} = (h_{ij}^{(0)}) \in H$ и подгруппа $H^{(1)}$ такие, что для любого $i \leq s_0$ справедливы:

$$H = (h^{(0)}) \oplus H^{(1)}, \quad (5)$$

где

$$h_{i,i+1}^{(0)} = 0, h_{s_0+1,s_0+2}^{(0)} \neq 0, \quad (6)$$

$$\text{НОД}(h_{s_0+1,s_0+2}^{(0)}, \dots, h_{n-1,n}^{(0)}) = 1, \quad (7)$$

а для любого неединичного элемента $h = (h_{ij}) \in H^{(1)}$, найдется число $i < s_0$ такое, что

$$h_{i,i+1} \neq 0, i = 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что существует элемент $h^{(0)} \in H$, $h^{(0)} \neq 1$ такой, что

$$h_{12}^{(0)} = 0, h \neq 1. \quad (9)$$

Пусть элемент $h \in H$ такой, что $h \neq 1$ и

$$h_{12} = \min\{|g_{12}|\} : g \in H \setminus \{1\}. \quad (10)$$

Если $h_{12} = 0$, то полагаем $h^{(0)} = h$. Пусть $h_{12} \neq 0$. Так как $r(H) \geq 2$, то найдется элемент $g \in H \setminus \{1\}$ такой, что $g \notin \langle h \rangle$. Отсюда и из (10) следует, что $|g_{12}| \geq |h_{12}|$. Тогда найдется число k , для которого верны следующие соотношения:

$$0 < (g - kh)_{12} < h_{12}, \quad (11)$$

что противоречит (10). Следовательно, H содержит элемент h такой, что $h \neq 1$ и $h_{12} = 0$.

Пусть $s_0 \geq 1$ такое максимальное число, что в H существует элемент $h \neq 1$, для которого справедливы равенства

$$h_{12} = h_{23} = \dots = h_{s_0, s_0+1} = 0. \quad (12)$$

Так как $H \cap G' = \{1\}$, то $s_0 < n - 1$. Пусть

$$H_0 = \{h \in H \mid h_{12} = h_{23} = \dots = h_{s_0, s_0+1} = 0\}. \quad (13)$$

Через $h^{(0)} \in H_0$ обозначим такой элемент, что

$$|h_{s_0+1, s_0+2}^{(0)}| = \min\{|h_{s_0+1, s_0+2}| \mid h \in H_0 \setminus \{1\}\}. \quad (14)$$

Отсюда легко следует, что подгруппа $(h^{(0)})$ сервантна в H . Докажем, что

$$H_0 = (h^{(0)}). \quad (15)$$

Допустим противное, т.е. существует подгруппа $H_1 \neq 1$ такая, что $H_0 = (h^{(0)}) \oplus H_1$. Тогда в силу (14) для любого элемента $h \in H_1 \setminus \{1\}$ найдется такое число $k = 0, \pm 1$, что

$$h_{s_0+1, s_0+2} = kh_{s_0+1, s_0+2}^{(0)}, \quad (16)$$

т.е.

$$(hh^{(0)^{-k}})_{s_0+1, s_0+2} = 0, \quad (17)$$

что противоречит выбору числа s_0 и элемента $h^{(0)}$. Следовательно, справедливо (15). Отсюда и из (13) следуют формулы (5) – (7). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть H – сервантная абелева подгруппа группы $G = UT_n(\mathbb{Z}), n \geq 3$ для которой справедливо (4). Тогда существуют такие числа $n > s_0 > s_1 > \dots > s_k \geq 1, k > 0$, и элементы $h^{(0)}, \dots, h^{(k)}$, что

$$H = (h^{(0)}) \oplus \dots \oplus (h^{(k)}), \quad (18)$$

$$h_{12}^{(i)} = \dots h_{s_i, s_i+1}^{(i)} = 0, \quad (19)$$

$$\text{НОД}(h_{s_i+1, s_i+2}^{(i)}, \dots, h_{n-1, n}^{(i)}) = 1, \quad (20)$$

$$s_i - s_{i+1} \geq 2, \quad (21)$$

где $i \leq k$. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 существуют: число s_0 , элемент $h^{(0)} \in H$ и подгруппа $H^{(1)} \leq G$ такие, что справедливы соотношения (4) – (8). Из (5) следует, что подгруппа $H^{(1)}$ сервантна в H . Отсюда и из сервантности H в G вытекает, что подгруппа $H^{(1)}$ сервантна в G . Следовательно, для $H^{(1)}$ справедливы все условия леммы 1, а потому найдутся число $1 \leq s_1 < n - 1$ и подгруппа $H^{(2)}$ группы $H^{(1)}$ такие, что справедливы соотношения (4) – (8) с заменой 0 на 1 и 1 на 2. Продолжая далее этот процесс, получим справедливость (18) – (20).

Докажем неравенство (21). Допустим противное, т.е. $s_{i+1} = s_i - 1$. Тогда

$$h_{s_i, s_i+1}^{(i+1)} \neq 0. \quad (22)$$

Отсюда и из (19) имеем

$$(h^{(i+1)}h^{(i)})_{s_i, s_i+2} = h_{s_i, s_i+1}^{(i+1)} \cdot h_{s_i+1, s_i+2}^i \neq 0, \quad (23)$$

$$(h^{(i)}h^{(i+1)})_{s_i, s_i+2} = h_{s_i, s_i+1}^{(i)} \cdot h_{s_i+1, s_i+2}^{i+1} = 0, \quad (24)$$

т.е. подгруппа H неабелева. Получили противоречие. Следовательно, неравенство (21) верно. Теорема доказана.

Если n – рациональное число, то $[n]$ означает целую часть числа n .

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Пусть H – абелева сервантная подгруппа группы $G = UT_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ имеющая тривиальное пересечение с коммутантом G' . Тогда ранг $r(H)$ группы H не превосходит $[\frac{n}{2}]$.

Действительно, по теореме 1 ранг группы H однозначно определяется последовательностью чисел из условия теоремы 1. Отсюда и из (21) получаем требуемое.

3 Абелевы ретракты группы $UT_n(\mathbb{Z})$

Лемма 2. Абелев ретракт H любой группы G имеет единичное пересечения с коммутантом G' , т.е.

$$H \cap G' = \{1\}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как H ретракт группы G , то существует в ней нормальная подгруппа U такая, что

$$G = HU, H \cap U = 1. \quad (26)$$

Пусть элемент $f \in H \cap G'$. Тогда из (26) и коммутаторных соотношений [7, стр.39] следует

$$f = [h_1 u_1, h_2 u_2] = [h_2, h_1]^{-u_2} [u_2, h_1]^{-u_1} [h_2, u_1]^{-1} [u_2, u_1]^{-1}. \quad (27)$$

Так как H абелева группа и U нормальна в G , то

$$[h_2, h_1]^{-u_2} = 1, [u, h] \in U$$

для любых элементов $h_1, h_2, h' \in H$, $u \in U$. Отсюда и (27) следует $f \in U$. Таким образом $f \in H \cap U$, а потому в силу (25) имеем $f = 1$. Лемма доказана.

Теорема 2. Абелева подгруппа H группы $G = UT_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 3$ является ретрактом группы G тогда и только тогда, когда найдутся матрицы $g^{(i)} \in G$, $i < n - 1$ и число $s \leq [\frac{n}{2}]$ такие, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{12}^{(0)} & g_{12}^{(1)} & \cdots & g_{12}^{(n-2)} \\ g_{23}^{(0)} & g_{23}^{(1)} & \cdots & g_{23}^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-1, n}^{(0)} & g_{n-1, n}^{(1)} & \cdots & g_{n-1, n}^{(n-2)} \end{vmatrix} = \pm 1. \quad (28)$$

и

$$H = (g^{(0)}) \oplus \dots \oplus (g^{(s-1)}). \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (НЕОБХОДИМОСТЬ). Допустим, H – абелев ретракт группы G . Тогда существует нормальная подгруппа U группы G такая, что справедливо (26). По лемме 2 справедливо (25). Отсюда, и теоремы 1, и следствия 1 следует, что найдутся матрицы $g^{(0)}, \dots, g^{(s-1)}$, где $s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ такие, что $H = (g^{(0)}) \oplus \dots \oplus (g^{(s-1)})$.

Пусть $\bar{G} \cong G/G'$ и $\alpha : G \rightarrow \bar{G}$ – естественный гомоморфизм. Тогда $\alpha H \cong \bar{H}$ – ретракт группы \bar{G} , а потому \bar{H} сервантен в \bar{G} . Так как \bar{G} – конечно порожденная абелева группа без кручения, то \bar{H} выделяется прямым слагаемым из \bar{G} . Отсюда найдутся вектора

$$\overline{g^{(k)}} = \langle \overline{g_{12}^{(k)}}, \dots, \overline{g_{n-1,n}^{(k)}} \rangle \quad (30)$$

$s \leq k < n - 1$, такие, что

$$\bar{G} = \left(\overline{g^{(0)}} \right) \oplus \dots \oplus \left(\overline{g^{(n-2)}} \right). \quad (31)$$

Пусть $\overline{e^{(i)}}$ – единичный $n - 1$ -мерный вектор, у которого i -я координата равна 1, а остальные – нули. Тогда из (25), (26), (29), (31) следует, что система уравнений

$$x_i^{(0)} \overline{g^{(0)}} + \dots + x_i^{(n-2)} \overline{g^{(n-2)}} = \overline{e^{(i)}} \quad (32)$$

имеет решение в целых числах. Это возможно тогда и только тогда, когда справедливо (28). Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть справедливы (28), (29). Определим подгруппу U группы G положив:

$$U = gp(g^{(s)}, \dots, g^{(n-2)}, G') \quad (33)$$

Докажем, что

$$H \cap U = \{1\} \quad (34)$$

Допустим противное, т.е. найдется элемент

$$g \in H \cap U, g \neq 1 \quad (35)$$

Из ((28) следует, что вектора

$$\overline{g^{(i)}} = \langle \overline{g_{12}^{(i)}}, \overline{g_{23}^{(i)}}, \dots, \overline{g_{n-1,n}^{(i)}} \rangle, \quad (36)$$

где $i < n - 1$, образуют максимально линейно независимую систему элементов факторгруппы G/G' . Из (35), (29), (33) следуют равенства:

$$g \equiv g^{(0)k_0} \cdot \dots \cdot g^{(s-1)k_{s-1}}, \quad (37)$$

$$g = g^{(s)k_s} \cdot \dots \cdot g^{(n-2)k_{n-2}}, (\text{mod } G') \quad (38)$$

для некоторых чисел k_0, \dots, k_{n-2} . Следовательно система векторов (36) линейно зависима. Получили противоречие. Следовательно, равенство (34) верно.

Докажем, что первое равенство из (26) справедливо. Из (29), (33) следует, что для этого достаточно доказать, что для любого единичного вектора $\bar{e}^{(i)}$ система уравнений

$$x_{i0}g_{i,i+1}^{(0)} + \dots + x_{i,n-2}g_{i,i+1}^{(n-2)} = e_i^{(k)}, \quad (39)$$

$i, k < n$, имеет решение в целых числах. Согласно (28) определитель системы (39) равен ± 1 . Отсюда следует, что система (39) имеет искомого решение. Достаточность, а вместе с ней, теорема доказана.

4 Ретракты группы $UT_3(\mathbb{Z})$

Теорема 3. Пусть K – коммутативное и ассоциативное кольцо с единицей, аддитивная группа K^+ которого, локально циклическа и не имеет кручения. Тогда любой ретракт H группы $G = UT_3(K)$ изоморфен K^+ . ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [?] доказано, что ретракт H группы G является абелевой подгруппой. Отсюда следует, что

$$G = HU, H \cap U = 1 \quad (40)$$

и справедливо

$$U \geq G', U \neq G'. \quad (41)$$

Подгруппы G' и U сервантны в G . Отсюда факторгруппы

$$G/U, G/G', U/G'. \quad (42)$$

не имеют кручения, где $G/U \simeq H$. Через $\dim(G)$ обозначим размерность группы G . Из (40), (41) следует, что справедливо равенство

$$\dim(G/G') = \dim(G/U) + \dim(U/G'). \quad (43)$$

Из (41) следует, что $\dim(U/G') \geq 1$, а из (40) – $\dim(G/U) \geq 1$. Очевидно, что $\dim(G/G') = 2$. Отсюда и из (43) имеем $2 = \dim(G/U) + \dim(U/G')$, т.е. $\dim(G/U) = 1$, $\dim(U/G') = 1$. Отсюда и из (40) следует, что $\dim(G/U) = \dim(H) = 1$. Отсюда и из сервантности ретракта H вытекает, что $H \simeq K^+$. Теорема доказана.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие 2. Любой ретракт группы $UT_3(\mathbb{Z})$ является её сервантной циклической подгруппой.

Отсюда и теоремы 2 имеем Следствие 3. Подгруппа H группы $UT_3(\mathbb{Z})$ будет её ретрактом тогда и только тогда, когда найдется матрица $h \in UT_3(\mathbb{Z})$ такая, что $H = \langle h \rangle$ и числа h_{12} и h_{23} взаимно просты. Следствие 4. Существует алгоритм, который по любой подгруппе A группы $UT_3(\mathbb{Z})$ определяет, будет ли A её ретрактом или нет.

Пусть e – единичная матрица размерности n , а e_{ij} – матрица, где на пересечении i -ой строки и j -го столбца находится 1, а остальные элементы матрицы равны 0. Матрица $t_{ij} = e + e_{ij}$ называется *трансвекцией*.

Ретракт H группы $UT_n(\mathbb{Z})$ называется *трансвекционным*, если любая трансвекция t_{ij} либо принадлежит ретракту H , либо находится в ядре U соответствующей ретракции.

Пусть дана возрастающая последовательность $\bar{t} = \langle 1, t_1, t_2, \dots, t_{k+1} \rangle$ натуральных чисел, где $t_{k+1} = n$. По разбиению \bar{t} определим клеточно-диагональную подгруппу $H_{\bar{t}}$, клетки H_{t_i} которой соответствуют наборам индексов $t_i, t_i + 1, \dots, t_{i+1} - 1$ для $i = 1, \dots, k$.

При этом все нетривиальные клетки должны быть полными, то есть включать все элементы с соответствующим набором индексов. Это, в частности, означает, что клетка H_{t_i} определяет подгруппу, изоморфную группе $UT_{t_{i+1}-t_i}(\mathbb{Z})$. Легко проверить, что подгруппа $H_{\bar{t}}$ изоморфна прямому произведению своих нетривиальных клеток. Легко заметить, что $H_{\bar{t}}$ является ретрактом группы $UT_n(\mathbb{Z})$. Такие ретракты называются *стандартными*.

Известно, что любой трансвекционный ретракт является стандартным.

Ретракты H_1 и H_2 группы G называются *подобными*, если существует такая нормальная подгруппа U группы G , что

$$G = H_1U = H_2U, H_i \cap U = 1, i = 1, 2. \quad (44)$$

Другими словами, подгруппы H_1 и H_2 соответствуют двум ретракциям с общим ядром. Ясно, что подгруппы H_1 и H_2 в этом случае изоморфны между собой.

Ретракт группы $UT_n(\mathbb{Z})$ называется *существенно стандартным*, если он подобен стандартному.

Теорема 4. Подгруппа H группы $G = UT_3(\mathbb{Z})$ является трансвекционным ретрактом тогда и только тогда, когда либо

$$H = (t_{12}), \quad (45)$$

либо

$$H = (t_{23}), \quad (46)$$

где t_{ij} – трансвекции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подгруппа H – трансвекционный ретракт. По следствию 3 найдется матрица $h \in G$ такая, что $H = (h)$ и числа h_{12} и h_{23} взаимно просты. Если h_{12} и h_{23} отличны от нуля, то $t_{12}, t_{23} \notin H$. Так как H трансвекционный ретракт, то $t_{12}, t_{23} \in U$. Отсюда следует, что коммутатор $[t_{12}, t_{23}] = t_{13}$ также принадлежит U , т.е. $U = G$. Получим противоречие. Следовательно, либо $h_{12} = 0$, либо $h_{23} = 0$. Пусть $h_{12} = 0$. Тогда по следствию 2 имеем $\text{НОД}(h_{12}, h_{23}) = 1$. Отсюда $h = t_{12}$ и $H = (t_{12})$. Аналогично рассматривается случай, когда $h_{23} = 0$. Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть справедливо равенство (34). Через U обозначим подгруппу, порожденную трансвекциями t_{23}, t_{13} . Тогда, легко проверить, что справедливы: $G = HU, H \cap U = 1, U \trianglelefteq G$, т.е. H – ретракт группы G . Аналогично доказывается, если справедливо (35). Теорема доказана. Теорема 5. Подгруппа H группы $G = UT_3(\mathbb{Z})$ является существенно стандартным ретрактом тогда и только тогда, когда

$$H = (h) \quad (47)$$

и справедливо либо

$$h_{12} = 1, \quad (48)$$

либо

$$h_{23} = 1. \quad (49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (НЕОБХОДИМОСТЬ). Пусть H – существенно стандартный ретракт группы G , а подгруппа U группы G – ядро соответствующей ретракции. Тогда из определения существенно стандартного ретракта следует, что либо

$$t_{12}, t_{13} \in U, \quad (50)$$

либо

$$t_{23}, t_{13} \in U. \quad (51)$$

Пусть справедливо (50). По следствию 3 существует такой элемент $h \in H$, что

$$H = \langle h \rangle, \text{НОД}(h_{12}, h_{23}) = 1. \quad (52)$$

Докажем, что справедливо либо (48), либо (49). Допустим противное, т.е. имеют место неравенства

$$h_{12} \neq 1, h_{23} \neq 1. \quad (53)$$

Пусть

$$G = HU, H \cap U = 1, U \trianglelefteq G. \quad (54)$$

Из (52) следует, что любой элемент $g \in H, g \neq 1$, имеет запись вида

$$g = \begin{pmatrix} 1 & kh_{12} & l \\ & 1 & kh_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad (55)$$

для некоторых целых чисел $k \neq 0, l$. Отсюда и из (53) следует, что для любого элемента $g \in H, g \neq 1$, справедливо

$$|g_{23}| > 1. \quad (56)$$

Докажем, что для любого элемента $u \in U \setminus \{1\}$ справедливо

$$u_{23} = 0. \quad (57)$$

Допустим противное, т.е. существует такой элемент $u \in U$, что $u_{23} \neq 0$. Пусть элемент $v \in U$ такой, что $v_{23} = \min\{u_{23} > 0 | u \in U\}$.

Тогда $v_{23} > 1$. Действительно, если $v_{23} = 1$, то подгруппа $V \leq U$, порожденная элементами v, t_{12}, t_{13} совпадает со всей группой G , что невозможно. Поэтому $v_{23} > 1$. Так как в силу (50) имеем включение $t_{12} \in U$, то

$$vt_{12}^{-v_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ & 1 & v_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix} \in U. \quad (58)$$

Отсюда и из (50), в силу сервантности подгруппы U , имеем $t_{23} \in U$, т.е. $U = G$. Получили противоречие. Следовательно, (57) справедливо, т.е. любая матрица $u \in U$ равна некоторой матрице вида

$$\begin{pmatrix} 1 & l & m \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (59)$$

где $l, m \in \mathbb{Z}$. Отсюда и из (55) и (56) следует, что для любой матрицы $b \in HU$ справедливо $b_{23} \neq 1$. Следовательно, $t_{23} \notin HU$, т.е. $G \neq HU$. Получили противоречие. Таким образом, (53) не имеет места. Поэтому справедливо либо (48), либо (49). Аналогично рассматривается случай, когда справедливо (51). Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Допустим справедливы соотношения (47) и (48). Через U обозначим подгруппу, порожденную трансвекциями t_{23}, t_{13} , т.е.

$$U = gp(t_{23}, t_{13}). \quad (60)$$

Отсюда следует, что для любого элемента $u \in U$ справедливо

$$u_{12} = 0. \quad (61)$$

Отсюда и из (47), (48), (60) следует, что

$$H \cap U = 1, U \trianglelefteq G. \quad (62)$$

Докажем, что

$$G = HU. \quad (63)$$

Пусть дан элемент $g \in G$. Если $g_{12} = 0$, то из (60) следует, что $g \in U$. Допустим $g_{12} = k, k \neq 0$. Отсюда и из (48) следует, что $(gh^{-k})_{12} = 0$. Следовательно, в силу (60), (61) имеем, что для некоторого элемента $u \in U$ верно $g = uh^k$. Отсюда и из (63) получаем равенство $g = h^k u_1$ для некоторого элемента $u_1 \in U$, т.е. $g \in HU$. Следовательно, (63) справедливо. Отсюда и из (62) следует, что H – ретракт группы G . Достаточность, а потому и теорема доказаны.

Из теоремы 5 непосредственно вытекает Следствие 5. Подгруппа H группы $UT_3(\mathbb{Z})$ не является существенно стандартным ретрактом группы G тогда и только тогда, когда найдется элемент $h \in UT_3(\mathbb{Z})$ такой, что числа h_{12} и h_{23} отличны от 1 и наибольший общий делитель этих чисел равен 1.

Отсюда и из теорем 4,5 и следствия 4 непосредственно вытекает Следствие 6. Существует алгоритм, который по любой подгруппе H группы $UT_3(\mathbb{Z})$ определяет является ли H трансвекционным ретрактом или существенным ретрактом группы $UT_3(\mathbb{Z})$. **ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По следствию 4 существует алгоритм который определяет, будет ли H ретрактом или нет. Пусть $H = \langle h \rangle$ – ретракт. Если либо $h_{12} = 0$, либо $h_{23} = 0$, то по теореме 4 H – трансвекционный ретракт. Если $h_{12}, h_{23} \neq 0$, то H – нетрансвекционный ретракт. Если либо $h_{12} = 1$, либо $h_{23} = 1$, то по теореме 5 H – существенно стандартный ретракт. Если же $h_{12}, h_{23} \neq 1$, то по следствию 5 подгруппа H не является существенно стандартным ретрактом.

5 Ретракты вычислимых разрешимых групп без кручения

Пусть ω – множество всех натуральных чисел, G – некоторая группа и $v : \omega \rightarrow G$ – отображение ω на G . Пара (G, v) называется *нумерованной группой*. Нумерованная группа называется *конструктивной*, если существует алгоритм, который по любым натуральным числам n, m и s определяет справедливость равенств $vn = vm$ и $vn \cdot vm = vs$. Группа G называется *вычислимой* (или *конструктивизируемой*), если существует нумерация v группы G такая, что (G, v) – конструктивная группа. Подгруппа H нумерованной группы (G, v) называется *вычислимо перечислимой* в (G, v) , если множество $v^{-1}H$ вычислимо перечислимо.

Группа G называется *разрешимой*, если ряд коммутантов $G \geq G' \geq G'' \geq \dots \geq G^{(n)} \geq \dots$ группы G через конечное число шагов обрывается на единице.

Теорема 6. Пусть (G, v) – вычислимо нумерованная разрешимая группа без кручения конечной размерности такая, что изолятор коммутанта $I(G')$ равен G' . Тогда любой ретракт H группы G – вычислимо перечислимая подгруппа группы (G, v) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем индукцию по размерности $\dim(G) = n$ группы G . Если $n = 1$, то G – подгруппа группы рациональных чисел. Отсюда $H = 1$, либо $H = G$, а потому H – вычислимо перечислимая подгруппа в (G, v) .

Пусть размерность группы G равна $m + 1$ и для всех меньших размерностей теорема справедлива. Далее применим индукцию по ступени разрешимости $\text{dec}(G) = r$. Если $r = 1$, то G абелева группа. Так как H – сервантная подгруппа конечной размерности вычислимой группы G , то H вычислимо перечислима в (G, v) .

Пусть $\text{dec}(G) = r + 1$ и для меньшей ступени разрешимости теорема справедлива. Так как коммутант G' является эндоморфно допустимой подгруппой группы G , то подгруппа $H \cap G'$ будет ретрактом группы G' . Так как степень разрешимости подгруппы G' меньше, чем $r + 1$, значит по индукционному предположению подгруппа $H \cap G'$ вычислимо перечислима в (G', v') , где v' – ограничение v на $I(G') = G'$. Из последнего равенства и сервантности ретракта H в G следует, что $I(H \cap G') = H \cap G'$. Следовательно, $H/H \cap G'$ – абелева группа без кручения конечной размерности. Отсюда и сервантности подгруппы H в G получаем, что подгруппа H вычислимо перечислима в (G, v) . Теорема доказана.

Следствие 7. Пусть $T_n^+(\mathbb{Q})$ группа треугольных матриц над полем рациональных чисел, где диагональные элементы положительны. Тогда любой ретракт H группы $T_n^+(\mathbb{Q})$ вычислимо перечислим в $(T_n^+(\mathbb{Q}), v)$, где v – эффективная нумерация группы $T_n^+(\mathbb{Q})$, т.е. по номеру n можно эффективно найти матрицу vn и наоборот.

Следствие 8 [6]. При любом n любой ретракт группы всех унитарных матриц $UT_n(\mathbb{Q})$ размерности n над полем рациональных чисел \mathbb{Q} вычислим.

6 Заключение

Нахождение критериев ретрактности подгруппы данной группы является актуальной задачей теории групп. В данной статье найден критерий ретрактности абелевой подгруппы группы унитарных матриц произвольной конечной размерности над кольцом целых чисел. А также доказана вычислимость любого ретракта группы всех треугольных матриц любого конечного размера над полем рациональных чисел с положи-

тельными диагональными элементами. Таким образом, решены важные вопросы теории ретрактов и вычислимости групп. Они открывают путь для дальнейших исследований в этих областях математики.

Авторы выражают благодарность профессору В.А. Романькову за привлечение внимания к данной тематике и ценные советы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Республик Казахстан, проект № 3953 (GF4)

Литература

- [1] *Magnus B., Karras A., Solitar D.* Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений.– М.: Наука, 1974. –360 с.
- [2] *Roman'kov V.A.* Diophantine questions in the class of finitely generated nilpotent groups // J. Group Theory.–2016.–№19.– P. 497–514.
- [3] *Baumslag G., Myasnikov A., Shpilrain V.* Open problems in combinatorial group theory // Contemporary Math., 296.– 2002.–P.1–38. Расширенная электронная версия: grouptheory.info, раздел Open Problems.
- [4] *Myasnikov A., Roman'kov V.* Verbally closed subgroups of free groups // J. Group Theory.–2014.–№17.–P.29–40.
- [5] *Романьков В.А., Хисамиев Н.Г.* Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп // Алгебра и логика.–2013.– №4(52).–С.502–525.
- [6] *Романьков В.А., Хисамиев Н.Г., Коньрханова А.А.* Ретракты нильпотентных групп. //Материалы международной научной конференции "Алгебра, анализ, дифференциальные уравнения и их приложения посвященной 60-летию академика НАН РК Джумадиляева А.С. ("Институт математики и математического моделирования").– Алматы,2016.–С.40–42.
- [7] *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. –М.:Наука.–1982.–288 с.

References

- [1] *Magnus V., Karras A., Solitar D.* Combinatorial theory of groups. Presentation of groups in terms of forms and relations.–M.: Nauka, 1974.–360 p.
- [2] *Roman'kov V.A.* Diophantine questions in the class of finitely generated nilpotent groups. // J. Group Theory.–2016.–№19.–P. 497–514.
- [3] *Baumslag G., Myasnikov A., Shpilrain V.* Open problems in combinatorial group theory // Contemporary Math., 296.– 2002.–P.1–38. Enlarged on-line version: grouptheory.info, раздел Open Problems.
- [4] *Myasnikov A., Roman'kov V.* Verbally closed subgroups of free groups // J. Group Theory.–2014.–№17.–P. 29–40.
- [5] *Roman'kov V.A., Khisamiev N.G.* Verbally and existentially closed subgroups of free nilpotent groups // Algebra and logic.–2013.– №4(52) / 502–525.
- [6] *Roman'kov V.A., Khisamiev N.G., Konyrkhanova A.A.* Retracts of nilpotent groups. // Materials of International scientific conference "Algebra, analysis, differential equations and their applications" devoted to 60-th anniversary of RK NAS academician Dzhumadildaev A.S. ("Institute of mathematics and math modeling").– Almaty,2016.–P.40–42.
- [7] *Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I.* Foundations of groups theory.–M.:Nauka.– 1982.–288 p.

2-бөлім**Раздел 2****Section 2****Механика****Механика****Mechanics**

UDC 004.382

Aizhulov D.Y *, Kurmanseit M.B., Tungatarova M.S.

Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty

*E-mail: daniar.aizhulov@gmail.com

Application of geostatistical methods for reconstruction of lithological and mineralogical structure of uranium deposit by interpolating well data

During the development of uranium deposits that use in-situ leaching extraction method, mineralogical and lithological structure of sub terrain media remains unknown and is limited to the data along the wells. In order to optimize the development process, the scheme of geotechnological polygon should be positioned by taking into account lithological and mineralogical characteristics of the deposit. Given article describes results of modeling of lithological and mineralogical structure of uranium deposit by using inverse distance weighting and kriging methods, that are widely used in oil and gas industry. These algorithms are part of interpolation module of geotechnological simulator software that was developed and integrated to the Institute of High Technology (KazAtomProm, Kazakhstan) for the purpose of optimization of the processes of uranium deposits development and production. The results show that these two methods can be practically used in Kazakhstan's uranium industry and the comparison show that values of uranium concentration, permeability coefficient and lithological rock type provided by kriging algorithm are more reliable and closer as compared with other method when applied on the uranium deposit. The developed software that focuses on uranium deposits would eventually reduce costs of Kazakhstan's mines related to purchasing of costly CAD systems and drilling expensive exploration wells.

Key words: interpolation, geostatistics, inverse distance weighting, kriging, uranium, variogram.

Айжулов Д.Е., Құрмансейіт М.Б., Тунгатарова М.С.

Ұңғы бойындағы мәліметтерді интерполяциялау арқылы, пластағы минерологиялық пен литологиялық құрылымын қайта қалпына келтіру үшін, геостатистикалық әдістерді салыстыру

Уран кен орнын жер асты шаймалау әдісімен өндіру кезінде пластың минерологиялық пен литологиялық құрылымы белгісіз және тек ұңғы бойындағы мәліметтермен шектелген. өңдеу процесін оңтайландыру үшін геотехнологиялық полигон схемасын орналастыру барысында минерал кен орнындағы литологиялық пен минерологиялық құрылымын ескеру керек. Берілген мақалада уран кен орнының құрылымын интерполяциясы қашықтыққа кері өлшенген мен кригинг әдістерімен жасалып, нәтижелері салыстырылған. Осы екі әдіс мұнай мен газ индустриясында кең қолданылады. Кен орнын сипаттауға арналған есептеу алгоритмі уран кен орны жұмысын оңтайландыруға негізделген геотехнологиялық симулятор модулі болып табылады. Нәтижесінде, сипатталған екі әдіс, уран индустриясында қолдануға болатындығын көрсетті. Осы екі әдіс нәтижелерін салыстыру кезінде уран концентрациясын, өткізгіштік коэффициенті мен литологиялық типтері сияқты таужыныстарының қасиеттерінің интерполяциясы кезінде кригинг әдісі аса сенімді және шындыққа жақын нәтижелер беретінін көрсетті. табылады.

Түйін сөздер: интерполяция, геостатистика, қашықтыққа кері өлшенген әдісі, кригинг, уран, вариограмма

Айжулов Д.Е., Құрмансейіт М.Б., Тунгатарова М.С.

Сравнение геостатистических методов для восстановления литологической и минералогической структур пласта путем интерполяции скважинных данных

При разработке урановых месторождений методом подземного выщелачивания минералогическое и литологическое строение месторождений остается неизвестным и ограничено лишь данными на скважинах. Для оптимизации процесса разработки необходимо расположить схему геотехнологического полигона с учетом литологического и минералогического строений месторождений минералов. В данной статье приведены результаты моделирования литологического и минералогического строений урановых месторождения методами обратных взвешенных расстояний и кригинга, которые обширно применяются в нефтегазовой индустрии. Упомянутые алгоритмы расчета характеристик месторождений являются модулем разработанного авторами геотехнологического симулятора, служащего для оптимизации работы урановых месторождений. Результаты отображают, что данные методы могут быть применены к урановой индустрии, и в сравнении друг с другом, кригинг предоставляет более надежные и близкие к реальности результаты при интерполяции таких свойств породы как концентрация урана, коэффициент проницаемости и литологический тип породы.

Ключевые слова: интерполяция, геостатистика, метод обратных взвешенных расстояний, кригинг, уран, вариограмма.

1 Problem statement

1.1 Background

According to World Nuclear Association 12% of World's uranium resources can be attributed to Kazakhstan, which had produced as much as 22830 tonnes of uranium by 2014. Since 2009 Kazakhstan has become an undisputable leader in uranium production. Almost 2/5 of planet's uranium was produced in Kazakhstan [3].

The in-situ leaching (ISL) is a leading method of uranium production in many countries, including USA and Kazakhstan. ISL requires injection of various solution into subterranean porous media in order to dissolve minerals containing uranium, followed by extraction with help of production wells [4].

The core of the problem lies in expensiveness of exploration procedures. So far, uranium exploration relies solely on well drilling, and on using different probes to determine uranium concentration in stratum. Due to the costliness of the drilling process and relatively far distances between wells, interpreting lithological data and uranium concentration between wells becomes a challenge [8]. Moreover, a hydrodynamical model of leaching solution flow in subterranean porous media would make it easier to monitor and optimize the production process, thereby reducing the expenses connected to uranium production. A simulation software that was developed under Kazakhstan government funding project which gives the ability to determine various geological and hydrodynamical properties and consists of the following modules:

1. geological modeling;
2. hydrodynamical modeling;
3. mass transfer module and
4. streamline module.

The construction of hydrodynamical model relies on existing hydrodynamical properties of subterrain environment. However, the exact (measured) data is only known at wells, therefore, geostatistical methods must be used in order to determine these properties in between wells. Hence, accuracy of hydrodynamical model is directly dependent on accuracy of geostatistical methods used in calculation. In the context of this article two known geostatistical methods were implemented: inverse distance weighting interpolation and kriging. While these two methods are extensively used in oil and gas industry, their application to uranium exploration and production should be studied.

1.2 Problem statement and research approach

The input data consists of lithological and hydrological information collected from 35 real uranium production wells located in rollfront deposit in Kazakhstan. Uranium leaching wells are usually positioned in a shape of hexagon with one production well located in the center and six injection wells around it [5] (Figure 1.2). The reliability of inverse distance weighting and kriging methods in the context of uranium resources will be estimated using following steps:

1. remove one well with its data;
2. interpolate data using respective method;
3. compare results with measured data

35 wells used in estimation are shown in a (Figure 1.2). As an example, a well which is removed for reliability estimation is circled in red.

2 Existing calculation methods

Several geostatistical interpolation methods exists that can be used to interpret the data between the wells such as linear interpolation, inverse distance, kriging, Discrete Smooth Interpolation, Sequential Gaussian Simulation etc [1, 2].

Two of them were developed and applied to the problem: inverse weighting distance and kriging. Each of mentioned methods has its own specific characteristics that affect results and performance.

2.1 The inverse weighting distance method

The inverse weighting distance method is based on the assumption that nodes of the grid that are closer to the calculated node has more influence to the resulting value, rather than nodes that are further away. In order to calculate the value of the node by using this method, the following two parameters can be used to adjust the resulting value: the degree of influence and anisotropy, which defines the effect of the direction on the result (Figure 2.1) [1].

The general formula of inverse weighting distance method is as follows:

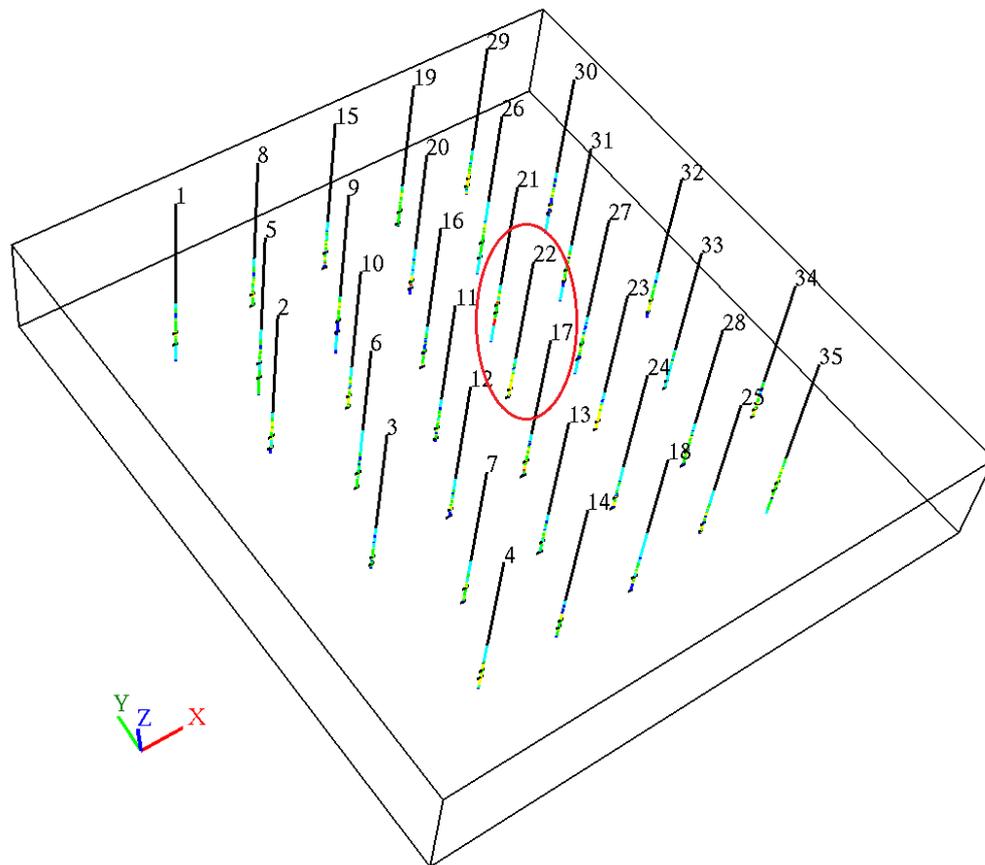


Figure 1–The calculation block covering 35 uranium production wells. The well number 22 is removed from input and used for result reliability estimation

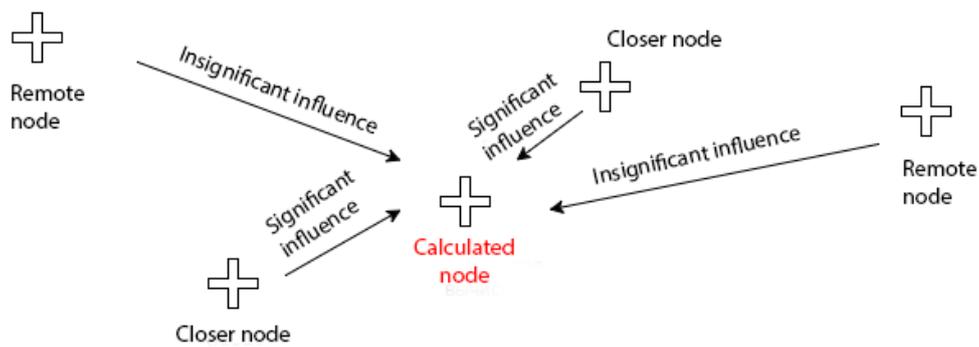


Figure 2–The impact of surrounding nodes on the calculated node

$$Z^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i^p} * Z(x_i)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_i^p}}, \tag{1}$$

where $Z^*(x)$ is the resulting value of the calculated node x , which is being interpolated; $Z(x_i)$ is the value at each node x_i ; d_i is distance between nodes x and x_i ; p is degree of influence of

the node x_i at the value of the node x .

This method is also able to take into account the anisotropy of the media, which is calculated by the following formula:

$$d = \sqrt{a(x - x_i)^2 + b(y - y_i)^2 + c(z - z_i)^2}, \quad (2)$$

where a , b and c are the coefficients of anisotropy in each direction.

The advantages of the inverse weighting distance method lies in its simplicity and effective computational resource use. The method does not take into consideration any statistics regarding the distribution and shape of the values in media [1, 7].

2.2 Kriging interpolation

Kriging is one of more favored and effective methods of interpolation that is often used in interpretation of sub terrain data. In comparison to the inverse weighting distance, apart from anisotropy, kriging defines a mathematical model by which particular points have particular influence (the weight) on a calculated node. This model is called a variogram [2].

There is a whole family of kriging algorithms that can be applied depending on the specific characteristics of the case. In the scope of this article Ordinary Kriging was used which consists of the steps described in following paragraphs.

Firstly, a variogram must be defined by using the following formula:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}E(Z(x+h) - Z(x))^2, \quad (3)$$

where $\gamma(h)$ is a value of a variogram function for the distance between nodes equal to h , and a values $Z(x)$, $Z(x+h)$ at the nodes x and $x+h$ respectively. Function E is describes arithmetical mean.

By choosing several distances h and by calculating the value of a variogram for all nodes located at that distance, it is possible to find an approximate model, that describes dependence of a variogram from the distance between nodes. The following three models are frequently used [2]:

1. Spherical model

$$\gamma(h) = \begin{cases} sill(\frac{3}{2}\frac{h}{a} - \frac{h^3}{2a^3}), & h \leq a \\ sill & h > a \end{cases} \quad (4)$$

2. Exponential model

$$\gamma(h) = sill(1 - e^{-\frac{h}{a}}) \quad (5)$$

3. Gaussian model

$$\gamma(h) = sill(1 - e^{-\frac{h^2}{a^2}}) \quad (6)$$

In all cases described above *sill* becomes variogram's upper limit, a (also known as range) is a value along the axis h , after which the variogram ends its fluctuations. In other words, influence of nodes that are located at the distance further from a , is so insignificant, that it can be neglected. The value of *sill* can be manually picked up, or determined by the following formula:

$$sill = \sigma_x = E(x - E(x))^2, \quad (7)$$

where σ_x is variance.

As an alternative the function of variogram can be substituted by a function of a co-variogram:

$$C(h) = C(0) - \gamma(h); C(0) = \sigma_x = sill. \quad (8)$$

Secondly, weights must be calculated for each node. In the process of measuring value for the unknown node the weight of influence λ_i must be calculated for each other known node by solving this matrix equation:

$$\begin{bmatrix} C(x_1 - x_1) & C(x_1 - x_2) & \dots & C(x_1 - x_n) & 1 \\ C(x_2 - x_1) & C(x_2 - x_2) & \dots & C(x_2 - x_n) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ C(x_n - x_1) & C(x_n - x_2) & \dots & C(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(x - x_1) \\ C(x - x_2) \\ \dots \\ C(x - x_n) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Lastly, the value at the node must be calculated. After all weights were successfully calculated the value at the node x is determined by the formula below:

$$Z^*(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i), \quad (10)$$

where the condition $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ is mandatory.

In comparison to other interpolation methods, kriging results a has lesser deviation from the from the actual value [6, 2, 7].

3 Results evaluation

Figure 3 illustrates the results that were achieved by implementing the aforementioned method (well with data removal). Charts include results acquired from kriging and inverse distance methods. Results were collected for both filtration coefficient and uranium concentration (left and right charts respectively). On both charts results of both interpolation methods can be compared with real data measured with appropriate equipment. Chart on the left shows filtration coefficient by well height, whereas chart on the right illustrates uranium concentration on the same well.

According to International Atomic Energy Agency rollfront uranium deposits that a prevalent in Kazakhstan are defined as “zones of uranium-matrix impregnations that crosscut sandstone bedding and extend vertically between overlying and underlying less-permeable horizons” [9]. Expectedly, filtration coefficient would be minimal close to the top and bottom impermeable bedding, which is evident on Figure 3. Starting from around 253 meters depth to 277 meters depth the results start to diverge. At the beginning, Inverse distance method in particular, gives higher discrepancy from measured data rather than Kriging method. While being smooth it was unable to predict spikes in filtration coefficient. Around heights 260 and 270 Kriging provided relatively comparable spikes. For filtration coefficient, total estimation error of Kriging was less than of Inverse Distance with values equal to 85.2 and 93.3 respectively.

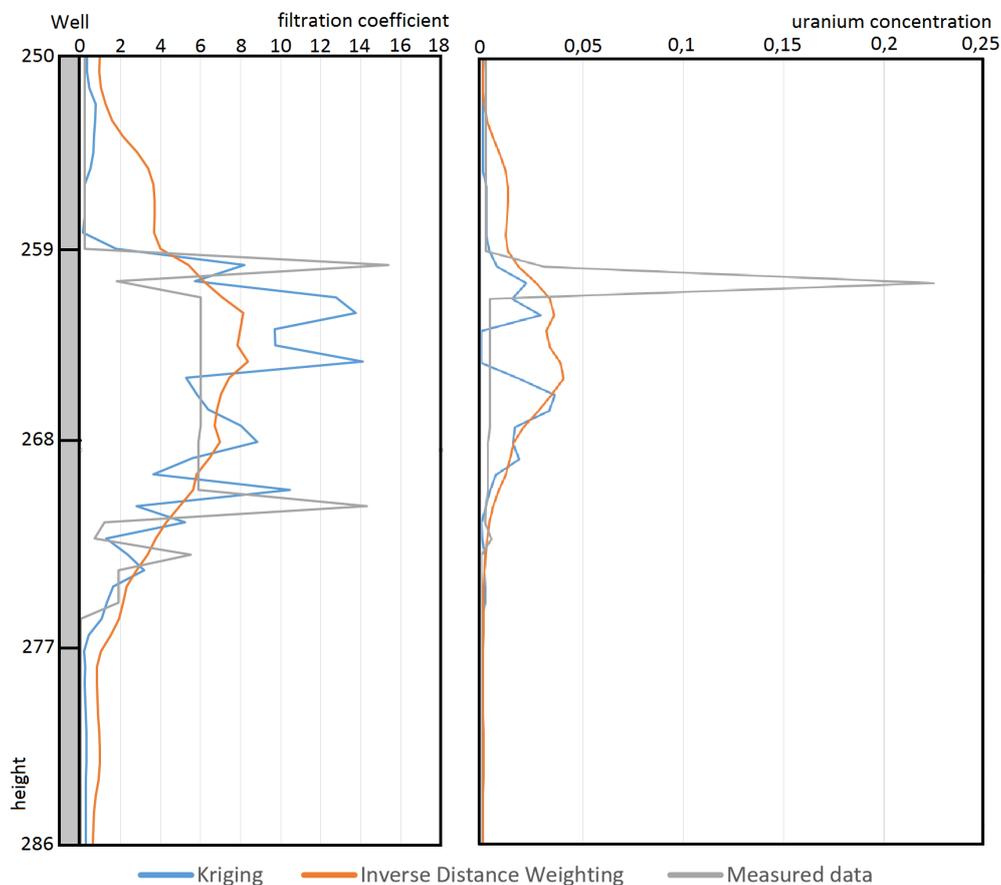


Figure 3–The calculation block covering 35 uranium production wells. The well number 22 is removed from input and used for result reliability estimation

For uranium concentration estimation both methods were proven as unreliable which can clearly be seen on the right chart of Figure 3. Both Kriging and Inverse Distance methods were unable to predict the abnormal rises and dips in uranium at wells. The total estimation error of Kriging was again lower than that of Inverse distance with values equal to 0.42 and 0.61 respectively.

4 Conclusion

Overall Kriging provided slightly more reliable results than Inverse Distance. In general, filtration coefficient results did not have high deviation from measured data. It is clear, however, that the data provided to Kriging is insufficient for relatively precise uranium concentration estimation. Chemical, geological and hydrodynamical parameters should be used in interpolation in order for Kriging or any other method to produce reliable results.

While interpolation methods used for uranium deposits can be improved the technique of removal of input data from one well can be reused in future. This technique gives ability to test various methods for their reliability, and provides opportunity to compare them with each other. This work was accomplished within the "The development of information technologies to improve the efficiency oil, gas and uranium production" project under financial support from Ministry of Education of Republic of Kazakhstan.

References

- [1] *Hengl T.* A Practical Guide to Geostatistical Mapping of Environmental Variables //JRC Scientific and Technical Reports. – 2007. – Vol. 15(3). – P.1-131.
- [2] *Pyrz M., Deutsch.* Geostatistical Reservoir Modeling //Oxford University Press. – 2014. – 2nd edition. – P.74-151.
- [3] *World Nuclear Association,* Uranium and Nuclear Power in Kazakhstan, <http://www.world-nuclear.org/info/Country-Profiles/Countries-G-N/Kazakhstan/> 2016.
- [4] *World Nuclear Association,* Uranium Mining Overview, <http://www.world-nuclear.org/info/Nuclear-Fuel-Cycle/Mining-of-Uranium/Uranium-Mining-Overview/>, 2016.
- [5] *World Nuclear Association,* In Situ Leach (ISL) Mining of Uranium, <http://www.world-nuclear.org/info/nuclear-fuel-cycle/mining-of-uranium/in-situ-leach-mining-of-uranium/>, 2016.
- [6] *Jean-Laurent Mallet,* Geomodeling, Oxford University Press, New York. – 2002.– P.124.
- [7] *Porotov G.S.* Matematicheskie metody modelirovaniya v geologii //Oxford University Press. – 2006. – P.7-220.
- [8] *Shumilin V.A., Aliskerov M.* Business in the resource industries Directory // Russian Ministry of Natural Resources. – 2001. – P.1-268. (in Russian)
- [9] *International Atomic Energy Agency.* World Distribution of Uranium Deposits (UDEPO) with Uranium Deposit Classification, – 2009.– P.117.

UDC 004.382

Kurmanseiit M.B*., Aizhulov D.Y, Tungatarova M.S.

Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty

*E-mail: kurmanseiit.maksat@gmail.com

The study of change in extraction degree under the influence of oxidizers while leaching Uranium ore with sulfuric acid

Sulfuric acid is extensively used in uranium production with In-Situ Leaching method. The influence of various components on the extraction degree has to be studied in order to optimize the solution spending and extraction degree of uranium. In the context of this article, the extraction degree and overall dynamics of the leaching process is studied by numerically calculating concentrations of dissolved uranium mineral. The calculation is implemented along the path of leaching solution from injection well to production well. Properties that is being studied is the change in extraction degree. The change in extraction degree over time at production well is calculated first without and then with addition of oxidizers, which in case of this work were Iron and Pyrolusite. On the basis of chemical processes a mathematical model was created to simulate uranium extraction process. The results show that adding Iron and Pyrolusite to leaching reaction can increase overall extraction degree of uranium minerals.

Key words: extraction degree, sulfuric acid, oxidizer, in-situ leaching, uranium, numerical modeling.

Құрмансейіт М.Б., Айжулов Д.Е., Тунгатарова М.С.

Күкірт қышқылымен уранды шаймалау кезінде өндіру дәрежесіне тотықтандырғыштың әсерін зерттеу

Жер асты шаймалау әдісінде уранды қышқыл арқылы өндіру кең таралған әдіс болып табылады. Әр-түрлі химиялық компоненттердің өндіру дәрежесіне әсерін зерттеу аталған процестің тиімділігін арттыруға мүмкіндік береді. Берілген мақалада өндіру дәрежесі мен процестің жалпы динамикасы айдайтын ұңғы мен өндіру ұңғысы арасында таралатын еріген уран концентрациясын сандық модельдеу арқылы зерттеледі. Өндіру ұңғысындағы өндіру дәрежесінің өзгерісі тотықтырғышты, яғни қарастырылып отырған жағдайда темір мен пирролизитті қосқан және қоспаған жағдайы есептелінді. Уранды жер асты шаймалау әдісін симуляциялау үшін берілген химиялық процесстің негізінде математикалық модел құрылды. Алынған нәтижелер шаймалау процесі кезінде темір мен пирролизитті қосу пайдалы компоненттің өндіру дәрежесін өсіруіне алып келетінін көрсетті.

Түйін сөздер: өндіру дәреже, күкірт қышқылы, тотықтырғыш, жер асты шаймалау, уран, сандық модельдеу.

Құрмансейіт М.Б., Айжулов Д.Е., Тунгатарова М.С.

Изучение влияния окислителей на степень извлечения при выщелачивании урана растворами серной кислоты

Кислотное выщелачивание наиболее популярный метод производства урана методом подземного скважинного выщелачивания. Исследование влияние различных химических компонентов на степень извлечения может значительно оптимизировать данный процесс. В контексте текущей статьи, исследуется степень извлечения и общая динамика процесса путем численного моделирования концентрации растворенного урана.

Моделирование производится вдоль пути следования выщелачивающего раствора от закачной скважины до откачной скважины. Изменение степени извлечения на откачной скважине вычисляется с и без добавления окислителей, которыми в нашем случае являются железо и пиролюзит. С учетом закона действующих масс; на основе химической процессов была построена математическая модель для симуляции процесса выщелачивания урана. Результаты показывают, что добавление железа и пиролюзита в процессе выщелачивания могут повысить степень извлечения полезного компонента.

Ключевые слова: степень извлечения, серная кислота, окислитель, подземное выщелачивание, уран, численное моделирование.

1 Introduction

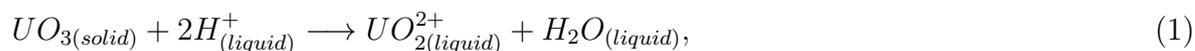
In 2015 Kazakhstan was number one country by uranium production accounting for as much as 39% of all produced uranium in the World [2]. About 80% of all known Kazakhstan's uranium resources can be recovered using in-situ leaching (ISL) method. In fact, 45% of share of uranium production can be attributed to ISL method [1].

There are two main techniques for leaching of uranium ore: acid and carbonate. the main factor for determining which technique to use is the type of the ore [3]. The solution that is used at ISL mines in Kazakhstan is sulphuric acid (H_2SO_4) [1], while the most common of uranium ores that are: Uraninite (UO_2 , U_3O_8) and Coffinite ($U[SiO_4, (OH)_4]$) [4]. Uranium ore mainly exists in four- and six-valent compounds. Unlike six-valent, four-valent uranium ore dissolves with complications. In fact, evidence show that most of it stays underground after leaching was conducted. Therefore, adding oxidizers to leach remaining four-valent uranium, becomes a necessity. By adding oxidizers the speed of four-valent uranium leaching can be increased, thus rising overall extraction degree. One of the most common oxidizers used in uranium industry is Iron (Fe) along with Manganese Dioxide (MnO_2) also known as Pyrolusite [3].

In the context of this article, computational methods are used to study the effects of Iron and Pyrolusite on uranium leaching process. The results of kinetics for the reactions with and without Iron along with Pyrolusite were achieved and compared to identify the effects of said oxidizers on uranium leaching.

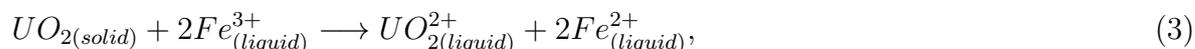
2 Chemistry of acid leaching

Uranium trioxide leaching proceeds by the following chemical formula:



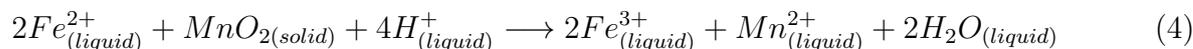
This reaction happen relatively fast and without complications [3].

Experimental evidence show that Iron is the oxidizing agent which accelerates uranium dioxide leaching by the following scheme [3]:

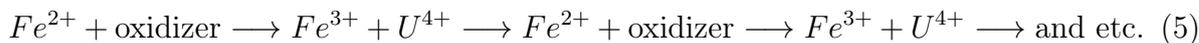


Iron which plays the role of oxidizing agent decreases its valence which is a major issue, since it is no longer available for succeeding reactions. To return it to its original valence,

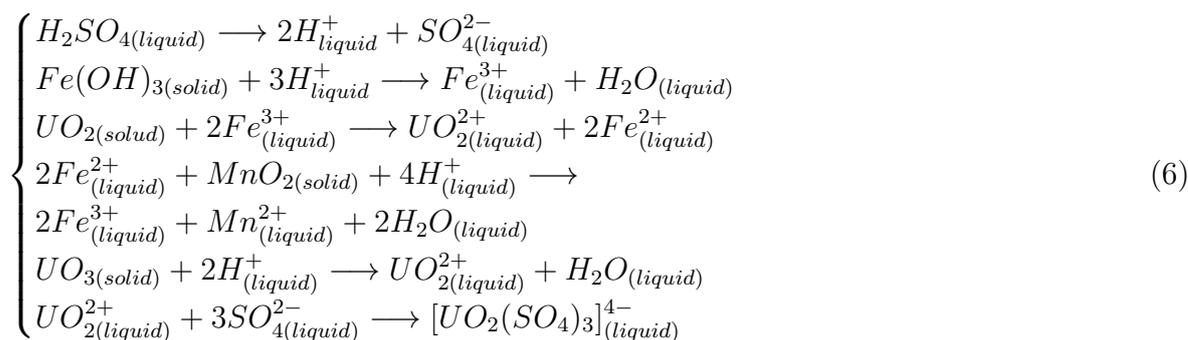
Pyrolusite is added by the following principle:



Hence, overall life cycle should look as follows:



The resulting chemical model is described by the system in the formula number (6).



3 Mathematical model

The domain under consideration is one dimensional from injection well to production well, where the distance between them is equal to L.

To model uranium acid leaching numerically, let us introduce the following conventions:

C_1	H^+	hydrogen concentration
C_2	SO_4^{2-}	sulfuric oxide concentration
C_3	Fe^{3+}	iron(III) concentration
C_4	Fe^{2+}	iron(II) concentration
C_5	UO_2^{2+}	oxidized uranium dioxide concentration
C_6	$[UO_2(SO_4)_3]^{4-}$	uranyl sulfate concentration
C_{s1}	$Fe(OH)_3$	iron hydroxide concentration
C_{s2}	MnO_2	pyrolusite concentration
C_{s3}	UO_3	uranium(VI) trioxide concentration
C_{s4}	UO_2	uranium(IV) dioxide concentration
\vec{U}		velocity field
ϕ		porosity
K		filtration coefficient
h		hydraulic pressure
$k_i, i = \overline{1, 6}$		rate of reaction, where i is respective number of chemical equation from formula (6)
$D_i, i = \overline{1, 6}$		diffusion coefficient

Due to the fact that leaching process take place in porous subterranean environment, Mass Conservation Law and Darcy's Law equations are used for modeling purposes.

$$\text{div}(\vec{U}\phi) = 0 \quad (7)$$

$$\vec{U}\phi = -Kgrad(h) \quad (8)$$

By substituting the Darcy's Law in to Mass Conservation Law we will obtain the following hydraulic head equation.

$$div(Kgrad(h)) = 0 \quad (9)$$

By using Law of Mass Action we can derive the following differential equations that are used for a numerical research:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C_{s1}}{\partial t} = -\frac{k_2}{(1-\phi)\rho_s} C_{s1} C_1^3 \\ \frac{\partial C_{s2}}{\partial t} = -\frac{1}{(1-\phi)\rho_s} (-k_4 C_{s2} C_4^2 C_1^4 + k_7 C_7 C_8^2) \\ \frac{\partial C_{s3}}{\partial t} = -\frac{k_5}{(1-\phi)\rho_s} C_{s3} C_1^2 \\ \frac{\partial C_{s4}}{\partial t} = -\frac{k_3}{(1-\phi)\rho_s} C_{s4} C_3^2 \\ \frac{\partial C_1}{\partial t} + \vec{U}gradC_1 = div(D_1gradC_1) + \frac{1}{\phi\rho_l} (-3k_2 C_{s1} C_1^3 - 4k_4 C_{s2} C_4^2 C_1^4 - 2k_5 C_{s3} C_1^2) \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} + \vec{U}gradC_2 = div(D_2gradC_2) + \frac{1}{\phi\rho_l} (-3k_6 C_5 C_2^3) \\ \frac{\partial C_3}{\partial t} + \vec{U}gradC_3 = div(D_3gradC_3) + \frac{1}{\phi\rho_l} (-2k_3 C_{s4} C_3^2 + 2k_4 C_{s2} C_4^2 C_1^4 + k_2 C_{s1} C_1^3) \\ \frac{\partial C_4}{\partial t} + \vec{U}gradC_4 = div(D_4gradC_4) + \frac{1}{\phi\rho_l} (2k_3 C_{s4} C_3^2 - 2k_4 C_{s2} C_4^2 C_1^4) \\ \frac{\partial C_5}{\partial t} + \vec{U}gradC_5 = div(D_5gradC_5) + \frac{1}{\phi\rho_l} (k_3 C_{s4} C_3^2 + k_5 C_{s3} C_1^2 - k_6 C_5 C_2^3) \\ \frac{\partial C_6}{\partial t} + \vec{U}gradC_6 = div(D_6gradC_6) + \frac{k_6}{\phi\rho_l} C_5 C_2^3 \end{array} \right. \quad (10)$$

Initial and boundary conditions for mentioned differential equations are as follows:

$$\begin{array}{llll} h|_{x,t=0} = 0 & C_1|_{x,t=0} = 0 & C_2|_{x,t=0} = 0 & C_3|_{x,t=0} = 0.004 \\ C_4|_{x,t=0} = 0.001 & C_5|_{x,t=0} = 0 & C_6|_{x,t=0} = 0 & C_{s1}|_{x,t=0} = 0.04 \\ C_{s2}|_{x,t=0} = 0.09 & C_{s3}|_{x,t=0} = 0.002 & C_{s4}|_{x,t=0} = 0.001 & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} h|_{x=0,t} = h_0 & \frac{\partial h}{\partial x}|_{x=L,t} = 0 & C_1|_{x=0,t} = 0.2 & C_2|_{x=0,t} = 0.1 \\ C_3|_{x=0,t} = 0 & C_4|_{x=0,t} = 0 & C_5|_{x=0,t} = 0 & C_6|_{x=0,t} = 0 \\ C_{s1}|_{x=0,t} = 0 & C_{s2}|_{x=0,t} = 0.02 & C_{s3}|_{x=0,t} = 0 & C_{s4}|_{x=0,t} = 0 \end{array}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}|_{x=L,t} = \frac{\partial C_2}{\partial x}|_{x=L,t} = \frac{\partial C_3}{\partial x}|_{x=L,t} = \frac{\partial C_4}{\partial x}|_{x=L,t} = \frac{\partial C_5}{\partial x}|_{x=L,t} = \frac{\partial C_6}{\partial x}|_{x=L,t} = 0$$

$$\frac{\partial C_{s1}}{\partial x}|_{x=L,t} = \frac{\partial C_{s2}}{\partial x}|_{x=L,t} = \frac{\partial C_{s3}}{\partial x}|_{x=L,t} = \frac{\partial C_{s4}}{\partial x}|_{x=L,t} = 0$$

where $k_i, i = \overline{1,6}$ are usually determined experimentally, while in our case they are constant and equal to one, since all reactions are occurring at the same time.

4 Results

The idea is to study the kinetics of leaching process from injection well (where leaching solution is injected) to production well (where leaching solution containing dissolved uranium mineral is obtained). Therefore, one dimensional problem was considered, and results were achieved by using implicit method for pressure calculation and explicit method for concentration calculation [5].

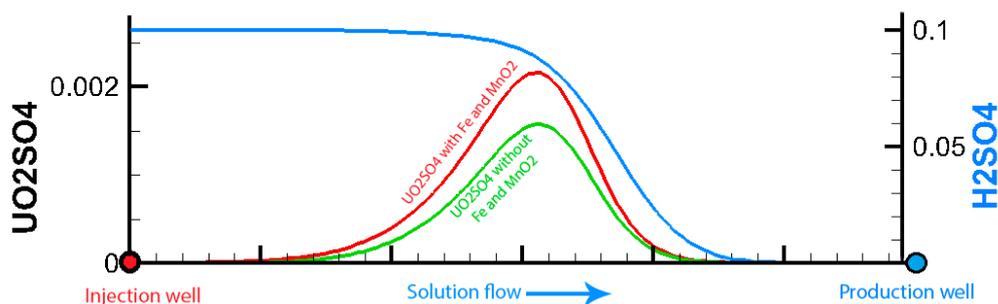


Figure 1–Kinetics of leaching process from injection well to production well

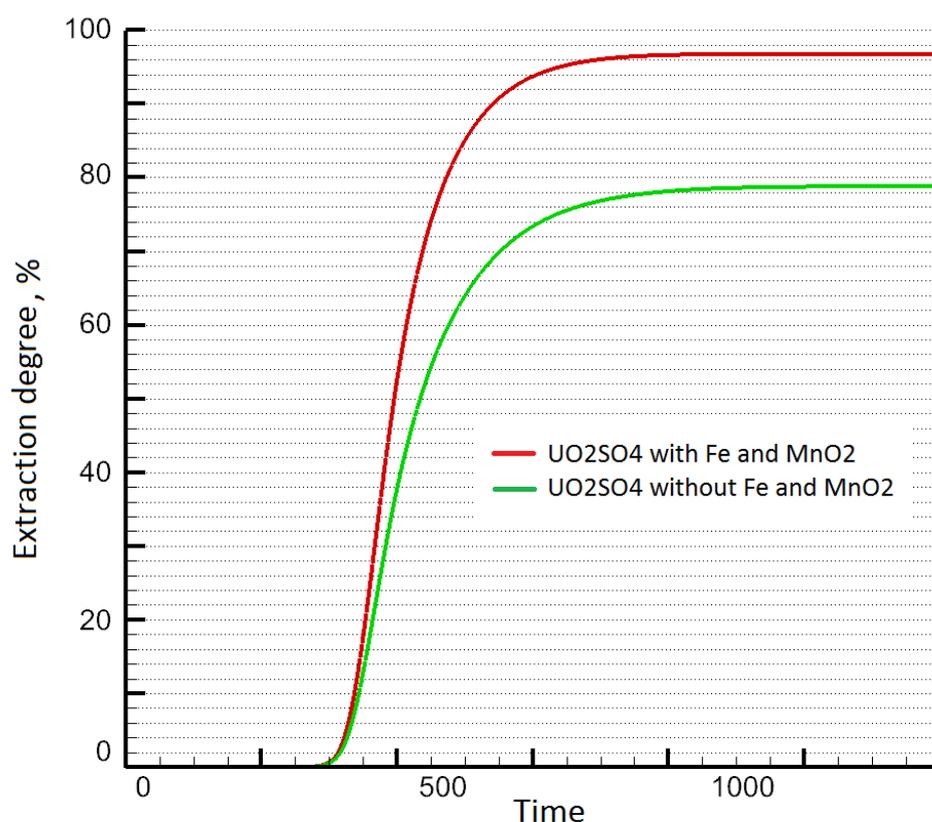


Figure 2–Extraction degree of Uranyl Sulfate by numerical time

In Figure 4, after some time when leaching front has reached middle point between injection and production wells, the concentration of Uranyl Sulfate is indicated by red and green lines, for leaching with and without oxidizers respectively. The blue line shows the decreasing concentration of sulfuric acid. It can be clearly seen that Uranyl Sulfate concentration is higher when Iron and Pyrolusite participate in reaction.

Extraction degree of Uranyl Sulfate by numerical time at production well for both cases (with and without Fe and MnO_2) can be examined on Figure 4. Evidently, Iron and Pyrolusite positively affect extraction degree of uranium components when added.

5 Conclusion

A work has been done to numerically demonstrate that presence of Iron and Pyrolusite in Uranium leaching reactions can increase the extraction degree of Uranium as well as increase overall reaction speed. The results show that extraction degree can be increased depending on concentrations of oxidizers, whereas without addition of oxidizers sulfuric acid would only leach six valent uranium (UO_3), leaving most of four valent uranium (UO_2) underground. The addition of oxidizers increase the speed of dissolution of four valent uranium, thereby increasing overall extraction degree.

In future, the influence of other components on leaching process can be studied in a similar fashion without expensive laboratory experiments. This work was accomplished within the GF4/3290 project under financial support from Ministry of Education of Kazakhstan.

References

- [1] *Nuclear Energy Agency Organisation for Economic Co-Operation and Development and the International Atomic Energy Agency Uranium 2014: Resources, Production and Demand //A Joint Report by the OECD NEA and the IAEA – 2014.* – P.1-508.
- [2] *World Nuclear Association, Uranium and Nuclear Power in Kazakhstan*, <http://www.world-nuclear.org/info/Country-Profiles/Countries-G-N/Kazakhstan/> 2016.
- [3] *Gromov B.V.*, Introduction to the chemical uranium technology. - Moscow: Atomizdat, 1978. - 326p.(in Russian)
- [4] *Brovin K.G., Grabovnikov V.A., Shumilin M.V., Yazikov V.G.*, Forecast, Reset form, intelligence and industrial evaluation of uranium deposits to practice underground leaching. - Almaty: Gylym, 1997. - 384p.(in Russian)
- [5] *Chung, T.J* Computational Fluid Dynamics //Cambridge University Press. – 2006. - 1007p.

3-бөлім**Раздел 3****Section 3****Информатика****Информатика****Computer
science**

UDC 004.622, 004.623, 004.855.5

Aubakirov S.S.^{1*}, Akhmed-Zaki D.Zh.¹, Trigo P.S.²¹Al-Farabi Kazakh National University,
Republic of Kazakhstan, Almaty²Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Biosystems and Integrative Sciences Institute
Agent and Systems Modeling, Lisbon, Portugal

* E-mail: aubakirov.sanzhar@gmail.com

News Classification using Apache Lucene

In this paper, we describe the binary classification of textual messages using Apache Lucene. We first describe the problem of “news classification” and the method to gather the dataset samples used for models’ training and testing. We focus on creating and training classifiers based on different indexes and models’ evaluation metrics. We choose three main attributes that affects Apache Lucene indexes, and as a consequence affects accuracy of classifiers. One of the attributes are words on which it is built. We use Ngram concept instead of words, where different N varies from one to five. Second attribute is text preprocessing method, such as stemming and stop words filtering. Third attribute is classification method. In this research we choose k-nearest neighbors and naive Bayes classification methods. Variation of this attributes produces various index types. As a result, we provide analysis of the correlation between index type and the accuracy of classifiers.

Key words: Binary classification, learning algorithms, Apache Lucene.

Аубакиров С.С., Ахмед-Заки Д.Ж., Триго П.С.

Apache Lucene көмегімен жаңалықтар классификациясы

Бұл мақалада Apache Lucene қалыптасуы көрсеткіштерінің негізінде мәтіндік хабарламаларды бинарлық топтау есебі қарастырылған. Нақты уақыт бойынша түсетін мәтіндік жаңалықтарды топтау есебі қойылған. Оқытуды талдап және тестілеп алудың әдістемелері, сондай-ақ топтау дәлдігін бағалайтын әдістемелер өркендетілген. Зерттеу барысында Apache Lucene көрсеткіштеріне және топтау дәлдігіне салдар ретінде ықпал ететін негізгі үш атрибут таңдап алынған. Көрсеткіштердің өзі сөздерден құрылатындықтан атрибуттың бәрі сөз болып табылады. Біз сөздердің орнына Ngram ұғымын пайдаланамыз, мұндағы N бірден беске дейін ауытқиды. Екінші атрибут – мәтінді алдын ала өңдеу әдісі, дәлірек айтсақ мәтінді қалыптау және тоқтау-сөздерді сұрыптау. Ал үшінші атрибут – топтастыру пішінін құру алгоритмі. Зерттеу кезінде біз төмендегі екі алгоритмді таңдап алдық: «К – ең жақын көршілер» және «Ангалдық байестік топтаушы» әдістерімен топтау. Алғашқы екі атрибуттың өзгерісі көрсеткіш қасиеттерінің өзгерісіне әкеледі, нәтижесінде әр түрлі көрсеткіш түрлері қалыптасады. Жұмыста топтаушыларды оқытуда олардың көрсеткіштерге байланысы мен құрастырудың практикалық жағынан жүзеге асыру жағдайлары қарастырылған. Көрсеткіш түрлерінің топтаушылар дәлдігіне ықпал етуіне талдау жүргізілген.

Түйінді сөздер: Бинарлы классификация, оқыту алгоритмдер, Apache Lucene.

Аубакиров С.С., Ахмед-Заки Д.Ж., Триго П.С.
Классификация новостей при помощи Apache Lucene

В данной статье рассматривается задача бинарной классификации текстовых сообщений на базе индексов платформы Apache Lucene. Сформулирована задача классификации текстовых новостей, поступающих в режиме реального времени. Разработаны методы получения тестовой и обучающей выборки, а также методы оценки точности классификации. Для исследования были выбраны три основных атрибута, влияющих на индексы Apache Lucene и, как следствие, на точность классификаторов. Одним из атрибутов индексов являются слова, на основе которых они построены. Мы используем понятие Ngram вместо слов, где число N варьируются от одного до пяти. Вторым атрибутом - метод предварительной обработки текста, а именно нормализация текста и фильтрация стоп-слов. Третий атрибут - алгоритм построения модели классификации. Для данного исследования мы выбрали два алгоритма: классификация методом "К-ближайших соседей" и "наивный байесовский классификатор". Изменение первых двух атрибутов приводит к изменению свойств индекса и, как результат, к формированию различных типов индексов. В работе рассмотрена практическая реализация создания и обучения классификаторов в зависимости от типа индексов. Проведен анализ влияния типа индексов на точность классификаторов.

Ключевые слова: Бинарная классификация, алгоритмы обучения, Apache Lucene.

1 Introduction

In this paper we address the task of evaluating binary classification of social media messages and analyzing the relationship between classification quality and classifier parameters.

We consider two classes of messages: NEWS and NOTIFICATION. We consider that the NOTIFICATION class is applied to messages with information about emergencies and hazards. Those messages are so important that people should be notified about them.

In order to collect messages and build datasets (for training and testing) we designed a web crawler with a simple choice mechanism based on a decision tree over the notion of "strong keywords". The decision tree classifies each message using three classes: NEWS, NOTIFICATION and NOT_SURE. The NOT_SURE class is applied to messages that are neither classified as NEWS nor as NOTIFICATION. This approach guarantees high Precision and low Recall but it is essential to collect the training dataset. The classifiers investigated in this paper are trained with a dataset built from the NEWS and NOTIFICATION classes. The NOT_SURE class is used as the testing dataset.

We are using Apache Lucene with the classification package as the main framework. The Lucene classifiers works with vector models and the TF-IDF metric. The evaluation resorts to the k-fold cross validation method. The Lucene classification based on indexes, in order to configure classifier Lucene allows changing index parameters. All indexes has Analyzer, it is consists of Tokenizer and set of Filters. Tokenizer extract tokens from text stream, Filters processes tokens, normalize and do stemming. Classifiers also depends on Analyzer that is why it is very import to have similar Analyzer for both classifier and index.

Analyzers combined using different Filters and Tokenizers. We are using Analyzers configured using minShingleSize, maxShingleSize, SnowballFilter and LengthFilter in ShingleAnalyzerWrapper. Parameters minShingleSize and maxShingleSize adjust the minimum and maximum value of N, where N is size of Ngrams. In our research, we are using up to fivegram indexes and one index with all Ngrams from one to five. Additionally

Analyzers combined by turning on and off SnowballFilter and LengthFilter. As a result, we are using 24 Analyzers.

Furthermore, each classifier has parameters that affects classification quality. KNN can be configured by varying K. Our experiments shows that KNN classifiers quality dramatically low for $K > 200$, that is why we decide to bound K from 1 to 200 [1]. The last parameter is message fields. There is two fields available for indexing: title and body. Based on fields we can combine three different indexes: title, body and both.

Totally, we have combination of 24 Analyzers, 201 classifiers and 3 fields and it is 14472 different classifiers totally. In the next chapter, we showing quality of learning and analyzing relations between Ngrams, indexes and quality of classification. This paper describes how we evaluate 14472 classifiers and provide detailed analysis of correlation between index type and learning accuracy.

2 Method

According to researches [2, 3] we choose Kappa and MCC coefficient measures to evaluate binary classification learning. Both, Kappa and MCC, take into account true and false positives and negatives and well balance. A coefficient of +1 represents a perfect prediction, 0 no better than random prediction and -1 indicates total disagreement between prediction and observation. Both coefficients perfectly fit our needs because we consider NOTIFICATION true-positives more relevant than false-negatives; i.e., we care more about correctly classifying messages as NOTIFICATION than badly as NEWS.

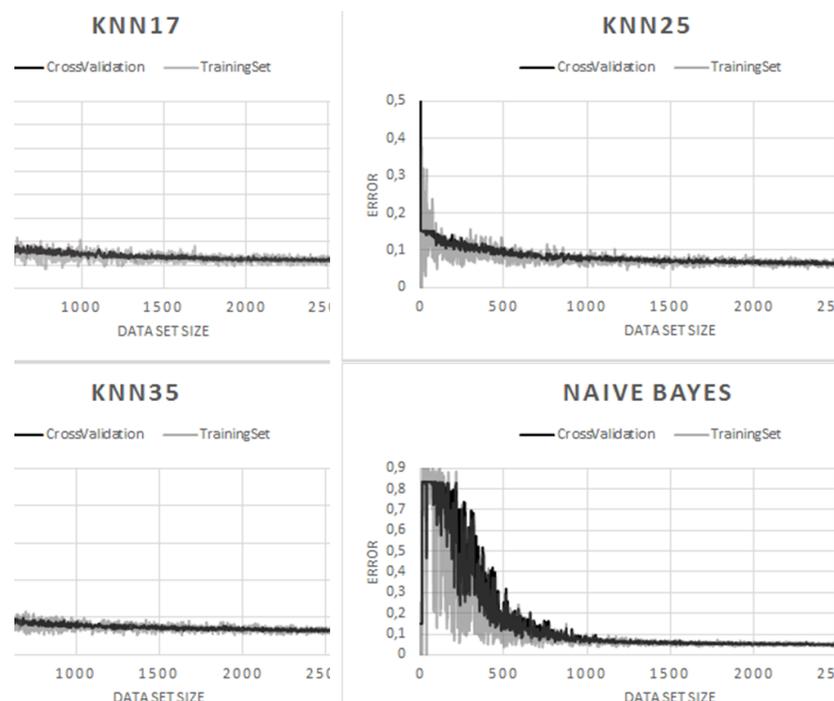


Figure 1 – Correlation between error rate and dataset size for KNN and Naive Bayes classifiers

Researches [4, 5] shows that the "Learning Curve"(LC) methodology is a good diagnosing tool, telling you how fast your model learns and whether your whole analysis is, or not, biased

by the dataset cardinality (e.g., overfitting a too small dataset). We use the LC to determine the smallest size of training that shows reasonable results. The learning curves are depicted in the Figure 1. The error rate is validated using k-fold cross validation method.

The graph shows that the accuracy of learning algorithms is aligned on the data set size on the interval 1500-2000. We choose 2270 news messages as a training set, all messages was classified using a decision tree described above. Finally, classified messages were manually checked and corrected by the experts. It is important to mention that the dataset consists of 84% NEWS messages and 16% NOTIFICATION messages. The k-fold cross validation follows that same stratification.

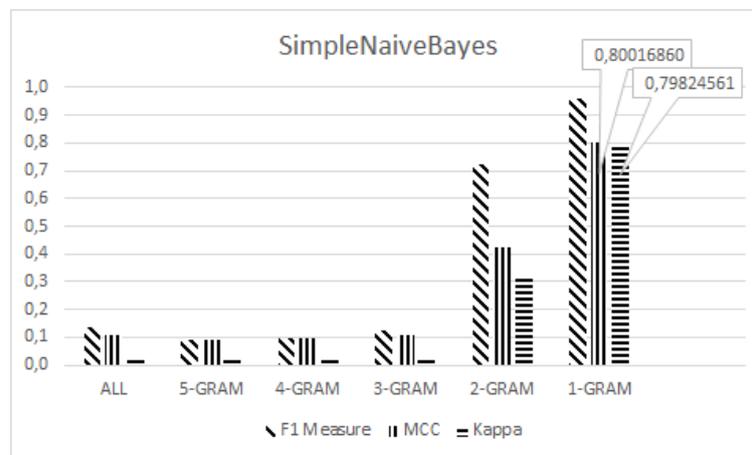


Figure 2 – Naive Bayes classifier using only body field, Snowball stemmer and short tokens filtering

3 Results

We measure each classifier using k-fold cross validation method. Our experiments show that 87% of the learned models exhibit a Kappa and a MCC less than 0.5, which, according to Landis and Koch [2] can be considered as "poor" models.

The best results shows classifiers that is using unigrams tokenizer, only body field, Snowball stemmer and with short tokens filtering. Best results had shown on the Figure 2, 3 and 4.

Top five classifiers use unigram indexes, only body field, Snowball stemmer and short token filtering. Naive Bayes classifier best results: MCC=0.8, Kappa=0.79, Figure 5 shows its confusion matrix. There are 93 NEWS messages classified as NOTIFICATION (False Negatives - FN) and 45 NOTIFICATION messages classified as NEWS (False Positives - FP). F-measure often shows values close to 1, this is because F-measure calculation ignores FN errors. That is why we do not use it as evaluation measure, because our goal main is to minimize both FP and FN. Figure 3 shows that KNN algorithm, with K=17, best result is MCC=0.68, Kappa=0.67. Furthermore, increasing number of neighborhoods leads to decreasing accuracy of classifier.

Our experiments shows that classifiers based on indexes with Ngrams with $N > 1$ shows low accuracy: $MCC < 0.5$, $Kappa < 0.5$.

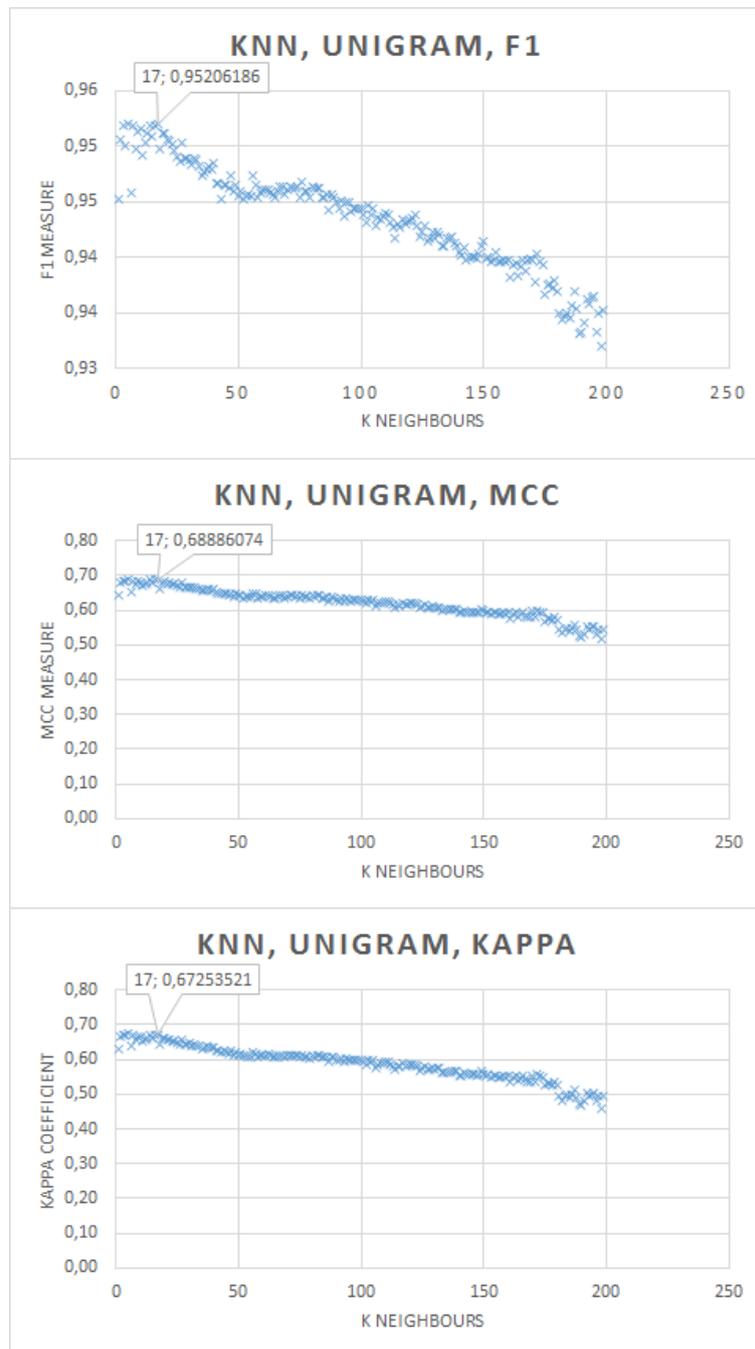


Figure 3 – Results for KNN classifier with varying K, unigram indexes, only body field, Snowball stemmer and short token filtering

4 Discussion

Our research shows that classification quality depends on Apache Lucene index type and n-gram size. The best classifier is based on unigrams as shown by the Kappa coefficient of 0.79 and the MCC coefficient of 0.8. It is expectable that a single classifier cannot achieve higher accuracy. As a future work, we are planning to implement a Voting classifier that combines

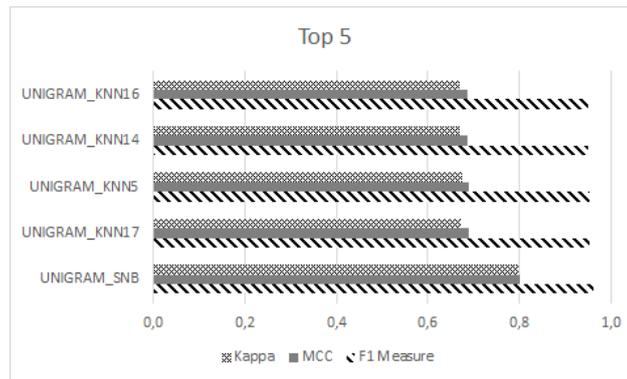


Figure 4 – The best five classifiers. All classifiers use Snowball stemmer, unigram indexes, only body field and short token filtering

```

Class names was shortened:
C0 NEWS
C1 NOTIFICATION

Confusion matrix:
      C0  C1
C0  350  45
C1   93 1782

Observed Accuracy: 0.9392070484581497
Expected Accuracy: 0.6986784140969163
Error rate: 0.06079295154185022
Kappa statistics: 0.7982456140350875
Precision: 0.8860759493670886
Recall: 0.7900677200902935
F measure: 0.8353221957040573
MCC : 0.8001686011904481
Total Docs # 2270

```

Figure 5 – The best classifiers confusion matrix. Naive Bayes based on unigram indexes

an odd number of classifiers in order to obtain a joint decision-making algorithm. To combine classifiers and evaluate all possible combinations we are planning to use distributed computing technologies, such as Message Passing Interface or Apache Spark. We also intend to explore the Ada Boost meta-algorithm in conjunction with other learning algorithms. The goal of this approach is too combine several weak classifiers into a weighted sum that represents one boosted classifier.

This work was partially supported by the grant of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project 3350/GF4 MON RK).

References

- [1] *Markus M., Matthias H., Ulrike H.* Optimal construction of k-nearest neighbor graphs for identifying noisy clusters. // Theoretical Computer Science. – 2009. – № 410(19). – P. 1749–1764.
- [2] *David M W Powers.* Evaluation: From Precision, Recall and F-Measure to ROC, Informedness, Markedness and Correlation. // Journal of Machine Learning Technologies. – 2011. – Vol. 2 (1). – P. 37–63.

-
- [3] *Landis J.R., Koch G.G.* The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. // *Biometrics*. – 1977. – Vol. 33. – № 1. – P. 159–174.
- [4] *Saman M., Robert S.* The Learning Curve and Optimal Production under Uncertainty. // *Rand Journal of Economics*. – 1987. – Vol. 20. – № 3. – P. 331–343.
- [5] *Christopher M., Bo T., David H.* The Learning Curve Sampling Method Applied to Method Based Clustering. // *Journal of Machine Learning Research* 2S. – 2002. – P. 397–418.

UDC 004.032.26

Koybagarov K.Ch.¹, Mansurova M.Ye.^{2*}

¹Institute of Information and Computational Technologies of KS MES of the RK,
Republic of Kazakhstan, Almaty

²Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty

* E-mail: mansurova01@mail.ru

Automatic classification of reviews based on machine learning

Currently, there is strong interest in the problem of automatic analysis of reviews of Internet users on various issues. One of the main problems in the analysis of reviews is a tone classification of the texts. This article is about different approaches to the problem of tone classification in 3 classes using the machine learning methods on the example of three collections. The main objective that was set in this work is the comparison of different approaches to the text view within the frame of the vector model, several machine learning methods, and various combinations of statistical and linguistic features. To build the model of tone classification the follow set of statistical and linguistic features is identified: Building word vectors, accounting N -gramm, accounting emoticons, counting of exclamation and question marks, accounting parts of speech, replacing the long repetition of vowel to one vowel, accounting negations, accounting the review length. In this work we used the following machine learning methods: support vector machines, logistic regression and naive Bayesian classifier. The computing experiments were conducted with different variants of word vector models, N -grams and text description features. The experimental results allow us to make recommendations on the selection of the most effective features for tone classification.

Key words: tone classification, machine learning, support vector machines, logistic regression, naive Bayesian classifier.

Қойбағаров К.Ч., Мансұрова М.Е.

Машиналық оқыту алгоритмдер негізінде кіпірлерді автоматты түрде классификациялау

Қазіргі таңда әртүрлі сұрақтар бойынша Интернет қолданушыларының пікіріне сүйенсек автоматты талдау есебіне үлкен қызығушылық танылып жатыр. Талдау пікірінің негізгі мәселесінің бірі болып тон бойынша тексттердің классификациясы болып табылады. Жұмыста коллекциялар мысалында машиналық оқыту әдістерін қолдану арқылы класқа тондық классификациялау есебінің түрлі әдістері берілген. Осы жұмыста қойылған негізгі есептер, векторлы моделдің аясында текстті ұсыну түрлі тәсілдерді салыстыру болып табылады, бірнеше машиналық оқыту тәсілдерін қолдану, статистикалық және лингвистикалық белгілерінің түрлі бірігуі және алынған нәтижелердің талдауы. Тондық классификация моделін құру үшін келесідей статистикалық және лингвистикалық белгілерінің келесідей жиыны анықталған: сөз векторларының құрылуы, N -gramm есебі, эмитикондар есебі, сұрақ белгісі мен тыныс белгілерінің есептелуі, сөйлеу бөлігінің есебі, ұзақ қайталанатын дауысты дыбысты бір дауысты дыбысқа алмастыру, терістеулердің есебі, жауап беру ұзындығының есебі. Машиналық оқытуды келесі әдістерін қолдану арқылы тәжірибе жүргізілді: тіреу векторлар машинасы, логистикалық регрессия және аңғалдық Байес классификаторы. Тәжірибе әртүрлі векторлық сөздер моделінің нұсқаларымен, n -граммалар және мәтінді сипаттаудың белгілерімен жүргізілді. Тәжірибе нәтижесі тондық классификация үшін ең тиімді сипаттамаларды таңдау бойынша ұсыныс жасауға мүмкіндік береді.

Түйінді сөздер: тондық классификациялау, машиналық оқыту, тіреу векторлар машинасы, логистикалық регрессия, аңғалдық Байес классификаторы.

Койбагаров К.Ч., Мансурова М.Е.
**Автоматическая классификация отзывов, основанная на
алгоритмах машинного обучения**

В настоящее время проявляется большой интерес к задаче автоматического анализа мнений пользователей Интернета по различным вопросам. Одной из основных проблем при анализе мнений является классификация текстов по тональности. В работе даны различные подходы к задаче тоновой классификации на 3 класса с использованием методов машинного обучения на примере трех коллекций. Основными задачами, которые ставились в данной работе, являются сравнение различных подходов к представлению текста в рамках векторной модели, применение нескольких методов машинного обучения, различное сочетание статистических и лингвистических признаков, а также анализ полученных результатов. Для построения модели тоновой классификации был выявлен следующий набор статистических и лингвистических признаков: построение векторов слов, учет N -граммов, учет эмотиконов, подсчет восклицательных и вопросительных знаков, учет частей речи, замена долгого повторения гласного на одну гласную, учет отрицаний, учет длины отзывов. В работе были использованы следующие методы машинного обучения: машина опорных векторов, логистическая регрессия и наивный байесовский классификатор. Вычислительные эксперименты проводились с различными вариантами векторной модели слов, N -граммов и признаков описания текста. Результаты экспериментов позволяют сделать рекомендации по выбору наиболее эффективных признаков для тоновой классификации.

Ключевые слова: тоновая классификация, машинное обучение, машина опорных векторов, логистическая регрессия, наивный байесовский классификатор.

1 Introduction

Analyzing the behavior of people around the world, we can discover the vast influence the opinions of those around them for their views and their choice. People are very often guided by the people opinion before they make a decision. The opinions, the tone of the statements is important not only for individuals but also for commercial organizations, political parties and other organizations.

The problem of text classification by the tone has become relevant quite recently from 2007. Dozens of articles on the subject have been recently published, detailed overviews can be found in [1, 2]. The heightened interest in this range of problems facilitates by the presence of a vast array of Internet sites, social networks, blogs, forums where people express their opinions.

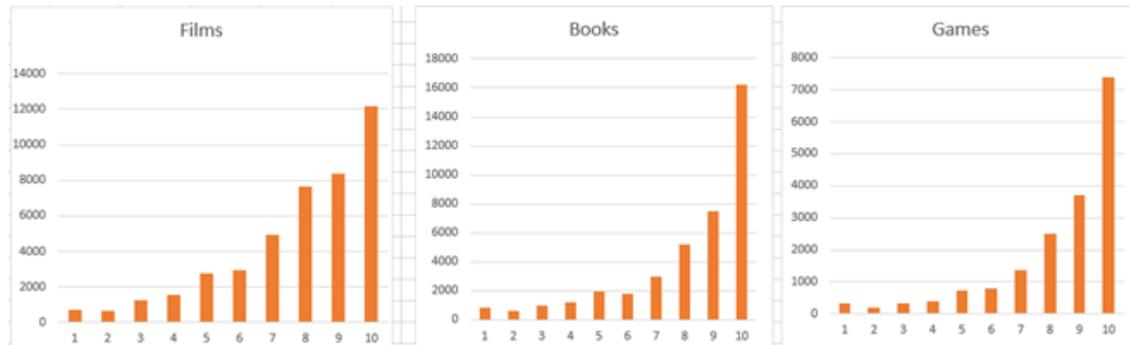
This paper investigates a method of automatic classification of tone using the machine learning techniques (sentiment analysis) [3, 4]. By tone is meant (user review) author's subjective evaluation relative to some object [5]. In this paper we solve the problem of the analysis of comments on the publication on the Internet based on machine learning methods into three classes, denoting positive, neutral and negative evaluations. All experiments were performed on three collections of movies, books, games from the site imhonet.ru where every comment has a ten-point scale.

2 Problem description

There are 3 approaches to determine the text tone automatically [6,7]: approach based on dictionaries of tonal vocabulary on the basis of the machine learning method, hybrid approach and a combination of both approaches.

Table 1 – Characteristics of collections

Collection name	Source	Number of reviews
Books	Imhonet	39,120
Movies	Imhonet	43,200
Games	Imhonet	17,629

**Figure 1** – The numerical distribution of authors' assessments for the three collections logical inference

We use the second approach, a machine learning method in this work. The main objectives that we set in this work is the comparison of different approaches to the text view within the frame of the vector model, several machine learning methods, and various combination of statistical and linguistic features. We chose the method of support vector machines (Support vector machine, SVM), naive Bayesian classifier and logistic regression analysis [8, 9] for testing.

We collected 3 text collections from the site *www.imhonet.ru* for our experiments. Collection of movies, books and games, where each review was evaluated on a ten-point scale. Collection about movies contains 43,200 reviews, collection about books contains 39,120 reviews and collection about games contains 17,629 reviews. Each review has the author's assessment from 0 to 10 points. Quantitative distribution of assessments of all collections is shown in Fig. 1.

The figure 1 shows that website visitors leave more positive reviews than negative. For 3-class task we made the following distribution of estimates of 0-5 as negative, 6-8 as neutral and 9-10 as positive review.

Accounting the review length and its structural features. Reviews about movies can be long and short. If the review is long, it is often the author can touch upon various aspects of the described object, which in turn can have different scores. This was the basis for separate consideration of short and long reviews. The threshold on the review length was chosen equal to 50 words.

We have received two collections main and small to account the length of the reviews, the collection with length of messages to 50 words, we called a small collection.

Table 2 – Characteristics of the training dataset

Collection	Positive review	Neutral review	Negative review
Main collection Movies	28205	7921	6918
Small collection Movies	24267	6363	5565
Main collection Books	28879	4769	5490
Small collection Books	24139	3707	4294
Main collection Games	13595	2119	1914
Small collection Games	11758	1696	1568

3 Building feature description

We need to identify a set of statistical and linguistic features to build the model of tone classification. List them below:

- Building word vectors. We used the TF-IDF vectorizer in our work. Compared to simple word count (CountVectorizer), TF-IDF showed the best results.
- Accounting N-gramm. Unigrams, bigrams and trigrams.
- Accounting smiles (emoticon). Set of symbols depicting positive or negative emotions. For example: emoticons ":-) or =) or :)" show a smile, joy, ":(or =(or :(" indicate sadness, sorrow.
- Accounting exclamation and question marks. Based on the assumption that sentences expressing emotions contain a large number of exclamation and positive marks.
- Accounting parts of speech (noun, verb, adverb and adjective). Emotional speech is mostly expressed with adjectives, verbs and adverbs and rarely nouns.
- Replacing the long repetition of vowel to one vowel. "Wooonderful".
- Accounting negations (not, no). Words with the prefix "not" change the next word to the opposite meaning.
- Accounting the review length. The reviews with large number of words contain a large number of positive, negative and neutral words that complicate the task of tone classification.

The experiments were conducted of each feature to take account of their impact on classification accuracy.

4 Experiments

In the experiment we used three classification methods: SVM - support vector machine, Log - logistic regression, NB - naive Bayes classifier. We used cross validation to 5 parts for all experiments. There are task lists in which we alternately conducted experiments on three collections of movies, books and games above.

Table 3 – The accuracy for different collections of TF-IDF against CountVectorizer

	SVM	Log	NB
TF-ID Main collection Movies bigrams 2-gramm	73.6	72.1	71.2
CountVectorizer Main collection Books bigrams 2-gramm	71.2	72.8	70.0

Table 4 – The accuracy on different collections with regard to long and short reviews

	SVM	Log	NB
Main collection Movies	73.6	72.1	71.2
Small collection Movies	74.5	73.0	72.5
Main collection Books	80.2	78.1	78.1
Small collection Books	80.5	79.0	78.7
Main collection Games	78.5	77.3	77.1
Small collection Games	80.5	79.6	78.7

Building word vectors. We will test two vectorizers TF-IDF and CountVectorizer, building word vectors with a counting words.

According to the test results TF-ID 73.6 showed the best result compared to the CountVectorizer 72.8 at 0.8

Accounting review length. Reviews about movies can be long and short. If the review is long, it is often the author can touch upon various aspects of the described object, which in turn can have different scores. This was the basis for separate consideration of short and long reviews. The threshold on the review length was chosen equal to 60 words, which we called the main and small collections.

From table 4 we can conclude that the truncated reviews of small collection in contrast to the main collection gain accuracy 0.3 - 2The highest increase of accuracy up to 2

Table 5 – Classification results on unigrams, bigrams and trigrams

	SVM F1-macro	Log F1-macro	NB F1-macro
Main collection Movies unigrams	69.4	67.8	64.9
Main collection Books unigrams	75.8	73.1	71.3
Main collection Games unigrams	74.0	70.9	70.7
Main collection Movies bigrams	71.3	68.5	67.8
Main collection Books bigrams	77.0	73.7	73.8
Main collection Games bigrams	74.0	71.1	71.7
Main collection Movies trigrams	71.6	68.5	68.0
Main collection Books trigrams	77.0	73.7	74.2
Main collection Games trigrams	74.1	71.4	72.0

Table 6 – Examples of emoticons and their descriptions

Notation	Emotion or state
:-) or =) or :)	smile, joy
hline :-(or =(or :(sadness, sorrow
hline :-D or :D	laughter
hline :-C or :C	strong chagrin

Table 7 – Classification results taking into account emoticons on bigrams

	SVM F1-macro	Log F1-macro	NB F1-macro
Main collection Movies	71.4	68.5	67.8
Main collection Books	77.0	73.8	73.8
Main collection Games	74.1	71.2	71.8

Accounting N-grams. To answer the question what N-grams affect the classification accuracy. We have conducted experiments on unigrams, bigrams and trigrams.

Having analyzed results of Table 5 it is possible to draw a conclusion that bigrams and trigrams have better result on F1 measure than unigrams. The advantage of trigrams to bigrams is slightly 0-0.3% in all three collections. It can be concluded that is better to use bigrams for classification considering the accuracy and speed of obtaining results. In further experiments we will use bigrams and also compare all experiment results with Table 4.

Accounting smiles. Emoticons are widely used in popular culture, the word "smile" itself is also often used as a generic term for any emoticon (image of emotion not by graphics, but with punctuation marks) [Wikipedia]. Emoticons are quite often used in responses to expression their attitude (emotion) towards a subject of discussion.

For account of emoticons in collections we will replace positive emoticon to the word "excellent negative emoticon to the word "bad" in responses. We have conducted experiments taking into account replacement of emoticons.

Subsequent to the results of Table 7 it can be concluded that accounting of emoticons slightly increases the quality on average by 0.1%.

Accounting exclamation and question marks. Emotional speech is replete with exclamation points, question marks, and dots and asterisks. We have carried out an experiment for hypotheses about the impact of these signs on accuracy of classification.

According to the results of Table 8 classification quality has increased by 0.1-0.2%. Naive Bayes shows even better results than method of logistic regression.

Accounting parts of speech. As it is known the emotional speech is transmitted

Table 8 – Classification results taking into account emoticons on bigrams

	SVM F1-macro	Log F1-macro	NB F1-macro
Main collection Movies	71.4	68.6	68.6
Main collection Books	77.1	73.5	74.4
Main collection Games	74.2	71.0	72.1

Table 9 – Classification results in consideration of parts of speech

	SVM F1-macro	Log F1-macro	NB F1-macro
Main collection Movies	71.4	68.7	67.7
Main collection Books	77.0	73.6	73.7
Main collection Games	74.1	71.1	72.0

Table 10 – Classification results in consideration of parts of speech

	SVM F1-macro	Log F1-macro	NB F1-macro
Main collection Movies	71.3	68.5	67.8
Main collection Books	77.0	73.7	73.7
Main collection Games	74.0	71.1	71.7

through four parts of speech: adjective, verb, adverb and rarely noun. We will make calculation of above mentioned parts of speech in each response to perform an experiment on influence of parts of speech on accuracy of classification.

According to the results of Table 9, we can conclude that addition of accounting features of parts of speech significantly increases classification accuracy by 0.1%. On a book collection method of basic vectors addition of accounting features of parts of speech haven't influenced an accuracy. From here it is possible to draw a conclusion that addition of accounting features of parts of speech can be neglected.

Replacing the long repetition of vowel to one vowel. Sometimes emotions are expressed by repeating long vowel "woonderful "Aaaaa etc. in reviews. We have decided to check how replacement of several vowels to one vowel in a word will influence classification accuracy.

As a result of experiment in Table 10 we can conclude that substitution of several vowel one does not affect the accuracy of the classification. This feature can be excluded from consideration.

Accounting negation operator words "no, no, nothing". Negation words invert meaning of emotional word following it to the opposite meaning. For example, "not good" changes the meaning to "bad etc. To solve this problem, we decided to stick particles "no "not" with followed by the operator the word "not good" to "notgood".

According to the results of Table 11 we have come to conclusion that the operators of negation ño, not, nothing have improved accuracy of the classification F1-least 0.1%. In the collections of movies, books, support vector has shown improvement by 0.1%, and there has

Table 11 – Classification results in consideration of parts of speech

	SVM F1-macro	Log F1-macro	NB F1-macro
Main collection Movies	71.4	68.4	67.2
Main collection Books	77.1	73.6	74.1
Main collection Games	74.0	71.1	71.9

Table 12 – Classification results on unigrams, bigrams and trigrams

	SVM F1-macro	Log F1-macro	NB F1-macro
Main collection Movies bigrams	71.7	68.5	68.4
Main collection Books bigrams	77.2	73.7	74.4
Main collection Games bigrams	74.1	71.4	72.6
Mail collection Movies trigrams	71.9	68.5	68.7
Mail collection Books trigrams	77.2	73.8	74.5
Mail collection Games trigrams	74.0	71.4	72.8

not been any improvement at the games.

Now we will make experiment if we include all above listed characteristics.

After inclusion of all characteristics, classification accuracy has improved by 0.1-0.4%. Trigrams do not have much advantage over bigrams. In the collection of movies trigrams result are better by 0.2% than bigrams results are, but in the collection of games results are worse by 0.1% than bigrams.

5 Conclusion

After carrying out all the experiments in dealing with text automatic classification task of tonality on 3 classes using machine learning techniques following conclusions can be made:

- TF-IDF words vectorizer shows better result in comparison with CountVectorizer.
- The method of support vectors shows better results compared to the methods of logistic regression and naive Bayes.
- Bigrams and a trigrams show better results at F1 measure than unigrams. Trigrams have no big advantage before bigram on average by 0.1%. Thus trigrams can be neglected.
- The experiments performed with each of the features listed above showed an improvement in accuracy by 0.1% on average tonality classification. In the collections of books and games not all features shown improvement in accuracy. And characteristics such as substitution of long vowel repetition to one vowel can be neglected.
- Experiments including all three features in collections showed an increase in the accuracy of classification into 3 classes on average by 0.25%.
- Small or truncated collection limited to 50 words in each response gives a gain of classification quality to 2%.

We want to perform the following experiments using hybrid approach by means of machine learning methods and tone dictionaries. This work is supported by the Science Committee of RK, under grants grants 0115PK00552, 0115PK02741 and 0115PK00779.

References

- [1] *Pang B., Lee L.* Opinion Mining and Sentiment Analysis. // J. Foundations and Trends in Information Retrieval. – 2008. Vol. 2. – P. 1–135.
- [2] *Feng, V. W., Hirst G.* Detecting deceptive opinions with profile compatibility. // In: Proceedings of the 6th international joint conference on natural language processing. – 2013. – P. 338–346.
- [3] *Liu B.* Sentiment Analysis and Opinion Mining. Morgan and Claypool Publ. – 2012.
- [4] *Kotelnikov Y.V.* Combined method of automatic determination of the text tonality. // J. Software products and systems. – 2012. – Vol 3. – P. 189–195.
- [5] *Prabowo R., Thelwall M.* Sentiment analysis: A combined approach. // Journal of Informetrics. – Vol. 3, issue 2. – 2009. – P. 143–157.
- [6] *Kevin P. Murphy.* Machine Learning: A Probabilistic Perspective (Adaptive Computation and Machine Learning series). The MIT Press. – 2012.
- [7] *Jindal N., Liu B., Lim E.* DFinding unusual review patterns using unexpected rules. // In: CIKM '10, Proceedings of the 19th ACM international conference on information and knowledge management. – 2010. – P. 219–230.
- [8] *Montoyo A., Martinez-Barco P., Balahur A.* (2012). Subjectivity and sentiment analysis: An overview of the current state of the area and envisaged developments. // J. Decision Support Systems. – Vol. 53, issue 4. – P. 675–679.
- [9] *Panicheva P., Cardiff J., Rosso P.* Identifying subjective statements in news titles using a personal sense annotation framework. // Journal of the American Society for Information Science and Technology. – 2013. – Vol. 64, issue 7. – P. 1411–1422.
- [10] *Severyn A., Moschitti A., Uryupina O., Plank B., Filippova K.* Opinion mining on YouTube. // In: Proceedings of the Conference ACL. – 2014.
- [11] *Uryupina O., Plank B., Severyn A., Rotondi A., Moschitti A.* SenTube: A corpus for sentiment analysis on YouTube social media. // In: Proceedings of the International Conference on Language Resources and Evaluation LREC. – 2014.
- [12] *Basile V., Nissim M.* Sentiment analysis on Italian tweets. // In: Proceedings of the 4th Workshop on computational approaches to subjectivity, sentiment and social media analysis. – 2013.

УДК 004.051

Ахмед-Заки Д.Ж.^{1*}, Лебедев Д.В.^{1**}, Перепёлкин В.А.^{2***}¹ Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы² Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия,
г. Новосибирск

E-mail: *darhan.ahmed-zaki@kaznu.kz, **dan-lebedev@mail.ru, ***perepelkin@ssd.sccc.ru

Сравнение эффективности параллельных реализаций метода прогонки: параллельно-конвейерный метод, параллельная прогонка

Исследуется задача решения серий систем трехдиагональных уравнений методом прогонки для применения в трехмерных задачах, таких как задача теплопроводности, для больших размеров сеток (10003 и более). При росте производительности суперкомпьютеров необходимо использование высокоэффективных параллельных программ. Рассматривается метод прогонки из-за того что он является прямым методом, экономичным и простым в реализации в случае последовательной программы, но сложно распараллеливаемым из-за информационных зависимостей между операциями алгоритма. Данный метод также применяется при решении двумерных и трехмерных задач, что приводит к возникновению серии прогонок. И эффективный алгоритм распараллеливания прогонки позволит решать такие задачи на суперкомпьютерах с хорошей производительностью. В работе кратко представлены два алгоритма распараллеливания метода прогонки, на примере решения одномерного эллиптического уравнения с различными размерами порций с использованием стандарта MPI, а также произведено сравнение их эффективности при использовании серии прогонок. Приводятся результаты численных экспериментов по исследованию оптимального размера порций, делаются вывод о применимости исследуемых алгоритмов для больших трёхмерных задач на суперкомпьютерах, содержащих десятки тысяч вычислительных узлов и более.

Ключевые слова: MPI, параллельная программа, метод Яненко, параллельно-конвейерный метод.

Akhmed-Zaki D.Zh., Lebedev D.V., Perepelkin V.A.

Efficiency comparison of parallel implementations

Thomas algorithm: pipelined Thomas algorithm, parallel Thomas algorithm

Study the problem of solutions a series of tridiagonal systems of equations Thomas algorithm for use in three-dimensional problems such as heat conduction problem for large mesh sizes (1000³ and more). At Supercomputing performance growth requires the use of highly efficient parallel programs. The Thomas algorithm examine of because of that that he is a direct method, economical and easy to implement in the case of a sequential program, but it's hard to parallelize because of information dependencies between the operations of the algorithm. This method is also used for solving the three-dimensional and two-dimensional problems, which gives rise to a series of Thomas algorithm. And an efficient algorithm parallelization Thomas algorithm will allow to solve such problems on supercomputers with a good performance. The paper summarizes the two algorithm parallelization Thomas algorithm, the example of the one-dimensional solutions of an elliptic equation with different sizes of servings, using MPI standard, as well as a comparison of their efficiency by using a series Thomas algorithm. The results of numerical experiments to study the optimum size of servings, to draw conclusions about the applicability of the studied algorithms for large three-dimensional problems on supercomputers containing tens of thousands of compute nodes and more.

Key words: MPI, Parallel program, Janenko method, Pipelined Thomas algorithm.

Ахмед-Заки Д.Ж., Лебедев Д.В., Перепёлкин В.А.

**Қуалау әдісінің параллельді жұмысының
тиімділігін салыстыру: параллельді-конвейерлік әдіс, параллельді қуалау**

Үлкен өлшемді торлар үшін (1000^3 және одан да көп) жылу өткізгіштік теңдеуі сияқты есептерге үшдиагональді теңдеулер жүйесін шешетін қуалау әдісін пайдаланып үш өлшемді есептерді шешу қарастырылады. Суперкомпьютерлердің өнімділігі артқан сайын, жоғарғы өнімді параллельді бағдарламалар пайдаланылуы тиіс. Қуалау әдісін тізбектей жүзеге асыру тікелей, тиімді және қарапайым әдіс болғандықтан пайдаланылады, бірақ, алгоритмнің операциялары арасында мәліметтердің тәуелділігінен параллельдеу қиын. Ұсынылып отырған әдіс екі өлшемді және үш өлшемді есептерге де пайдаланылады және мұндай жағдайда бірнеше қуалау сериясы пайда болады. Қуалау әдісін тиімді параллельдеу алгоритмі есептерді суперкомпьютерлерде жақсы өнімділікпен шығаруға мүмкіндік береді. Мақалада бір өлшемді эллиптикалық теңдеу мысалында MPI стандарттарын пайдаланып қуалаудың екі параллельдеу әдісі көрсетілген, сонымен қатар бірнеше қуалау кезіндегі тиімділіктерді салыстыру жүзеге асырылған. Сандық эксперименттердің нәтижелері көрсетілген, зерттеліп отырған алгоритмнің үш өлшемді, оң мыңдағын есептеу торларында үлкен есептерді суперкомпьютерлерде пайдаланылуы жайлы қорытынды жасалған.

Түйін сөздер: MPI, параллельді бағдарлама, Яненко әдісі, параллельді-конвейерлік әдіс.

Введение

В настоящее время все больше растет производительность суперкомпьютеров и становится актуальным использование высокоэффективных параллельных программ. Для решения разностных эллиптических уравнений, возникающих при аппроксимации эллиптических уравнений второго порядка, часто используют метод прогонки [1], который является прямым методом, экономичным и простым в реализации в случае последовательной программы, но сложно распараллеливается из-за информационных зависимостей между операциями алгоритма. Данный метод также применяется при решении двумерных и трехмерных задач, что приводит к возникновению серии прогонок. И эффективный алгоритм распараллеливания прогонки позволит решать такие задачи на суперкомпьютерах с хорошей производительностью. Существует множество статей, описывающих варианты распараллеливания прогонки. Среди них можно выделить следующие: в [2] и [3] предложены решатели, использующие сочетание параллельной циклической редукции (PCR) [4] и правой прогонки [4] с механизмами принятия решений для переключения с PCR на метод правой прогонки, чтобы сбалансировать параллелизм и вычислительную сложность. NVIDIA выпустила трехдиагональный решатель, используя сочетание циклической редукции (CR) [2] и алгоритма PCR в библиотеке CUSPARSE [5]. В [6–8] предложены трехдиагональные решатели для графических ускорителей, использующих CR, а в [9] – решатель на основе PCR. В [10] введено сочетание алгоритмов PCR и правой прогонки. В [11] предложен гибридный метод, включающий в себя метод правой прогонки, CR, PCR и метод рекурсивного удвоения (RD) [12]. В [13] предложен вычислительно устойчивый масштабируемый решатель на основе алгоритма SPIKE [14, 15]. Также известен метод, предложенный Н.Н.Яненко [16]. Этот метод позволяет редуцировать исходную систему с большим числом неизвестных к системе с числом неизвестных, равным числу процессоров. Редуцированная система, состоящая из гранично процессорных точек, решается методом прогонки. Чтобы распараллелить решения этой системы, можно применить такие методы, как метод встречной прогонки и метод параллельно циклической редукции. Также известен параллельно-конвейерный метод

[17, 18], предназначенный для решения множества трехдиагональных СЛАУ, возникающих при решении двумерных и трехмерных задач. Были реализованы метод Яненко и параллельно-конвейерный метод с точки зрения их применимости для решения трехмерного уравнения теплопроводности. Дано описание этих методов, а также произведено сравнение их эффективности при использовании серии прогонок

1 Постановка задачи

Для сравнения эффективности рассматриваемых методов будем решать одномерную модельную задачу. В качестве такой задачи возьмем уравнение Пуассона в единичном отрезке с начальными условиями типа Дирихле.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f(x, y), 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$u(0) = 0, u(1) = 1 \quad (2)$$

Правая часть f выбиралась из условия, что бы точным решением задачи (1)-(2) была функция $u = x^3$. Будем решать описанное уравнение методом прогонки [1].

2 Алгоритм решения

2.1 Параллельно-конвейерный метод

Основная идея параллельно-конвейерного метода [18] в том, что процессор, выполнив прямой или обратный ход прогонки по части точек, передает вычисленные значения на границе отрезка (при прямом ходе - правую границу при обратном - левую) соседнему процессору, чтобы тот мог продолжить прогонку, а сам в это время начинает обрабатывать следующую порцию точек. Если исключить время разгона и торможения конвейера, то все остальное время в счете задействованы все процессоры. Поясним вышесказанное с помощью рисунка 1. На рисунке конвейер состоит из 3 процессоров, строки на рисунке (сверху вниз) соответствуют количеству тактов, стрелки вправо - протягиванию прямого хода прогонки в одном направлении, а влево - в другом. Светло-серым цветом отмечены процессоры, протянувшие прогонку в одном направлении, темным - в обоих.

2.1 Метод Яненко

В отличие от параллельно-конвейерного метода метод Яненко [16] можно применить не только для решения множества систем трехточечных уравнений, но и для решения одной системы. Рассмотрим систему линейных уравнений с трех диагональной матрицей следующего вида:

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, b_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, N-1, b_0 y_0 + c_0 y_1 = d_0, a_N y_{N-1} + b_N y_N = d_N \quad (3)$$

Для простоты пусть на каждом процессоре будет одинаковое количество точек $m = K/M$, где K - число неизвестных (в нашем случае $K = N + 1$), M - число процессоров, индексация будет глобальная. Таким образом, на отдельном процессоре с номером j будет находиться лишь часть уравнений системы (3) с номерами от $(j - 1) \cdot m + 1$ до

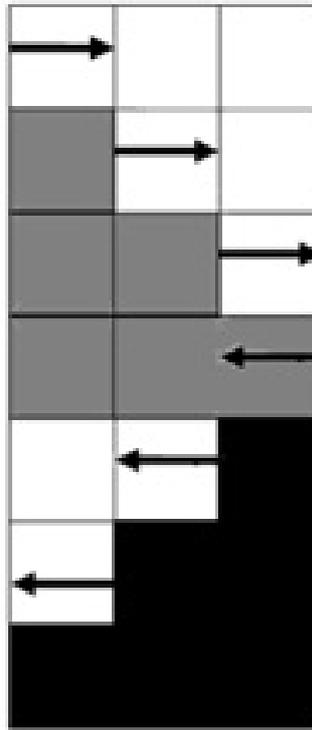


Рисунок 1 –Схема параллельного конвейерного алгоритма

$j \cdot m$, где j – номер процессора. Обозначим $y_{j \cdot m}$ через z_j , $j = 0, \dots, M$ и будем искать решения системы (3) в виде.

$$y_{(j-1) \cdot m + i} = z_{j-1} u_i + z_j v_i + w_i, i = 1, \dots, m-1, j = 1, \dots, M \quad (4)$$

где u , v , w – решения следующих систем уравнений:

$$\begin{cases} a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = 0 \\ u_{(j-1) \cdot m} = 1, u_{j \cdot m} = 0 \\ a_i v_{i-1} + b_i v_i + c_i v_{i+1} = 0 \\ u_{(j-1) \cdot m} = 0, u_{j \cdot m} = 1 \\ a_i w_{i-1} + b_i w_i + c_i w_{i+1} = d_i \\ w_{(j-1) \cdot m} = 0, w_{j \cdot m} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Решения этих трех систем можно найти методом прогонки, причем независимо на каждом процессоре. Будем называть их предрешениями, а этот этап решения задачи – этапом нахождения предрешений. В уравнения с номерами $j \cdot m$ из системы (3): $a_{j \cdot m} y_{j \cdot m-1} + b_{j \cdot m} y_{j \cdot m} + c_{j \cdot m} y_{j \cdot m+1} = d_{j \cdot m}$, $j = 0, \dots, M$, используя формулу (4) получаем систему трехточечных уравнений относительно z_j , имеющую следующий вид:

$$\begin{aligned} A_j z_{j-1} + B_j z_j + C_j z_{j+1} &= D_j, j = 1, \dots, M-1 \\ B_0 z_0 + C_0 z_1 &= D_0, A_M z_{M-1} + B_M z_M = D_M, B_0 = b_0 + c_0 u_1, C_0 = c_0 v_1, D_0 = d_0 + c_0 w_1 \\ A_j &= a_{j \cdot m} u_{j \cdot m-1}, B_j = b_{j \cdot m} + a_{j \cdot m} v_{j \cdot m-1} + c_{j \cdot m} u_{j \cdot m+1}, C_j = c_{j \cdot m} v_{j \cdot m+1} \\ D_j &= d_{j \cdot m} - a_{j \cdot m} w_{j \cdot m-1} - c_{j \cdot m} w_{j \cdot m+1}, j = 1, \dots, M-1 \\ A_M &= a_{M \cdot m} u_{M \cdot m-1}, B_M = b_{M \cdot m} + a_{M \cdot m} v_{M \cdot m-1}, D_M = d_{M \cdot m} - a_{M \cdot m} w_{M \cdot m-1} \end{aligned} \quad (6)$$

Назовем этот этап – этапом нахождения гранично-процессорных решений. Размерность этой системы уравнений равна количеству процессоров, что существенно меньше количества точек задачи. На последнем этапе восстанавливаем окончательное решение по формуле (4). Итак, метод Яненко содержит три этапа:

1. нахождение предрешений,
2. нахождения гранично-процессорных решений,
3. восстановление решения.

Первый и третий этапы выполняются независимо на каждом устройстве (универсальном процессоре, ускорителе или сопроцессоре). А второй этап требует коммуникаций между MPI процессами.

3 Применимость алгоритмов

Рассмотрим применимость рассматриваемых параллельных алгоритмов для решения трехмерных задач, где можно использовать метод стабилизирующей поправки [19], что приводит к возникновению серии прогонок, где каждая из прогонок решает задачу эквивалентную задаче (1) с точки зрения параллельной реализации. Серия прогонок получается при декомпозиции исходной трехмерной области по каждому измерению, как показано на рисунке 2. Для оценки эффективности рассматриваемых параллельных алгоритмов, достаточно рассматривать только один шаг метода стабилизирующей поправки и часть трехмерной области, состоящей из всех точек по оси x и части точек по остальным осям, на рисунке 2 такая область выделена темным цветом. Такой выделенный фрагмент может считаться независимо и коммуникации будут только внутри этой группы процессоров. При выборе этих условий и возникает серия прогонок, в которой количество прогонок определяется как произведение количества точек по измерению y на количество точек по измерению z . Для конвейерно-параллельного алгоритма количество тактов и количество порций определим как произведение, равное произведению количества точек по оси y и количества точек по оси z . Соответственно, мы должны будем так подбирать соотношение количества порций и количества тактов, что бы их произведение всегда было равно размеру выделенной зеленой трехмерной области. Для метода Яненко под количеством порций будем понимать сколько раз, решаются уравнения (4)-(6), а под количеством тактов – сколько раз будет выполняться этот процесс.

4 Тестирование

Были реализованы три следующие программы: одна последовательная и две параллельные, реализующие конвейерный метод и метод Яненко. Параллельные программы реализованы с использованием стандарта MPI. Тестирование проводилось для различного количества точек по пространственной координате и различного количества серий. Все программы запускались на кластере ССКЦ СО РАН. Для чистоты тестирования параллельные программы запускались по одному процессу на узел. Целью тестирования было сравнение эффективности параллельных алгоритмов и определения оптимального соотношения количества порций и количества тактов из соображений дальнейшего использования одного из параллельных алгоритмов для решения трехмерных задач фильтрации [20]. Из этих же соображений были выбраны следующие параметры. Количество

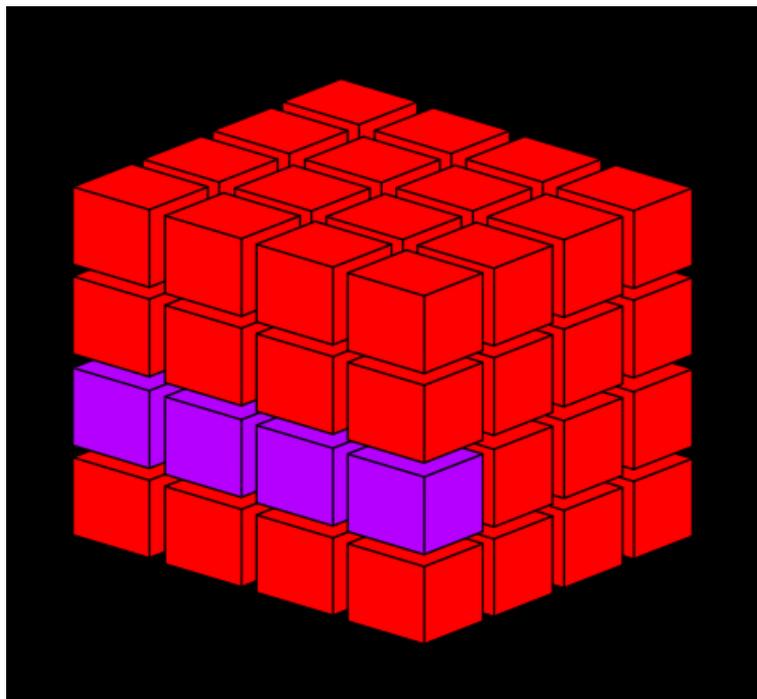


Рисунок 2 – Декомпозиция трехмерной области.

точек по пространственной координате бралось равным 1000, 2000 или 3000. Количество порций и количество тактов конвейера изменялось так, чтобы их произведение было равным 10000. Количество процессов бралось равным 10, 20 или 30. Эти параметры соответствуют трехмерной области размеров $1000 \times 1000 \times 1000$, $2000 \times 2000 \times 2000$ или $3000 \times 3000 \times 3000$ соответственно, и количеству процессов 1000, 8000 или 27000 (10^3 , 20^3 и 30^3 соответственно). Результаты тестирования для количества процессов, равного 10 приведены на рисунке 3. Из рисунка 3 видно, что время расчета методом Яненко для различного количества порций всегда меньше чем время выполнения последовательной программы в отличие от конвейерного метода, который выполняется медленнее для размера порций равной всей подобласти. Такое поведение объясняется тем, что при таких параметрах конвейерный метод представляет собой, по сути, последовательную прогонку, но при этом добавляется время на коммуникации между процессами. Но, за исключением последних трех наборов, конвейерный метод всегда выполняется быстрее, чем метод Яненко. А при размере числа порций равным количеству тактов и равному 100 эффективность конвейерного метода равна 0.98, что является очень хорошим результатом, в отличие от метода Яненко, где наибольшая эффективность достигается при тех же параметрах и равна 0.62. На следующем графике (Рисунок 4) показано время расчета для количества процессов, равного 20. Из рисунка 4 видно, что общее поведение сохраняется и при граничном значении, когда количество тактов больше или равно 20 конвейерный метод проигрывает методу Яненко. Для всех остальных случаев конвейерный метод лучше. Но при увеличении количества процессов, что соответствует увеличению длины конвейера, накладные расходы увеличиваются, и максимальная эффективность для конвейерного метода равна 0.71, но при этом и метод Яненко показывает меньшую эффективность (0.42). На рисунке 5 показано время выполнения



Рисунок 3 – Время расчета (в сек.) для количества процессов равного 10.

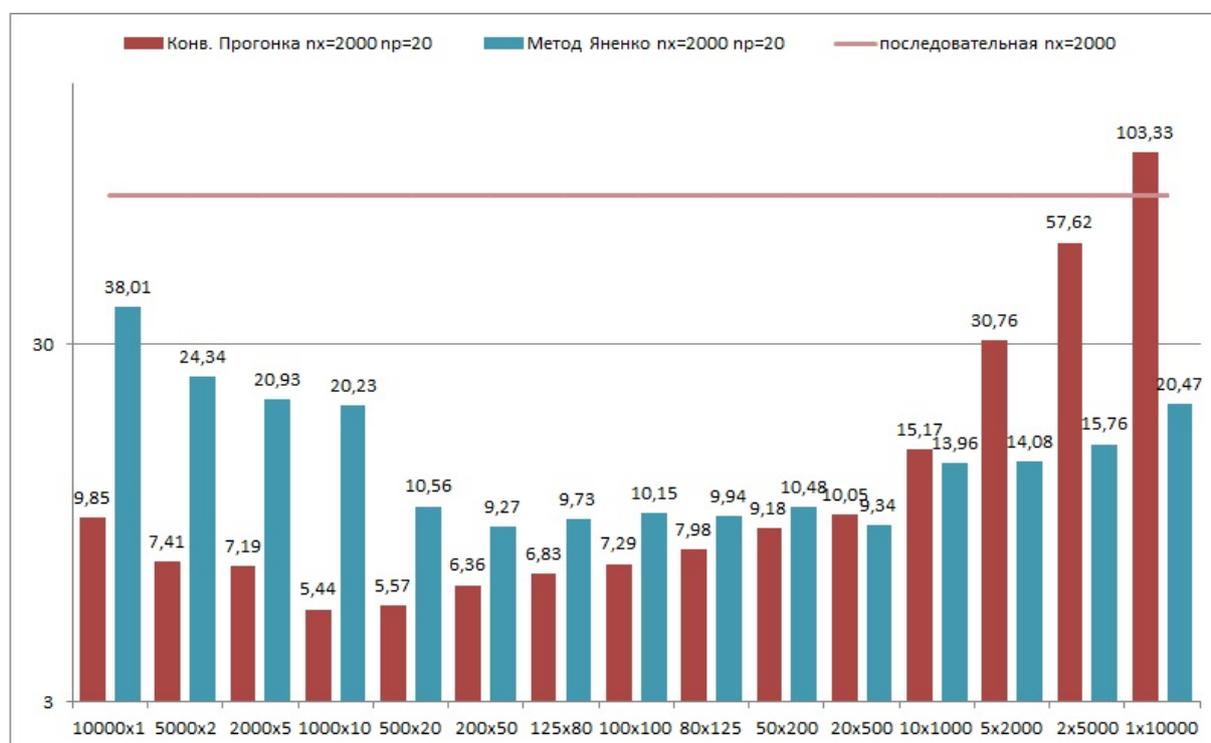


Рисунок 4 – Время расчета (в сек.) для количества процессов равного 20.



Рисунок 5 – Время расчета (в сек.) для количества процессов равного 20.

программы для количества процессов, равного 30. Из рисунка 5 видно, что общее поведение сохраняется и при граничном значении когда количество тактов больше или равно 80 конвейерный метод проигрывает методу Яненко. Для всех остальных случаев конвейерный метод лучше. Однако при увеличении количества процессов или что то же самое длины конвейера накладные расходы увеличиваются и максимальная эффективность для конвейерного метода равна 0.74, но и метод Яненко показывает еще меньшую эффективность (0.37). Следовательно, для решения трехмерной задачи следует использовать параллельно-конвейерный метод. Также, для более точной оценки эффективности для параллельного конвейерного метода было проведено дополнительное тестирование. Суть его заключается в том, что для количества точек по оси x равного 1000, 2000 и 3000 количество процессов бралось равным 10, 20 и 30 для каждого размера. Результаты тестирования приведены на рисунке 6. На этом рисунке показаны значения эффективности для различных параметров. Видно, что при увеличении размера задачи эффективность снижается, но все равно остается высокой. К тому же, при $px=2000$ наибольшая эффективность все равно остается при расчете на 10 процессах. Однако при $px=3000$ наилучшая эффективность достигается уже при количестве процессов, равном 20 или 30. Отсюда можно сделать вывод, что при увеличении размера задачи пропорциональное увеличение процессов не дает лучшей эффективности, а оптимальное ускорение может достигаться и на меньшем количестве процессов. Можно сделать вывод, что если не рассматривать граничные значения, параллельный конвейерный метод обладает лучшей эффективностью и для решения трехмерных задач большого размера рекомендуется использовать именно метод конвейерной прогонки. Можно модернизи-

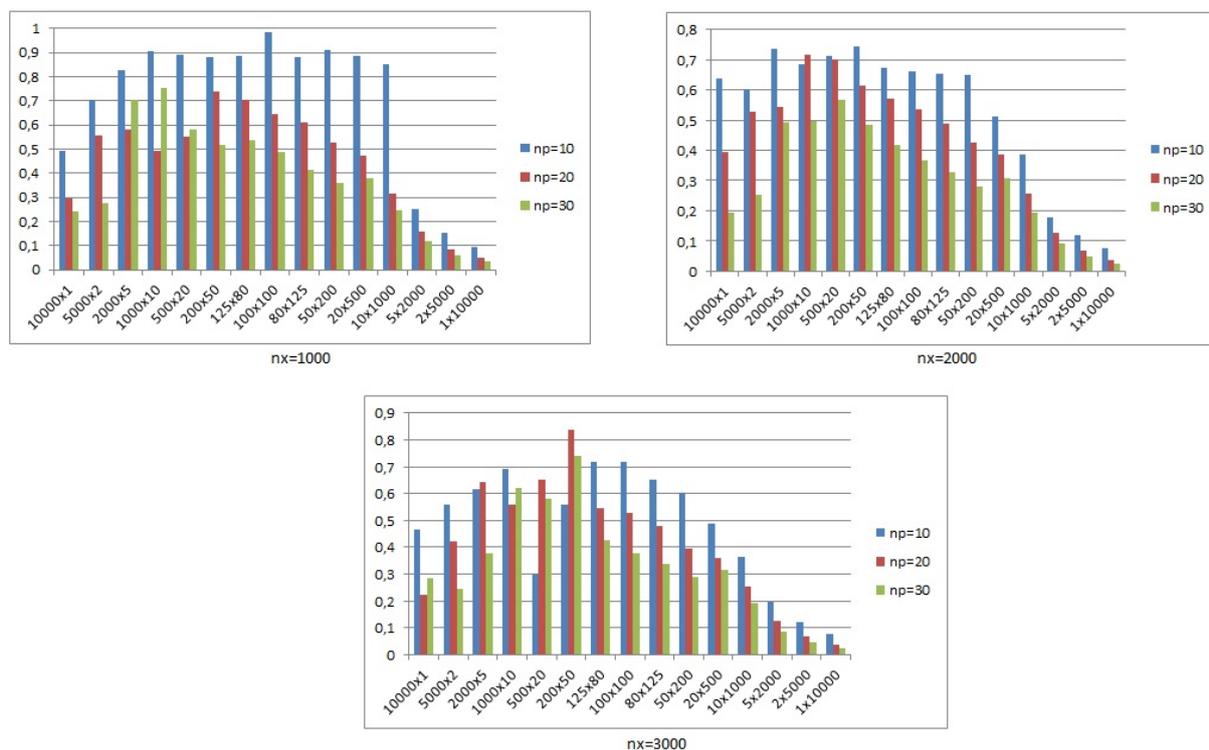


Рисунок 6 – Эффективность параллельно-конвейерного метода.

ровать этот метод, чтобы при расчете он автоматически определял количество порций для наибольшей производительности.

Заключение

Было проведено сравнительное исследование эффективности и масштабируемости двух параллельных алгоритмов прогонки с точки зрения их применения для решения трехмерного уравнения теплопроводности. Была выявлено, что достигается высокая степень эффективности для размеров задач размером до 30003 точек и более, что делает рассмотренные алгоритмы применимыми на суперкомпьютерах, содержащих десятки тысяч вычислительных узлов и более. Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 5029/ГФ4

Литература

- [1] Самарский А.А. Теория разностных систем. - М.: Наука, 1977. - 656с.
- [2] Davidson A., Zhang Y., D. Owens J. An auto-tuned method for solving large tridiagonal systems on the GPU. URL: http://idav.ucdavis.edu/func/return_pdf?pub_id=1052 (дата обращения: 07.09.2016).
- [3] Kim H.-S., Wu S., Chang L.-W., Hwu W.-M. A scalable tridiagonal solver for gpus // In Parallel Processing (ICPP), 2011 International Conference on. P. 444–453.
- [4] Hockney R. W., Jesshope C. R. Parallel computers: architecture, programming and algorithm. //Hilger. Bristol. 1986. - P. 274-280.

- [5] NVIDIA Corporation. CUDA CUSPARSE Library. URL: <https://developer.nvidia.com/cusparse> (дата обращения: 07.09.2016).
- [6] *Sengupta S., Harris M., Zhang Y., Owens J. D.* Scan primitives for GPU computing. URL: http://idav.ucdavis.edu/func/return_pdf?pub_id=915 (дата обращения: 07.09.2016).
- [7] *Goddeke D., Strzodka R.* Cyclic reduction tridiagonal solvers on GPUs applied to mixed-precision multigrid // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. - 2011. - Vol. 22. - P.22–32.
- [8] *Davidson A., Owens J.D.* Register packing for cyclic reduction: A case study. URL: http://idav.ucdavis.edu/func/return_pdf?pub_id=1052 (дата обращения: 07.09.2016).
- [9] *Egloff D.* High performance finite difference PDE solvers on GPUs. URL: http://www.researchgate.net/publication/228942149_High_performance_finite_difference_PDE_solvers_on_GPUs (дата обращения: 07.09.2016).
- [10] *Sakharnykh N.* Efficient tridiagonal solvers for ADI methods and fluid simulation. // NVIDIA GPU Technology Conference. September 2010.
- [11] *Zhang Y., Cohen J., et al.* Fast tridiagonal solvers on the GPU. URL: http://idav.ucdavis.edu/func/return_pdf?pub_id=978 (дата обращения: 07.09.2016).
- [12] *Stone H. S.* An efficient parallel algorithm for the solution of a tridiagonal linear system of equations // Journal of the ACM. - 1973. - Vol. 20. - P. 27–38.
- [13] *Chang L.-W., Stratton J. A., Kim H.-S., Hwu W.-M.* A scalable, numerically stable, highperformance tridiagonal solver using GPUs. High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC) // 2012 International Conference for IEEE Computer Society Press. - 2012. - P. 11.
- [14] *Polizzi E., Sameh A.* A parallel hybrid banded system solver: The SPIKE algorithm // Parallel Computing. - 2006. - Vol. 32, No. 2. - P. 177–194.
- [15] *15. Polizzi E., Sameh A.* SPIKE: A parallel environment for solving banded linear systems // Computers and Fluids. - 2007. - Vol. 36, No. 1. - P. 113–120.
- [16] *16. Яценко Н.Н., Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Шустов Г.В.* Об организации параллельных вычислений и “распараллеливании” прогонки // Численные методы механики сплошной среды. - 1978. - Т. 9, №7. С. 139-146.
- [17] *Povitsky A.* Parallelization of the pipelined Thomas algorithm. ICASE Report No. 98-48. Hampton. NASA Langley Research Center. 1998. 22 p.
- [18] *Сапронов И.С., Быков А.Н.* Параллельно-конвейерный алгоритм // Атом. - 2009. - № 44. - С. 24-25.
- [19] *19. Яценко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. - Новосибирск: Наука, 1967 - 197 с.
- [20] *Akhmed-Zaki D., Lebedev D., Perepelkin V.* Implementation of a Three-Phase Fluid Flow ("Oil-Water-Gas") Numerical Model in the LuNA Fragmented Programming System // Proc. of the 13th Conference on Parallel Computing Technologies, LNCS 9251. - 2015. - P. 489-497.

References

- [1] *SamarSKIY A.A.* The theory of difference systems. - M.: Nauka, 1977. -656p.
- [2] *Davidson A., Zhang Y., D. Owens J.* An auto-tuned method for solving large tridiagonal systems on the GPU. URL: http://idav.ucdavis.edu/func/return_pdf?pub_id=1052 (дата обращения: 07.09.2016).
- [3] *3. Kim H.-S., Wu S., Chang L.-W., Hwu W.-M.* A scalable tridiagonal solver for gpus. // In Parallel Processing (ICPP), 2011 International Conference on. P. 444 –453.
- [4] *Hockney R. W., Jesshope C. R.* Parallel computers: architecture, programming and algorithm. // Hilger. Bristol. - 1986. - P. 274-280.

-
- [5] NVIDIA Corporation. CUDA CUSPARSE Library. URL: <https://developer.nvidia.com/cusparse> (дата обращения: 07.09.2016).
- [6] *Sengupta S., Harris M., Zhang Y., Owens J. D.* Scan primitives for GPU computing. URL: http://idav.ucdavis.edu/func/return_pdf?pub_id=915 (дата обращения: 07.09.2016).
- [7] *Goddeke D., Strzodka R.* Cyclic reduction tridiagonal solvers on GPUs applied to mixed-precision multigrid // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. - 2011. - Vol. 22. - P. 22–32.
- [8] *Davidson A., Owens J.D.* Register packing for cyclic reduction: A case study. URL: http://idav.ucdavis.edu/func/return_pdf?pub_id=1052 (дата обращения: 07.09.2016).
- [9] *Egloff D.* High performance finite difference PDE solvers on GPUs. URL: http://www.researchgate.net/publication/228942149_High_performance_finite_difference_PDE_solvers_on_GPUs (дата обращения: 07.09.2016).
- [10] *Sakharnykh N.* Efficient tridiagonal solvers for ADI methods and fluid simulation. // NVIDIA GPU Technology Conference. - 2010. - P.17-21
- [11] *Zhang Y., Cohen J., et al.* Fast tridiagonal solvers on the GPU. URL: http://idav.ucdavis.edu/func/return_pdf?pub_id=978 (дата обращения: 07.09.2016).
- [12] *Stone H. S.* An efficient parallel algorithm for the solution of a tridiagonal linear system of equations // Journal of the ACM. - 1973. - Vol. 20. - P. 27–38.
- [13] *Chang L.-W., Stratton J. A., Kim H.-S., Hwu W.-M.* A scalable, numerically stable, highperformance tridiagonal solver using GPUs. High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC). // 2012 International Conference for. IEEE Computer Society Press. 2012. - P. 11.
- [14] *Polizzi E., Sameh A.* A parallel hybrid banded system solver: The SPIKE algorithm // Parallel Computing. - 2006. - Vol. 32, No. 2. - P. 177–194.
- [15] *15. Polizzi E., Sameh A.* SPIKE: A parallel environment for solving banded linear systems // Computers and Fluids. - 2007. - Vol. 36, No. 1. - P. 113– 120.
- [16] *15. Yanenko N.N., Konovalov A.N., Bugrov A.N., Shustov G.V* On organization of parallel computations and parallelization of the tridiagonal matrix algorithm // Numerical Methods of Continuum Mechanics. - 1978. - Vol. 9. №7. - P. 139-146.
- [17] *Povitsky A.* Parallelization of the pipelined Thomas algorithm. // ICASE Report No. 98-48. Hampton. NASA Langley Research Center. - 1998. - P. 22.
- [18] *Sapronov I.S., Bykov A.N.* Pipelined Thomas algorithm // Atom. - 2009. - № 44. - P. 24-25.
- [19] *19. Janenko N. N.* The method of fractional steps for solving multidimensional problems of mathematical physics. - Novosibirsk: Nauka, 1967. - 197p.
- [20] *Akhmed-Zaki D., Lebedev D., Perepelkin V.* Implementation of a Three-Phase Fluid Flow ("Oil-Water-Gas") Numerical Model in the LuNA Fragmented Programming System //Proc. of the 13th Conference on Parallel Computing Technologies, LNCS 9251. -2015. - P. 489-497.

УДК 004.9

Кудубаева С.А.^{1*}, Рюмин Д.А.^{1.}, Калжанов М.У.²

¹Костанайский государственный университет имени А. Байтурсынова, Республика Казахстан, г. Костанай

²Костанайский государственный педагогический институт, Республика Казахстан, г. Костанай
*E-mail: saule.kudubayeva@gmail.com

Метод опорных векторов для распознавания жестовой речи с использованием сенсора KINECT

Для распознавания жестов использованы различные методы, среди них: метод опорных векторов, скрытые марковские модели, нечёткие модели, модель искусственного нейрона, метод разности изображения. Задачи по распознаванию жестовой речи любого языка характеризуются многими параметрами, в первую очередь, это характеристики канала передачи жестовой речи, размер словаря распознавания, вариативность жестов и т.д. Помимо существующих технико-экономических сложностей, на развитие казахских речевых технологий, которые включают в себя и распознавание жестового языка, в первую очередь, влияют особенности казахского языка и речи, вызывающие сложности в процессе автоматической обработки: множество правил словообразования, наличие семи падежей в образовании существительных, вариативность казахского языка и речи в виду наличия нескольких областей. Разработка базы данных для казахского жестового языка, состоящей из дактильной азбуки 42 жестов, является начальной ступенью при создании системы автоматического распознавания отдельных жестов рук. Для распознавания жестов использован сенсор Kinect, координаты скелета руки полученные от него и ключевые характеристики обработаны через XML файлы при помощи инструментов и математических вычислений в MATLAB. Объектом распознавания жестов в данной работе являются буквы и цифры и некоторые жесты в статичной форме.

Ключевые слова: казахский жестовый язык, дактиль, распознавание образов, сегментация, видео файл.

Kudubayeva S.A., Ryumin D.A., Kalzhanov M.U.

The method of basis vectors for recognition sign language by using sensor KINECT

For signs recognition different methods, such as the method of reference vectors, hidden Markov models, fuzzy models, the model of artificial neuron, image difference method are used. The tasks of recognition of gestural speech of any language are characterized by many parameters. First of all this is characteristics of the transmission channel of gestural speech, recognition vocabulary scope, the variability of gestures, etc. Besides technical and economic problems Kazakh speech technologies development, among which there is Sign language recognition, are firstly influenced by peculiarities of the Kazakh Language and speech (many rules of word formation, seven cases of nouns, territorial varieties of the Kazakh language and speech) causing difficulties in automatic processing. The development of Kazakh Sign Language database consisting of 42 gestures is the first step in designing the system of automatic recognition of separate hand gestures. For gestures recognition Kinect sensor, hand skeleton coordinates obtained via it and key characteristics processed through XML files via tools and mathematic calculations in MATLAB are used. Gestures recognition objects in this article are letters, digits and some gestures in static form.

Keywords: Kazakh Sign Language, dactyl, image recognition, segmentation, video file.

Кудубаева С.А., Рюмин Д.А., Калжанов М.У.
**KINECT сенсорын пайдалана отырып ым тілін танып білудегі
сүйеніш вектор әдісі**

Мақалада есту мүмкіндіктері шектеулі адамдардың ым тілін танып білуде сүйеніш вектор әдісі туралы қарастырылған. Қазақша ым тілі үшін деректер қорын құрастыру, дактилді азбука 42 әріпті ым тілінен тұратын, жеке ым қолдарын автоматты түрде танып білу жүйесін құру бастапқы қадамын жасау. Ым-ишара тілін танып білуде Kinect сенсоры қолданылды, қол сүйегінің координатасы алынады, кілттік мінездеме XML файл инструмент арқылы және MATLAB математикалық есептеулердің көмегімен өңделді. Ым тілін танып білу объектісі берілген жұмыста әріптер, сандар және статикалық формадағы ым ишаралары болып табылады. Ымдарды тануға арланған әртүрлі әдістер қолданылады, олардың ішінде: тірек векторлар әдісі, жасырын марков модельдері, анық емес модельдер, жасанды нейрон моделі, бейнелердің әртүрлілігі әдісі. Кез келген тілдің ыммен сөйлеуді тану бойынша міндеттері көптеген параметрлермен сипатталады, ең алдымен ыммен сөйлеуді жиберу каналдарының сипаттамасы, тану сөздігінің өлшемі, ымдау вариативтілігі және т.с.с. 42 ым дактильді әліпбиден тұратын қазақша ым тілінің мәліметтер қорын әзірлеу автоматтандырылған жеке қол қимылдарын тану жүйесінің алғашқы кезеңі болып табылады. Ымдарды тану үшін Kinect сенсоры қолданылған, қол қаңқасының координаттары алынған және кілттік сипаттамасы MATLAB бағдарламасының құралдары мен математикалық есептеулері көмегімен XML файлы арқылы өңделген. Берілген жұмыста ымдарды тану объектісі ретінде әріптер мен сандар және кейбір статикалық формадағы ымдар болып табылады.

Түйін сөздер: қазақша ымдау тілі, дактиль, бейнелерді тану, сегментация, бейне файл.

1 Введение

На текущий момент в большинстве случаев, задача по распознаванию потоков сводится к делению некоторых наборов данных на множество уже определённых сегментов, кластеров. Используя скрытые марковские методы (СММ) наборы данных можно классифицировать. Кроме СММ, распознавание потоков производится методом опорных векторов, который в свою очередь также является классификатором [1]. Идея метода заключается в том, чтобы все входные данные представлять в многомерном пространстве и сегментировать с помощью гиперплоскостей. Распознавание жеста на основе метода опорных векторов заключается в представлении жеста определённой последовательностью ключевых характеристик, которые впоследствии будут подлежать сравнению и сегментации. На начальном этапе производится разбиение входных данных на пересекающиеся отрезки - фреймы. Затем из каждого фрейма извлекаются характеристики (признаки). Полученные характеристики в свою очередь объединяются в вектора, определяющие жесты. На основе сформированных векторных значений осуществляется классификация жеста на основе метода опорных векторов. Метод опорных векторов (SVM) и СММ, показывают достаточно низкий процент ошибок распознавания.

2 Экспериментальная часть

Исследованиями в области распознавания образов занимаются Крак Ю.В., Heloir A., N. Courty, S. Gibet, и другие. Ранее работы о проблемах казахской жестовой речи, способах и методах распознавания жестов выполнены в работах [2-8]. По типу показа жесты делятся на статические и динамические. При воспроизведении статического жеста не возникает необходимости в движении рук, так как положение кисти и пальцев

рук стационарно в пространстве в течение рассматриваемого промежутка времени. Динамические жесты в свою очередь воспроизводятся путём движения какой-либо части человеческого тела, в большинстве случаев кистью во времени и пространстве. Границы слов в потоке жестовой речи могут быть определены лишь в процессе распознавания (декодирования знаков), посредством подбора оптимальной последовательности жестов, наилучшим образом согласующейся с входным потоком жестов по математическим моделям.

Точность работы систем автоматического распознавания жестового языка существенно улучшается с увеличением размера словаря жестов, который может содержать в себе множество повторений одного и того же жеста. Малый словарь содержит единицы и десятки слов. Такой словарь подходит для распознавания порядка цифр, которые входят в номера телефонов, показаний приборов, а также систем управления подвижными техническими объектами, например, такими как машина, вертолёт и систем управления различным оборудованием, например, бытовой техникой.

Разработка системы автоматического распознавания жестов глухих потребовала для начала создания базы данных для казахского жестового языка – словаря жестов. Начальной ступенью в данном направлении явилось создание базы состоящей из дактильной азбуки сорока двух жестов, показанных на рисунке 1, а также цифр, чисел.

Рисунок 1 – Дактильная азбука казахского жестового языка

Для решения глобальной проблемы распознавания информации (жестов, объектов и т.д.) использованы средства компьютерного зрения: анализ и кластеризация информации. В связи с тем, что даже один человек никогда не покажет один и тот же жест подобно показанному ранее, выявлено, что проведение анализа потока информации намного сложнее, чем её синтез из-за большой вариативности сигналов как по времени, так и по содержанию. Задачи по распознаванию как одномерных сигналов (речи), так и

двумерных сигналов (текста) и трёхмерных сигналов (объемных жестов) еще далеко не решены. Однако стоит заметить, что существуют вероятностные модели (СММ, нечёткая модель, модель искусственного нейрона и т.д.), которые направлены на генерацию и классификацию гипотез распознавания сигналов.

Метод опорных векторов (SVM) – метод классификации, использующий теорию статистического обучения. В условии ограниченного набора обучающих данных, метод опорных векторов обычно превосходит традиционные методы оценки параметров, построенные на законе больших чисел. Первоначально, метод опорных векторов использовался для решения задач бинарной классификации, то есть для поиска максимально удалённой от точек двух классов гиперплоскости, разделяющей эти два класса. В нашем случае, движение, регистрируемое камерой, дискретно измеряющим ускорение по трём осям, можно представить в таком виде: $G = (a_x, a_y, a_z)$ где $a_T = (a_T^0, a_T^1, \dots, a_T^{L-1})$, $T = x, y, z$ – вектор ускорения оси, а L – длина последовательности, количество измерений.

Для распознавания жеста, разделим его на $N + 1$ сегментов одинаковой длины. Каждые два соседних сегмента будут образовывать фрейм, который представим в виде:

$$R_k = (r_{xk}, r_{yk}, r_{zk}), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1, \quad r_{Tk} = (r_{Tk}^0, r_{Tk}^1, \dots, r_{Tk}^{2l_s-1}), \quad T = x, y, z$$

Пусть два типа жестов $G1$ и $G2$ должны быть классифицированы. Определим выборку из n тренировочных данных: $\{(\varphi_i, \xi_i)\}$, $i = 1, \dots, n$ где $\varphi_i \in R^d$ – вектор характеристик и

$$\xi_i = \begin{cases} +1 & \text{если } \varphi_i \in G1 \\ -1 & \text{если } \varphi_i \in G2 \end{cases}$$

Разделяющая гиперплоскость записывается так: $\alpha * \varphi + \beta = 0$ Тогда классифицирующая функция будет иметь вид: $f(x) = \text{sign}(h(x))$, где $h(x) = \sum_{i=1}^n \lambda^* \varphi_i K(\xi_i, \xi_j) + \mu^*$. Где λ^* , μ^* – оптимальное решение.

Однако распознавание жестов подразумевает распознавание более двух жестов, сравнивались. Использование метода опорных векторов показало, что необходимо оптимально подобрать ядро функции-классификатора. Результаты показали, что данный метод не требует больших вычислительных мощностей для непосредственной работы алгоритмов.

Однако распознавание жестов подразумевает распознавание более двух жестов, поэтому сравнивались более 30 изображений с классом идеальных жестов – эталонами. В нашем случае класс $G1$ – это класс идеально воспроизведенных изображений статичных жестов, а класс $G2$ – это все другие, сравниваемые. В казахском жестовом языке цифры 1-10 являются статичными, поэтому вся работа по распознаванию жестов начата с этих жестов. Относительно специфичных букв "ң, ғ, қ, ұ, ә" и других.

В реальных условиях использование метода моментов изображения для распознавания рук часто оказывается недостаточно из-за неоднородности фона. В связи с этим необходимо также использование метода разности изображений, который, в свою очередь, призван анализировать входной видеопоток данных с выявлением разности изображений, через нахождение центра масс при движении руки человека [9], в соответствии с рисунком 2. Благодаря данному методу отпадает необходимость в обязательном наличии однородного фона в потоке трёхмерных сигналов, следствием чего является более надежное функционирование программного обеспечения в режиме реального времени.

Запись элементов казахского жестового языка производилась, при помощи сенсора Microsoft Kinect 2.0, на расстоянии от 1,5 до 2 метров, что является самым оптимальным расстоянием. Задний фон состоял из стены с однородным светлым фоном. Захват потока видео осуществлялся с разрешением 956 на 824 пикселя и частотой 25 кадров в секунду.



Рисунок 2 – Вычисление разности изображений

Корневой каталог базы данных состоит из 60 подкаталогов, 10 из которых содержит информацию о жестах, показывающих числа в промежутке от 1 до 10. Остальные каталоги хранят информацию о дактиле казахского языка жестов, состоящего из 42 букв и некоторых слов. Отдельно взятый подкаталог включает в себя 50 видео файлов с записанным одним и тем же жестом, такое же количество текстовых файлов с координатами скелета найденного человека в потоке кадров при помощи сенсора Kinect, разделенного на 25 суставов. Каждая определенная точка - это пересечение двух осей (X, Y) на координатной плоскости и дополнительное значение Z с двойной точностью, обозначающее глубину точки, которая измеряется расстоянием от сенсора до точки объекта в диапазоне от 0 до 1. Основные характеристики базы данных представлены в таблице 1.

Таблица 1– Основные характеристики базы данных

Сенсор	Microsoft Kinect 2.0
Задний фон	однородная светлая стена
Расстояние до камеры	$\approx 1,5 - 2$ метра
Разрешение захвата видео потока	956×824
Частота кадров	25 к/с
Формат видео	mp4
Общий объем базы данных	≈ 10 Гб
Общая длительность видео	≈ 2 часа

Кроме описанных файлов также имеется текстовый файл, хранимый служебную информацию о жесте. Среднее время одного видео файла составляет $\approx 4 - 5$ секунд. Для обучения автоматизированной системы распознавания отдельных жестов, использовалось 10 видео файлов с привязанными к ним текстовыми файлами с координатами о необходимых скелетных точках. Данные файлы принято считать правильными эталонами показа жеста, а остальные используются, как тестовые данные.

Для вывода информации о жестах в диалоговой системе, создана трёхмерная (3D) модель руки человека, которая представлена на рисунке 3.



Рисунок 3 – Трёхмерная модель руки человека

Скелет модели руки с наложением текстур спроектирован в Autodesk 3ds Max. Далее произведено разбиение модели на кластеры, которые в свою очередь состоят из множества градусных координат осей X, Y, Z трёхмерного пространства. Данные кластеры формируют XML файлы. На следующем этапе осуществлен автоматический программный парсинг созданных XML файлов через Microsoft Visual Studio в связке с языком программирования $C\#$ и произведено динамическое извлечение полученных градусных координат модели. После парсинга спроецирована 3D модель на виртуальной плоскости координат через векторную систему для построения клиентских приложений WPF, которая в первую очередь направлена на адаптивность модели. Данные процедуры предназначены не только для создания трёхмерной модели, но и для наполнения базы данных.



Рисунок 4 – Изменённая конфигурация трёхмерной модели руки человека

Реализация системы в целом производилась при помощи инструмента математических вычислений MATLAB [10], который позволил исследовать и спроектировать модели с альтернативными подходами к решению. Также применялись вспомогательные программные средства и библиотеки OpenGL [11], OpenCV [12]. Официальный SDK [13] от компании Microsoft предоставил возможность получения необходимых данных с сенсора Kinect. Тестирование автоматизированной системы производилось на вычислительных машинах с разной производительностью. Предложенная система распознавания некоторых статичных жестов рук, протестирована на базе данных, которая включает в общей сложности 1560 жестов двух человек. Каждый класс включает жест, показанный 30 раз. Эталоны каждого жеста выбраны в случайном порядке в количестве 5 образцов для каждого класса. Остальные 25 образцов являются тестовыми. Качество и полнота распознавания оказалась в промежутке 0,63 до 0,91, средняя полнота составляет - 0,70, а точность 0,87. Данные результаты получены на базе данных, которая предварительно

подверглась нарезке на фрагменты, без дополнительных обработок. Характеристики качества распознавания цифр и некоторых букв представлены, в соответствии с таблицей 2.

Таблица 2– Характеристика качества распознавания отдельных жестов

Жест	Полнота	Точность	Жест	Полнота	Точность
1	0,63	0,89	Ә	0,74	0,86
2	0,62	0,90	Ғ	0,71	0,84
3	0,71	0,85	Қ	0,72	0,84
4	0,72	0,88	Ң	0,67	0,88
5	0,75	0,87	Ө	0,73	0,86
6	0,72	0,87	Ү	0,61	0,83
7	0,72	0,85	У	0,63	0,84
8	0,68	0,86	h	0,75	0,90
9	0,70	0,87	i	0,76	0,87
10	0,67	0,84			

Из полученных результатов видно (таблица 1), что средняя точность распознавания, вычисляемая по формуле (1) составляет 0,87 (87%).

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$

где n – количество жестов; x_n – точность распознавания жеста. Данные результаты получены на записанной базе данных.

Наиболее низкую точность распознавания показали жесты, при демонстрации которых необходимо располагать пальцы на относительно близком расстоянии друг от друга под разными углами. Повысить точность в таком случае возможно за счет увеличения количества эталонов, а также разработке алгоритма способного осуществлять процессы размыкания и замыкания не только бинарного, но и цветного изображения. Это позволит гибко управлять цветовыми параметрами и определять не только более точно координаты объектов, но и их дескрипторы. Из полученных результатов видно, что средняя полнота составляет – 0,70, а точность 0,87. Данные результаты получены на базе данных, которая предварительно подверглась нарезке на фрагменты, без дополнительных обработок. Проведены три типа экспериментов, направленные на проверку способности к классификации метода опорных векторов (SVM). Первый эксперимент оценивал способность алгоритма SVM с предварительно сегментированными жестами из набора номера-форм данных. Второй эксперимент оценивал классификацию способности алгоритма относительно минимального количества обучающих данных. Третий эксперимент испытания изучал способность SVM алгоритма правильно классифицировать данные из данных номеров-форм в виде непрерывного потока данных, который также содержал ряд нулевых жестов. Это очень важный тест для данного исследования, так, если модель может достичь такого же хорошего результата классификации по 5 обучающим примерам, как и по 50 – ти примерам обучения, то исполнитель может

экономить время сбора данных обучения, а также в подготовке модели. С помощью всего лишь 3 примеров функции обучения SVM достигается значение неточности 3,61%. На 10 примеров функции обучения SVM достигли практического результата распознавания на 81,67%, однако стандартное отклонение во всех 10-ти примерах по-прежнему высоко - около 13,35%. Для 13 примеров функции обучения SVM достигли превосходное значение точности на 81,3% с умеренным стандартным отклонением 6,81%. Используя 20 примеров обучения, SVM достигает 81,76% с очень небольшим стандартным отклонением 1,84%. Результаты этого теста позволяют предположить, что по крайней мере 11 примеров обучения требуются на жест, если пользователь хочет достичь надежного результата классификации более 80%.

Одно интересное наблюдение было получено, глядя на лог-файлы, созданные во время эксперимента. Файлы журнала показали, что для жестов, которые были неправильно классифицированы как нулевой жест, апостериорная вероятность каждого такого жеста, имела очень малое значение (обычно ниже 0,1).

Это противоположно случаю, когда были жесты правильно классифицированы, с k – ми жестами, апостериорная вероятность обычно имеющей значение больше 0,7 а суммирование всех остальных жестов около 0,3. Другими словами, когда SVM сделал правильную классификацию вероятность того, что жест имел место, была высокой, в то время, когда SVM не в состоянии сделать правильную классификацию вероятность того, что не был допущен жест (Неправильно) – низкая.

Эти результаты свидетельствуют о том, что SVM будет плохим выбором для распознавания многомерных жестов из непрерывного потока данных, даже несмотря на достигнутые SVM отличные результаты с тем же набором данных, когда жесты были предварительно сегментированы.

В своем нынешнем состоянии, полученные данные по алгоритму SVM не могут быть использованы в качестве алгоритма распознавания в режиме реального времени для жестов из непрерывного потока данных, например, во время разговора жестами глухих, чтобы автоматически классифицировать жест с любой большой точностью. Дальнейшие исследования будут продолжены с комбинацией других методов, например DTW-алгоритм динамической трансформации временной шкалы. Изучив оба CMM и SVM как потенциальные методы распознавания жестов из непрерывного потока данных, был сделан вывод о том, что новый подход будет необходим с изучением точных порогов выбраковки.

Использование алгоритма опорных векторов является очень мощным алгоритмом распознавания образов, который имеет следующие преимущества для распознавания многомерных жестов:

1. Можно легко решить нелинейную задачу классификации с использованием трюка ядра.
2. Определение параметров модели SVM соответствует выпуклой оптимизации проблема и поэтому любое локальное решение также является глобальным решением (в отличие от например искусственной нейронной сети, которая обычно может застрять в локальной минимальной, не найдя глобального минимума)
3. SVM может легко работать с очень большими размерами векторов признаков

4. Даже при большом количестве обучающих данных с высокой размерностью векторов признаков, алгоритм SVM может обучить модель в очень короткий промежуток времени обучения

Недостатки метода. Метод опорных векторов неустойчив по отношению к шуму в исходных данных. Если обучающая выборка содержит шумовые выбросы, они будут существенным образом учтены при построении разделяющей гиперплоскости.

До сих пор не разработаны общие методы построения спрямляющих пространств или ядер, наиболее подходящих для конкретной задачи. Построение адекватного ядра является искусством и, как правило, опирается на априорные знания о предметной области.

3 Заключение

Наиболее низкую точность распознавания показали жесты, при демонстрации которых необходимо располагать пальцы на относительно близком расстоянии друг от друга под разными углами. Повысить точность в таком случае возможно за счет увеличения количества эталонов, а также разработке алгоритма способного осуществлять процессы размыкания и замыкания не только бинарного, но и цветного изображения. Это позволит гибко управлять цветовыми параметрами и определять не только более точно координаты объектов, но и их дескрипторы.

Таким образом, алгоритм выделения рук принимает на вход видеофайл, затем циклически извлекает кадры. Для каждого кадра производится пороговое отсечение яркости, до тех пор, пока не будет определен оптимальный порог. Далее осуществляется заполнение пустот объектов, с последующим поиском на изображении. После удаления шумов, подсчитывается количество найденных объектов на основе вычисления их площадей и определяются руки человека. Из найденных объектов - рук, извлекаются информативные признаки необходимые для распознавания на основе метода опорных векторов.

4 Дискуссия

Авторы статьи являются разработчиками сайта [14] для людей с ограниченными возможностями по слуху. Многие вопросы, связанные с распознаванием дактиля и жестовой речи, изучены пока недостаточно. Традиционные многочисленные методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов основаны на использовании фильтрации сигналов, корреляционных и спектральных анализах, вейвлет преобразованиях. Данные приёмы позволяют распознавать визуальные образы с использованием методов сегментации, кластеризации, классификации с использованием вероятностного моделирования и распознавания видеосигналов на основе различных типов искусственных нейронных сетей, скрытых цепей Маркова, динамического программирования, пиксельной обработки видеопотока. Все устройства, которые применяются для распознавания жестов, делятся на две группы: устройства, основанные на видеоданных и устройства, которые используют датчики: акселерометр, гироскоп и магнетометр. Лучший результат дают системы, которые помимо RGB сенсора имеют IR Depth сенсор (сенсор глубины) для распознавания жестов на небольшом расстоянии. В связи с этим авторы данной работы

использовали инструменты математических вычислений MATLAB для обработки данных от сенсора Kinect. Основная проблема распознавания жестовой речи состоит в том, что распознать отдельные жесты недостаточно. Необходимо распознать непрерывную жестовую речь, ее смысл, в этом направлении продолжены наши исследования.

Литература

- [1] *Котельников Е.В.* Параллельная реализация машины опорных векторов с использованием методов кластеризации / Е.В. Котельников, А.В. Козволина // Материалы международной научной конференции "Параллельные вычислительные технологии". – Санкт-Петербург, 2008.
- [2] *Kudubayeva S., Yermagambetova G.* "Parametric representation of the Kazakh gestural speech" Lectures Notes in Artificial Intelligence in Bioinformatics, SPECOM-2014.
- [3] *Krak Iu., Kudubayeva S.* "System for Sign Language Modeling and Learning" 8Th IEEE International Conference on Application of Information Technology, Astana, 2014.
- [4] *Фархадов М.П., Кудубаева С.А., Ермагамбетова Г.Н.* Теория скрытых Марковских моделей и ее применение для распознавания речи // Научный журнал "Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева", Астана, ноябрь 2013.
- [5] *Farkhadov M.P., Kudubayeva S.A., Ermagambetova G.N.* Acoustic simulator for the hearing impaired people // American International Journal of Contemporary Research, USA, Vol. 3 No. 11; November 2013.
- [6] *Kudubayeva S.A., Ermagambetova G.N.* To the problem of speech recognition // American International Journal of Contemporary Research, USA, Vol. 3 No. 11; November 2013.
- [7] *Кудубаева С.А., Ермагамбетова Г.Н.* Задача распознавания казахской жестовой речи // Международные Сатпаевские чтения – 2014 "Роль и место молодых ученых в реализации стратегии" Казахстан-2050", посвященные 80-летию КазНТУ имени К.И. Сатпаева, Алматы, 11-12 апреля 2014 г.
- [8] *Крак Ю., Кудубаева С., Ермагамбетова Г.* Жестовый язык и проблемы его распознавания // IV Международной научно-теоретической конференции "Роль физико-математических наук в современном образовательном пространстве", Атырауский государственный университет имени Х. Досмухамедова, Атырау, 24-25 апреля 2014 г.
- [9] *Фисенко В.Т., Фисенко Т.Ю.* Компьютерная обработка и распознавание изображений / В.Т. Фисенко, Т.Ю. Фисенко // Учебное пособие, СПб НИУ ИТМО, 2008. – С. 68-71. 192 с.
- [10] *MathWorks – Makers of MATLAB and Simulink [Электронный ресурс]* – Режим доступа: <http://www.mathworks.com> (дата обращения: 20.03.2016).
- [11] *OpenGL – The Industry Standard for High Performance Graphics [Электронный ресурс]* – Режим доступа: <https://www.opengl.org> (дата обращения: 20.02.2016).
- [12] *OpenCV [Электронный ресурс]* – Режим доступа: <http://opencv.org> (дата обращения: 20.04.2016).
- [13] *Kinect for Windows SDK 2.0 [Электронный ресурс]* – Режим доступа: <https://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=44561> (дата обращения: 20.01.2016).
- [14] *www.surdo.kz*

References

- [1] *Kotelnikov Ye. V.* Parallel Implementation of Reference Vectors Machine Using Clustering Method / Ye. V. Kotelnikov, A. V. Kozvonina // Proceedings of the international scientific conference "Parallel Computing Technologies". – St. Petersburg , 2008.
- [2] *Kudubayeva S., Yermagambetova G.* "Parametric representation of the Kazakh gestural speech" Lectures Notes in Artificial Intelligence in Bioinformatics, SPECOM-2014.
- [3] *Krak Iu., Kudubayeva S.* "System for Sign Language Modeling and Learning" 8Th IEEE International Conference on Application of Information Technology, Astana, 2014.

-
- [4] *Farkhadov M.P., Kudubayeva S.A., Ermagambetova G.N.* Theory of Hidden Markov Models and its Implementation for Speech Recognition // science journal "Herald of L.N Gumilyov ENU", Astana, November 2013.
- [5] *Farkhadov M.P., Kudubayeva S.A., Ermagambetova G.N.* Acoustic simulator for the hearing impaired people // American International Journal of Contemporary Research, USA, Vol. 3 No. 11; November 2013.
- [6] *Kudubayeva S.A., Ermagambetova G.N.* To the problem of speech recognition // American International Journal of Contemporary Research, USA, Vol. 3 No. 11; November 2013.
- [7] *Kudubayeva S.A., Ermagambetova G.N.* Problem of Kazakh Gestural Speech Recognition // International Satpaev Readings – 2014 "Role and Place of Young Scientists in Implementation of "Kazakhstan-2050" Strategy" dedicated to 80 th anniversary of K.I. Satpaev KazNTU, Almaty, April 11-12, 2014.
- [8] *Krak Yu., Kudubayeva S., Ermagambetova G.* Sing Language and Problems of its Recognition // Proceedings of IV International scientific theoretical conference "The Role of Physical Mathematical Sciences in Modern Educational Space", Kh. Dosmukhamedov Atyrau state university, Atyrau, April 24-25, 2014.
- [9] *Fissenko V.T., Fissenko T.Yu.* Computer Processing and Image Recognition / V.T. Fissenko, T.Yu. Fissenko // Manual, Spb SRU ITMO, 2008. – P. 68-71. 192 p.
- [10] *MathWorks - Makers of MATLAB and Simulink [Electronic resource]* – Access mode: <http://www.mathworks.com> (reference date: 20.03.2016).
- [11] *OpenGL - The Industry Standard for High Performance Graphics [Electronic resource]* – Access mode: <https://www.opengl.org> (reference date: 20.02.2016).
- [12] *OpenCV [Electronic resource]* – Access mode: <http://opencv.org> (reference date обращения: 20.04.2016).
- [13] *Kinect for Windows SDK 2.0 [Electronic resource]* – Access mode: <https://www.microsoft.com/en-us/download/details.aspx?id=44561> (reference date: 20.01.2016).
- [14] <https://www.surdo.kz>

4-бөлім

Раздел 4

Section 4

Қолданылмалы
математикаПрикладная
математикаApplied
Mathematics

UDC 517.958:5; 519.6.

Dairbayeva G.^{1*}, Kabylzhan A.^{1**}

¹Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty
E-mail: *lazarat-dairbayeva@mail.ru, **ainura1.93@gmail.com

Mathematical modeling and control of the process of drilling wells

This paper considers the process of drilling wells using mathematical modeling. Mathematical models of deepening and flushing-out of wells are used to describe the drilling process. Mechanical speed of drilling bedrock by drill bit is described by the equation proposed by M.G. Bingham [2]. Along with this there is considered a complete mathematical model of the mechanical speed of drilling in view of the hydraulic parameters obtained by applying the least squares method and regression analysis. There is designed computational algorithm for finding the coefficients of full parametric model of drilling, which allows calculating the mechanical speed of drilling for arbitrary data. A comparative analysis of the drilling experimental and computational data is conducted. The paper deals with a mathematical model of the hydraulic flushing of well, based on the total loss of drilling fluid pressure in individual sections of the well. Flushing of well designed, not only to clean the bottomhole from cuttings, but also serves to claying (strengthening) of the borehole walls, cooling and lubrication of the tool, which occur during the motion of liquor. There are explored the pressure losses at various sections of wells depending on the physical parameters.

Key words: drilling of wells, flushing-out, drilling speed by rock bit, pressure, mathematical model, regression analysis.

Даирбаева Г., Қабылжан А.

Ұңғыманы бұрғылау процессін математикалық пішіндеу және бақылау

Мақалада математикалық пішіндеу аппаратын қолдану арқылы ұңғыманы бұрғылау процессі талқыланған. Бұрғылау процессін сипаттау үшін ұңғыманы тереңдетудің және шаюдың математикалық моделдері қолданылған. Жерасты ұңғымасын қашау арқылы бұрғылаудың механикалық жылдамдығы М.Г. Бингхэм ұсынған теңдеу арқылы сипатталады [2]. Сонымен бірге ең аз квадраттар әдісі мен кемімелдік талдауды қолдану негізінде бұрғылаудың гидравликалық параметрлермен бірге механикалық жылдамдығының толық математикалық моделі қарастырылады. Механикалық жылдамдықты бұрғылаудың ерікті деректерін есептеу үшін бұрғылаудың толық моделінде параметрлік коэффициенттерді табудың есептегіш алгоритмі жетілдірілген. Бұрғылаудың тәжірибелік және есептелінген деректерді салыстыру талдауы орындалған. Жеке телімдердегі бұрғылау ерітіндісінің қысымының ортақ жоғалуында негізделген ұңғыманы гидравликалық шаюдың математикалық моделі қарастырылған. ұңғыманы шаю тек кенжарды бұрғылау қалдықтарынан тазарту үшін ғана емес, сонымен қатар бұрғылау ерітіндісінің қозғалыс барысында пайда болатын ұңғыманың қашауларын саздау (бекіту), құрылғыны суыту және майлау процесстерінде қолданылады. Физикалық параметрлерге тәуелді әртүрлі телімдердегі қысымның жоғалуы зерттелген.

Түйін сөздер: ұңғымаларды бұрғылау, шаю, қашау арқылы бұрғылаудың жылдамдығы, қысым, математикалық модель, кемімелдік талдау.

Даирбаева Г., Кабылжан А.

Математическое моделирование и контроль процесса бурения скважин

В данной работе рассматривается процесс бурения скважин с использованием аппарата математического моделирования. Для описания процесса бурения применяются математические модели углубления и промывки скважин. Механическая скорость бурения породы долотом описывается уравнением предложенным М.Г. Бингхэмом [2]. Наряду с этим рассматривается полная математическая модель механической скорости бурения с учётом гидравлических параметров, полученная на основе применения метода наименьших квадратов и регрессионного анализа. Разработан вычислительный алгоритм для нахождения параметрических коэффициентов полной модели бурения, что позволяет вычислить механическую скорость для произвольных буровых данных. Проведен сравнительный анализ буровых экспериментальных и вычислительных данных. Рассматривается математическая модель гидравлической промывки скважины, основанная на общей потере давления бурового раствора в отдельных участках скважины. Промывка скважины предназначена не только для очистки забоя от выбуренной породы, но и служит для глинизации (укрепление) стенок скважины, охлаждения и смазки инструмента, которые происходят при движении раствора. Исследуются потери давления на разных участках скважин, зависящие от физических параметров.

Ключевые слова: бурение скважин, промывка, скорость бурения долотом, давление, математическая модель, регрессионный анализ.

1 Introduction

The drilling process takes the most important place in the construction of wells and it is a complex difficult process. The system of adaptive control of rotary drilling process of oil and gas allows controlling the pressure in the annulus over the entire length of the well. The main advantages of controlled drilling are improving the parameters of the drilling process, controlling of the main system parameters such as backpressure, the density, the volume flushing fluid, the power of the drilling, the pressure loss at various sections of the well. The process of drilling wells consists of two main stages: the process of deepening wells and flushing process.

2 Mathematical model of the deepening process

Consider the first stage of drilling – deepening the process, which is described by 3 equations [1]:

- 1) $v_m = f_1(G, n)$ – dependency of the mechanical speed of drilling well (v_m) from weight on bit (G) and the rotor speed (n);
- 2) $t_b = f_2(G, n)$ – dependency of the time of bit runtime armament (t_b) from weight on bit (G) and the rotor speed (n);
- 3) $t_0 = f_3(G, n)$ – dependency of the time of bit runtime reliance (t_0) from weight on bit (G) and the rotor speed (n).

Domestic and foreign researchers came to the conclusion, that the ratio, which determines the mechanical speed of drilling of well by drill bit with a certain amount of flushing fluid takes the form proposed by M.G. Bingham:

$$v_m = KG^\delta n^\alpha, \tag{1}$$

where K , δ and α – parametric ratios [2].

In M.G. Bingham works, which studied in detail the depending the mechanical speed of drilling only from the axial load on the bit: $v_m = f_1(\bar{G})$, where $\bar{G} = G/D_d$ – specific axial load on the G bit, cast to its diameters D_d . It is shown that v_m function has the form of the curve 1a (Figure 1).

Curves 2 and 3 – easy drillability rocks at shallow depths (2-3 km), and the curve 4 – solid and strong rock at great depths (5-6 km). Curve v_m mechanical speed is a typical S – shaped curve, which has the following areas:

- area I – zone of small axial loads, there occurs a surface and slight destruction of rocks, its abrasion because the contact pressure of the teeth on the rock bit less than the limit of its strength.
- area II – t increases the contact pressure of the teeth on the rock bit, which leads to chipping pieces and a marked non-linear increase v_m .
- area III – \bar{G} pressure exceeds the limit of strength of the rock, there is an intensive volumetric rock destruction, approximately linearly, but with significantly greater than in zone I inclination.
- area IV – is re-grinding of drill cuttings at the bottom, because the flow of flushing liquid ceases to cope with cleaning bottomhole. The size v_m reaches its maximum when the axial load and G_m decreases, as shown by curve 1[3].

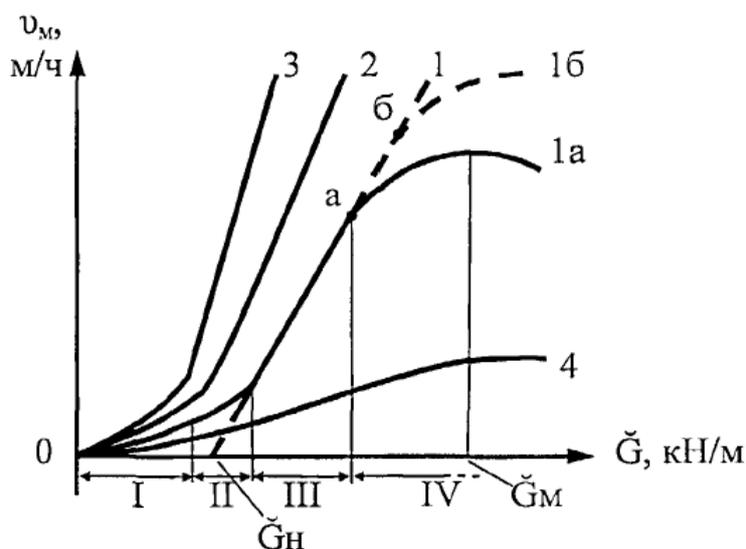


Figure 1 – Graph of dependency of mechanical speed of drilling v_m from the center loading G on a bit

2.1 The model of mechanical speed in view of hydraulic parameters

Bottomhole cleaning is an important factor that influences the mechanical speed of drilling the rock by drill bit. The bad cleaning bottomhole from the drill cuttings entails re-grinding, the cost of excess energy to work and increase in terms of well construction in general.

Mathematical model with mechanical and hydraulic parameters is used in calculating the optimal parameters. This model includes a function $v_m = f(G, n, N_b)$, where G – axial load on bit, $N_b = f(Q, P_b)$ – hydraulic power applied to the bit, Q – mud flow rate.

It is obvious that the variable N_b should enter into the equation of the function in Eq. (1) as a directly proportional component with the coefficient or with an exponent, which provides the necessary slope and bending v_m function curve. This is because the more amount of liquid supplied to the bottomhole, the better its purification [4].

To build a complete mathematical model necessary to take out a formula $v_m = f(G, n, N_b)$ using the least squares method [5].

To do this, first carried multivariate regression analysis [6]. Let's show the use of regression analysis of the experimental data on example in a Table 1. This approach allows us to replace the experimental data with approximating mathematical equation, with sufficient accuracy and calculate the values of its arguments for those who are between the values in the Table 1 and going beyond its limits.

In determining the method of least squares difference $(v_{mi} - V_{mi})^2$ between experimental (tabulated) values v_m and values approximating function V_m should be minimal:

$$(v_{m1} - V_{m1})^2 + (v_{m2} - V_{m2})^2 + \dots + (v_{mn} - V_{mn})^2 = \min. \quad (2)$$

Table 1

Experimental data LLC "Burgaz"

$v_m [m/s]$	$G [kN]$	n	N_b
1	0	0	36
6,1	58	28	74
12,65	116	30	148
17,55	146	36	222
19,75	152	42	296
20,95	156	45	370
21,6	158	46	444
21,9	161	46	518
22,7	164	48	592

Task of approximation the function v_m is formulated as follows: for the function v_m given by Table 1, to find the function V_m in power form so that the sum of the squares Eq. (2) was minimal. Since the dependence $v_m = f(G, n, N_b)$ is a power function (geometric regression), the approximating function must have the form:

$$V_m(K, \delta, \alpha, m) = KG^\delta n^\alpha N_b^m, \quad (3)$$

where – the coefficient of proportionality (drillability), δ , α , m – exponents depending on the type of bit and the quality of cleaning bottomhole. The purpose of regression analysis - definition of the coefficient K and exponents δ , α and m in Eq. (3) Then the sum of the squares of the differences Eq. (2) in expanded form:

$$\sum_{i=1}^9 [v_{mi} - V_{mi}(K, G, \delta, n, \alpha, N_b, m)]^2 = F(K, G, \delta, n, \alpha, N_b, m). \quad (4)$$

A necessary condition for a minimum of functions to F , as a function of variables K , δ , α and m , is written in the form of the following system of equations

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial K} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \delta} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial m} &= 0,\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}2 \sum_{i=1}^9 [v_{mi} - F(K, G_i, \delta, n_i, \alpha, N_{bi}, m)] \cdot F'_K(K, G_i, \delta, n_i, \alpha, N_{bi}, m) &= 0, \\ 2 \sum_{i=1}^9 [v_{mi} - F(K, G_i, \delta, n_i, \alpha, N_{bi}, m)] \cdot F'_\delta(K, G_i, \delta, n_i, \alpha, N_{bi}, m) &= 0, \\ 2 \sum_{i=1}^9 [v_{mi} - F(K, G_i, \delta, n_i, \alpha, N_{bi}, m)] \cdot F'_\alpha(K, G_i, \delta, n_i, \alpha, N_{bi}, m) &= 0, \\ 2 \sum_{i=1}^9 [v_{mi} - F(K, G_i, \delta, n_i, \alpha, N_{bi}, m)] \cdot F'_m(K, G_i, \delta, n_i, \alpha, N_{bi}, m) &= 0.\end{aligned}$$

Finding the approximating value of function $V_m(K, \delta, \alpha, m)$ is complicated by exponents (δ , α and m). To replace V_m to the linear form, take logarithms of both sides:

$$\ln V_m = \ln K + \delta \ln G + \alpha \ln n + m \ln N_b. \quad (5)$$

Since the calculated function V_m is approximating to the table function v_m , the function $\ln V_m$ will approximating function $\ln v_m$.

Let us introduce new variables and symbols:

$$k = \ln K, \quad u = \ln G, \quad \varphi = \ln n, \quad w = \ln N_b. \quad (6)$$

Then from Equation (5) follows that $\ln V_m$ will be a function of the argument k , u , φ and w . Designating $V = \ln V_m$, we obtain: $V = k + \delta u + \alpha \varphi + mw$. Thus, the task of finding the value of a power function approximating V_m reduced to the problem of finding the value of a linear function V . Accordingly, we denote $v = \ln v_m$. Therefore, least square method to $\ln v_m$ and approximating function $\ln V_m$:

$$(\ln v_{m1} - \ln V_{m1})^2 + (\ln v_{m2} - \ln V_{m2})^2 + \dots + (\ln v_{mi} - \ln V_{mi})^2 = \min. \quad (7)$$

Since $\sum_{i=1}^9 (\ln v_{mi} - \ln V_{mi})^2 = \sum_{i=1}^9 (v_i - V_i)^2$, then we will look for a minimum of the following function:

$$\sum_{i=1}^9 (v_i - V_i)^2 = \sum_{i=1}^9 (v_i - (k + \delta u_i + \alpha \varphi_i + mw_i))^2 = H(k, \delta, \alpha, m). \quad (8)$$

To find the necessary condition of a minimum of H we calculate the partial derivatives over the variables k , δ , α , m and equate them to zero.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^9 [v_i - (k + \delta u_i + \alpha \varphi_i + m w_i)](-1) &= 0, \\ \sum_{i=1}^9 [v_i - (k + \delta u_i + \alpha \varphi_i + m w_i)](-u_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^9 [v_i - (k + \delta u_i + \alpha \varphi_i + m w_i)](-\varphi_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^9 [v_i - (k + \delta u_i + \alpha \varphi_i + m w_i)](-w_i) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

where $v_i = \ln v_{mi}$, $u_i = \ln G_i$, $\varphi_i = \ln n_i$, $w_i = \ln N_{bi}$, and the values v_{mi} , G_i , n_i , N_{bi} are given in Table 1.

The system in Equation (9) is a linear system with respect to k , δ , α and m . Knowing its solution k , δ , α and m can be found approximating function $V_m = KG^\delta n^\alpha N_b^m$.

Thus, the complete mathematical model of the mechanical drilling is as follows:

$$\begin{cases} v_m = KG^\delta n^\alpha N_b^m; \\ t_0 = \frac{c_0}{\beta n \bar{G}^2}; \quad t_b = \frac{1}{k_b n \bar{G}^2}, \end{cases}$$

where

$\bar{G} = G/D_b$ – specific axial load on bit G , cast to its diameter D_b ;

t_0 – time of weapon's work of bit;

t_b – time of bearing's work of bit;

c_0 – the degree of wear of bearing, ranges from 0 to 1 for new and completely worn out props;

$\beta = 1/o.sh.$ – experienced coefficient depending on the bit design, drillable rock, drilling fluid, dynamics of bit work at the bottomhole, and other factors affecting the deterioration of bearings bit cutters;

K_b – experienced coefficient depending on the bit design, the hardness of rocks, mud properties, and other factors affecting the deterioration of weapons;

2.2 Program for calculating the optimal parameters of the mechanical drilling process

The numerical implementation of the model of the mechanical drilling process was done using the programming language C#.

Here is computational algorithm for finding V_m approximating function. As shown in paragraph 1 the approximating function has a power form: $V_m = KG^\delta n^\alpha N_b^m$, but the coefficient K and indicators δ , α and m are unknown.

1. Construction of an auxiliary approximating function V .

We form a new table 2, using the data in Table 1. In Table 2 instead of v_m , G , n and N_b values will be their logarithms $v = \ln v_m$, $u = \ln G$, $\varphi = \ln n$, $w = \ln N_b$.

From regression analysis follows [2] that V is linear: $V = k + \delta u + \alpha \varphi + m w$, where we use the notation Eq. (6), $k = \ln(K)$.

2. Creating and the solution of the linear system (2.9).

Applying the method of least squares to $v = \ln v_m$ and auxiliary approximating function $V = \ln V_m$, compose the linear system in Eq. (9) with respect to the parameters k, δ, α, m , using the data in Table 2.

Then we numerically solve the system Eq. (9) and calculate the ratio $K = \exp(k)$.

3. Calculation of the approximating function V_m .

Substituting the values of K, δ, α and m , we find the function $V_m = KG^\delta n^\alpha N_b^m$, which is the regression equation.

4. The comparative analysis of table v_m and approximate V_m values.

Here is the main program interface screen for controlling the drilling process (Figure 2).

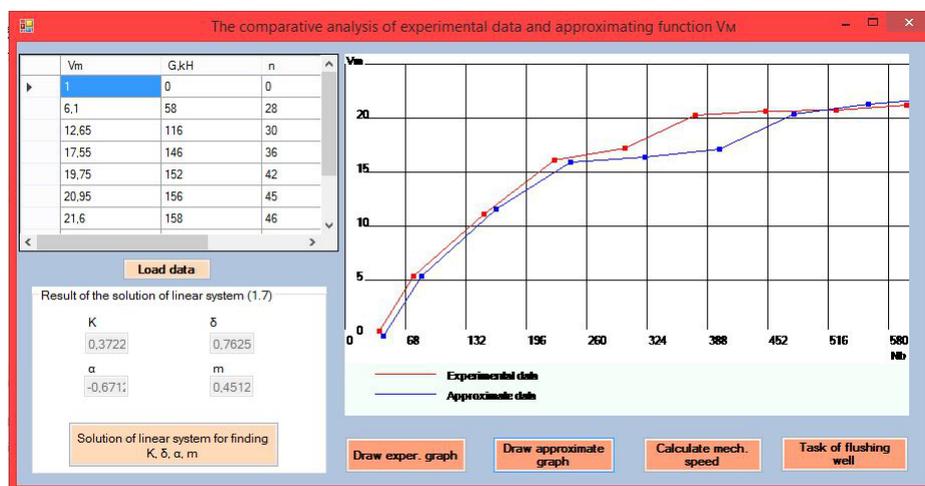


Figure 2 – The main window of software

The following buttons are indicated here:

- 1 – an experimental data loaded from file;
- 2 – the button for solving linear system in Eq. (9);
- 3 – the button to draw the graph of the experimental data;
- 4 – the button to draw the graph of the approximate function V_m ;
- 5 – button, which opens an another window, which shown in Figure 3;
- 6 – the button opens a window for the flushing well task;
- 7 – a field for drawing graph.

In the program, after we have found the parameters k, δ, α and m there can be drawn graphs and compare the table and approximate data, as shown in Figure 2.

Note that the graphs of approximate and experimental data are close, so we can continue to use the founded parameters K, δ, α and m for other values of G, n and N_b .

Calculation of mechanical speed v_m for the new values of G, n and N_b is shown in Figure 3.

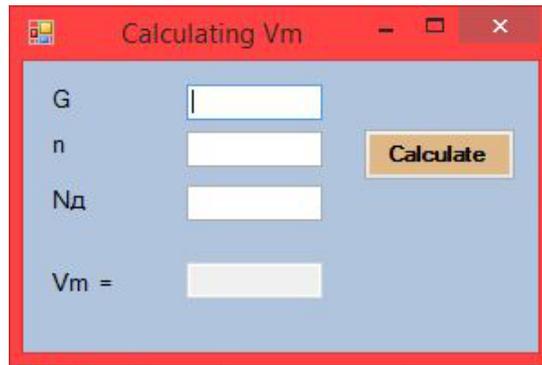


Figure 3 – Calculation of mechanical speed

3 Mathematical model of hydraulic flushing of well

In the process of drilling one of the main stages it is flushing the well using a drilling fluid. Flushing is used to remove drilling cuttings from bottomhole, for deepening, cooling and lubrication the drilling tool. The main components of the equation are well flushing pressure P and mud flow rate Q . Therefore, it is important to understand that the main task is to control the pressure at the inlet of the well. To control the pressure in the riser necessary to determine how much pressure has to be at each section of pipe.

To describe fluid flow, consider the law of conservation of energy for the flow of an ideal incompressible fluid Eq. (10) and the continuity equation Eq. (11) [9]:

$$\frac{\rho V^2}{2} + p + \rho gh = const \quad (10)$$

$$V_1 S_1 = V_2 S_2 \quad (11)$$

where in Eq. (10): V – flow speed, p – pressure, S – square section under consideration, h – height, g – acceleration of gravity, ρ – fluid density; in Eq. (10): V_1 and V_2 – speed in different sections 1 and 2. But the application of these equations is not correct because of the internal friction forces, and accordingly the pressure loss at various sections of the pipeline. To account for these losses need to calculate the resistance, with which it is concluded pressure at any point.

When we have the pressure loss along the pipeline, and at the same section, the flow velocity V is equal to the kinetic energy and is unchanged. In this case, the static pressure loss is calculated according to the formula [8]:

$$\Delta p = \lambda \frac{L}{d} V^2 \frac{\rho}{2} \quad \text{-- Darcy-Weisbach equation,} \quad (12)$$

where Δp – pressure loss, L – section length, d – diameter of pipe, V – flow velocity, λ – hydraulic friction coefficient, ρ – liquid density.

Flushing wells proceed as follows, washing fluid using pump is pumped under pressure into the tube side of the well, then comes out from holes of bit and passes cuttings through the annulus to the surface. This drilling fluid overcomes the hydraulic resistance over the path of their movement.

To flush uniform for each count the loss of drilling fluid pressure generated by the pump drill. Then, the total loss of pressure is defined as the sum of all pressure losses borehole sections. In rotary drilling the pressure in well inlet, i.e. the riser P_c calculated as the sum of the hydrostatic pressure of the liquid column P_{hs} and pressure losses on all elements of the $\sum \delta P_i$:

$$P_c = P_{hs} + \sum \delta P_i = P_{hs} + \delta P_{st} + \delta P_p + \delta P_t + \delta P_{wp} + \delta P_b + \delta P_{was} + \delta P_{as}. \quad (13)$$

Eq. (13) is the main equation of the well flushing.

In rotary drilling define the following components of the pressure loss [4][7]:

- $\delta P_{st} = (\alpha_c + \alpha_h + \alpha_s + \alpha_k)\rho Q^2$ – in the surface trim;
- $\delta P_p = \lambda_T \frac{8Q^2 \rho l}{\pi^2 d_T^5}$ or $\frac{4\tau_0 l}{\beta_T d_T}$, (turbulent or structural flow mode) – in the drill pipe;
- $\delta P_t = \frac{l}{l_T} \left(\frac{d_c^2 - d_H^2}{d_c^2 - d_M^2} - 1 \right)^2 \rho v_{K\Pi}^2$ – in couplings and tool joints;
- $\delta P_{wp} = \lambda_{wp} \frac{8Q^2 \rho l_w}{\pi^2 d_{wp}^5}$ or $\frac{4\tau_0 l_w}{\beta_{TY} d_{wp}}$, (turbulent or structural flow mode) – in the weighted drill pipe;
- $\delta P_b = \xi \frac{\rho v^2}{2} = \frac{1}{\mu^2} \rho \frac{Q^2}{2\Phi^2}$ – in the drilling bit;
- $\delta P_{was} = \lambda_{was} \frac{8Q^2 \rho}{\pi^2 (d_w - d_{ow})^3 (d_c - d_{ow})^2} l_w$ or $\frac{4\tau_0 l_w}{\beta_{was} (d_w - d_{ow})}$, (turbulent or structural flow mode) – in annular space between the weighted drill pipe and the borehole wall;
- $\delta P_{as} = \lambda_{as} \frac{8Q^2 \rho}{\pi^2 (d_w - d_o)^3 (d_c - d_o)^2} l_w$ or $\frac{4\tau_0 l}{\beta_{as} (d_w - d_o)}$, (turbulent or structural flow mode) – in annular space between the drill pipe and the borehole wall;
- $P_{hs} = \rho g L_c$ – the hydrostatic pressure of the liquid column.

Mud flow rate Q is determined by the speed V of flow motion. Based on the results of calculation of the drilling fluid flow and pressure loss in each section there is calculated minimum required hydraulic power of pump drilling:

$$N = P_c Q. \quad (14)$$

According to the total losses we can select the type of mud pump and according to filing – full capacity.

The complete mathematical model of the hydraulic flushing of wells will be as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\eta = 0, 33\rho g - 0, 22; \tau_0 = 85\rho g - 70; v_{cr} = 0, 25\sqrt{\frac{\tau_0}{y}}; Q = \frac{\pi}{4}(d_w^2 - d_0^2)v_\alpha \\
Q \geq (0, 35 - 0, 5)\frac{\pi}{4}d_c^2; v_{as} = \frac{4Q}{\pi(d_c^2 - d_w^2)}; \\
\rho = \min \left\{ k_r \frac{P_{pl}}{gL_k}; \frac{P_{pl} + \Delta p_p}{gL_k} \right\}; Re_{KP} = 2100 + 7, 3(He)^{0,58}, He = \frac{\rho d_r^2 \tau_0}{\eta^2} \\
Re_p = \frac{\rho v_p d_p}{\eta} = \frac{4Qp}{\pi d_p \eta}, v_p = \frac{4Q}{\pi d_p^2}; Re_{as} = \frac{\rho v_{as}(d_c - d_w)}{\eta} = \frac{4Qp}{\pi(d_c - d_w)\eta}, \\
P_c = (\alpha_c + \alpha_h + \alpha_s + \alpha_k)\rho Q_0^2 + \rho g L_c + \lambda_t \frac{8Q^2 \rho l}{\pi^2 d_T^5} \vee \frac{4\tau_0 l}{\beta_T d_T} + \lambda_{as} \frac{8Q^2 \rho}{\pi^2 (d_w - d_0)^2 (d_w - d_0)^2} l \\
\vee \frac{4\tau_0 l}{\beta_{as_c}(d_w - d_0)} + \lambda_{wp} \frac{8Q^2 \rho l_w}{\pi^2 d_{wp}^5} \vee \frac{4\tau_0 l_w}{\beta_{TY} d_{wp}} + \lambda_{was} \frac{8Q^2 \rho}{\pi^2 (d_w - d_{0w})^3 (d_c - d_{0w})^2} l_w \vee \frac{4\tau_0 l_w}{\beta_{was}(d_w - d_{0w})} + \\
+ \xi \frac{\rho v_\tau^2}{2} \frac{l}{l_\tau} + \frac{l}{l_\tau} \left(\frac{d_w^2 - d_0^2}{d_w^2 - d_M^2} - 1 \right)^2 \rho v_{as}^2 + \frac{1}{\mu^2} \rho \frac{Q^2}{2\Phi^2}.
\end{array} \right. \quad (15)$$

Restrictions:

$$\rho < \frac{P_{gr} - \sum(\Delta p_{as}) - (1 - \varphi)\rho_{as}gL_\Pi}{\varphi g L_p}, \quad \varphi = \frac{Q}{\frac{\pi}{4}v_M d_0^2 + Q};$$

$$k \frac{P_{re} + 1, 5}{L_c} \leq \rho \leq k \frac{P_{re} + 3, 5}{L_c}; \quad k \frac{Q}{(d_w^2 - d_0^2)} \leq 0, 4; \quad P_c \leq P_{nd}; \quad k \cdot \Delta P_b \cdot Q = const.$$

In the hydraulic model following symbols are used:

- η – plastic (dynamic) viscosity of the fluid [$Pa \cdot s$];
- ρ – flushing fluid density [kg/m^3];
- g – acceleration of gravity = 9, 8 [m/s^2];
- τ_0 – dynamic shear stress of the liquor [Pa];
- v_{cr} – critical speed of fluid flow [m/s];
- γ – specific gravity of liquor [kg/m^3];
- Q – drilling mud circulation rate [m^3/s];
- d_w – diameter of well (bit) [m];
- d_o – the outer diameter of the drill pipe [m];
- v_a, v_{as}, v_p – velocity of liquor movement in the annulus of the well and in the pipes [m];
- k_r – reserve ratio;
- P_{re} – reservoir pressure [Pa];
- L_r – the depth of the reservoir with a maximum gradient of the roof of reservoir pressure [m];
- L_c – occurrence reporting layer soles depth [m];
- $\alpha_c, \alpha_h, \alpha_s, \alpha_k$ – coefficients of hydraulic resistance in the riser, the drilling sleeve (hose), swivel, kelly;
- P_c – the pressure in the riser [Pa].

3.1 Software implementation of a mathematical model of the hydraulic flushing of well

The window, which is shown in Figure 4, will be opened after clicking the button 6. In this window, the user selects the type of flow: turbulent or structured, also makes the basic unchangeable parameters to calculate the total pressure loss.

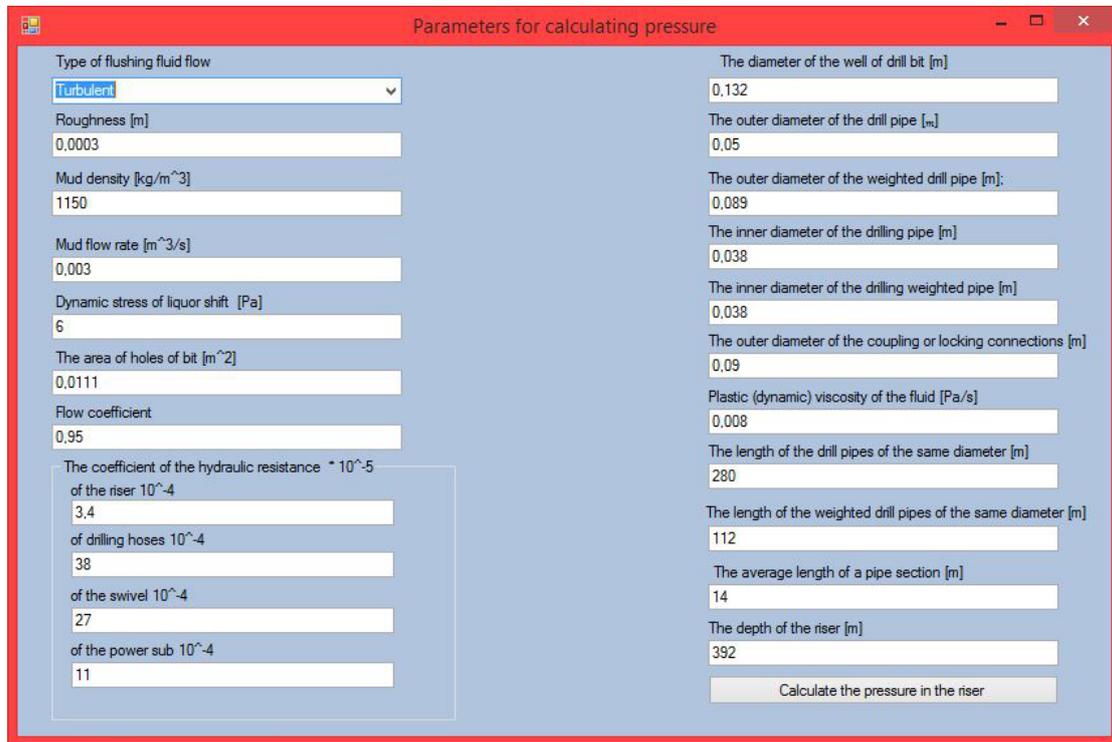


Figure 4 – Window to entering the parameters to calculate the pressure in the riser

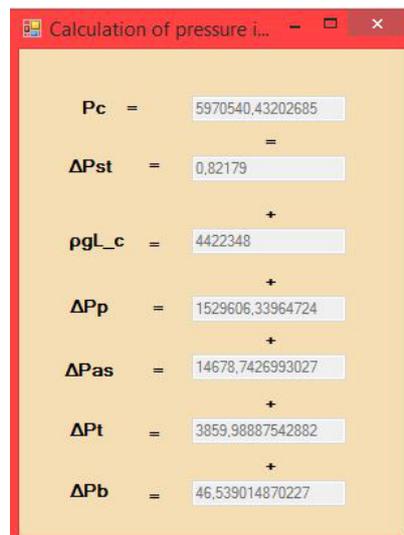


Figure 5 – Window to display the results of calculation of the total pressure loss P_c

After the user enters data and clicks the "Calculate pressure in the riser" the window appears in Figure 5. In the new window will be the values of pressure loss, and total loss P_c that have been numerically calculated by a mathematical model of Eq. (13)

4 Summary

Based on the a complete mathematical model of mechanical speed of drilling there was developed computational algorithm for finding the parametric coefficients, which allows to calculate the mechanical speed of drilling for arbitrary data A comparative analysis between the experimental and computational data is done. Applying a mathematical model of the borehole flushing, there have been shown finding a common mud pressure loss. According to the results of calculating the total pressure loss there can be determined the type and capacity of the mud pump. Using the above mathematical models can carry out the control of the process of drilling wells.

References

- [1] *Leonov E.G.* Novaya model optimizatsii rezhimov rotornogo bureniya. Vyibor luchshego tipa dolota // "Stroitelstvo neftyanyih i gazovyih skvazhin na sushe i na more" – M.: VNIIOENG. – 2005. – No 5. – S. 2-5.
- [2] *Bingham M.G.* Problemy burimosti gornyyh porod. OZL ser. "Burenie" , M: VNIIOENG, 1966.
- [3] *Bulatov A.I.* Spravochnik inzhenera po bureniyu. T. 1. – M: Nedra, 1995. – S. 30-35.
- [4] *Tsuprikov A., Cherednichenko V.* Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie protsessa bureniya skvazhin. – Saarbrücken, Germaniya: LAP, 2014. – S. 50-55.
- [5] *Linnik Yu.V.* Metod naimenshih kvadratov i osnovyi matematiko-statisticheskoy teorii obrabotki nablyudenyih. – M,: FIZMATLIT, 1958.
- [6] *Shashakov V.B.* Prikladnoy Regressionnyiy Analiz (Mnogofaktornaya Regressiya). – Orenburg: – 2003. – S. 5-15.
- [7] *Gimatudinov Sh.K.* Spravochnaya kniga po dobyiche nefi. – M: Nedra, 1983. – S. 319-325
- [8] *Sumbatova A.R.* Poteri napora po dline truboprovoda pri ravnomernom ustanovivshemsya dvizhenii [Elektron. resurs]. – 2014. – URL: <http://ars.gubkin.ru/lost.htm> (data obrascheniya: 10.03.2016)
- [9] *Bloomer J.J.* Practical fluid mechanics for engineering application // CRC Press, Sep 21, 1999. – P. 150-154.

УДК 519.63; 519.684

Исахов А.А.* , Байтуреева А.Р.**.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: *alibek.issakhov@gmail.com, **abaitur@yandex.kz

Математическое моделирование распространения пассивной скалярной примеси в поперечной струе

Активное развитие промышленности приводит к увеличению количества заводов, фабрик, ТЭС и АЭС, вследствие чего повышается объем выбросов примеси в атмосферу. Вредные химические соединения оседают и остаются в приземных слоях атмосферы, что влечет за собой различные экологические проблемы, наносящие вред здоровью населения и окружающей среде. Учитывая вышеуказанные проблемы, очень важно контролировать объем выбросов, чтобы поддерживать их на безопасном для окружающей среды уровне. Для этого необходимо исследовать распространение вредных выбросов. Наиболее оптимальным способом оценки является составление математической модели движения газообразных веществ. Подобная модель предусматривает различные физические, метеорологические и химические факторы. В представленной работе рассматривается модельная задача, позволяющая произвести валидацию корректности выбранной математической модели и алгоритма численного решения. Модель учитывает физические параметры веществ, позволяет рассчитать химическую реакцию реагентов и распространение массовых долей выбросов в зависимости от скорости ветра. Расчеты выполнялись с помощью программного комплекса ANSYS Fluent. В итоге приведены результаты численных решений и построены графики. Подобная задача позволяет протестировать имеющуюся математическую модель и в дальнейшем построить максимально корректную модель распространения выбросов в атмосфере.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, перенос веществ, численное моделирование, загрязнение воздуха, концентрация.

Issakhov A.A., Baitureyeva A.R.

Mathematical simulation of passive scalar impurity in the transverse jet

The active development of the industry leads to an increase in the number of factories, plants, thermal power plants and nuclear power plants, thereby there are increasing the amount of emissions into the atmosphere. Harmful chemicals are deposited and remain in the ground surface layers of the atmosphere, which leads to a variety of environmental problems which are harmful to human health and the environment. Considering the above problems, it is very important to control emissions, to keep them at a safe level for the environment. That is why it is necessary to investigate the spreading of harmful emissions. The best way to assess is the compilation of the mathematical model of the gaseous substances motion. Such model includes various physical, chemical and weather factors. In the present paper is considered a model problem, which allows to validate the correctness of the chosen mathematical models and numerical solution algorithm. The model takes into account the physical parameters of the materials, allows to calculate the chemical reaction between the reactants and the distribution of mass fractions of emission depending on the wind velocity. The calculations were performed using the ANSYS Fluent software package. In the end there are given results of numerical solutions and the graphs. This task allows to test the existing mathematical model in order to create in the further more accurate model of the emissions distribution in the atmosphere.

Key words: Navier-Stokes equations, mass transfer, numerical simulation, air pollution, concentration.

Исахов А.А., Байтуреева А.Р.

Көлденең ағысындағы пассивті скаляр қоспаның таралуының математикалық модельдеуі

Өнеркәсіптің белсенді дамуының арқасында зауыттар, фабрикалар, ЖЭС және АЭС сандары көбейеді, соның салдарынан атмосфераға шығарындыларының көлемі өсіп жатыр. Зиянды химиялық қосылыстар төмен түсіп, атмосфераның жер қабатында қалады, сондықтан халықтың денсаулығына және қоршаған ортаға зиян келтіретін әр түрлі экологиялық проблемалар басталады. Осыны ескере отырып, шығарындыларының көлемін қоршаған орта үшін қауіпсіз деңгейде бақылау өте маңызды. Бұл үшін зиянды шығарындылардың таратылуын зерттеу қажет. қозғалыс және газ тектес заттар қимылын математикалық моделін құрып бағалау неғұрлым оңтайлы тәсіл болып табылады. Мұндай модель әр түрлі физикалық, метеорологиялық және химиялық факторларды көздейді. Ұсынылған жұмыста таңдалған математикалық моделдің және шешу алгоритмінің дұрыстылығын тексеретін модельдік есеп қарастырылады. Модель заттардың физикалық параметрлерін ескертіп, жел жылдамдығына байланысты реагенттердің химиялық реакцияларын және шығарындылардың таратылуын есептейді. Есеп ANSYS Fluent бағдарламалық кешенінің көмегімен орындалған. Аяғында сандық шешімдердің нәтижелері келтірілген және графиктер салынған. Мұндай есеп бар математикалық моделді және оны шешетін сандық алгоритмын тексеруге мүмкіндік береді. **Түйін сөздер:** Навье-Стокс теңдеулері, зат тасымалы, сандық модельдеу, ауаның ластануы, концентрация.

1 Введение

Загрязнение воздуха из года в год становится все более глобальной и серьезной проблемой мирового значения. Непрерывное развитие и рост численности населения в городских районах, ряд проблем, связанных с окружающей средой, таких как вырубка лесов, выброс токсичных материалов, выбросов твердых отходов, загрязнение воздуха и многое другое, привлекают к себе гораздо больше внимания, чем когда-либо прежде. Повсеместно развивается промышленность, вследствие чего растет количество фабрик, заводов, ТЭС и АЭС, которые производят большое количество загрязняющих веществ. Выбросы приводят к различным экологическим проблемам, которые наносят вред здоровью человека и окружающей среде. Проблема загрязнения воздуха в городах стала настолько серьезной, что существует потребность в своевременной информации об изменениях в уровне загрязнения [1-3]. Помимо выбросов загрязняющих веществ из дымовых труб, в процессе работы ТЭС производятся золошлаковые отходы. Также оказывает вредное воздействие на охладительные водоемы. Повышающаяся температура воды влияет на изменение флоры и фауны.

Каждый год в окружающую среду выбрасываются десятки миллионов тонн газообразных оксидов серы, углерода и азота. Доля ТЭС в антропогенных выбросах этих оксидов составляет 45-65% и 15-45% соответственно [4]. Дальнейшее развитие теплоэнергетики сильно зависит от обеспечения допустимого уровня воздействия энергоустановок на окружающую среду и их безопасности для экологии [1]. Попадая в атмосферу, газообразные выбросы распределяются в воздухе, вступают в химические реакции, и опадают в виде сухих и жидких осадков на окружающую поверхность земли (растения, почву, воду, строения и т.д.). В зависимости от различных физических, химических и метеорологических факторов, загрязняющие вещества могут достигать поверхности земли на расстоянии 500-1000 км от источника. Данное расстояние растёт с увеличением мощности источника [4-6].

Исследование данного процесса в Казахстане является особенно актуальным. Казахстан обладает крупными запасами энергетических ресурсов (нефть, газ, уголь, уран) и является сырьевой страной, живущей за счет продажи природных запасов энергоносителей (80% экспорта - сырье, а доля промышленного экспорта сокращается ежегодно). Согласно статистике, энергетика Казахстана почти на 87% работает на угле, а к 2020 году доля каменного топлива в генерации выбросов в атмосферу составит 66% от общего объема. Таким образом, энергетический сектор страны является основным загрязнителем воздушного бассейна Казахстана.

Для моделирования подобных масштабных задач, необходимо решить модельную задачу для проверки корректности выбранной математической модели и численного алгоритма. В этих целях в данной работе исследуется движение вещества, выходящего из трубы перпендикулярно основному течению в канале. Входные условия для выхода из трубы и поперечного течения описаны различными профилями скоростей. Отношение скоростей выражается через $R = \frac{U_{jet}}{U_{crossflow}} = 1,5$. В работе сравниваются результаты для различных профилей скорости и их влияние на дальнейшее движение вещества. Вещество В, выходящее из трубы вступает в реакцию с веществом А основного течения, в результате образуется вещество С. Исследована концентрация каждого из них. Вещества подобраны таким образом, что число Дамкелера равно 1. Само течение несжимаемое. Расчеты проводились с помощью программного комплекса ANSYS Fluent. Аналогичное исследование проводили зарубежные исследователи [8, 9], и целью данной работы было сравнение полученных данных с их результатами.

2 Схема и размеры расчетной области

На рисунке 1 приведена схема и размеры расчетной области. Вещество А входит через левую границу inlet 1, вещество В через вход трубы inlet 2, выход находится в правой границе - outlet. Размеры расчетной области указаны на рисунке 1.

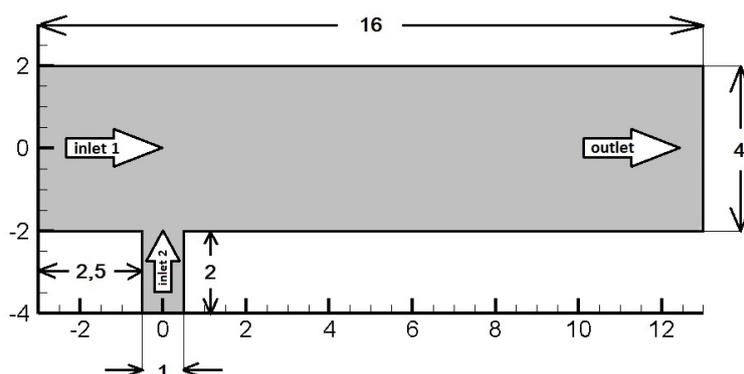


Рисунок 1 – Схема расчетной области

3 Математическая модель

Подробный обзор последних работ по течению струи в поперечном потоке можно найти в работе [10]. Предыдущие авторы численно исследовали поле скорости [11-16],

а пассивное скалярное поле концентрации рассматривалось в работах [17-19]. А также численное моделирование поля скорости было рассмотрено в работах [20-24]. На сегодняшний день для исследования течения струи в поперечном потоке все чаще применяют численное моделирование. В работах [25-26] моделируется течение струи в поперечном потоке с помощью осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) и полученные численные результаты для поля скоростей сравниваются с экспериментальными данными. В работах [27-29] численное моделирование осуществляется с помощью метода крупных вихрей (LES), который дает гораздо лучшие результаты, чем RANS подход. В работе [30, 31] была получена хорошая согласованность средних скоростей и турбулентной интенсивности экспериментальных результатов с решениями, полученными с помощью прямого численного моделирования (DNS) [18, 32]. Для численного моделирования данного процесса в основу математической модели легли уравнения Навье-Стокса, состоящие из уравнения неразрывности и уравнений движения.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

Для расчета переноса концентрации были использованы уравнения для компонентов Y_A и Y_B .

$$\rho \left(u \frac{\partial Y_A}{\partial x} + w \frac{\partial Y_A}{\partial z} \right) = \rho \Gamma_A \left(\frac{\partial^2 Y_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_A}{\partial z^2} \right) - k_1 Y_A Y_B \quad (4)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial Y_B}{\partial x} + w \frac{\partial Y_B}{\partial z} \right) = \rho \Gamma_B \left(\frac{\partial^2 Y_B}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_B}{\partial z^2} \right) - k_2 Y_A Y_B \quad (5)$$

Согласно закону Дальтона Y_C вычисляется таким образом:

$$Y_C = 1 - Y_A - Y_B \quad (6)$$

Здесь u , w – компоненты скорости, ρ – плотность, μ – динамическая вязкость, Γ_A , Γ_B – коэффициенты диффузии, k_1 , k_2 – константы скорости реакции.

4 Граничные и начальные условия

Граничные условия задавались следующим образом: для inlet 1 и inlet 2 – ‘Velocity-inlet’, для outlet – ‘Pressure-outlet’, для стен – ‘Wall’.

Начальные условия:

Для входа основного канала inlet 1 были рассмотрены различные варианты профиля скорости u :

$$u1 : \quad u = u^* \tag{7}$$

$$u2 : \quad u = u^* \left(1 - e^{-4.5 \left(1 - \frac{r^2}{4} \right)} \right), \quad r = y \tag{8}$$

$$u3 : \quad u = u^* \left(1 - e^{-5 \left(1 - \frac{r^2}{4} \right)} \right), \quad r = y \tag{9}$$

$$u4 : \quad u = u^* \left(1 - e^{-5.5 \left(1 - \frac{r^2}{4} \right)} \right), \quad r = y \tag{10}$$

Остальные параметры задавались постоянными: $w = 0, Y_A = 1, Y_B = 0$

Для входа трубы inlet 2: $u = 0, w = 2 R u^* (1 - 4l^2)$, где $l = x, Y_A = 0, Y_B = 1$

Здесь u^* варьируется в зависимости от выбранного вещества. За вещество А и В был указан кислород O_2 . Для численного моделирования данной задачи берутся следующие параметры: динамическая вязкость кислорода равна $\mu = 1,919e - 05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$, плотность $\rho = 1,299874 \text{ кг} / \text{м}^3$, скорость $u^* = 0,000369074233 \text{ м} / \text{сек}$, гидравлический диаметр $D = 1$, коэффициент диффузии был задан, как $0,67737051 \text{ м}^2/\text{сек}$.

В ANSYS Fluent все расчеты производятся в действительных размерах, поэтому в данном случае были указаны реальные параметры.

Таблица 1 – Граничные условия

Параметры	inlet 1	inlet 2	wall	outlet
u	См. (7) – (10)	$u = 0$	$u = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
w	$w = 0$	См. (12)	$w = 0$	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$
p	Ур. (2)	$p = p$	Ур. (3)	Ур. (2)
Y_A	$Y_A = 1$	$Y_A = 0$	$\frac{\partial Y_A}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial Y_A}{\partial x} = 0$
Y_B	$Y_B = 0$	$Y_B = 1$	$\frac{\partial Y_B}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial Y_B}{\partial x} = 0$

Для дискретизации системы уравнений (1) – (6) используется метод контрольного объема. Для этого представим уравнения Навье - Стокса и уравнение для концентрации в виде интегральных законов сохранения для произвольного фиксированного объема Ω с границей $d\Omega$ [33, 34]:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} - B_i \right) d\Omega = 0, \tag{11}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ u_j \\ C \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} u_i \\ u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij} \\ u_j C \end{pmatrix}, \quad G_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ \chi \frac{\partial C}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (11) можно записать в следующем виде

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t} - B \right) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (F_i + G_i) n_i d\Gamma = 0. \quad (12)$$

Приведем уравнения (12) к такому виду

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (F_i + G_i) n_i d\Gamma = \int_{\Omega} B_i d\Omega. \quad (13)$$

Сеточные функции будут определяться в центре ячейки, а значения потоков через границу в дробных ячейках. Объем ячейки обозначим через сеточные функции.

Теперь произведем дискретизацию уравнения (13) по контрольному объему (CV) и контрольной поверхности (CS)

$$\sum_{CV} \left(\frac{\Delta U}{\Delta t} \right) \Delta\Omega + \sum_{CS} (F_i + G_i) n_i \Delta\Gamma = \bar{B}_i \Delta\Omega \quad (14)$$

или можно будет написать уравнение (14) в таком виде:

$$\sum_{CV} \Delta U \Delta\Omega + \sum_{CS} \Delta t (F_i + G_i) n_i \Delta\Gamma = \Delta t \bar{B}_i \Delta\Omega. \quad (15)$$

5 Численный алгоритм

Для численного решения уравнения (1) – (6) используется схема расщепления по физическим параметрам [33-35]. Для численной реализации системы (1) – (6) используется дискретизация вида (15). На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится 5-шаговым методом Рунге – Кутта [36, 37]. На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Якоби. На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления. На четвертом шаге численно решаются уравнения для пассивной примеси также как уравнения движения 5-шаговым методом Рунге – Кутта. При решении уравнения для концентрации также применяется метод конечных объемов и аналогичные вычисления как для уравнения

движения [36, 37]. Алгоритм задачи распараллелен на высокопроизводительной системе. Расчеты проводились на кластерных системах URSA и T-Cluster ДГП НИИ Математики и Механики при КазНУ им. аль-Фараби. Математический численный алгоритм выглядит в таком виде:

$$I) \int_{\Omega} \frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\tau} d\Omega = -\oint_{\partial\Omega} (\nabla(\vec{u}^n \vec{u}^* - \tau_{ij}) - \nu \Delta \vec{u}^*) n_i d\Gamma,$$

$$II) \oint_{\partial\Omega} (\Delta p) d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\nabla \vec{u}^*}{\tau} d\Omega,$$

$$III) \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\tau} = -\nabla p,$$

$$IV) \int_{\Omega} \frac{C^* - C^n}{\tau} d\Omega = -\oint_{\partial\Omega} (\nabla \vec{u}^n C^* - \chi \Delta C^*) n_i d\Gamma.$$

6 Численные результаты

На рисунке 2 представлены графики профилей начальных скоростей на входе inlet 1. На рисунке 3 представлены результаты для профиля вертикальных и горизонтальных скоростей при профиле начальной скорости (9) для основного канала.

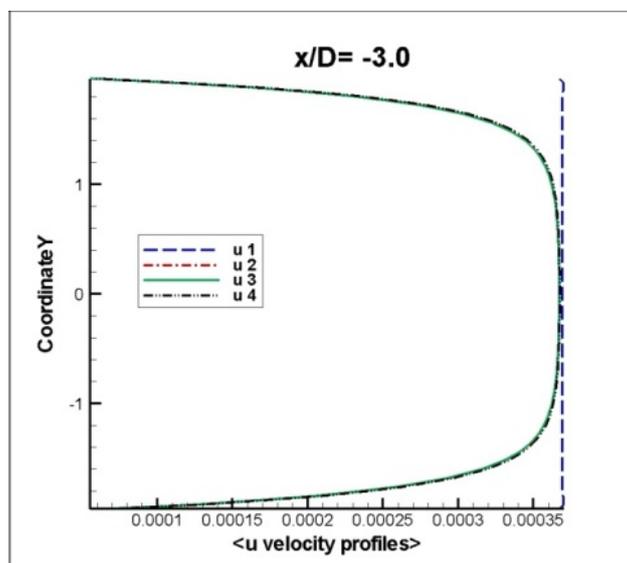


Рисунок 2 – Начальный профиль скоростей

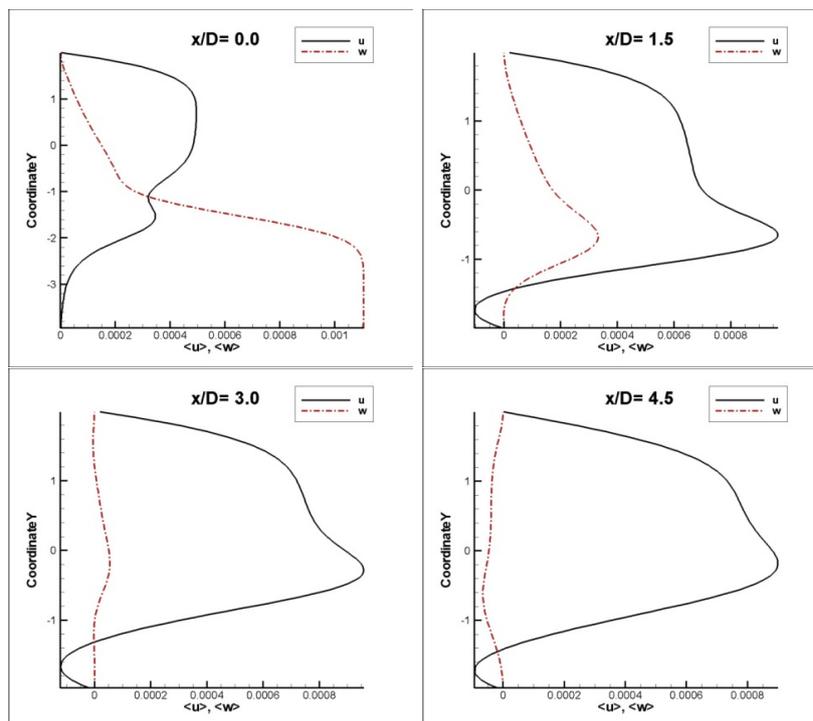


Рисунок 3 – Профили вертикальной и горизонтальной компоненты скорости: (а) $x/D=0.0$, (б) $x/D=1.5$, (в) $x/D=3.0$, (г) $x/D=4.5$ [м].

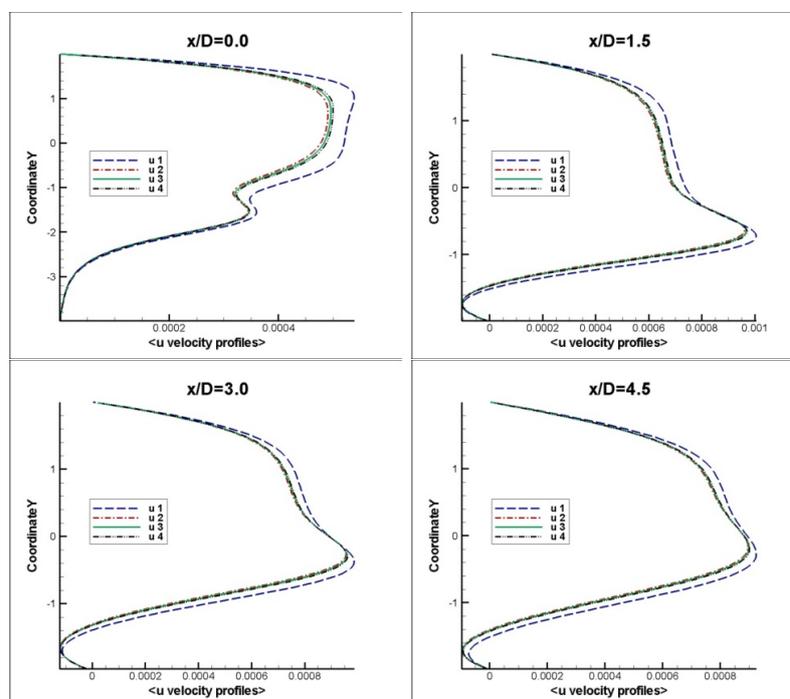


Рисунок 4 – Сравнение профилей скоростей на различных дистанциях: (а) $x/D=0.0$, (б) $x/D=1.5$, (в) $x/D=3.0$, (г) $x/D=4.5$

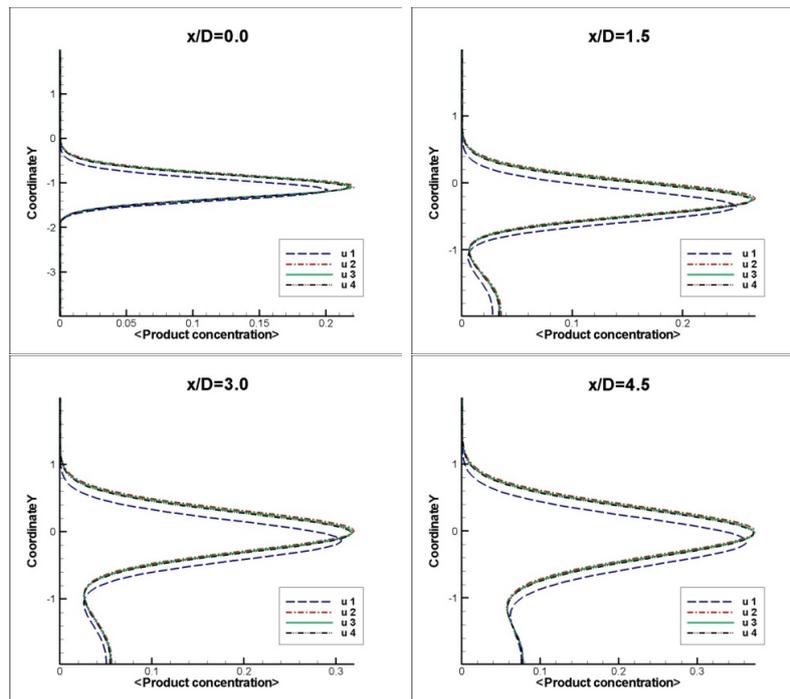


Рисунок 5 – Профили концентраций продукта реакции С на различных дистанциях для различных профилей начальной скорости: (а) $x/D=0.0$, (б) $x/D=1.5$, (в) $x/D=3.0$, (г) $x/D=4.5$

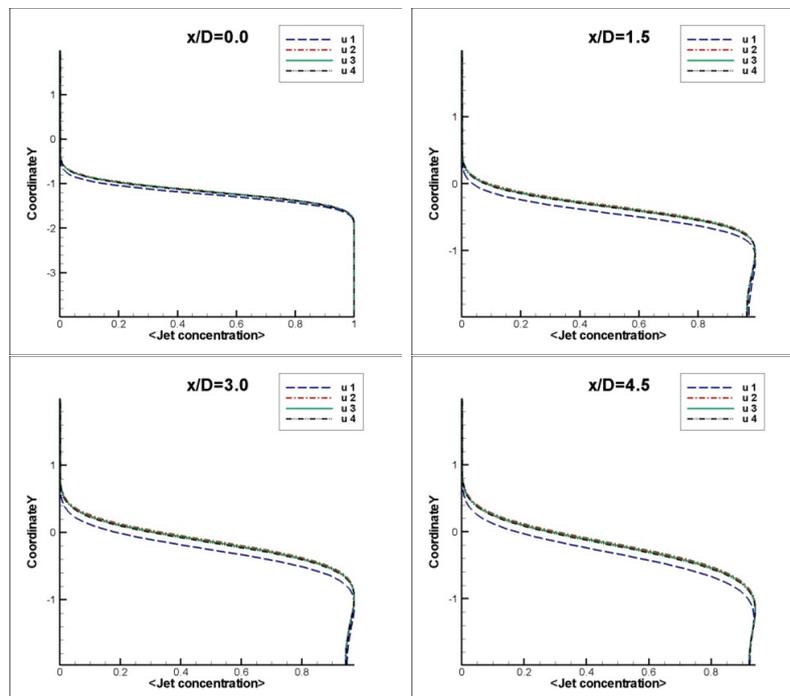


Рисунок 6 – Профили концентраций вещества В на различных дистанциях для различных профилей начальной скорости: (а) $x/D=0.0$, (б) $x/D=1.5$, (в) $x/D=3.0$, (г) $x/D=4.5$

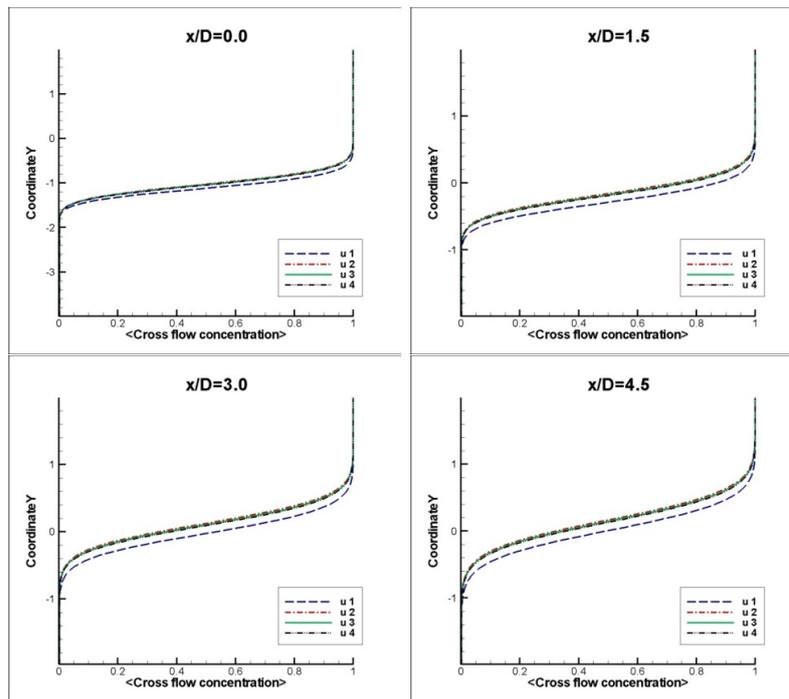


Рисунок 7 – Профили концентраций вещества А на различных дистанциях для различных профилей начальной скорости: (а) $x/D=0.0$, (б) $x/D=1.5$, (в) $x/D=3.0$, (г) $x/D=4.5$

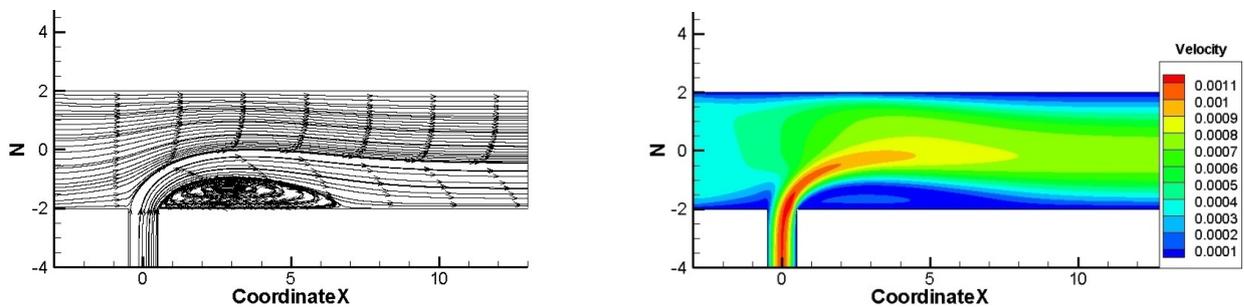


Рисунок 8 – Линии тока скоростей и контур скорости

На рисунке 4 наглядно видно, что различия между профилями u_2, u_3 и u_4 практически нет, но профиль u_1 разительно отличается от них. Отсюда следует вывод, что очень важно задавать скорости через профиль скорости, а не через постоянную величину, так как это значительно влияет на численный результат и более корректно описывает реальные физические процессы, что дает максимально приближенный к действительности результат. На рисунках 5, 6 и 7 проиллюстрированы результаты профиля концентрации веществ А, В и полученного в результате реакции вещества С на различных сечениях соответственно. На рисунке 8 показаны линии тока течения и значения скорости на всей расчетной области. На рисунках 9-11 представлен сравнительный анализ результатов распространения концентраций, полученных в ходе данной работы и результатов, полу-

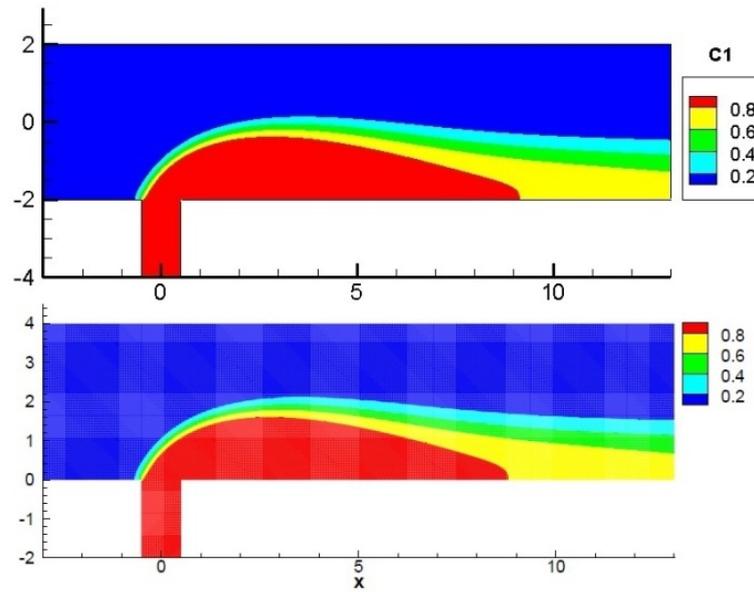


Рисунок 9 – Сравнительный анализ результатов распространения вещества А: верхний график - результаты, полученные в ходе выполнения данной работы, нижние графики - результаты [8]

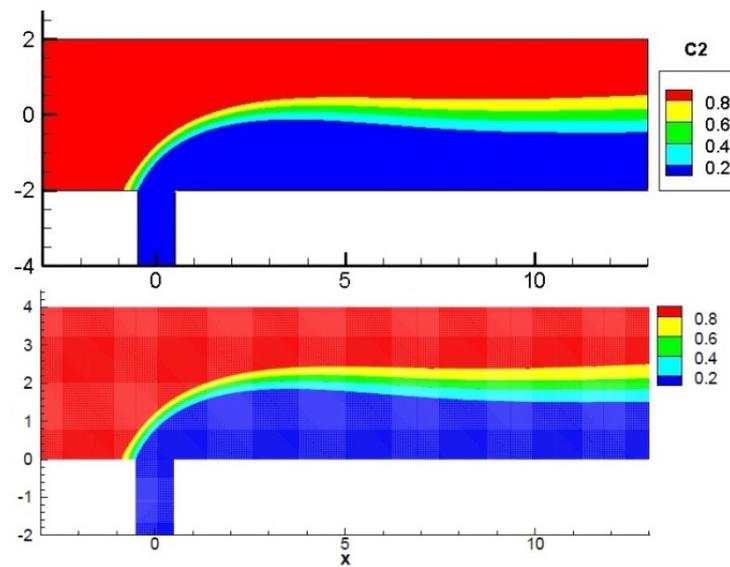


Рисунок 10 – Сравнительный анализ результатов распространения вещества В: верхний график - результаты, полученные в ходе выполнения данной работы, нижние графики - результаты [8]

ченных зарубежными исследователями [8, 9], где C_1 , C_2 , C_3 - концентрации веществ А, В и С соответственно.

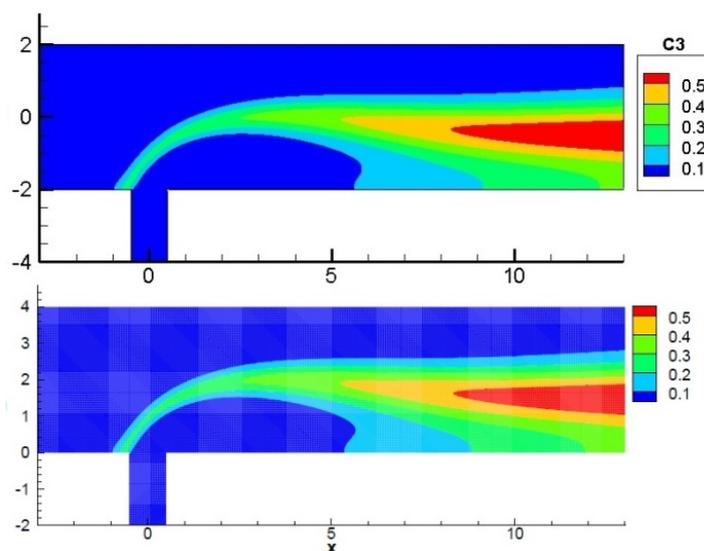


Рисунок 11 – Сравнительный анализ результатов распространения вещества С: верхний график - результаты, полученные в ходе выполнения данной работы, нижние графики - результаты [8]

7 Заключение

Решение упрощенной модельной задачи позволяет провести валидацию корректности выбранной математической модели и численного метода решения, которые в дальнейшем можно будет использовать в расчетах более сложных турбулентных моделей. Было рассмотрено движение вещества, вытекающего из трубы, в основном поперечном течении канала. Физические параметры, такие как плотность, динамическая вязкость, гидравлический диаметр и скорость, были подобраны таким образом, чтобы получить малое число Рейнольдса для ламинарного течения. Вследствие того, что в сложных турбулентных моделях расчета распространения выбросов ТЭС и АЭС рассматривается концентрация и массовое соотношение различных химических веществ, в математической модели необходимо было учесть возможность расчета концентрации. Так как элементы выбросов под воздействием химических и физических параметров смешиваются, образуя новые компоненты, в модель и численный алгоритм была включена возможность расчета химической реакции. Полученные численные результаты показали, что изменение степени экспоненты в профиле скорости не имеет значительного влияния на течение, однако задание скорости в виде константы дает значительную ошибку в расчетах.

8 Примечание

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант No 2017/ГФ4

Литература

- [1] Экологический кодекс Республики Казахстан (с изменениями и дополнениями по состоянию на 11.04.2014 г.).
- [2] Рыжский В. Я. Тепловые электрические станции, / ред. В.Я. Гиршфельда. - М.: Энергоатомиздат.- 1987. – 321 с.
- [3] Дукенбаев К. Энергетика Казахстана. Технический аспект. - Алматы, 2001 г. - 312 с.
- [4] U.S. Environmental Protection Agency, Clean Air Markets Division, available at: <https://ampd.epa.gov/ampd/>
- [5] Zavila O. Physical Modeling of Gas Pollutant Motion in the Atmosphere, Advances in Modeling of Fluid Dynamics, Dr. Chaoqun Liu (Ed.), InTech, 2012, DOI: 10.5772/48405.
- [6] Goyal P., Kumar A. Mathematical Modeling of Air Pollutants: An Application to Indian Urban City, Air Quality-Models and Applications, Prof. Dragana Popovic (Ed.), InTech, 2011, DOI: 10.5772/16840.
- [7] Kozic, M. S. A numerical study for the assessment of pollutant dispersion from kostolac b power plant to viminacium for different atmospheric conditions // THERMAL SCIENCE, Vol. 19, No. 2.-2015.- pp. 425-434.
- [8] Falconi C. J., Denev J. A., Frohlich J. and Bockhorn H. A test case for microreactor flows - a two-dimensional jet in crossflow with chemical reaction, Internal Report, available at: <http://www.ict.uni-karlsruhe.de/index.pl/themen/dns/index.html>: "2d test case for microreactor flows. Internal report. 2007 July 20, 2007.
- [9] Schonauer, W., Adolph, T. FDEM: The Evolution and Application of the Finite Difference Element Method (FDEM) Program Package for the Solution of Partial Differential Equations, Abschlussbericht des Verbundprojekts FDEM, Universität Karlsruhe.- 2005.- available at <http://www.rz.uni-karlsruhe.de/rz/docs/FDEM/Literatur/fdem.pdf>
- [10] Margason, R. J. Fifty years of jet in crossflow research. In AGARD Symp. on a Jet in Cross Flow, Winchester, UK.- AGARD CP . - 1993.- p. 534.
- [11] Kamotani, Y., Greber, I. Experiments on turbulent jet in a crossflow // AIAA J. 10.-1972. - 1425-1429 pp.
- [12] Fearn, R. L., Weston, R. P. Vorticity associated with a jet in crossflow // AIAA J. 12.-, 1974. - 1666-1671 pp.
- [13] Andreopoulos, J., Rodi, W. Experimental investigation of jets in a crossflow // J. Fluid Mech. 138.- 1984. - 93-127 pp.
- [14] Krothapalli, A., Lourenco, L., Buchlin, J. M. Separated flow upstream of a jet in a crossflow // AIAA J. 28.- 1990. - 414-420 pp.
- [15] Fric, T. F., Roshko, A. Vortical structure in the wake of a transverse jet // J. Fluid Mech. 279.- 1994. - 1-47 pp.
- [16] Kelso, R. M., Lim, T. T., Perry, A. E. An experimental study of round jets in cross-flow // J. Fluid Mech. 306.- 1996. - 111-144 pp.
- [17] Smith, S. H., Mungal, M. G. Mixing, structure and scaling of the jet in crossflow // J. Fluid Mech. 357.- 1998. - 83-122 pp.
- [18] Su, L. K., Mungal, M. G. Simultaneous measurement of scalar and velocity field evolution in turbulent crossflowing jets // J. Fluid Mech. 513.-2004. - 1-45 pp.
- [19] Shan, J. W., Dimotakis, P. E. Reynolds-number effects and anisotropy in transverse-jet mixing // J. Fluid. Mech. 566.- 2006. - 47-96 pp.
- [20] Broadwell, J. E., Breidenthal, R. E. Structure and mixing of a transverse jet in incompressible flow // J. Fluid Mech. 148.- 1984.- 405-412 pp.
- [21] Karagozian, A. R. An analytical model for the vorticity associated with a transverse jet // AIAA J. 24.- 1986.- 429-436 pp.
- [22] Hasselbrink, E. F., Mungal, M. G. Transverse jets and jet flames. Part 1. Scaling laws for strong transverse jets // J. Fluid Mech, 443.- 2001.- 1-25 pp.
- [23] Muppidi, S., Mahesh, K. Study of trajectories of jets in crossflow using direct numerical simulations. J. Fluid. Mech. 530.- 2005. - 81-100 pp.
- [24] Muppidi, S., Mahesh, K. Direct numerical simulation of passive scalar transport in transverse jets. J. Fluid Mech., 598.- 2008. - 335-360 pp.

- [25] *Chochua, G., Shyy, W., Thakur, S., Brankovic, A., Lienau, K., Porter, L., Lischinsky, D.* A computational and experimental investigation of turbulent jet and crossflow interaction. *Numer. Heat Transfer A* 38.- 2000. - 557-572 pp.
- [26] *Acharya, S., Tyagi, M., Hoda, A.* Flow and heat transfer predictions for film-cooling. *Ann. NY Acad. Sci.* 934.- 2001. - 110-125 pp.
- [27] *Yuan, L. L., Street, R. L., Ferziger, J. H.* Large-eddy simulations of a round jet in crossflow // *J. Fluid Mech.* 379.- 1999 . - 71-104 pp.
- [28] *Schluter, J. U., Schonfeld, T.* LES of jets in crossflow and its application to a gas turbine burner // *Flow Turbulence Combust.* 65.- 2000. - 177-203 pp.
- [29] *Chai, X., Iyer, P. S., Mahesh, K.* Numerical study of high speed jets in crossflow // *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 785.- 2015. - 152-188 pp.
- [30] *Muppidi, S., Mahesh, K.* Direct numerical simulation of round turbulent jets in crossflow // *J. Fluid. Mech.* 574, 2007,- 59-84 pp.
- [31] *Livescu, D., Jaber, F. A., Madnia C. K.* Passive-scalar wake behind a line source in grid turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. Volume 416.- 2000. - 117-149 pp.
- [32] *Camussi R., Guj G., Stella A.* Experimental study of a jet in a crossflow at very low Reynolds number // *Journal of Fluid Mechanics*. Volume 454. - 2002. - 113-144 pp.
- [33] *Chung T. J.* *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2002 - p. 1012.
- [34] *Ferziger J. H., Peric M.* *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer; 3rd edition, 2013, -p. 426
- [35] *Issakhov A.* Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method. Issue 4 // *J. Phys.: Conf. Ser.* 318. pp. 1282-1288. -2011. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [36] *Issakhov A.* Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(5). -2015, -229-238 pp., doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [37] *Issakhov A.* Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // *Applied Mathematical Modelling* (2015), Volume 40, Issue 2, -2016, - 1082-1096 pp. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.

References

- [1] *Ekologicheskiy kodeks Respubliki Kazahstan (s izmeneniyami i dopolneniyami po sostojaniyu na 11.04.2014 g.).*
- [2] *Ryzhkin V. Ya.* *Teplovye elektricheskie stancii*, / red V.Ya. Girshfelda .- M: Energoatomizdat.- 1987 g.- 321 s.
- [3] *Dukenbaev K.* *Energetika Kazahstana. Tehnicheskij aspekt*, - Almaty, 2001 g.-312 s.
- [4] U.S. Environmental Protection Agency, Clean Air Markets Division, available at: <https://ampd.epa.gov/ampd/>
- [5] *Zavila O.* Physical Modeling of Gas Pollutant Motion in the Atmosphere, *Advances in Modeling of Fluid Dynamics*, Dr. Chaoqun Liu (Ed.), InTech, 2012, DOI: 10.5772/48405.
- [6] *Goyal P., Kumar A.* Mathematical Modeling of Air Pollutants: An Application to Indian Urban City, *Air Quality-Models and Applications*, Prof. Dragana Popovic (Ed.), InTech, 2011, DOI: 10.5772/16840.
- [7] *Kozic, M. S.* A numerical study for the assessment of pollutant dispersion from kostolac b power plant to viminacium for different atmospheric conditions // *THERMAL SCIENCE*, Vol. 19, No. 2.-2015.- pp. 425-434.
- [8] *Falconi C. J., Denev J. A., Frohlich J. and Bockhorn H.* A test case for microreactor flows - a two-dimensional jet in crossflow with chemical reaction, Internal Report, available at: <http://www.ict.uni-karlsruhe.de/index.pl/themen/dns/index.html>: "2d test case for microreactor flows. Internal report. 2007 July 20, 2007.
- [9] *Schonauer, W., Adolph, T.* FDEM: The Evolution and Application of the Finite Difference Element Method (FDEM) Program Package for the Solution of Partial Differential Equations, Abschlussbericht des Verbundprojekts FDEM, Universität Karlsruhe.- 2005.- available at <http://www.rz.uni-karlsruhe.de/rz/docs/FDEM/Literatur/fdem.pdf>

- [10] *Margason, R. J.* Fifty years of jet in crossflow research. In AGARD Symp. on a Jet in Cross Flow, Winchester, UK.- AGARD CP . - 1993.- p. 534.
- [11] *Kamotani, Y., Greber, I.* Experiments on turbulent jet in a crossflow // AIAA J. 10.-1972. - 1425-1429 pp.
- [12] *Fearn, R. L., Weston, R. P.* Vorticity associated with a jet in crossflow // AIAA J. 12.-, 1974. - 1666-1671 pp.
- [13] *Andreopoulos, J., Rodi, W.* Experimental investigation of jets in a crossflow // J. Fluid Mech. 138.- 1984. - 93-127 pp.
- [14] *Krothapalli, A., Lourenco, L., Buchlin, J. M.* Separated flow upstream of a jet in a crossflow // AIAA J. 28.- 1990. - 414-420 pp.
- [15] *Fric, T. F., Roshko, A.* Vortical structure in the wake of a transverse jet // J. Fluid Mech. 279.- 1994. - 1-47 pp.
- [16] *Kelso, R. M., Lim, T. T., Perry, A. E.* An experimental study of round jets in cross-flow // J. Fluid Mech. 306.- 1996. - 111-144 pp.
- [17] *Smith, S. H., Mungal, M. G.* Mixing, structure and scaling of the jet in crossflow // J. Fluid Mech. 357.- 1998. - 83-122 pp.
- [18] *Su, L. K., Mungal, M. G.* Simultaneous measurement of scalar and velocity field evolution in turbulent crossflowing jets // J. Fluid Mech. 513.-2004. - 1-45 pp.
- [19] *Shan, J. W., Dimotakis, P. E.* Reynolds-number effects and anisotropy in transverse-jet mixing // J. Fluid. Mech. 566.- 2006. - 47-96 pp.
- [20] *Broadwell, J. E., Breidenthal, R. E.* Structure and mixing of a transverse jet in incompressible flow // J. Fluid Mech. 148.- 1984.- 405-412 pp.
- [21] *Karagozian, A. R.* An analytical model for the vorticity associated with a transverse jet // AIAA J. 24.- 1986.- 429-436 pp.
- [22] *Hasselbrink, E. F., Mungal, M. G.* Transverse jets and jet flames. Part 1. Scaling laws for strong transverse jets // J. Fluid Mech, 443.- 2001.- 1-25 pp.
- [23] *Muppidi, S., Mahesh, K.* Study of trajectories of jets in crossflow using direct numerical simulations. J. Fluid. Mech. 530.- 2005. - 81-100 pp.
- [24] *Muppidi, S., Mahesh, K.* Direct numerical simulation of passive scalar transport in transverse jets. J. Fluid Mech., 598.- 2008. - 335-360 pp.
- [25] *Chochua, G., Shyy, W., Thakur, S., Brankovic, A., Lienau, K., Porter, L., Lischinsky, D.* A computational and experimental investigation of turbulent jet and crossflow interaction. Numer. Heat Transfer A 38.- 2000. - 557-572 pp.
- [26] *Acharya, S., Tyagi, M., Hoda, A.* Flow and heat transfer predictions for film-cooling. Ann. NY Acad. Sci. 934.- 2001. - 110-125 pp.
- [27] *Yuan, L. L., Street, R. L., Ferziger, J. H.* Large-eddy simulations of a round jet in crossflow // J. Fluid Mech. 379.- 1999 . - 71-104 pp.
- [28] *Schluter, J. U., Schonfeld, T.* LES of jets in crossflow and its application to a gas turbine burner // Flow Turbulence Combust. 65.- 2000. - 177-203 pp.
- [29] *Chai, X., Iyer, P. S., Mahesh, K.* Numerical study of high speed jets in crossflow // Journal of Fluid Mechanics, Volume 785.- 2015. - 152-188 pp.
- [30] *Muppidi, S., Mahesh, K.* Direct numerical simulation of round turbulent jets in crossflow // J. Fluid. Mech. 574, 2007.- 59-84 pp.
- [31] *Livescu, D., Jaber, F. A., Madnia C. K.* Passive-scalar wake behind a line source in grid turbulence // Journal of Fluid Mechanics. Volume 416.- 2000. - 117-149 pp.
- [32] *Camussi R., Guj G., Stella A.* Experimental study of a jet in a crossflow at very low Reynolds number // Journal of Fluid Mechanics. Volume 454. - 2002. - 113-144 pp.
- [33] *Chung T. J.* Computational Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2002 - p. 1012.
- [34] *Ferziger J. H., Peric M.* Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer; 3rd edition, 2013, -p. 426

- [35] *Issakhov A.* Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method. Issue 4 // J. Phys.: Conf. Ser. 318. pp. 1282-1288. -2011. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051.
- [36] *Issakhov A.* Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation, 16(5). -2015, -229-238 pp., doi:10.1515/ijnsns-2015-0047.
- [37] *Issakhov A.* Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // Applied Mathematical Modelling (2015), Volume 40, Issue 2, -2016, - 1082-1096 pp. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.06.024>.

УДК 629.78

Молдабеков М.М.* , Елубаев С.А.** , Алипбаев К.А.*** , Сухенко А.С.****

ДТОО «Институт космической техники и технологий», Республика Казахстан, г. Алматы

E-mail: *m.moldabekov@mid.gov.kz, **elubaev.s@istt.kz, ***alipbayev.k@istt.kz,
****suhenko.a@istt.kz

Настройка параметров системы управления движением и навигации спутника методом размещения полюсов

Система управления движением и навигации является одной из основных служебных подсистем спутника, которая обеспечивает его ориентирование в заданном направлении в процессе полета. Одним из важных элементов системы управления движением и навигации являются положенные в основу ее работы математические модели и алгоритмы, обеспечивающие требуемое качество процессов управления вращательным движением спутника. В данной статье рассматривается задача обеспечения качества переходных процессов системы управления движением и навигации спутника. Качество переходного процесса характеризуют такие параметры, как время переходного процесса и его колебательность. Требуемое качество переходного процесса достигается путем настройки параметров закона управления, которая может быть произведена с помощью различных методик. Настройка параметров закона управления в данной статье осуществляется с помощью метода размещения полюсов. При этом для задания расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы управления в комплексной полуплоскости использованы распространенные на практике варианты распределения. По полученным результатам численного моделирования управляемого вращательного движения спутника с расчетными параметрами закона управления определено распределение корней характеристического уравнения, обеспечивающее требуемое качество переходных процессов.

Ключевые слова: спутник, качество переходных процессов, закон управления, метод размещения полюсов.

Moldabekov M., Yelubayev S., Alipbayev K., Sukhenko A.
**Defining the parameters of satellite attitude determination
and control system using pole placement method**

Attitude determination and control system is one of the main subsystems of the satellite which provides its orientation in a predetermined direction during the flight. Mathematical models and algorithms providing the required quality of control processes of satellite rotational motion that are used in attitude determination and control system are one of its important elements. This article discusses the problem of satellite attitude determination and control system transient processes quality providing. Quality of transient process is characterized by parameters such as transient process time and oscillation. The required quality of transitional process is reached by tuning of control laws parameters that can be performed with the help of different methods. In this article tuning of control law parameters is implemented with poles placement method. Wherein, to set the location of the roots of characteristic equation of closed-loop control system in the complex half-plane the common practice distributions were used. According to the results of numerical modeling of rotational motion of the satellite under control with calculated parameters of the law it was determined the distribution of roots of characteristic equation providing the required quality of transients processes.

Key words: satellite, quality of transient processes, control law, pole placement method.

Молдабеков М.М., Елубаев С.А., Алипбаев К.А., Сухенко А.С.
**Полюстерді орналастыру әдісі арқылы спутниктің навигациясы мен
 қозғалысын басқару жүйесі параметрлерін анықтау**

Навигация мен қозғалысты басқару жүйесі спутниктің ұшу процесі кезіндегі берілген бағыттағы бағдарлауын қамтамасыз ететін спутниктің негізгі қызметтік қосалқы жүйелерінің бірі болып табылады. Навигация мен қозғалысты басқару жүйесінің негізгі элементтерінің бірі спутниктің айналмалы қозғалысын басқару процестерінің қажетті сапасын қамтамасыз ететін, оның жұмысының негізі болып табылатын математикалық модельдер мен алгоритмдер болып табылады. Бұл мақалада спутниктің навигациясы мен қозғалысын басқару жүйесінің өтпелі процестер сапасын қамтамасыз ету мәселесі қарастырылады. өтпелі процесс сапасын сипаттайтын параметрлердің бірі өтпелі процесс уақыты мен оның тербелісі болып табылады. Әр түрлі әдістердің көмегімен жүргізілетін басқару заңдылығы параметрлерін баптау жолымен қажетті өтпелі процесс сапасын алуға болады. Осы мақалада басқару заңдылығы параметрлерін баптау полюстерді орналастыру әдісі арқылы жүзеге асырылады. Сонымен қатар, комплекстік жарты жазықтықта тұйық басқару жүйесінің сипаттаушы теңдеуінің түбірлерін орналастыруын беру үшін практикада кеңінен таралған үлестірім нұсқалары қолданылған. Басқару заңынан есептік параметрлері бар спутниктің басқарылатын айналмалы қозғалысының сандық модельдеуінен алынған нәтижелер бойынша өтпелі процестердің қажетті сапасын қамтамасыз ететін сипаттаушы теңдеу түбірлерінің үлестірілімі анықталды.

Түйін сөздер: спутник, өтпелі процестер сапасы, басқару заңдылығы, полюстерді орналастыру әдісі.

1 Введение

Система управления движением и навигации является одной из основных служебных подсистем спутника, которая обеспечивает его ориентирование в заданном направлении в процессе полета. Одним из важных элементов системы управления движением и навигации являются положенные в основу ее работы математические модели и алгоритмы, обеспечивающие требуемое качество процессов управления вращательным движением спутника. В данной статье рассматривается задача обеспечения качества переходных процессов системы управления движением и навигации спутника.

2 Математическая модель системы управления движением и навигации спутника

В рассматриваемой системе управления движением и навигации управление вращательным движением спутника производится с помощью трех маховиков, установленных вдоль главных осей инерции спутника. Динамику вращательного движения спутника опишем с помощью динамических уравнений Эйлера [1]:

$$J\ddot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (J\vec{\omega} + J_M\vec{\omega}_M) = \vec{M}, \quad (1)$$

где J - диагональная (3x3) матрица тензора инерции спутника; $\vec{\omega}$ - вектор абсолютной угловой скорости спутника в проекциях на оси связанной системы координат C_{xyz} ; J_M - диагональная (3x3) - матрица тензора инерции маховиков; $\vec{\omega}_M$ - вектор угловых скоростей маховиков, установленных вдоль осей x , y , z соответственно; \vec{M} - вектор управляющего момента маховиков в проекциях на оси связанной системы координат.

Управляющий момент маховиков в (1) выражается с помощью формулы [1]:

$$\vec{M} = -J_M \dot{\vec{\omega}}_M \quad (2)$$

Для описания кинематики вращательного движения спутника используем кинематические уравнения в кватернионах [1]:

$$\dot{\vec{Q}} = 2\vec{Q}^* \otimes \vec{Q}, \quad (3)$$

где \vec{Q} - кватернион, характеризующий текущее угловое положение спутника относительно инерциальной системы координат; \vec{Q}^* - кватернион, обратный к \vec{Q} .

Для описания динамики маховиков используем уравнение вида [1]:

$$\dot{\vec{\omega}}_M + \frac{1}{T} \vec{\omega}_M = k \vec{U}, \quad (4)$$

где $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)^T$ - вектор напряжения питания электродвигателей маховиков.

Таким образом, система управления движением и навигации спутника описывается системой 10 дифференциальных уравнений вращательного движения спутника (1), (3) и динамики маховиков (4).

3 Определение параметров системы управления движением и навигации спутника методом размещения полюсов

Закон управления вращательным движением спутника зададим в виде линейной функции [1]:

$$\vec{M} = \vec{M}(\vec{\omega}, \vec{Q}, h, \alpha), \quad (5)$$

где h, α - неизвестные параметры, подлежащие определению.

От значений параметров закона управления зависит качество переходных процессов системы управления. Рассмотрим проблему настройки параметров закона управления с помощью метода размещения полюсов.

Метод размещения полюсов используется для линейных систем, которые описываются уравнением вида [2]:

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x} + B \vec{u}, \quad (6)$$

где $x \in R^{n_x}$ - вектор состояния системы, $\vec{u} \in R^{n_u}$ - вектор управления.

Закон управления в данном случае ищется в виде:

$$\vec{u} = -K \vec{x}, \quad (7)$$

где $K = K(h, \alpha)$ - матрица параметров закона управления.

Задача синтеза управления с помощью метода размещения полюсов заключается в задании желаемого положения корней характеристического уравнения замкнутой системы управления, обеспечивающего требуемые значения динамических характеристик замкнутой системы (время и колебательность переходного процесса), и нахождения матрицы K , обеспечивающей заданное размещение корней. Учитывая (7), характеристическое уравнение замкнутой системы записывается в виде:

$$|sE - A + BK| = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0 = 0. \quad (8)$$

Желаемое расположение корней определяется решением полинома [2]:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0. \quad (9)$$

Приравнявая коэффициенты в уравнениях (8) и (9) при одинаковых степенях s и решая полученную систему линейных уравнений относительно неизвестных компонент матрицы K можно определить искомое управление [2].

Для применения рассмотренной выше теории проведем линеаризацию уравнений вращательного движения спутника (1), (3) в окрестности положения равновесия спутника, т.е. когда $\vec{Q} = [1, 0, 0, 0]$, $\vec{\omega} = [0, 0, 0]$. Для этого мы представим угловую скорость и угловое положение спутника как:

$$\vec{Q} = [\hat{q}_0 + \delta q_0, \hat{q}_1 + \delta q_1, \hat{q}_2 + \delta q_2, \hat{q}_3 + \delta q_3], \quad (10)$$

$$\vec{\omega} = [\hat{\omega}_1 + \delta\omega_1, \hat{\omega}_2 + \delta\omega_2, \hat{\omega}_3 + \delta\omega_3], \quad (11)$$

где $\delta q_0, \delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \delta\omega_1, \delta\omega_2, \delta\omega_3$ - переменные, характеризующие отклонения углового положения и угловой скорости спутника от положения равновесия.

Подставляя выражения (10), (11) в уравнения динамики спутника (1) и отбрасывая члены выше первого порядка, получим:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \frac{1}{J_1} [(J_2 - J_3)(\hat{\omega}_2\delta\omega_3 + \delta\omega_2\hat{\omega}_3) - J_{M3}\omega_{M3}\delta\omega_2 + J_{M2}\omega_{M2}\delta\omega_3 + \delta M_1], \\ \dot{w}_2 &= \frac{1}{J_2} [(J_3 - J_1)(\hat{\omega}_1\delta\omega_3 + \delta\omega_1\hat{\omega}_3) - J_{M1}\omega_{M1}\delta\omega_3 + J_{M3}\omega_{M3}\delta\omega_1 + \delta M_2], \\ \dot{w}_3 &= \frac{1}{J_3} [(J_1 - J_2)(\hat{\omega}_1\delta\omega_2 + \delta\omega_1\hat{\omega}_2) - J_{M2}\omega_{M2}\delta\omega_1 + J_{M1}\omega_{M1}\delta\omega_2 + \delta M_3]. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее, учитывая, что $\vec{Q} = [1, 0, 0, 0]$, $\vec{\omega} = [0, 0, 0]$, из (12) получим:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \frac{1}{J_1} [-J_{M3}\omega_{M3}\delta\omega_2 + J_{M2}\omega_{M2}\delta\omega_3 + \delta M_1], \\ \dot{w}_2 &= \frac{1}{J_2} [-J_{M1}\omega_{M1}\delta\omega_3 + J_{M3}\omega_{M3}\delta\omega_1 + \delta M_2], \\ \dot{w}_3 &= \frac{1}{J_3} [-J_{M2}\omega_{M2}\delta\omega_1 + J_{M1}\omega_{M1}\delta\omega_2 + \delta M_3]. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим (10), (11) в кинематические уравнения (3) и отбрасывая члены выше первого порядка, получим:

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_0 &= \frac{1}{2}(-\hat{\omega}_1 \delta q_1 - \delta \omega_1 \hat{q}_1 - \hat{\omega}_2 \delta q_2 - \delta \omega_2 \hat{q}_2 - \hat{\omega}_3 \delta q_3 - \delta \omega_3 \hat{q}_3), \\ \delta \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(\hat{\omega}_1 \delta q_0 + \delta \omega_1 \hat{q}_0 + \hat{\omega}_3 \delta q_2 + \delta \omega_3 \hat{q}_2 - \hat{\omega}_2 \delta q_3 - \delta \omega_2 \hat{q}_3), \\ \delta \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(\hat{\omega}_2 \delta q_0 + \delta \omega_2 \hat{q}_0 + \hat{\omega}_1 \delta q_3 + \delta \omega_1 \hat{q}_3 - \hat{\omega}_3 \delta q_1 - \delta \omega_3 \hat{q}_1), \\ \delta \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(\hat{\omega}_3 \delta q_0 + \delta \omega_3 \hat{q}_0 + \hat{\omega}_2 \delta q_1 + \delta \omega_2 \hat{q}_1 - \hat{\omega}_1 \delta q_2 - \delta \omega_1 \hat{q}_2). \end{aligned} \tag{14}$$

Далее, учитывая, что $\vec{Q} = [1, 0, 0, 0]$, $\vec{\omega} = [0, 0, 0]$ из (14) получим:

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_0 &= 0, \\ \delta \dot{q}_1 &= \frac{1}{2} \delta \omega_1, \\ \delta \dot{q}_2 &= \frac{1}{2} \delta \omega_2, \\ \delta \dot{q}_3 &= \frac{1}{2} \delta \omega_3. \end{aligned} \tag{15}$$

В результате, приводя систему уравнений (13), (15) к виду (6), получим:

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{q}_1 \\ \delta \dot{q}_2 \\ \delta \dot{q}_3 \\ \delta \dot{\omega}_1 \\ \delta \dot{\omega}_2 \\ \delta \dot{\omega}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J_{M3}\omega_{M3}}{J_1} & \frac{J_{M2}\omega_{M2}}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_{M3}\omega_{M3}}{J_2} & 0 & -\frac{J_{M1}\omega_{M1}}{J_2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J_{M2}\omega_{M2}}{J_3} & \frac{J_{M1}\omega_{M1}}{J_3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta \omega_1 \\ \delta \omega_2 \\ \delta \omega_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_1 \\ \delta M_2 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

где

$$\begin{bmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \\ \delta M_3 \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta \omega_1 \\ \delta \omega_2 \\ \delta \omega_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta \omega_1 \\ \delta \omega_2 \\ \delta \omega_1 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

Зададим желаемое расположение корней характеристического уравнения, используя некоторые распространенные на практике распределения: биномиальное распределение и распределение Баттерворта. Соответствующие данным распределениям полиномы приведены ниже [3]:

$$s^6 + 6ms^5 + 15m^2s^4 + 20m^3s^3 + 15m^4s^2 + 6m^5s + m^6 = 0, \quad (18)$$

$$s^6 + 3.86ms^5 + 7.46m^2s^4 + 9.13m^3s^3 + 7.46m^4s^2 + 3.86m^5s + m^6 = 0, \quad (19)$$

где $m = \frac{t_n}{t_r}$ - безразмерный масштаб перехода от нормированного времени переходного процесса t_n к реальному времени переходного процесса t_r .

Зададим моменты инерции спутника $J = [0.04088; 0.04088; 0.01116]kg/m^2$, моменты инерции маховиков $J_M = [0.00000011; 0.00000011; 0.00000011]kg/m^2$, сопротивление якорей электродвигателей маховиков $R = 38Ohms$, коэффициент ЭДС электродвигателей маховиков $k_e = 0.000708Vsec$, $m = 0.03$ (значение m выбрано на том основании, что при его значениях, не превышающих $m = 0.03$, напряжения питания электродвигателей маховиков не превышают своих максимально допустимых значений).

Далее находя характеристическое уравнение для системы (16) и приравнивая в полученном выражении и полиномах (18), (19) коэффициенты при одинаковых степенях s , определим для каждого из рассмотренных распределений искомые матрицы параметров управления. В частности, для биномиального распределения:

$$K = \begin{pmatrix} 0.0000735 & 0 & 0 & 0.002452 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0000735 & 0 & 0 & 0.002452 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00002008 & 0 & 0 & 0.0006659 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

для распределения Баттерворта:

$$K = \begin{pmatrix} 0.00005435 & 0 & 0 & 0.00174553 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00004386 & 0 & 0 & 0.0014111 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00001609 & 0 & 0 & 0.0004305 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

4 Результаты численного моделирования вращательного движения спутника

Для численного моделирования управляемого движения спутника с использованием матриц (20), (21) начальное угловое положение и угловая скорость спутника заданы как: $\varphi = 40^\circ, \theta = -50^\circ, \psi = 10^\circ, \omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0$, требуемое угловое положение и угловая скорость спутника как $\varphi = 0^\circ, \theta = 0^\circ, \psi = 0^\circ, \omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \omega_3 = 0$.

Результаты численного моделирования приведены на рисунках 1-2.

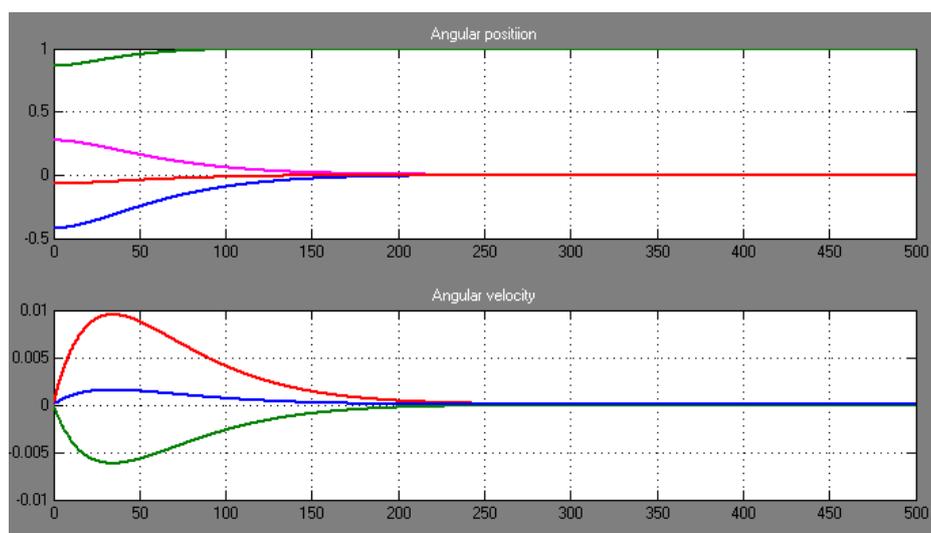


Рисунок 1 - Угловое положение и угловая скорость спутника, полученные в результате использования биномиального распределения

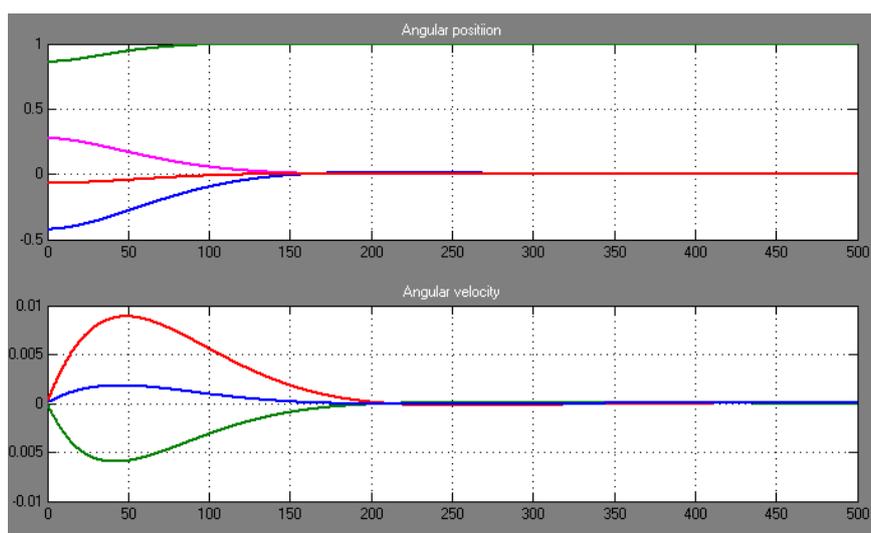


Рисунок 2 - Угловое положение и угловая скорость спутника, полученные в результате использования распределения Баттерворта

Как видно из рисунков, распределение Баттерворта является наиболее предпочтительным для определения неизвестных параметров закона управления, так как оно обеспечивает наименьшее время переходных процессов.

5 Заключение

В данной статье рассмотрена задача обеспечения качества переходных процессов системы управления движением и навигации спутника, которая решена путем применения метода размещения полюсов для определения неизвестных параметров закона управления вращательным движением спутника. При этом для задания расположения корней

характеристического уравнения замкнутой системы управления в комплексной плоскости использованы распространенные на практике распределения. По полученным результатам численного моделирования управляемого вращательного движения спутника с расчетными параметрами закона управления определено распределение корней характеристического уравнения, обеспечивающее требуемое качество переходных процессов.

Работа выполнена в рамках республиканской бюджетной программы 076 «Прикладные научные исследования в области космической деятельности».

Литература

- [1] *Moldabekov M., Yelubayev S., Alipbayev K., Sukhenko A., Bopayev T., Mikhailenko D.* Stability Analysis of the Microsatellite Attitude Control System // Applied Mechanics and Materials. -2015. -Vol. 798. -P. 297-302.
- [2] *Филлипс Ч., Харбор Р.* Системы управления с обратной связью. -М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001. -616 с.
- [3] Критерии качества систем управления [электрон.ресурс]. -2015. -URL: <http://drive.ispu.ru/elib/kolganov2/l6.html> (дата обращения 20.04.2016 г.)

References

- [1] *Moldabekov M., Yelubayev S., Alipbayev K., Sukhenko A., Bopayev T., Mikhailenko D.* Stability Analysis of the Microsatellite Attitude Control System // Applied Mechanics and Materials. -2015. -Vol. 798.-P. 297-302.
- [2] *Phillips C., Harbor P.* Sistemy upravleniya s obratnoi svyaziu. – M.: Laboratoria Bazovih Znaniy, 2001. -616 s.
- [3] Kriterii kachestva system upravleniya [electron.resurs]. -2015. -URL: <http://drive.ispu.ru/elib/kolganov2/l6.html> (data obrasheniya 20.04.2016.)

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Ахмед-Заки Дархан Жумаканович* - главный научный сотрудник НИИ математики и механики Казахского национального университета им. аль-Фараби, доктор технических наук
2. *Аубакиров Санжар Серикович* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
3. *Алипбаев Куаныш Арингожаевич* - заведующий лабораторией имитационного моделирования и разработки космических систем ДТОО «Институт космической техники и технологий», доктор PhD
4. *Айжулов Даниар Ерсенович* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
5. *Бекмагамбетов Куаныш Абдрахманович* - доцент Казахстанского филиала МГУ, доктор физико-математических наук
6. *Байтуреева Айымжан Руслановна* - магистрант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
7. *Даирбаева Гульлазат* - и.о. профессора Казахского национального университета им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук, доцент
8. *Елубаев Сулеймен Актлеуович* - заведующий лабораторией имитационного моделирования и разработки космических систем ДТОО «Институт космической техники и технологий»
9. *Койбагаров Кайрат Чанденович* - научный сотрудник Института информационных и вычислительных технологий МОН РК
10. *Қабылжан Айнұр Маратқызы* - магистрант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
11. *Коньрханова Асем Адилбекқызы* - научный сотрудник Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева.
12. *Құрмансейіт Мақсат Бақытжанұлы* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
13. *Кабидолданова Асем* - доцент Казахского национального университета им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
14. *Кудубаева Сауле Альжановна* - заведующая кафедрой информатики Костанайского государственного университета им. А.Байтурсынова, кандидат технических наук, доцент
15. *Калжанов Марат Умербекович* - доцент Костанайского государственного педагогического института, кандидат физико-математических наук
16. *Лебедев Данил Владимирович* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
17. *Молдабеков Мейрбек Молдабекович* - заместитель председателя Аэрокосмического комитета Министерства по инвестициям и развитию Республики Казахстан, академик НАН РК, доктор технических наук, профессор
18. *Мансурова Мадина Есимханова* - и.о. профессора Казахского национального университета им. аль-Фараби, кандидат физико-математических наук, доцент

19. *Нуризинов Марат Кабидолдинович* - научный сотрудник Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева.
20. *Перепелкин Владислав Александрович* - младший научный сотрудник Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук
21. *Триго Пауло Силва* - профессор Высшего инженерного института Лиссабона, Португалия
22. *Тюлюбергенов Рустем Кабдыкарымович* - PhD докторант Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева.
23. *Тунгатарова Мадина Советкалиевна* - старший преподаватель механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби, доктор PhD
24. *Төлеуказы Ержан* - PhD докторант Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева
25. *Рюмин Дмитрий Александрович* - научный сотрудник Костанайского государственного университета им. А.Байтурсынова
26. *Исахов Алибек Абдиашимович* - ассоциированный профессор кафедры математического и компьютерного моделирования Казахского национального университета им. аль-Фараби, доктор PhD
27. *Сухенко Анна Сергеева* - заведующая сектором лаборатории имитационного моделирования и разработки космических систем ДТОО «Институт космической техники и технологий», доктор PhD
28. *Хисамиев Назиф Гарифуллович* - профессор Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серикбаева, доктор физико-математических наук

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набранные только в текстовом формате $\text{\LaTeX}2\epsilon$ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat-dairbayeva@mail.ru (ответственному секретарю редколлегии, Дайрбаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX}2\epsilon$ или формат eps [см. п.7]. Указывается код по УДК. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.
5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 15 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 5 страниц. В начале работы после заголовка и фамилий авторов работы помещается её аннотация в объеме 200-250 слов на том же языке, на котором набран основной текст. Кроме сведений, которые можно почерпнуть из заголовка, аннотация должна отражать методы исследования, основные результаты статьи, их новизну и указывать на смежные работы.

После аннотации задаются ключевые слова. Для каждой работы задайте 5-6 ключевых слов в порядке их значимости, т.е. самое важное ключевое слово статьи должно быть первым в списке.

Название работы, ФИО авторов, аннотация и ключевые слова должны быть представлены в статье на трех языках: казахском, русском и английском.

Использованная литература должна быть оформлена в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления". Список литературы должен состоять не более чем из 20 наименований. Ссылки на источники в тексте статьи даются только в квадратных скобках (без цитирования [12], при цитировании или пересказе авторского текста [12, с. 29]). Нумерация ссылок в статье производится по порядковому номеру источника в пристатейном списке литературы. Архивные материалы в список не включаются, ссылки на них помещаются в тексте в круглых скобках. При использовании в статье источников из электронных ресурсов или удаленного доступа (Интернета) в списке литературы приводится библиографическая запись источника и ссылка на сетевой ресурс с полным сетевым адресом в Интернете. Желательно указывать дату обращения к ресурсу.

Список литературы на языке оригинала сопровождается списком литературы (references) в английской транслитерации.

6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов $\text{\LaTeX}2\epsilon$ и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps , либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета Latexcad. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера Conversion Artist. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ

1-бөлім**Математика**

Бекмаганбетов К.А., Төлеуғазы Е.

Интерполяционные свойства анизотропных пространств

Никольского-Бесова $B_{pr}^{\alpha,q}(\mathbb{T}^d)$ и теоремы вложения 3

Кабидолданова А.А.

К решению задачи выпуклого программирования 19

Коньрханова А.А., Нуризинов М.К., Тюлюбергенов Р.К., Хисамиев Н.Г.

Ректракты группы унитарных матриц над кольцом 32

2-бөлім**Механика**

Aizhulov D.Y., Kurmanseit M.B., Tungatarova M.S.

Application of geostatistical methods for reconstruction of lithological and mineralogical

structure of uranium deposit by interpolating well data 45

Kurmanseit M.B., Aizhulov D.Y., Tungatarova M.S.

The study of change in extraction degree under the influence of oxidizers 53

3-бөлім**Информатика**

Aubakirov S.S., Akhmed-Zaki D.Zh., Trigo P.S.

News Classification using Apache Lucene 59

Койбагаров К.Ч., Мансурова М.Үе.

Automatic classification of reviews based on machine learning 66

Ахмед-Заки Д.Ж., Лебедев Д.В., Перепёлкин В.А.

Сравнение эффективности параллельных реализаций метода прогонки:

параллельно-конвейерный метод, параллельная прогонка 75

Кудубаева С.А., Рюмин Д.А., Калжанов М.У.

Метод опорных векторов для распознавания жестовой

речи с использованием сенсора KINECT 86

4-бөлім**Қолданылмалы
математика**

Dairbayeva G., Kabylzhan A.

Mathematical modeling and control of the process of drilling wells 97

Раздел 1**Математика****Раздел 2****Механика****Раздел 3****Информатика****Раздел 4****Прикладная
математика**

Исахов А.А., Байтуреева А.Р.

Математическое моделирование распространения пассивной
скалярной примеси в поперечной струе 109

Молдабеков М.М., Елубаев С.А., Алимбаев К.А., Сухенко А.С.

Настройка параметров системы управления движением и навигации
спутника методом размещения полюсов 125

Сведения об авторах 133

К сведению авторов 135

CONTENTS

Section 1

Mathematics

Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Ye.

Interpolation properties of anisotropic $B_{pr}^{\alpha,q}(\mathbb{T}^d)$ Nikol'skii-Besov spaces
and embedding theorems 3

Kabidoldanova A.A.

On solving convex programming problem 19

Konyrkhanova A.A., Nurizinov M.K., Tyulyubergenov R.K., Khisamiev N.G.

Retracts of group of unitriangular matrices over the ring 32

Section 2

Mechanics

Aizhulov D.Y., Kurmanseiit M.B., Tungatarova M.S.

Application of geostatistical methods for reconstruction of lithological and mineralogical
structure of uranium deposit by interpolating well data 45

Kurmanseiit M.B., Aizhulov D.Y., Tungatarova M.S.

The study of change in extraction degree under the influence of oxidizers 53

Section 3

Computer science

<i>Aubakirov S.S., Akhmed-Zaki D.Zh., Trigo P.S.</i> News Classification using Apache Lucene	59
<i>Koybagarov K.Ch., Mansurova M.Ye.</i> Automatic classification of reviews based on machine learning	66
<i>Akhmed-Zaki D.Zh., Lebedev D.V., Perepelkin V.A.</i> Efficiency comparison of parallel implementations Thomas algorithm: pipelined Thomas algorithm, parallel Thomas algorithm	75
<i>Kudubayeva S.A., Ryumin D.A., Kalzhanov M.U.</i> The method of basis vectors for recognition sign language	86

Section 4

Applied Mathematics

<i>Dairbayeva G., Kabylzhan A.</i> Mathematical modeling and control of the process of drilling wells	97
<i>Issakhov A.A., Baitureyeva A.R.</i> Mathematical simulation of passive scalar impurity in the transverse jet	109
<i>Moldabekov M., Yelubayev S., Alipbayev K., Sukhenko A.</i> Defining the parameters of satellite attitude determination and control system using pole placement method	125
Сведения об авторах	133
К сведению авторов	135

УСПЕЙТЕ ПОДПИСАТЬСЯ НА СВОЙ ЖУРНАЛ

АКЦИЯ!!!

**Каждому подписчику
ПУБЛИКАЦИЯ СТАТЬИ
БЕСПЛАТНО!!!**

- Акция действительна при наличии квитанции об оплате годовой подписки.
- Статья должна соответствовать требованиям размещения публикации в журнале.
- Статья печатается в той серии журнала, на которую подписался автор.
- Все нюансы, связанные с публикацией статьи, обсуждаются с ответственным секретарем журнала.

Издательский дом
«Қазақ университеті»
г. Алматы,
пр. аль-Фараби, 71
8 (727) 377 34 11, 221 14 65

АО «КАЗПОЧТА»
г. Алматы,
ул. Богенбай батыра, 134
8 (727 2) 61 61 12

ТОО «Евразия пресс»
г. Алматы,
ул. Жибек Жолы, 6/2
8 (727) 382 25 11

ТОО «Эврика-пресс»
г. Алматы,
ул. Кожамкулова, 124, оф. 47
8 (727) 233 76 19, 233 78 50