

ISSN 1563 – 0285
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

ҚазҰУ ХАБАРШЫСЫ

Математика, механика, информатика сериясы

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ВЕСТНИК КазНУ

Серия математика, механика, информатика

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

KazNU BULLETIN

Mathematics, Mechanics, Computer Science Series

№ 2 (89)

Алматы
«Қазақ университеті»
2016

Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного
согласия Республики Казахстан, свидетельство № 956-Ж от 25.11.1999 г.
(Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.)
Выходит 4 раза в год

Редакционная коллегия:

научный редактор: М.А. Бектемесов - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби
заместитель научного редактора: А.Б. Кыдырбекулы - д. т. н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби
ответственный секретарь: Г.М. Даирбаева - к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби

Члены редколлегии:

Айсағалиев С.А. - д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Алиев Ф.А. - д.ф.-м.н., профессор, академик Национальной академии наук Азербайджана, Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан
Ахмед-Заки Д.Ж. - д.т.н., КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Бадаев С.А. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Жайнаков А.Ж. - д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Кыргызской Республики, Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Кыргызстан
Кабанихин С.И. - д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия
Калтаев А.Ж. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Кангужин Б.Е. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Майнке М. - профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института Аэродинамики, Германия
Мальшикин В.Э. - д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия
Мейрманов А.М. - д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, Россия
Мухамбетжанов С.Т. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Отелбаев М.О. - д.ф.-м.н., профессор, академик Национальной академии наук РК, Евразийский национальный университета им. Л.Н. Гумилева, Казахстан
Панфилов М. - д.ф.-м.н., профессор, Национальный политехнический институт Лотарингии, Франция
Ружанский М. - д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания
Тайманов И.А. - д.ф.-м.н., профессор, академик Российской академии наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия
Тукеев У.А. - д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан
Шокин Ю.И. - д.ф.-м.н., профессор, академик Российской академии наук, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия
Юлдашев З.Х. - д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан

Научное издание

Вестник КазНУ

Серия математика, механика, информатика

№ 2(89) 2016

Редактор: Г.М. Даирбаева

Компьютерная верстка: Б.А. Аетова

ИБ N 9910

Подписано в печать 27.06.2016 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Объем 9.9 п.л. Тираж 500 экз. Заказ N 3092.

Издательский дом "Қазақ университеті"

Казахского национального университета им. аль-Фараби.

050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома "Қазақ университеті".

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

UDC 517. 968. 2

Aisagaliev S.A.*, Aisagalieva S.S., Kabidoldanova A.A.

Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty

* E-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

Solvability and construction of solutions of integral equations

A class of integral equations with respect to one variable function as well as to multivariable function that are solvable for any right hand side of an equation has been singled out. A necessary and sufficient condition for existence of a solution has been obtained for the class of integral equations and the general form of their exact solutions has been found. Necessary and sufficient conditions for existence of solutions to the mentioned equations with a given right hand side are obtained by reducing them to solving an extremal problem. An algorithm for solving the extremal problem by constructing a minimizing sequence has been developed and a convergence rate estimation has been obtained. A solvability criterion as a requirement on infimum of functional has been formulated. A necessary and sufficient condition for solvability of an integral equation with parameter has been obtained and its general solution has been found.

Key words: integral equation, general solution, existence of a solution, necessary and sufficient condition, solvability criterion, extremal problem, minimizing sequence.

Айсағалиев С.А., Айсағалиева С.С., Кабидолданова А.А.

Разрешимость и построение решений интегральных уравнений

Определен класс интегральных уравнений от искомой функции одной переменной, а также от нескольких переменных, разрешимых для любой правой части уравнения. Для данного класса интегральных уравнений получены необходимые и достаточные условия существования решения, найдены их общие решения в виде суммы частного решения и решения однородного уравнения. Показаны ортогональность частного решения и решения однородного уравнения, а также что частное решение является решением рассматриваемого уравнения с минимальной нормой. Получены необходимые и достаточные условия существования решений указанных уравнений при заданной правой части, путем сведения их к решению экстремальной задачи специального вида. Разработан алгоритм построения решения экстремальной задачи путем построения минимизирующей последовательности, получена оценка скорости сходимости ее к решению интегрального уравнения. Сформулирован критерий разрешимости интегрального уравнения в виде требования на значение нижней грани целевого функционала. Исследовано интегральное уравнение с ограничением на искомую функцию, подробно описаны способ проверки его разрешимости и метод построения его решения, а также доказаны их корректность. Для интегрального уравнения с параметром получены необходимые и достаточные условия разрешимости и найдено общее его решение.

Ключевые слова: интегральное уравнение, общее решение, существование решения, необходимое и достаточное условие, критерий разрешимости, экстремальная задача, минимизирующая последовательность.

Айсағалиев С.А., Айсағалиева С.С., Кабидолданова А.А.

Интегралдық теңдеулердің шешімдерінің бар болуы және оларды құру

Оң жағында кез-келген функция жағдайы үшін шешілетін ізделінді бір айнымалының және көп айнымалының функцияларына қатысты интегралдық теңдеулер класы бөлініп алынды. Осы класс үшін шешімнің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары табылды, олардың жалпы шешімдері дербес шешімі мен біртекті бөлігінің жалпы шешімінің қосындысы ретінде құрылды. Дербес шешім мен біртекті бөлігінің жалпы шешімінің ортогональдігі және дербес шешім сол теңдеудің минималды нормалы шешімі екені көрсетілді. Аталған теңдеулердің оң жақтары берілген функция жағдайларында шешімдерінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары теңдеулерді экстремалды есепке келтіру арқылы алынды. Экстремалды есепті минимумдаушы тізбекті құру арқылы шешу алгоритмі құрастырылды және тізбектің интегралдық теңдеудің шешіміне жинақталу жылдамдығы бағаланды. Интегралдық теңдеудің шешілетіндігінің критерийі функционалдың төменгі қырына қойылатын талап түрінде алынды. Ізделінді функцияға шектеуі бар интегралдық теңдеу зерттелген, оның шешілетіндігін тексеру жолы және шешімін құру әдісі сипатталған, сол әдістердің дұрыстығы дәлелденген. Параметрлі интегралдық теңдеу үшін шешімнің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары анықталды және жалпы шешімі табылды.

Түйін сөздер: интегралдық теңдеу, жалпы шешім, шешімнің бар болуы, қажетті және жеткілікті шарт, шешілетіндігінің критерийі, экстремалды есеп, минимумдаушы тізбек.

1 Problem statement

Controllability problems solving for dynamical systems [1-3], solving problems of mathematical theory of optimal processes [4-6], boundary value problems for differential equations with phase and integral constraints [7-9] are reduced to solvability and construction of a general solution to the integral equation

$$K_1 w = \int_a^b K(t_*, \tau) w(\tau) d\tau = \beta, \quad t_* \in [t_0, t_1] \quad (1)$$

here $K(t_*, \tau) = K(\tau) = \|K_{ij}(\tau)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ is a given matrix with elements from the space L_2 , $t_* \in [t_0, t_1]$ is fixed, $K_{ij}(\tau) \in L_2(I_1, R^1)$, $w(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ is unknown function, $\beta \in R^n$, $I_1 = [a, b]$.

Note that (1) is a special case of the Fredholm integral equation of the first kind

$$Ku = \int_a^b K(t, \tau) u(\tau) d\tau = f(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

where $K(t, \tau) = \|K_{ij}(t, \tau)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ is a given $n \times m$ matrix, elements of the matrix $K(t, \tau)$ the functions $K_{ij}(t, \tau)$ are measurable and belong to the class L_2 on the set $S_1 = \{(t, \tau) \in R^2 / t_0 \leq t \leq t_1, a \leq \tau \leq b\}$,

$$\int_a^b \int_{t_0}^{t_1} |K_{ij}(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty,$$

the function $f(t) \in L_2(I, R^n)$ is given, $u(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ is an unknown function, $I_1 = [a, b]$, t_0, t_1, a, b are fixed, $t_1 > t_0, b > a$, $K : L_2(I_1, R^m) \rightarrow L_2(I, R^n)$.

Problem 1. Provide a necessary and sufficient condition for existence of a solution to integral equation (1) for any $\beta \in R^n$.

Problem 2. Find a general solution to integral equation (1) for any $\beta \in R^n$.

Problem 3. Provide a necessary and sufficient condition for existence of a solution to integral equation (1) with a given $\beta \in R^n$.

Problem 4. Find a solution to integral equation (1) with a given $\beta \in R^n$.

Problem 5. Provide a necessary and sufficient condition for existence of a solution to integral equation (1) with a given $\beta \in R^n$, and the unknown function $w(\tau) \in W(\tau) \subset L_2(I_1, R^m)$;

Problem 6. Find a solution to integral equation (1) with a given $\beta \in R^n$, and $w(\tau) \in W(\tau) \subset L_2(I_1, R^m)$, where $W(\tau)$ is a given set.

Consider an integral equation with parameter of the following form

$$K_2(v) = \int_a^b K(t, \tau)v(t, \tau)d\tau = \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (2)$$

where $K(t, \tau) = \|K_{ij}(t, \tau)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ is a given matrix with elements from L_2 , $w(t, \tau) \in L_2(S_1, R^m)$ is an unknown function, t is a parameter, $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$.

Problem 7. Provide a necessary and sufficient condition for existence of a solution to integral equation (2) for any $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$;

Problem 8. Find a general solution to integral equation (2) for any $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$;

Consider an integral equation with respect to multivariable function

$$K_3w = \int_a^b \int_c^d K(t, \tau)w(t, \tau)d\tau dt = \beta, \quad \beta \in R^n, \quad (3)$$

где $K(t, \tau) = \|K_{ij}(t, \tau)\|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ is a known $n \times m$ matrix, $K_{ij}(t, \tau) \in L_2(G, R^1)$, $w(t, \tau) \in L_2(G, R^m)$ is unknown function, $G = \{(t, \tau)/a \leq t \leq b, \quad c \leq \tau \leq d\}$, $\int_a^b \int_c^d |K_{ij}(t, \tau)|^2 d\tau dt < \infty$, $K_3 : L_2(G, R^m) \rightarrow R^n$.

Problem 9. Provide a necessary and sufficient condition for existence of a solution to integral equation (3) for any $\beta \in R^n$;

Problem 10. Find a general solution to integral equation (3) for any $\beta \in R^n$;

As it is obvious from the foregoing investigation of solvability and solving integral equations (1) – (3) are topical for solving boundary value problems for differential equations.

The aim of this paper is to provide new methods for investigation of solvability and construction general solutions to integral equations (1) – (3).

This paper is an extension of scientific research presented in [10-12].

2 Integral equation solvable for any right hand side

Consider problems 1, 2. The following theorem provides a necessary and sufficient condition for existence of a solution to integral equation (1).

Theorem 1. *A necessary and sufficient condition for existence a solution to integral equation (1) for any $\beta \in R^n$ is that the $n \times n$ matrix*

$$C = \int_a^b K(\tau)K^*(\tau)d\tau \quad (4)$$

be positive definite for all $a, b, b > a$, where the superscript $()$ means transposed.*

Proof. *Sufficiency.* Let the matrix C be positive definite. Show that integral equation (1) has a solution for any $\beta \in R^n$. Choose $w(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta$, $\tau \in I_1 = [a, b]$. Then

$$K_2 w = \int_a^b K(\tau)K^*(\tau)d\tau C^{-1}\beta = \beta.$$

Consequently in the case $C > 0$, integral equation (1) has at least one solution $w(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta$, $\tau \in I_1$, here $\beta \in R^n$ is an arbitrary vector. The sufficiency is proved.

Necessity. Let us assume that integral equation (1) has a solution for any fixed $\beta \in R^n$. Show that the matrix $C > 0$. Since $C \geq 0$, it is sufficient to show that the matrix C is nonsingular.

Assume the converse. Then the matrix C is singular. Therefore there exists a vector $c \in R^n$, $c \neq 0$ such that $c^* C c = 0$. Define the function $v(\tau) = K^*(\tau)c$, $\tau \in I_1$, $v(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)$. Note that

$$\int_a^b v^*(\tau)v(\tau)d\tau = c^* \int_a^b K(\tau)K^*(\tau)d\tau c = c^* C c = 0.$$

This means that the function $v(t) = 0$, $\forall \tau, \tau \in I_1$. Since integral equation (1) has a solution for any $\beta \in R^n$, in particular, there exists a function $\bar{w}(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)$ such that ($\beta = c$)

$$\int_a^b K(\tau)\bar{w}(\tau)d\tau = c.$$

Then we have

$$0 = \int_a^b v^*(\tau)\bar{w}(\tau)d\tau = c^* \int_a^b K(\tau)\bar{w}(\tau)d\tau = c^* c.$$

This contradicts the fact that $c \neq 0$. The necessity is proved. The theorem if proved.

The following theorem provides a general solution to the integral equation(3).

Theorem 2. *Let the matrix C defined by (4) be positive definite. Then for any $\beta \in R^n$*

$$w(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta + p(t) - K^*(\tau)C^{-1} \int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta, \quad \tau \in I_1 = [a, b], \quad (5)$$

is a general solution to integral equation (2), where $p(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)$ is an arbitrary function, $\beta \in R^n$ is an arbitrary vector.

Proof. Let us introduce the sets

$$W = \{w(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) / \int_a^b K(\tau)w(\tau)d\tau = \beta\}, \quad (6)$$

$$Q = \{w(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) / w(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta + p(\tau) - K^*(\tau)C^{-1} \int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta, \quad \forall p(\cdot), p(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)\}. \quad (7)$$

The set W contains all solutions of the integral equation (1) under the condition $C > 0$. The theorem states that the function $w(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)$ belongs to the set W if and only if it is contained in Q , i.e. $W = Q$. Show that $W = Q$. In order to prove this it is sufficient to show that $Q \subset W$ and $W \subset Q$.

Show that $Q \subset W$. Indeed, if $w(\tau) \in Q$, then as it follows from (7), the following equality holds

$$\begin{aligned} \int_a^b K(\tau)w(\tau)d\tau &= \int_a^b K(\tau)K^*(\tau)d\tau C^{-1}\beta + \int_a^b K(\tau)p(\tau)d\tau - \int_a^b K(\tau)K^*(\tau)d\tau C^{-1} \times \\ &\times \int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta = \beta + \int_a^b K(\tau)p(\tau)d\tau - \int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta = \beta. \end{aligned}$$

This implies that $w(\tau) \in W$.

Show that $W \subset Q$. Let $w_*(\tau) \in W$, i.e. the equality (6) holds for the function $w_*(t) \in W$:

$$\int_a^b K(\tau)w_*(\tau)d\tau = \beta.$$

Note that the function $p(t) \in L_2(I_1, R^m)$ is an arbitrary in the relation (5). In particular, we can choose $p(t) = w_*(\tau)$, $\tau \in I_1$. Now the function $w(\tau) \in Q$ can be rewritten in the form

$$\begin{aligned} w(\tau) &= K^*(\tau)C^{-1}\beta + w_*(\tau) - K^*(\tau)C^{-1} \int_a^b K(\tau)w_*(\tau)d\tau = K^*(\tau)C^{-1} \left[\int_a^b K(\tau)w_*(\tau)d\tau \right] + \\ &+ w_*(\tau) - K^*(\tau)C^{-1} \int_a^b K(\tau)w_*(\tau)d\tau = w_*(\tau), \quad \tau \in I_1. \end{aligned}$$

Consequently $w_*(t) = w(t) \in Q$. This yields that $W \subset Q$. It follows from the inclusions $Q \subset W$, $W \subset Q$ that $W = Q$. The theorem is proved.

The main properties of solutions of the integral equation (1):

1. The function $w(\tau)$, $\tau \in I_1$ can be represented in the form $w(\tau) = w_1(\tau) + w_2(\tau)$, where $w_1(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta$ is a particular solution of the integral equation (2), $w_2(\tau) =$

$= p(t) - K^*(\tau)C^{-1} \int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta$, $\tau \in I_1$, is a solution of the homogeneous integral equation

$\int_a^b K(\tau)w_2(\tau)d\tau = 0$, where $p(t) \in L_2(I_1, R^m)$ is an arbitrary function.

Indeed,

$$\int_a^b K(\tau)w_1(\tau)d\tau = \int_a^b K(\tau)K^*(\tau)C^{-1}\beta d\tau = \beta, \quad \forall \beta, \quad \beta \in R^n,$$

$$\int_a^b K(\tau)w_2(\tau)d\tau = \int_a^b K(\tau)p(\tau)d\tau - \int_a^b K(\tau)K^*(\tau)C^{-1}d\tau \int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta = 0.$$

2. The functions $w_1(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$, $w_2(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ are orthogonal in L_2 , i.e. $w_1 \perp w_2$. Indeed,

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_{L_2} &= \int_a^b w_1^*(\tau)w_2(\tau)d\tau = \int_a^b \beta^*C^{-1}K(\tau)p(\tau)d\tau - \int_a^b \beta^*C^{-1}K(\tau)K^*(\tau)d\tau \times \\ &\times C^{-1} \int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta = \beta^*C^{-1} \int_a^b K(\tau)p(\tau)d\tau - \beta^*C^{-1} \int_a^b K(\eta)p(\eta)d\eta = 0. \end{aligned}$$

3. The function $w_1(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta$, $\tau \in I_1$ is a solution of the integral equation (1) with minimal norm in $L_2(I_1, R^m)$. Indeed, $\|w(\tau)\|^2 = \|w_1(\tau)\|^2 + \|w_2(\tau)\|^2$. Hence $\|w(\tau)\|^2 \geq \|w_1(\tau)\|^2$. If the function $p(\tau) = 0$, $\tau \in I_1$, then the function $w_2(\tau) = 0$, $\tau \in I_1$. Hence $w(\tau) = w_1(\tau)$, $\|w\| = \|w_1\|$;

4. The solution set for the integral equation (1) is convex. As it follows from the proof of theorem 2 the set of all solutions to the equation (1) is Q . Show that Q is a convex set. Let

$$\bar{w}(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta + \bar{p}(\tau) - K^*(\tau)C^{-1} \int_a^b K(\eta)\bar{p}(\eta)d\eta,$$

$$\bar{\bar{w}}(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta + \bar{\bar{p}}(\tau) - K^*(\tau)C^{-1} \int_a^b K(\eta)\bar{\bar{p}}(\eta)d\eta$$

be arbitrary elements of the set Q . The function

$$\begin{aligned} w_\alpha(\tau) &= \alpha\bar{w}(\tau) + (1 - \alpha)\bar{\bar{w}}(\tau) = K^*(\tau)C^{-1}\beta + p_\alpha(\tau) - \\ &- K^*(\tau)C^{-1} \int_a^b K(\eta)p_\alpha(\eta)d\eta \in Q, \quad \forall \alpha, \quad \alpha \in [0, 1], \end{aligned}$$

where $p_\alpha(\tau) = \alpha\bar{p}(\tau) + (1 - \alpha)\bar{\bar{p}}(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$.

Example 1. Consider the integral equation $K_2 w = \int_0^1 w(\tau) d\tau = \beta$, where $K(\tau) = 1$, $w(\cdot) \in L_2(I_1, R^1)$, $I_1 = [0, 1]$. For this example $C = \int_0^1 d\tau = 1 > 0$. Consequently this integral equation has a solution for any $\beta \in R^1$. By formula (5), the general solution is $w(\tau) = \beta + p(\tau) - \int_0^1 p(\eta) d\eta$, $\tau \in I_1$, where $p(\tau) \in L_2(I_1, R^1)$ is an arbitrary function. The particular solution $w_1(\tau) = \beta$, the solution of the homogeneous integral equation $\int_0^1 w_2(\tau) d\tau = 0$ is $w_2(\tau) = p(\tau) - \int_0^1 p(\eta) d\eta$, $\tau \in I_1 = [0, 1]$, $\forall p(\cdot)$, $p(\cdot) \in L_2(I_1, R^1)$.

Consider problems 9, 10. The results described above hold true for integral equations with respect to multivariable unknown function. In particular, for the integral equation (3) we have the following theorems.

Theorem 3. *A necessary and sufficient condition for existence a solution of the integral equation (3) for any $\beta \in R^n$ is that the $n \times n$ matrix*

$$T(a, b, c, d) = \int_a^b \int_c^d K(t, \tau) K^*(t, \tau) d\tau dt \quad (8)$$

be positive definite.

Theorem 4. *Let the matrix $T(a, b, c, d)$ defined by (8) be positive definite. Then for any $\beta \in R^n$*

$$w(t, \tau) = v(t, \tau) + K^*(t, \tau) T^{-1}(a, b, c, d) \bar{a} - K^*(t, \tau) T^{-1}(a, b, c, d) \times \\ \times \int_a^b \int_c^d K(\eta, \xi) v(\eta, \xi) d\xi d\eta, \quad (9)$$

is a general solution of the integral equation (3), here $v(t, \tau) \in L_2(G, R^m)$ is an arbitrary function, $\beta \in R^n$ is an arbitrary vector.

The main properties of the solution. The general solution of the integral equation (3) defined by (9) has the following properties:

1. The function $w(t, \tau) = w_1(t, \tau) + w_2(t, \tau)$, $(t, \tau) \in G$ where $w_1(t, \tau) = K^*(t, \tau) T^{-1}(a, b, c, d) \beta \in L_2(G, R^m)$ is a particular solution to the integral equation (3), and the function $w_2(t, \tau)$ is a solution of the homogeneous integral equation

$$\int_a^b \int_c^d K(t, \tau) w_2(t, \tau) d\tau dt = 0.$$

2. The functions $w_1(t, \tau) \in L_2(G, R^m)$ and $w_2(t, \tau) \in L_2(G, R^m)$ are orthogonal $w_1 \perp w_2$.
3. The function $w_1(t, \tau) \in L_2(G, R^m)$ is a solution with minimal norm for the integral equation (3).

4. The solution set for the integral equation (3) is convex.

3 Solvability of an integral equation with fixed right hand side

The question naturally arises: if the matrix C is not positive definite, has the integral equation (1) a solution? The answer is unambiguous, in this case the integral equation (1) can have solution, but not for any vector $\beta \in R^n$. The condition $C > 0$ is a rigid for the kernel of the integral equation. The analogue of this condition is an existence of the inverse matrix A^{-1} for the linear algebraic equation $Ax = b$, which provides an existence of a solution for any $b \in R^n$. The algebraic equation $Ax = b$ can have solution in the case of non-existence of the inverse matrix too, but not for any vector $b \in R^n$ ($\text{rang}A = \text{rang}(A, b)$, by the Kronecker-Capelli theorem).

Solutions of problems 3,4. An investigation of the extremal problem is needed in order to solve problems 3, 4:

$$J(w) = \left| \beta - \int_a^b K(\tau)w(\tau)d\tau \right|^2 dt \rightarrow \inf \quad (10)$$

under the condition

$$w(\cdot) \in L_2(I_1, R^m), \quad (11)$$

where $\beta \in R^n$ is a given vector.

Theorem 5. *Let a kernel of the operator $K(\tau)$ be measurable and belong to the class L_2 . Then:*

1) *the functional (10) under the condition (11) is continuously Frechet differentiable, the gradient of the functional $J'(w) \in L_2(I_1, R^m)$ for any point $w(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)$ is defined by*

$$J'(w) = -2K^*(\tau)\beta + 2 \int_a^b K^*(\tau)K(\sigma)w(\sigma)d\sigma, \quad \tau \in I_1; \quad (12)$$

2) *the gradient of the functional $J'(w) \in L_2(I_1, R^m)$ satisfies the Lipchitz condition*

$$\|J'(w+h) - J'(w)\| \leq l\|h\|, \quad \forall w, w+h \in L_2(I_1, R^m); \quad (13)$$

3) *the functional (10) under the condition (11) is convex, i.e.*

$$J(\alpha w + (1-\alpha)u) \leq \alpha J(w) + (1-\alpha)J(u), \quad \forall w, u \in L_2(I_1, R^m), \quad \forall \alpha, \alpha \in [0, 1]; \quad (14)$$

4) *the second Frechet derivative is defined by*

$$J''(w) = 2K^*(\sigma)K(\tau), \quad \sigma, \tau \in I_1; \quad (15)$$

5) if the inequality

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \xi^*(\sigma) K^*(\sigma) K(\tau) \xi(\tau) d\tau d\sigma &= \left[\int_a^b K(\tau) \xi(\tau) d\tau \right]^2 \geq \\ &\geq \mu \int_a^b |\xi(\tau)|^2 d\tau, \quad \mu > 0, \quad \forall \xi, \quad \xi(\tau) \in L_2(I_1, R^m), \end{aligned} \quad (16)$$

holds, then the functional (10) under the condition (11) is strongly convex.

Proof. As it follows from (10), the functional

$$J(w) = \beta^* \beta - 2\beta^* \int_a^b K(\sigma) w(\sigma) d\sigma + \int_a^b \int_a^b w^*(\tau) K^*(\tau) K(\sigma) w(\sigma) d\sigma d\tau.$$

Then the increment of the functional ($w, w+h \in L_2(I_1, R^m)$)

$$\begin{aligned} \Delta J = J(w+h) - J(w) &= \int_a^b < -2K(\sigma)\beta + 2 \int_a^b K^*(\sigma) K(\tau) w(\tau) d\tau, h(\sigma) > d\sigma + \\ &+ \int_a^b \int_a^b h^*(\tau) K^*(\tau) K(\sigma) h(\sigma) d\sigma d\tau = < J'(w), h >_{L_2} + o(h), \end{aligned} \quad (17)$$

where

$$|o(h)| = \left| \int_a^b \int_a^b h^*(\tau) K^*(\tau) K(\sigma) h(\sigma) d\sigma d\tau \right| \leq c_1 \|h\|_{L_2}^2.$$

It follows from (17) that $J'(w)$ is defined by (12). As

$$J'(w+h) - J'(w) = 2K^*(\tau) \int_a^b K(\sigma) h(\sigma) d\sigma,$$

we have

$$\begin{aligned} |J'(w+h) - J'(w)| &\leq 2\|K^*(\tau)\| \int_a^b \|K(\sigma)\| |h(\sigma)| d\sigma \leq \\ &\leq c_2(\tau) \|h\|_{L_2}, \quad \tau \in I_1. \end{aligned}$$

Hence

$$\|J'(w+h) - J'(w)\|_{L_2} = \left(\int_a^b |J'(w+h) - J'(w)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq l \|h\|,$$

for any $w, w+h \in L_2(I_1, R^m)$. This implies the inequality (13).

Show that the functional (10) is convex. Since the functional $J(w) \in C^{1,1}(L_2(I_1, R^m))$, for the functional (10) to be convex it is necessary and sufficient to have

$$\langle J'(w_1) - J'(w_2), w_1 - w_2 \rangle_{L_2} = \langle 2 \int_a^b K^*(\tau)K(\sigma)[w_1(\sigma) - w_2(\sigma)]d\sigma,$$

$$w_1(\tau) - w_2(\tau) \rangle_{L_2} = 2 \int_a^b \int_a^b [w_1(\tau) - w_2(\tau)]^* K^*(\tau)K(\sigma)[w_1(\sigma) - w_2(\sigma)]d\sigma d\tau \geq 0.$$

This means that the functional (10) is convex, i.e. the inequality (14) holds. As it follows from (12), the increment

$$\begin{aligned} J'(w+h) - J'(w) &= \langle J''(w), h \rangle = \langle 2K^*(\sigma)K(\tau), h(\sigma) \rangle_{L_2} = \\ &= 2 \int_a^b K^*(\tau)K(\sigma)h(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Consequently $J''(w)$ is defined by (15). It follows from (15), (16) that

$$\langle J''(w)\xi, \xi \rangle_{L_2} \geq \mu \|\xi\|^2, \quad \forall w, w \in L_2(I_1, R^m), \quad \forall \xi, \xi \in L_2(I_1, R^m).$$

This means that the functional $J(w)$ is strongly convex in $L_2(I_1, R^m)$. The theorem is proved.

Theorem 6. Let the sequence $\{w_n(\tau)\} \in L_2(I_1, R^m)$ be constructed for extremal problem (10), (11) by the rule

$$\begin{aligned} w_{n+1}(\tau) &= w_n(\tau) - \alpha_n J'(w_n), \quad g_n(\alpha_n) = \min_{\alpha > 0} g_n(\alpha), \\ g_n(\alpha) &= J(w_n - \alpha J'(w_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Then the numerical sequence $\{J(w_n)\}$ decreases monotonically, the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} J'(w_n) = 0$.

If besides the set $M(w_0) = \{w(\tau) \in L_2(I_1, R^m) / J(w) \leq J(w_0)\}$ is bounded, then:

1) the sequence $\{w_n(\tau)\}$ is minimizing, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(w_n) = J_* = \inf J(w), \quad w(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad w_n \xrightarrow{\text{weakly}} w_* \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

where $w_* = w_*(\tau) \in W_*$,

$$W_* = \{w_*(\tau) \in L_2(I_1, R^m) / J(w_*) = \min_{w \in M(w_0)} J(w) = J_* = \inf_{w \in L_2(I_1, R^m)} J(w)\};$$

2) the following convergence rate estimation holds

$$0 \leq J(w_n) - J(w_*) \leq \frac{m_0}{n}, \quad m_0 = \text{const} > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

3) there exists a solution to the integral equation (1) iff $J(w_*) = 0$, $w_* \in W_*$. In this case $w_* \in W_*$ is a solution of the integral equation (1).

4) if $J(w_*) > 0$, then the integral equation (1) hasn't a solution.

5) if the inequality (16) holds, then $\|w_n - w_*\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

Proof. Minimization methods in Hilbert space [13] can be applied to a proof of the theorem. The conditions $g_n(\alpha_n) \leq g_n(\alpha)$, $J(w) \in C^{1,1}(L_2(I_1, R^m))$ imply that

$$J(w_n) - J(w_n - \alpha J'(w_n)) \geq \alpha(1 - \frac{\alpha l}{2}) \|J'(w_n)\|^2, \quad \alpha \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

where $l = \text{const} > 0$ is the Lipschitz constant from (13). Then

$$J(w_n) - J(w_{n+1}) \geq \frac{1}{2l} \|J'(w_n)\|^2 > 0.$$

This yields that $\lim_{n \rightarrow \infty} J'(w_n) = 0$ and the numerical sequence $\{J(w_n)\}$ decreases monotonically.

The first statement of the theorem is proved.

As the functional $J(w)$ is convex the set $M(w_0)$ is convex. Then

$$0 \leq J(w_n) - J(w_*) \leq \langle J'(w_n), w_n - w_* \rangle_{L_2} \leq \|J'(w_n)\| \|w_n - w_*\| \leq D \|J'(w_n)\|,$$

here D is a diameter of set $M(w_0)$. Since $M(w_0)$ is weakly bicomact, the functional $J(w)$ is weakly lower semicontinuous, it follows that the set $W_* \neq \emptyset$, $W_* \subset M(w_0)$ and $\{w_n\} \subset M(w_0)$, $w_* \in M(w_0)$. Note that

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(w_n) - J(w_*) \leq D \lim_{n \rightarrow \infty} \|J'(w_n)\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(w_n) = J(w_*) = J_*.$$

Consequently the sequence $\{w_n\} \subset M(w_0)$ is minimizing. Estimation (19), where $m_0 = 2D^2l$, follows from the inequalities

$$J(w_n) - J(w_{n+1}) \leq \frac{1}{2l} \|J'(w_n)\|^2, \quad 0 \leq J(w_n) - J(w_*) \leq D \|J'(w_n)\|,$$

$$w_n \xrightarrow{\text{weakly}} w_* \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

The second statement of the theorem is proved.

It follows from (10) that $J(w) \geq 0$, $\forall w, w \in L_2(I_1, R^m)$. The sequence $\{w_n\} \subset L_2(I_1, R^m)$ is minimizing for any initial guess $w_0 = w_0(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$, i.e. $J(w_*) = \min_{w \in L_2(I_1, R^m)} J(w) = J_* = \inf_{w \in L_2(I_1, R^m)} J(w)$. If $J(w_*) = 0$, then

$$\beta = \int_a^b K(\tau) w_*(\tau) d\tau.$$

Therefore the integral equation (1) has solution if and only if $J(w_*) = 0$, where $w_* = w_*(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ is a solution to the integral equation (1). If $J(w_*) > 0$, then $w_* = w_*(\tau)$, $\tau \in I_1$ is not a solution of the integral equation (1). In other words, whenever $J(w_*) > 0$, the integral equation (1) hasn't a solution for the given $\beta \in R^n$. Thus the statements 3, 4 are proved.

If the inequality (16) holds, then the functional (10) under the condition (11) is strongly convex. Whence

$$J(w_n) - J(w_*) \leq \langle J'(w_n), w_n - w_* \rangle - \frac{\mu}{2} \|w_n - w_*\|^2 \leq 2\mu \|J'(w_n)\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$J(w_n) - J(w_{n+1}) \geq \frac{1}{2l} \|J'(w_n)\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Hence $a_n - a_{n+1} \geq \frac{\mu}{l} a_n$, where $a_n = J(w_n) - J(w_*)$. Consequently $0 \leq a_{n+1} \leq a_n(1 - \frac{\mu}{l}) = qa_n$. Then $a_n \leq qa_{n-1} \leq q^2 a_{n-2} \leq \dots \leq q^n a_0$. This implies

$$0 \leq J(w_n) - J(w_*) \leq [J(w_0) - J(w_*)]q^n, \quad q = 1 - \frac{\mu}{l}, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad \mu > 0.$$

It can be shown that the estimation

$$\|w_n - w_*\| \leq \left(\frac{2}{\mu}\right) [J(w_0) - J(w_*)]q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

holds for any strongly convex functional. Then $\|w_n - w_*\| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Theorem is proved.

Consider problems 5, 6. In particular, the set $W(\tau)$ is defined by: either

$$W(\tau) = \{w(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) / \alpha_i(\tau) \leq w_i(\tau) \leq \beta_i(\tau), \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{a.e. } \tau \in I_1\},$$

or

$$W(\tau) = \{w(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) / \|w\|^2 \leq R^2\}.$$

where $\alpha(\tau) = (\alpha_1(\tau), \dots, \alpha_m(\tau))$, $\beta(\tau) = (\beta_1(\tau), \dots, \beta_m(\tau))$, $\tau \in I_1$, are given continuous functions, $R > 0$ is a given number.

Solving problems 5, 6 is reduced to investigation the extremal problem:

$$J_1(w, u) = |\beta - \int_a^b K(\tau)w(\tau)d\tau| + \|w - u\|_{L_2}^2 \rightarrow \inf \quad (20)$$

under the conditions

$$w(\cdot) \in L_2(I_1, R^m), \quad u(\tau) \in W(\tau), \quad \tau \in I_1. \quad (21)$$

Theorem 7. Let a kernel of the operator $K(\tau)$ be measurable and belong to L_2 . Then:

1) the functional (20) under the condition (21) is continuously Frechet differentiable, the gradient

$$J'_1(w, u) = (J'_{1w}(w, u), J'_{1u}(w, u)) \in L_2(I_1, R^m) \times L_2(I_1, R^m)$$

for any point $(w, u) \in L_2(I_1, R^m) \times W(\tau)$ is defined by

$$J'_{1w}(w, u) = -2K^*(\tau)\beta + 2 \int_a^b K^*(\tau)K(\sigma)w(\sigma)d\sigma + 2(w - u) \in L_2(I_1, R^m), \quad (22)$$

$$J'_{1u}(w, u) = -2(w - u) \in L_2(I_1, R^m); \quad (23)$$

2) the gradient of the functional $J'_1(w, u)$ satisfies the Lipchitz condition

$$\|J'_1(w + h, u + h_1) - J'_1(w, u)\| \leq l_1(\|h\| + \|h_1\|), \quad (24)$$

$$\forall (w, u), (w + h, u + h_1) \in L_2(I_1, R^m) \times L_2(I_1, R^m); d\eta,$$

3) the functional (20) under the condition (21) is convex.

A proof the theorem is similar to theorem 5's proof.

Theorem 8. Let for extremal problem (20), (21) the sequences be constructed by

$$w_{n+1}(\tau) = w_n(\tau) - \alpha_n J'_{1w}(w_n, u_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u_{n+1}(\tau) = P_W[u_n(\tau) - \alpha_n J'_{1u}(w_n, u_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

where $P_W[\cdot]$ is a projection of a point onto the set W ,

$$\varepsilon_0 \leq \alpha \leq \frac{2}{l_2 + 2\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

l_1 is the Lipchitz constant from (24), in the case $\varepsilon_1 = \frac{l_1}{2}$, $\varepsilon_0 = \alpha_n = \frac{1}{l_1}$, $J'_{1w}(w_n, u_n)$, $J'_{1u}(w_n, u_n)$ are defined by (22), (23) respectively. Then the numerical sequence $\{J_1(w_{n1}, u_n)\}$ is monotone decreasing, the limits $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1}\| = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_{n+1}\| = 0$.

If in addition the set $M(w_0, u_0) = \{(w, u) \in L_2 \times W / J_1(w, u) \leq J(w_0, u_0)\}$ is bounded, then:

1) the sequence $\{w_n, u_n\} \subset M(w_0, u_0)$ is minimizing, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_1(w_n, u_n) = J_* = \inf J(w, u), \quad (w, u) \in L_2 \times W;$$

2) the sequence $\{w_n, u_n\} \subset M(w_0, u_0)$ weakly converges to the set

$$X_* = \{(w_*, u_*) \in L_2 \times W / J_1(w_*, u_*) = \min J_1(w, u) = J_* = \inf J_1(w, u), \quad (w, u) \in L_2 \times W\};$$

3) a necessary and sufficient condition for integral equation (1) under the condition $w(\tau) \in W$ to have a solution is that $J_1(w_*, u_*) = J_{1*} = 0$.

A proof of theorem is similar to the proof of theorem 6.

4 Integral equation with parameter

Consider problems 7, 8 for the integral equation (2).

Theorem 9. A necessary and sufficient condition for the integral equation (2) to have solution for any $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$ is that the $n \times n$ matrix

$$C(t) = \int_a^b K(t, \tau) K^*(t, \tau) d\tau \quad t \in I \quad (25)$$

be positive definite for all $t \in I$, where $(*)$ means transposed.

A proof of theorem is similar to the proof of theorem 1.

Theorem 10. Let the matrix $C(t)$, $\forall t, t \in I$ given by (25) be positive definite. Then a general solution of integral equation (2) for any $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$ is given by

$$v(t, \tau) = K^*(t, \tau)C^{-1}(t)\mu(t) + \gamma(t, \tau) - K^*(t, \tau)C^{-1}(t) \int_a^b K(t, \tau)\gamma(t, \tau)d\tau, \quad t \in I, \tau \in I_1, \quad (26)$$

where $\gamma(t, \tau) \in L_2(S_1, R^m)$ is an arbitrary function, $\mu(t) \in L_2(I, R^n)$.

The proof of the theorem is similar to the proof of theorem 2.

The main properties of solutions to the integral equation (2):

1. The function $v(t, \tau)$ from (26) can be represented in the form $v(t, \tau) = v_1(t, \tau) + v_2(t, \tau)$,

where $v_1(t, \tau) = K^*(t, \tau)C^{-1}(t)\mu(t)$, $v_2(t, \tau) = \gamma(t, \tau) - K^*(t, \tau)C^{-1}(t) \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau)\gamma(t, \tau)d\tau$,

$\gamma(t, \tau) \in L_2(S_1, R^m)$ is an arbitrary function. The function $v_1(t, \tau)$ is a particular solution of the integral equation (3), and the function $v_2(t, \tau)$ is a solution to the homogeneous integral equation

$$\int_a^b K(t, \tau)v_2(t, \tau)d\tau = 0.$$

Indeed,

$$\int_a^b K(t, \tau)v_1(t, \tau)d\tau = \int_a^b K(t, \tau)K^*(t, \tau)d\tau C^{-1}(t)\mu(t) = \mu(t), \quad t \in I,$$

$$\int_a^b K(t, \tau)v_2(t, \tau)d\tau = \int_a^b K(t, \tau)\gamma(t, \tau)d\tau - \int_a^b K(t, \tau)K^{t, \tau}d\tau C^{-1}(t) \int_a^b K(t, \tau)\gamma(t, \tau)d\tau = 0;$$

2. The functions $v_1(t, \tau) \in L_2(S_1, R^m)$, $v_2(t, \tau) \in L_2(S_1, R^m)$ are orthogonal, i.e. $v_1 \perp v_2$.
Indeed,

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle_{L_2} &= \int_a^b v_1^*(t, \tau)v_2(t, \tau)d\tau = \int_a^b \mu^*(t)C^{-1}(t)K(t, \tau)[\gamma(t, \tau) - \\ &- K^*(t, \tau)C^{-1}(t) \int_a^b K(t, \tau)\gamma(t, \tau)d\tau]d\tau = \mu^*(t)C^{-1}(t) \int_a^b K(t, \tau)\gamma(t, \tau)d\tau - \\ &- \mu^*(t)C^{-1}(t) \int_a^b K(t, \tau)K^*(t, \tau)d\tau C^{-1}(t) \int_a^b K(t, \tau)\gamma(t, \tau)d\tau \equiv 0, \quad (t, \tau) \in S_1; \end{aligned}$$

3. The function $v_1(t, \tau) = K^*(t, \tau)C^{-1}(t)\mu(t)$, $(t, \tau) \in S_1$ is a solution of the integral equation (3) with minimal norm in $L_2(S_1, R^m)$. Indeed, $\|v(t, \tau)\|^2 = \|v_1(t, \tau)\|^2 + \|v_2(t, \tau)\|^2$.

This implies that $\|v(t, \tau)\|^2 \geq \|v_1(t, \tau)\|^2$. If the function $\gamma(t, \tau) \equiv 0$, $(t, \tau) \in S_1$, then the function $v_2(t, \tau) \equiv 0$, $(t, \tau) \in S_1$. Hence $v(t, \tau) = v_1(t, \tau)$, $\|v\| = \|v_1\|$;

4. A solution set for the integral equation (3) is convex.

Example 2. The integral equation

$$K_1 v = \int_a^b e^{t\tau} v(t, \tau) d\tau = \sin t, \quad t \in [1; 2], \quad \tau \in [0, 1],$$

is given. For this example $K(t, \tau) = e^{t\tau}$. Then

$$C(t) = \int_0^1 e^{2t\tau} d\tau = \frac{1}{2t} [e^{2t} - 1] > 0, \quad \forall t, \quad t \in [1, 1].$$

This yields that this integral equation has solution

$$v(t, \tau) = \frac{2t}{e^{2t} - 1} e^{t\tau} \sin t + \gamma(t, \tau) - \frac{2t}{e^{2t} - 1} e^{t\tau} \int_0^1 e^{t\tau} \gamma(t, \tau) d\tau,$$

where $C^{-1}(t) = \frac{2t}{e^{2t} - 1}$, $t \in [1, 2]$, $\gamma(t, \tau) \in L_2(S_1, R^1)$, $S_1 = \{(t, \tau) / 1 \leq t \leq 2, 0 \leq \tau \leq 1\}$ is an arbitrary function.

The function $v(t, \tau) = v_1(t, \tau) + v_2(t, \tau)$, where $v_1(t, \tau) = \frac{2t}{e^{2t} - 1} e^{t\tau} \sin t$, $(t, \tau) \in S_1$ is a particular solution, $v_2(t, \tau) = \gamma(t, \tau) - \frac{2t}{e^{2t} - 1} e^{t\tau} \int_0^1 e^{t\tau} \gamma(t, \tau) d\tau$ is a solution of the homogeneous integral equation $\int_0^1 e^{t\tau} v_2(t, \tau) d\tau = 0$. It's easily shown that $\langle v_1, v_2 \rangle_{L_2} = 0$, $\forall t, t \in [1, 2]$.

This work was partially supported by the grant of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project 3311/GF4 MON RK)

5 Conclusion

A necessary and sufficient condition for existence of a solution to an integral equation with an arbitrary right-hand side has been obtained, and a general solution to the equation has been constructed. A solvability criterion in the form of requirement for an infimum of a specified functional has been formulated and proved, and a method for the solution construction has been developed. An integral equation with constrained unknown function is reduced to an extremal problem which allows to construct a solution satisfying a given constraint. A test method for existence of a solution to an integral equation with a parameter and a method for solution construction are described in detail and their correctness has been proved.

References

- [1] *Aisagaliev S.A.* Controllability of a differential equation system // *Differential Equations*. -1991. -Vol. 27, No 9. -P. 1037-1045).
- [2] *Aisagaliev S.A., Belogurov A.P.* Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control // *Siberian Mathematical Journal*. -2012. -Vol. 53, No. 1. -P. 13-28.
- [3] *Aisagaliev S.A.* Controllability theory for dynamical systems. – Almaty: Kazakh universiteti, 2014. – 158 p. (in Russian)
- [4] *Aisagaliev S.A.* Controllability and Optimal Control in Nonlinear Systems// *Journal of Computer and Systems Sciences International*. -1994. -No 32(5). -P. 73-80.
- [5] *Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A.* Optimal control of dynamical systems. - Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2012. – 288 p. (in Russian)
- [6] *Aisagaliev S.A., Kabidoldanova A.A.* On the Optimal Control of Linear Systems with Linear Performance Criterion and Constraints // *Differential Equations*. -2012. -Vol. 48, No 6. -P. 832-844).
- [7] *Aisagaliev S.A., Aisagaliev T.S.* Boundary value problems solving methods. – Almaty: Kazakh universiteti, 2002. – 348 p. (in Russian)
- [8] *Aisagaliev S.A., Kalimoldayev M.N.* Constructive method for solving a boundary value problem for ordinary differential equations // *Differential Equations / MAIK NAUKA. INTERPERIODICA. SPRINGER, 233 SPRING ST, NEW YORK, NY 10013-1578 USA*. -2015. -Vol. 51, Issue 2. -P. 149-162.
- [9] *Aisagaliev S.A., Zhunussova Zh.Kh.* To the boundary value problem of ordinary differential equations [Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (EJQTDE)]. -2015. -No. 57. -P.1-17. -URL: <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde>
- [10] *Aisagaliev S.A.* General solution of one class of integral equations // *Mathematical journal*. -2005. -V. 5, No. 4 (18). -P. 17-34. (in Russian)
- [11] *Aisagaliev S.A.* Constructive theory of boundary value optimal control problem. – Almaty: Kazakh universiteti, 2007. – 328 p. (in Russian)
- [12] *Aisagaliev S.A., Belogurov A.P., Sevryugin I.V.* On solving the first kind Fredholm integral equation for multivariable function // *Vestnik KazNU, ser. math., mech., inf.* – 2011. -No 1(68). -P. 3-16. (in Russian)
- [13] *Vasiliyev F.P.* Methods for solving extremal problems. – M: Nauka, 1981. – 400 p. (in Russian)

UDC 519.6

Temirbekov N.M.¹, Baigereyev D.R.² *¹Kazakhstan Engineering Technological University, Republic of Kazakhstan, Almaty²D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University,
Republic of Kazakhstan, Ust-Kamenogorsk

* E-mail: dbaigereyev@gmail.com

On the stability of a difference scheme for the three-phase non-isothermal flow problem

The article presents a study of stability of a finite difference scheme in terms of initial values and right-hand sides of the equations for the problem of three-phase non-isothermal flow in homogeneous isotropic porous media without capillary, gravitational forces and phase transitions. It is assumed that oil is homogeneous non-evaporable fluid, and phases are in local thermal equilibrium which means that fluids saturating the porous media and the rock have the same temperature in any elementary volume. The model describing this process consists of the mass conservation equation, equation of motion in the form of linear Darcy's law, equation of state, and phase balance equation. In the present work, so-called "global" formulation of the problem is used which is based on the introduction of a change of variables for pressure, called "global pressure". Using this approach, the original model equations reduce to a system of five partial differential equations with respect to pressure, temperature, velocity, and two saturations. The stability analysis of the scheme is carried out using the method of a priori estimates. A priori estimate for the solution of the difference problem is obtained with limitations on the value of the time step and the norm of the temperature derivative.

Key words: three-phase non-isothermal flow, finite difference method, stability, non-linear term, a priori estimate.

Темирбеков Н.М., Байгереев Д.Р.

Исследование устойчивости разностной схемы для задачи трехфазной неизотермической фильтрации

В работе проводится исследование устойчивости конечно-разностной схемы по начальным данным и правой части уравнений системы для задачи трехфазной неизотермической фильтрации в однородной изотропной среде без учета капиллярных, гравитационных сил и фазовых переходов. Предполагается, что нефть - однородная неиспаряемая жидкость и фазы находятся в локальном тепловом равновесии, при котором флюиды, насыщающие пористую среду, и порода имеют одинаковую температуру в любом элементарном объеме. Модель, описывающая данный процесс, включает в себя уравнение неразрывности, уравнение движения в виде линейного закона Дарси, уравнение состояния и уравнение баланса насыщенностей фаз. В работе используется так называемая «глобальная» постановка рассматриваемой задачи, в основу которой положена замена переменных для давления, названная «глобальным давлением». Используя данный подход, исходные уравнения модели сводятся к системе из пяти дифференциальных уравнений в частных производных относительно давления, температуры, скорости и двух насыщенностей. Анализ устойчивости схемы проводится методом априорных оценок. Получена априорная оценка для решения разностной задачи с ограничениями на величину временного шага и норму производной температуры.

Ключевые слова: трехфазный неизотермический поток, метод конечных разностей, устойчивость, нелинейное слагаемое, априорная оценка.

Темірбеков Н.М., Байгереев Д.Р.

Үш фазалы изотермалық емес фильтрация есебі үшін айырымдық сұлбаның орнықтылығын зерттеу

Бұл жұмыста біртекті изотропты ортада капиллярлық, гравитациялық күштерді және фазалық айналымдарды ескермейтін үш фазалы изотермалық емес фильтрация есебі үшін ақырлы айырымдық сұлбаның бастапқы шарттары мен жүйе теңдеулерінің оң жақтары бойынша орнықтылығы зерттеледі. Бұл жұмыста мұнай - біртекті булануға ұшырамайтын сұйықтық және фазалар локалды жылу тепе-теңдікте, яғни ортаның әрбір элементарлы аумағында мұнай қатпары және оны қанықтыратын флюидтердің температурасы бірдей болатыны ұйғарылады. Бұл үрдісті сипаттайтын модель үздіксіздік теңдеуі, сызықты Дарси заңы түріндегі қозғалыс теңдеуі, күй теңдеуі мен фазалардың қанықтық балансы теңдеулерінен тұрады. Бұл жұмыста қарастырылып отырған есептің “глобалды” қойылымы пайдаланады, ол “глобалды қысым” деп аталатын айнымалыны ауыстыруды енгізуге негізделген. Бұл тәсілді пайдаланып, модельдің бастапқы теңдеулері қысым, температура, жылдамдық және екі қанықтық үшін бес дербес туындылы дифференциалдық теңдеуден тұратын жүйеге келтіріледі. Ақырлы айырымдық сұлба орнықтылығының анализі априорлы бағалау әдісімен жүргізіледі. Ақырлы айырымдық есептің шешімі үшін уақыт қадамы мен температура туындысының нормасына қойылған шектеулермен априорлы бағалау алынды.

Түйін сөздер: үш фазалы изотермалық емес ағын, ақырлы айырымдар әдісі, орнықтылық, сызықты емес қосылғыш, априорлы бағалау.

1 Introduction

The models describing non-isothermal multi-phase flow in porous media have received significant attention in applied mathematics recently. For example, different approaches to the numerical solution of the multi-phase non-isothermal flow problems have been studied in [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. In [7], a new “global” formulation of the three-phase non-isothermal flow problem is proposed, which is based on the introduction of a change of variables for the pressure, called “global” pressure, to eliminate the gradients of capillary pressures from the equations for pressure and temperature. This approach was initially proposed in [8, 9] for two-phase and three-phase isothermal flows.

In this paper, we consider a three-phase non-isothermal flow of immiscible fluids in homogeneous, isotropic porous media without capillary and gravitational forces. The system of equations describing three-phase non-isothermal flow is considered under the assumptions that the movement of phases obeys a linear generalized Darcy law, the phases are in the local thermal equilibrium, which means that the fluids saturating the porous media and the rock have the same temperature in any elementary volume. Furthermore, oil is assumed to be a homogeneous non-evaporable fluid and the oil reservoir consists of a single rock. In this case, the model describing this process is usually consists of the mass conservation equation, Darcy law, energy equation, equation of state, and an equation for balance of saturations. Using the approach, proposed in [7], the original equations of the non-isothermal model are reduced to a system of partial differential equations with respect to pressure, temperature and two saturations. We study a finite difference scheme for the considered problem. A priori estimate, showing the stability of the difference scheme with respect to the initial data and right-hand sides of equations, is obtained.

2 Formulation of the problem

We consider the problem of three-phase non-isothermal flow in the domain $\overline{Q}_T = \overline{\Omega} \times [0, t_1]$, where $\Omega = [0, l] \times [0, l]$ is a square with boundary Γ [7]:

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (k_h \nabla T) = f_T, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot (k_p \nabla p) = \beta_T \frac{\partial T}{\partial t} + f_p, \tag{2}$$

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial t} - \nabla \cdot (\nu_\alpha \nabla p) = f_\alpha, \quad \alpha = w, o, \tag{3}$$

$$\vec{u} = -\lambda \nabla p \tag{4}$$

with initial and boundary conditions

$$T(x, 0) = T_0, \quad p(x, 0) = p_0, \quad s_\alpha(x, 0) = s_{\alpha 0}, \tag{5}$$

$$-k_h \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_\Gamma = 0, \quad -k_p \frac{\partial p}{\partial \vec{n}} \Big|_\Gamma = 0 \tag{6}$$

where subscripts w, o, g denote the phases of water, oil and steam; T is temperature; p is pressure; s_α is the saturation of the phase α ; $c_T, \lambda, k_h, k_p, \beta_T, \nu_\alpha$ are some functions of the space variable and time for which the following conditions hold:

$$c_0 \leq (c_T, \lambda, k_h, k_p, \beta_T, \nu_\alpha) \leq c_1. \tag{7}$$

To solve the problem, we use the finite difference method. Let us introduce a uniform grid $\overline{\omega}_{h\tau}$ with the steps in the spatial variable $h_1 = h_2 = h$ and time τ in \overline{Q}_T :

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_\tau = \{(x, t) : x \in \overline{\omega}, t \in \overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2, \quad \overline{\omega}_m = \{x_m^{i_m} = i_m h : i_m = 0, 1, \dots, N_m, N_m h = l\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau : n = 0, 1, \dots, N_t, N_t \tau = t_1\}.$$

We associate the following difference scheme with the differential problem (1)-(6) in $\overline{\omega}_{h\tau}$:

$$c_T T_t + \Lambda_1 \hat{T} = f_T, \tag{8}$$

$$p_t + \Lambda_2 \hat{p} = \beta_T T_t + f_p, \tag{9}$$

$$s_{\alpha,t} + \Lambda_{3\alpha} \hat{p} = f_\alpha, \quad \alpha = w, o \tag{10}$$

with the initial conditions

$$T_i^0 = T_0, \quad p_i^0 = p_0, \quad s_{\alpha,i}^0 = s_{\alpha 0} \tag{11}$$

where $\Lambda_1 = \Lambda_1^{(1)} + \Lambda_1^{(2)}$, $\Lambda_2 = \Lambda_2^{(1)} + \Lambda_2^{(2)}$, $\Lambda_{3\alpha} = \Lambda_{3\alpha}^{(1)} + \Lambda_{3\alpha}^{(2)}$,

$$\Lambda_1^{(m)} w = \begin{cases} -\frac{1}{2} (\lambda \check{p}_{\check{x}_m})^{(+1m)} w_{x_m} - \frac{2}{h} \check{k}_h^{(+1m)} w_{x_m}, & x_m = 0, \\ -\frac{1}{2} (\lambda \check{p}_{\check{x}_m})^{(+1m)} w_{x_m} - \frac{1}{2} (\lambda \check{p}_{\check{x}_m}) w_{\check{x}_m} - (\check{k}_h w_{\check{x}_m})_{x_m}, & x_m \in \omega_m, \\ -\frac{1}{2} (\lambda \check{p}_{\check{x}_m}) w_{\check{x}_m} + \frac{2}{h} \check{k}_h w_{\check{x}_m}, & x_m = l, \end{cases}$$

$$\Lambda_2^{(m)} w = \begin{cases} -\frac{2}{h} \check{k}_p^{(+1m)} w_{x_m}, & x_m = 0, \\ -(\check{k}_p w_{\bar{x}_m})_{x_m}, & x_m \in \omega_m, \\ \frac{2}{h} \check{k}_p w_{\bar{x}_m}, & x_m = l, \end{cases} \quad \Lambda_{3\alpha}^{(m)} w = \begin{cases} -\frac{2}{h} \check{\nu}_\alpha^{(+1m)} w_{x_m}, & x_m = 0, \\ -(\check{\nu}_\alpha w_{\bar{x}_m})_{x_m}, & x_m \in \omega_m, \\ \frac{2}{h} \check{\nu}_\alpha w_{\bar{x}_m}, & x_m = l, \end{cases}$$

and ω_m is a set of internal nodes of the grid $\bar{\omega}_m$. Here and below we use the notation accepted in [10]. Let us define norms and a dot product as follows:

$$\begin{aligned} \|w\|_0^2 &= (w, w)_{\bar{\omega}}, \quad \|\nabla w\|_0^2 = \|w_{\bar{x}_1}\|_0^2 + \|w_{\bar{x}_2}\|_0^2, \quad \|w\|_1^2 = \|\nabla w\|_0^2 + \|w\|_0^2, \\ \|w_{\bar{x}_1}\|_0^2 &= \sum_{\omega_1^+} \sum_{\bar{\omega}_2} w_{\bar{x}_1}^2(x) h^2, \quad \|w_{\bar{x}_2}\|_0^2 = \sum_{\bar{\omega}_1} \sum_{\omega_2^+} w_{\bar{x}_2}^2(x) h^2, \\ \|\varphi\|_{-1} &= \sup_{w \neq 0} \frac{|(\varphi, w)_{\bar{\omega}}|}{\|w\|_1}, \quad \|w\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}} |w(x)|, \quad (w, \tilde{w})_{\bar{\omega}} = \sum_{\bar{\omega}_1} \sum_{\bar{\omega}_2} w(x) \tilde{w}(x) h^2, \\ \omega_m^+ &= \{x_m^{i_m} = i_m h, \quad i_m = 1, \dots, N_m, \quad N_m h = l\}. \end{aligned}$$

For simplicity, we also assume that the following conditions hold:

$$(f_T, 1)_{\bar{\omega}} = (f_p, 1)_{\bar{\omega}} = 0, \quad (p, 1)_{\bar{\omega}} = \tilde{p}, \quad (T, 1)_{\bar{\omega}} = \tilde{T}. \quad (12)$$

3 Investigation of the stability of the difference scheme

Lemma 1. The following estimate is valid:

$$(\Lambda_2 v, v)_{\bar{\omega}} \geq \frac{2c_0}{3l^2} (l^2 \|v\|_1^2 - (v, 1)_{\bar{\omega}}^2). \quad (13)$$

Proof. Using the difference analogue of Green's formula and conditions (7), we obtain:

$$(\Lambda_2 v, v)_{\bar{\omega}} = (\check{k}_p v_{\bar{x}_1}, v_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} + (\check{k}_p v_{\bar{x}_2}, v_{\bar{x}_2})_{\bar{\omega}_1 \times \omega_2^+} \geq c_0 \|\nabla v\|_0^2. \quad (14)$$

Further, using the Poincaré inequality and the definition of the norm $\|v\|_1$, we obtain:

$$\|\nabla v\|_0^2 \geq 2 (\|v\|_1^2 - \|\nabla v\|_0^2) - \frac{2}{l^2} (v, 1)_{\bar{\omega}}^2,$$

which implies

$$\|\nabla v\|_0^2 \geq \frac{2}{3} \|v\|_1^2 - \frac{2}{3l^2} (v, 1)_{\bar{\omega}}^2. \quad (15)$$

Substitution of (15) into (14) gives the lemma.

Lemma 2. The following estimate holds:

$$(\Lambda_{3\alpha} w, \tilde{w}) \leq \frac{1}{2} c_1 M \varepsilon \|\nabla w\|_0^2 + \frac{c_1}{2\varepsilon} \|\nabla \tilde{w}\|_0^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Proof. Indeed,

$$(\Lambda_{3\alpha} w, \tilde{w}) = (\nu_\alpha w_{\bar{x}_1}, \tilde{w}_{\bar{x}_1})_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} + (\nu_\alpha w_{\bar{x}_2}, \tilde{w}_{\bar{x}_2})_{\bar{\omega}_1 \times \omega_2^+} \leq$$

$$\leq c_1 \left(\frac{\varepsilon'}{2} \|w_{\bar{x}_1}\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon'} \|\tilde{w}_{\bar{x}_1}\|_0^2 + \frac{\varepsilon''}{2} \|w_{\bar{x}_2}\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon''} \|\tilde{w}_{\bar{x}_2}\|_0^2 \right) \leq \frac{c_1 M \varepsilon}{2} \|\nabla w\|_0^2 + \frac{c_1}{2\varepsilon} \|\nabla \tilde{w}\|_0^2.$$

We now obtain an a priori estimate for the solution of the difference problem (8)-(11). Let us multiply the equation (9) by $2\tau\hat{p}$:

$$\|\hat{p}\|_0^2 - \|p\|_0^2 + \tau^2 \|p_t\|_0^2 + 2\tau (\Lambda_2 \hat{p}, \hat{p})_{\bar{\omega}} = (\beta_T T_t, 2\tau \hat{p})_{\bar{\omega}} + (f_p, 2\tau \hat{p})_{\bar{\omega}} \quad (16)$$

and evaluate the inner products using Lemma 1, Cauchy inequality, and conditions (7):

$$\begin{aligned} 2\tau (\Lambda_2 \hat{p}, \hat{p})_{\bar{\omega}} &\geq \frac{4\tau c_0}{3l^2} (l^2 \|\hat{p}\|_1^2 - (\hat{p}, 1)_{\bar{\omega}}^2), \\ |(\beta_T T_t, 2\tau \hat{p})_{\bar{\omega}}| &\leq 2\tau c_1 \|T_t\|_0 \|\hat{p}\|_0 \leq \frac{\tau}{\varepsilon_1} \|T_t\|_0^2 + M_1 \tau c_1^2 \varepsilon_1 \|\hat{p}\|_1^2, \\ |(f_p, 2\tau \hat{p})_{\bar{\omega}}| &\leq 2\tau \|f_p\|_{-1} \|\hat{p}\|_0 \leq \frac{\tau}{\varepsilon_2} \|f_p\|_{-1}^2 + M_1 \tau \varepsilon_2 \|\hat{p}\|_1^2. \end{aligned}$$

Here and below M_i denote some positive numbers not depending on h and τ . Applying these inequalities to (16), we obtain:

$$\|\hat{p}\|_0^2 - \|p\|_0^2 + \tau^2 \|p_t\|_0^2 + M'_1 \tau \|\hat{p}\|_1^2 \leq \varepsilon_1^{-1} \tau \|T_t\|_0^2 + \varepsilon_2^{-1} \tau \|f_p\|_{-1}^2 + \frac{4\tau c_0}{3l^2} (\hat{p}, 1)_{\bar{\omega}}^2 \quad (17)$$

with $M'_1 = (4/3)c_0 - M_1 c_1^2 \varepsilon_1 - M_1 \varepsilon_2$.

Let us multiply the equation (10) by $2\tau\hat{s}_\alpha$ for $\alpha = w, o$:

$$\|\hat{s}_\alpha\|_0^2 - \|s_\alpha\|_0^2 + \tau^2 \|s_{\alpha,t}\|_0^2 + (\Lambda_{3\alpha} \hat{p}, 2\tau \hat{s}_\alpha)_{\bar{\omega}} = (f_\alpha, 2\tau \hat{s}_\alpha)_{\bar{\omega}} \quad (18)$$

and evaluate the inner products in (18) using Lemma 2, Cauchy inequality and conditions (7):

$$\begin{aligned} 2\tau |(\Lambda_{3\alpha} \hat{p}, \hat{s}_\alpha)_{\bar{\omega}}| &\leq \tau c_1 M_2 \varepsilon_3 \|\hat{p}\|_1^2 + \frac{\tau c_1}{\varepsilon_3} \|\nabla \hat{s}_\alpha\|_0^2, \\ 2\tau |(f_\alpha, \hat{s}_\alpha)_{\bar{\omega}}| &\leq 2\tau \|f_\alpha\|_{-1} \|\hat{s}_\alpha\|_0 \leq \tau \|f_\alpha\|_{-1}^2 + \tau \|\hat{s}_\alpha\|_0^2. \end{aligned}$$

Using these inequalities, we obtain from (18):

$$\|\hat{s}_\alpha\|_0^2 - \|s_\alpha\|_0^2 + \tau^2 \|s_{\alpha,t}\|_0^2 \leq \tau c_1 M_2 \varepsilon_3 \|\hat{p}\|_1^2 + \frac{\tau c_1}{\varepsilon_3} \|\nabla \hat{s}_\alpha\|_0^2 + \tau \|f_\alpha\|_{-1}^2 + \tau \|\hat{s}_\alpha\|_0^2.$$

Using the inequality $\|\nabla v\|_0^2 \leq \frac{8}{h^2} \|v\|_0^2$, valid for any grid function defined on a uniform grid, we obtain:

$$\left(1 - \tau - \frac{8\tau c_1}{\varepsilon_3 h^2} \right) \|\hat{s}_\alpha\|_0^2 - \|s_\alpha\|_0^2 + \tau^2 \|s_{\alpha,t}\|_0^2 \leq \tau c_1 M_2 \varepsilon_3 \|\hat{p}\|_1^2 + \tau \|f_\alpha\|_{-1}^2.$$

Choosing ε_3 and $\tau \leq \tau_0$,

$$\tau_0 = \frac{\varepsilon_3 h^2}{8c_1 + \varepsilon_3 h^2}, \quad (19)$$

we obtain the inequality

$$\|\hat{s}_\alpha\|_0^2 - M_3 \|s_\alpha\|_0^2 + M_3 \tau^2 \|s_{\alpha,t}\|_0^2 \leq \tau M_4 (\varepsilon_3 \|\hat{p}\|_1^2 + \|f_\alpha\|_{-1}^2). \quad (20)$$

Similarly, we multiply the equation (8) by $2\tau\hat{T}$:

$$\begin{aligned} c_0 \left(\|\hat{T}\|_0^2 - \|T\|_0^2 + \tau^2 \|T_t\|_0^2 \right) - 2\tau \sum_{m=1}^2 \left(\left(k_h \hat{T}_{\bar{x}_m} \right)_{x_m}, \hat{T} \right)_{\bar{w}} &\leq \\ \leq \tau \sum_{m=1}^2 \left(\lambda^{(+1m)} p_{\bar{x}_m}^{(+1m)} \hat{T}_{x_m}, \hat{T} \right)_{\bar{w}} + \tau \sum_{m=1}^2 \left(\lambda p_{\bar{x}_m} \hat{T}_{\bar{x}_m}, \hat{T} \right)_{\bar{w}} + \left(f_T, \hat{T} \right)_{\bar{w}} &\quad (21) \end{aligned}$$

and evaluate the inner products in (21) using Poincare inequality, Cauchy inequality and conditions (7):

$$\begin{aligned} -2\tau \sum_{m=1}^2 \left(\left(k_h \hat{T}_{\bar{x}_m} \right)_{x_m}, \hat{T} \right)_{\bar{w}} &\geq 2\tau c_0 \|\nabla \hat{T}\|_0^2 \geq \frac{4\tau c_0}{3l^2} \left(l^2 \|\hat{T}\|_1^2 - (\hat{T}, 1)_{\bar{w}}^2 \right), \\ \tau \sum_{m=1}^2 \left(\lambda^{(+1m)} p_{\bar{x}_m}^{(+1m)} \hat{T}_{x_m}, \hat{T} \right)_{\bar{w}} + \tau \sum_{m=1}^2 \left(\lambda p_{\bar{x}_m} \hat{T}_{\bar{x}_m}, \hat{T} \right)_{\bar{w}} &\leq 2\tau c_1 M_1 \sum_{m=1}^2 \|p_{\bar{x}_m}\|_0 \|\nabla \hat{T}\|_0 \|\hat{T}\|_0 \leq \\ &\leq \tau c_1 \left(\varepsilon_4 \|\nabla p\|_0^2 + \frac{M_1}{\varepsilon_4} \|\nabla \hat{T}\|_0^2 \|\hat{T}\|_1^2 \right) \leq \tau c_1 M_1 \varepsilon_4 \|p\|_1^2 + \frac{\tau c_1 M_1^2}{\varepsilon_4} \|\hat{T}\|_1^4, \\ \left| \left(f_T, 2\tau \hat{T} \right)_{\bar{w}} \right| &\leq 2\tau \|f_T\|_{-1} \|\hat{T}\|_0 \leq \varepsilon_5 \tau \|f_T\|_{-1}^2 + \frac{M_1 \tau}{\varepsilon_5} \|\hat{T}\|_1^2. \end{aligned}$$

Applying these inequalities to (21), we have:

$$\begin{aligned} \|\hat{T}\|_0^2 - \|T\|_0^2 + \tau^2 \|T_t\|_0^2 + \tau \left(\frac{4c_0}{3} - \frac{M_1}{c_0 \varepsilon_5} - \frac{c_1 M_1^2}{c_0 \varepsilon_4} \|\hat{T}\|_1^2 \right) \|\hat{T}\|_1^2 &\leq \\ \leq \frac{\tau c_1 M_1 \varepsilon_4}{c_0} \|p\|_1^2 + \frac{\varepsilon_5 \tau}{c_0} \|f_T\|_{-1}^2 + \frac{4\tau}{3l^2} (\hat{T}, 1)_{\bar{w}}^2. &\quad (22) \end{aligned}$$

Combining the estimates (17), (20), (22), we obtain:

$$\begin{aligned} \|\hat{T}\|_0^2 - \|T\|_0^2 + \tau^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1 \tau} \right) \|T_t\|_0^2 + \tau \left(\frac{4c_0}{3} - \frac{M_1}{c_0 \varepsilon_5} - \frac{c_1 M_1^2}{c_0 \varepsilon_4} \|\hat{T}\|_1^2 \right) \|\hat{T}\|_1^2 &+ \\ + \|\hat{p}\|_0^2 - \|p\|_0^2 + \tau^2 \|p_t\|_0^2 + \tau \left(\frac{4c_0}{3} - M_1 c_1^2 \varepsilon_1 - M_1 \varepsilon_2 - 2M_4 \varepsilon_3 \right) \|\hat{p}\|_1^2 &+ \\ + \sum_{\alpha=w,o} \|\hat{s}_\alpha\|_0^2 - M_3 \sum_{\alpha=w,o} \|s_\alpha\|_0^2 + M_3 \tau^2 \sum_{\alpha=w,o} \|s_{\alpha,t}\|_0^2 &\leq \\ \leq \frac{\tau c_1 M_1 \varepsilon_4}{c_0} \|p\|_1^2 + \frac{4\tau}{3l^2} (\hat{T}, 1)_{\bar{w}}^2 + \frac{4\tau c_0}{3l^2} (\hat{p}, 1)_{\bar{w}}^2 + \frac{\varepsilon_5 \tau}{c_0} \|f_T\|_{-1}^2 &+ \end{aligned}$$

$$+\frac{\tau}{\varepsilon_2} \|f_p\|_{-1}^2 + M_3 \varepsilon_4 \tau \sum_{\alpha=w,o} \|f_\alpha\|_{-1}^2. \tag{23}$$

Choosing τ , ε_1 and ε_2 from the conditions

$$c_1^2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq 2M_1^{-1} ((2/3)c_0 - M_4 \varepsilon_3), \tag{24}$$

$$\varepsilon_1^{-1} \leq \tau \leq \tau_0 \tag{25}$$

with τ_0 , defined in (19), and assuming that the condition

$$\frac{4c_0}{3} - \frac{M_1}{c_0} \left(\frac{c_1 M_1}{\varepsilon_4} + \frac{1}{\varepsilon_5} \right) \|\hat{T}\|_1^2 \geq 0 \tag{26}$$

holds for some $\varepsilon_4, \varepsilon_5$, we obtain from (23):

$$\begin{aligned} & \|\hat{T}\|_0^2 + \|\hat{p}\|_0^2 + \sum_{\alpha=w,o} \|\hat{s}_\alpha\|_0^2 + \tau M_5 \|\hat{T}\|_1^2 + \tau M_6 \|\hat{p}\|_1^2 \leq \\ & \leq \|T\|_0^2 + \|p\|_0^2 + M_3 \sum_{\alpha=w,o} \|s_\alpha\|_0^2 + \frac{\tau c_1 M_1 \varepsilon_4}{c_0} \|p\|_1^2 + \frac{\varepsilon_5 \tau}{c_0} \|f_T\|_{-1}^2 + \\ & + \frac{\tau}{\varepsilon_2} \|f_p\|_{-1}^2 + \gamma_0 + M_3 \varepsilon_4 \tau \sum_{\alpha=w,o} \|f_\alpha\|_{-1}^2 \end{aligned} \tag{27}$$

where $\gamma_0 = \frac{4\tau}{3l^2} (\tilde{T} + c_0 \tilde{p})$. Summing the inequality (27) over n' from 0 to n , we obtain:

$$\begin{aligned} & \|T^{n+1}\|_0^2 + \|p^{n+1}\|_0^2 + \sum_{\alpha=w,o} \|s_\alpha^{n+1}\|_0^2 + \|T^{n+1}\|_1^2 + \|p^{n+1}\|_1^2 \leq \\ & \leq M \left(\gamma_0 + \|T_0\|_0^2 + \|p_0\|_0^2 + \sum_{\alpha=w,o} (\|s_{\alpha 0}\|_0^2 + \|f_\alpha\|_{-1}^2) + \|f_T\|_{-1}^2 + \|f_p\|_{-1}^2 \right). \end{aligned} \tag{28}$$

Thus, the following theorem is proved.

Theorem. Under the conditions (7), (12), (24)-(26) the following inequality holds for the solution of the difference problem (8)-(11):

$$\begin{aligned} & \|T^{n+1}\|_1^2 + \|p^{n+1}\|_1^2 + \|s_w^{n+1}\|_0^2 + \|s_o^{n+1}\|_0^2 \leq M (\|T_0\|_0^2 + \|p_0\|_0^2 + \|s_{w0}\|_0^2 + \|s_{o0}\|_0^2) + \\ & + M (\gamma_0 + \|f_w\|_{-1}^2 + \|f_o\|_{-1}^2 + \|f_T\|_{-1}^2 + \|f_p\|_{-1}^2). \end{aligned}$$

The obtained estimate implies the stability of the difference scheme with respect to the initial data and right-hand sides of equations (8)-(11).

4 Conclusion

Thus, the stability of the considered finite difference scheme is studied in the present paper. A priori estimate for the solution of the difference problem is obtained under assumptions on the value of the time step and the norm of the temperature derivative. These restrictions result from the presence of the nonlinear term in the temperature equation, and the term with the time derivative of the temperature in the pressure equation. The obtained results can be used to study the stability of the difference scheme for a model taking into account capillary and gravitational forces.

References

- [1] *Mozzaffari S.* Numerical modeling of steam injection in heavy oil reservoirs // *Fuel*. – Amsterdam, 2013. – № 112. – P. 185-192.
- [2] *Bokserman A. A., Yakuba S. I.* Chislennoe issledovanie protsessa vytesneniya nefti parom // *Izvestiya AN SSSR*. – 1987. – № 4. – S. 78-84. (in Russian)
- [3] *Abdramanova M. B.* Chislennoe modelirovanie processa vytesneniya nefti parom // *Vestnik KazGU. Seriya matematika, mehanika, informatika*. – Almaty, 1998. – № 10. – S. 3-10. (in Russian)
- [4] *Akhmed-Zaki D. ZH.* Ob odnoi zadache dvuhfaznoi filtratsii smesi v poristoi srede s uchedom teplovogo vozdeistviya // *Nauchnye trudy NIPi «Neftegaz»*. – 2010. – № 3. – S. 29-33. (in Russian)
- [5] *Abirov A. K., Mukhambetzhano S. T.* Modelirovanie zadach fazovykh perehodov pri neizotermicheskoi filtratsii i kachestvennye svoystva resheniya // *Vestnik KazGU. Seriya matematika, mehanika, informatika*. – 1996. – № 5. – S. 3-11. (in Russian)
- [6] *Bocharov O. B., Telegin I. G.* O nekotorykh osobennostyakh neizotermicheskoi fil'tracii nesmeshivayushhihsya zhidkostei // *Teplofizika i aeromehanika*. – Novosibirsk, 2002. – № 3. – S. 459-466. (in Russian)
- [7] *Temirbekov N. M., Baigereyev D. R.* Modeling of three-phase non-isothermal flow in porous media using the approach of reduced pressure // *Mathematical Modeling of Technological Processes: 8th International Conference, CITech-2015, Almaty, Kazakhstan, September 24-28, 2015, Proceedings* / edited by N. Danaev, Yu. Shokin, D. Akhmed-Zaki. – Almaty, 2015. – P. 166-176.
- [8] *Antontsev S. N., Monakhov V. N.* Kraevye zadachi dlya nekotorykh vyrozhdayushhihsya uravnenii mehaniki sploshnoi sredy. – Novosibirsk: Novosibirskii gosudarstvennyi universitet, 1977. – 48 s. (in Russian)
- [9] *Chavent G., Jaffre J.* *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation*. – Elsevier, 1986. – 375 p.
- [10] *Samarsky A. A., Andreyev V. B.* *Raznostnye metody dlya ellipticheskikh uravnenii*. – Moskva: Nauka, 1976. – 352 s. (in Russian)

UDC 519.63

Zhumali A.S.

Kazakh-British technical university, Republic of Kazakhstan, Almaty

E-mail: ainura_.89@mail.ru

Numerical implementation of the one-dimensional microscopic model of in-situ leaching

This publication is devoted to the numerical implementation of the mathematical model on a microscopic level of in-situ leaching process in the case of one space variable. The mathematical model is based on the common system of differential equations, when the fluid dynamics is described by the equation of motion of an incompressible fluid filling the pores of absolute solid ground skeleton, and dynamics of the active solution is described by the equation of diffusion-convection with point boundary conditions on the unknown free boundary between the fluid and the solid skeleton, expressing the conservation law of reagents. Numerical simulation by finite difference method is applied for the numerical solution of the problem. The nonlinear boundary conditions defined on the unknown free boundary is numerically solved by the iterative Newton's method. For a more precise description of the movement of the free boundary, interpolation method is detailed. The significance of computer modelling of in-situ leaching process on a micro scales is an ability to study the basic mechanisms of the flow of physical and chemical process comprises reacting an active solutions with a solid skeleton and its movement through the capillary. The article presents the results of the problem in the case of one space variable in the form of graphs, obtained in mathematical environment Matlab.

Key words: leaching, free boundary, microscopic model, numerical implementation.

Жумали А.С.

Численная реализация одномерной микроскопической модели подземного выщелачивания

Предлагаемая публикация посвящена численной реализации математической модели на микроскопическом уровне процесса подземного выщелачивания в случае одной пространственной переменной. Математическая модель основывается на общепринятой системе дифференциальных уравнений, когда динамика жидкости описывается уравнением движения несжимаемой жидкости, заполняющей поры абсолютно твердого скелета грунта, а динамика активной примеси описывается уравнением диффузии-конвекции с точечными краевыми условиями на неизвестной свободной границе между жидкостью и твердым скелетом, выражающими закон сохранения количества реагентов. Для численного решения поставленной задачи применялось численное моделирование методом конечных разностей. Нелинейное граничное условие, заданное на неизвестной свободной границе, численно решается итерационным методом Ньютона. Для более точного описания движения свободной границы детализируется метод интерполяции. Значимость компьютерного моделирования процесса подземного выщелачивания на микро масштабах заключается в возможности исследования основных механизмов протекания физико-химического процесса, заключающегося во взаимодействии активной примеси с твердым скелетом и ее движения по капилляру. В статье представлены результаты численного решения задачи в случае одной пространственной переменной в виде графиков, полученных в математической среде Matlab.

Ключевые слова: выщелачивание, свободная граница, микроскопическая модель, численная реализация.

Жүмәлі А.С.

Жерасты ерітінділеудің бір өлшемді микроскопиялық моделін сандық жүзеге асыру

Ұсынылып отырған басылымда бір кеңістіктік айнымалы жағдайындағы жерасты ерітінділеу үрдісінің микроскопиялық деңгейдегі бір өлшемді математикалық моделін сандық жүзеге асыру сипатталған. Математикалық модель жалпыға мәлім дифференциалдық теңдеулер жүйесіне негізделеді, яғни сұйық динамикасы жер қыртысының абсолют қатты скелетінің кеуектерін толтыратын сығылмайтын сұйық қозғаласы теңдеуімен сипатталады, ал белсенді қоспа динамикасы, реагенттер мөлшерінің сақталуы заңын өрнектейтін, сұйықтық пен қатты скелет арасындағы белгісіз еркін шекараға қойылған нақты шекаралық шарттары бар диффузия-конвекция теңдеуімен сипатталады. Қойылған есепті сандық түрде шешу үшін ақырлы айырымдар әдісімен сандық моделдеу қолданылды. Белгісіз еркін шекараға қойылған сызықсыз шекаралық шарт итерациялық Ньютон әдісімен сандық түрде шешіледі. Еркін шекара қозғалысын дәлірек сипаттау мақсатында интерполяция әдісі талданады. Жерасты ерітінділеу үрдісін микро масштабтарда компьютерлік моделдеудің маңыздылығы белсенді қоспаның қатты скелетпен байланысқа түсуіне негізделген физикалық, химиялық үрдістің негізгі ерекшеліктері мен оның капиллярдағы қозғалысын зерттеу мүмкіндігіне негізделеді. Мақалада бір өлшемді есептің сандық шешімінің нәтижелері Matlab математикалық ортасында алынған графиктер түрінде келтірілген.

Түйін сөздер: ерітінділеу, еркін шекара, микроскопиялық модель, сандық жүзеге асыру.

1 Introduction

The process of in-situ leaching is an environmentally friendly method of mining minerals such as uranium, copper, nickel, gold, etc. It is held by filing the active solution into a porous ground wherein the solution reacts with the solid material. The resulting product of the chemical interaction enters the liquid. This physical process is considered in a bounded domain Ω . The area Ω consists of the area Ω_f modeling the pore space, the area Ω_s simulating a solid skeleton and the boundary $X(t)$ between the pore space and solid skeleton (see fig. 1). The boundary $X(t)$ is unknown, because in the process of leaching the part of the soil dissolves and the soil is deformed over time. Such boundary is called free boundary and such problems are called free boundary problems.

Currently the leaching of rocks describes by the large range of mathematical models describing the physical processes at the macroscopic level (see [1] - [6] and references there in). In these models at each point of a continuous medium there are the solid skeleton and the liquid in pores. R. Burridge and J. B. Keller [7] and E. Sanchez-Palencia [8] were the first to state explicitly that mathematical models for filtration and seismic must be derived rigorously from the microstructure. Various particular cases of accurate models of acoustics and fluid filtration in rocks intensively studied by many authors: G. Nguetseng [9], J.L. Buchanan, R.P. Gilbert [10], M.J. Buckingham [11], R.P. Gilbert, A. Mikelic [12], T.H. Clopeau, J.L. Ferrin, R.P. Gilbert, A. Mikelic [13], J.L. Ferrin, A. Mikelic [14] and others. Detailed analysis can be found in [15], [16]. The most systematic investigations of accurate models of physical processes in poroelastic media were conducted by A.M. Meirmanov [16] - [18]. These models on the micro level are based on the known equations of continuum mechanics [19] and chemical laws.

The goal of this work is the numerical implementation of the one-dimensional problem. Using numerical simulation of the leaching process, we explore the changes of the free boundary over time and positions of the boundary at different values of the parameters in the system of differential equations.

2 Equations

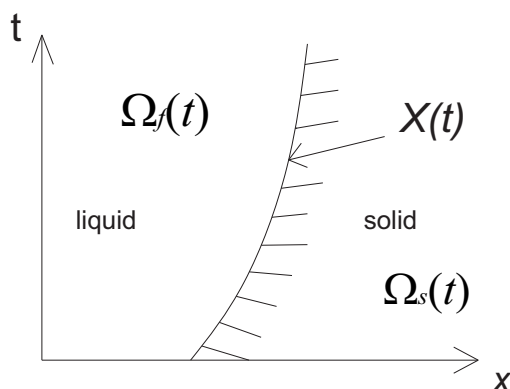


Figure 1 - One dimensional structure

For the case of one space variable differential equations for an incompressible fluid in the area $\Omega_f(t) = \{x : 0 < x < X(t)\}$ (see fig. 1) for $t > 0$ have the form

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = \alpha_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (3)$$

Boundary and initial conditions

$$p(0, t) = p^+(t), \quad c(0, t) = c^+(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\frac{dX}{dt} = \beta \gamma c, \quad x = X(t), \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\left(\frac{dX}{dt} + \beta - v\right) c + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad x = X(t), \quad t > 0, \quad (6)$$

$$v(t) = -\frac{dX}{dt}(t) \frac{(\rho_s - \rho_f)}{\rho_f}, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$X(0) = X_0, \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad 0 < x < X_0. \quad (8)$$

Equations are written in dimensionless form. Here p is the pressure, v is the speed, c is the concentration of the active acid, $\alpha_c = \frac{DT}{L^2}$, D is the diffusion coefficient, T is the characteristic time, L is the characteristic size of the area, X is the free boundary, β, γ are given constants, ρ_s, ρ_f are dimensionless densities of the solid skeleton and liquid, respectively.

3 Numerical solution of the problem

For the numerical solution of the problem it is applied numerical simulation by finite difference method. Finite difference equations were derived using a simple explicit scheme. To solve the equation (6) at each time step Newton's method is used.

Finite-difference analog of the equation (3) is written as:

$$c_i^{n+1} = \frac{\alpha_c \Delta t}{h^2} (c_{i+1}^n - 2c_i^n + c_{i-1}^n) - v_i^n \frac{\Delta t}{h} (c_{i+1}^n - c_i^n) + c_i^n. \quad (9)$$

Finite-difference analog of the equation (6) is written as:

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} \beta \gamma c_l^2 + \left(\beta + \frac{\alpha_c}{h}\right) c_l - \frac{\alpha_c}{h} c_{l-1} = 0. \quad (10)$$

Applying the Newton's method, we rewrite equation (10):

$$c_l^{k+1} = c_l^k - \frac{\frac{\rho_s}{\rho_f} \beta \gamma (c_l^k)^2 + \left(\beta + \frac{\alpha_c}{h}\right) c_l^k - \frac{\alpha_c}{h} c_{l-1}}{2 \frac{\rho_s}{\rho_f} \beta \gamma c_l^k + \beta + \frac{\alpha_c}{h}}. \quad (11)$$

Here h is the spatial step size, the lower index i is the order of the nodes, the upper index n denotes a variable evaluated at the current time t and $n + 1$ is a variable at the end of the time step (time $t + \Delta t$), k is the index of iteration and the lower index l denotes values at the free boundary.

By virtue of equations (2), (7) the speed of the liquid depends only on time. It is the same everywhere and equals to the speed at the free boundary. Therefore, the speed of the liquid at the free boundary is used in the equation (9).

For the exact description of the dynamics of the interface between the liquid and the solid skeleton, it is used interpolation method, which allows you to track the movement of the free boundary with sufficient accuracy. The method is implemented as follows. We know the initial position of the free boundary. We find regular grid nodes closest to the point of the free boundary and the values of the acid concentration in these nodes. Then, it is calculated the weighted value of the acid concentration at the free boundary by the found coordinates of points and values of the acid concentration. To distinguish the weighted value of the acid

concentration at the free boundary obtained by interpolation, let's denote it by c^X , ie with index X :

$$c^X = c_l^{k+1} + \frac{c_{l+1}^{k+1} - c_l^{k+1}}{h} (X^n - lh), \quad (12)$$

There is no acid concentration at the solid skeleton, so $c_{l+1}^{k+1} = 0$. Hence:

$$c^X = c_l^{k+1} \left(1 - \frac{X^n}{h} + l\right). \quad (13)$$

Interpolation can be done in different ways, in this case, linear interpolation is used. After determining the value of the acid concentration at the free boundary by the formula (13), the boundary can be moved. We find the new location of the free boundary using a simple explicit scheme:

$$X^{n+1} = \beta\gamma\Delta t c^X + X^n. \quad (14)$$

For $\gamma = 1$, $D = 2822 \frac{\mu^2}{s}$, $L = 56$, $T = 0.00005$ s., and different values of β and c^+ we found the concentration c of active impurity on the free boundary and positions of the free boundary (fig. 1-4).

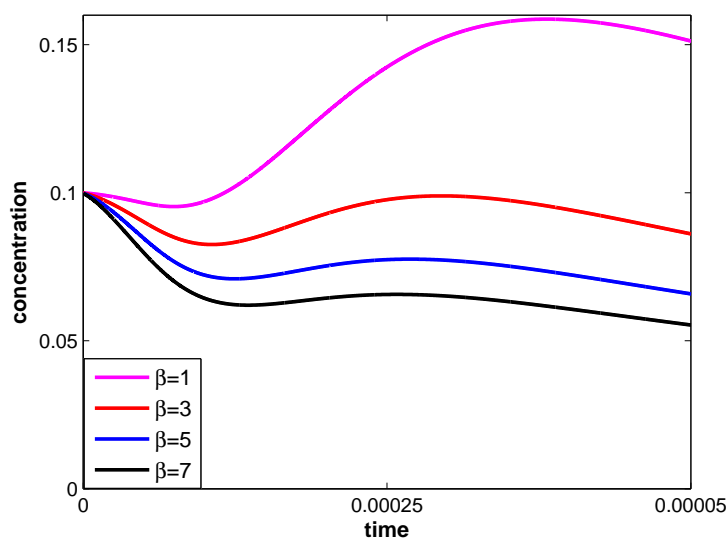


Figure 2 - Change of the active impurity concentration on the free boundary over time at various β

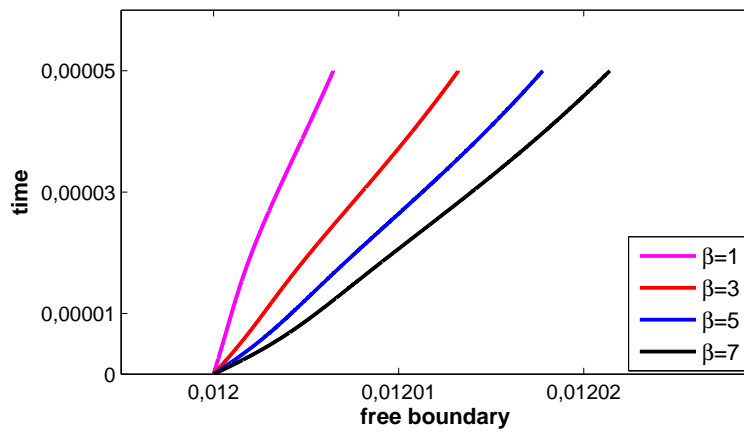


Figure 3 - Positions of the free boundary at various β

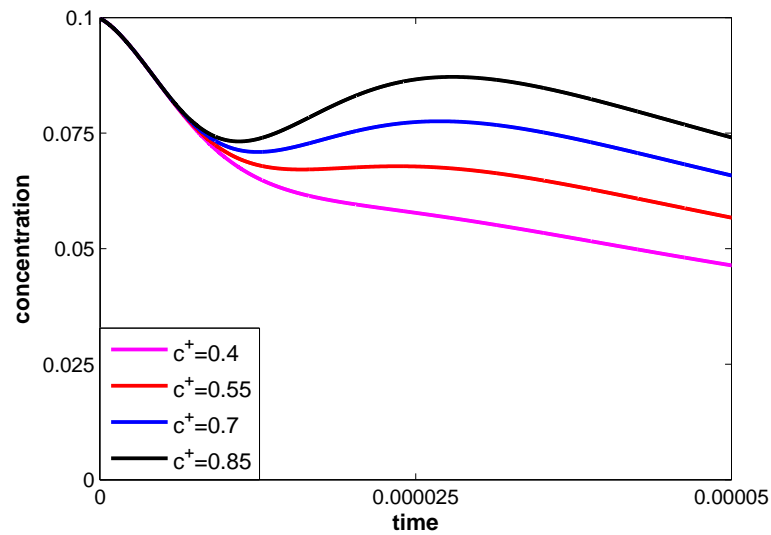


Figure 4 - Change of the active impurity concentration on the free boundary over time at various c^+

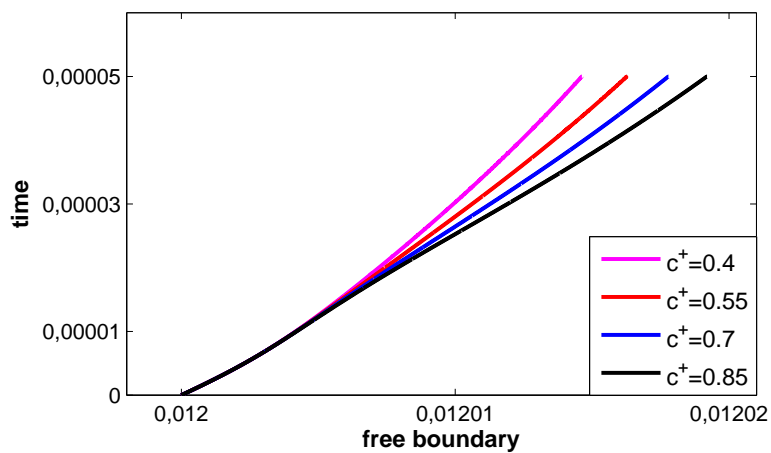


Figure 5 - Positions of the free boundary at various c^+

4 Conclusion

This article considers the numerical implementation of microscopic mathematical model describing the active impurity interaction with a solid skeleton. Numerical calculations of the one-dimensional problem implemented in Matlab mathematical environment. In numerical implementations you can see the distinctive features of the model. For example, smaller values of impurity concentration on the free boundary correspond to the greater values of the constant β (fig. 2). But the free boundary for a greater value β faster than the boundary for smaller β (fig. 3). It's quite a strange phenomenon for chemists. On the other hand, greater values of impurity concentration on the free boundary always correspond to greater values of concentration at the input c^+ (fig. 4), and the free boundary for greater value c^+ moves faster than the boundary for smaller c^+ (fig. 5).

From a practical point of view, the mathematical model is useful in possibility of studying the main features of the flow of physical and chemical processes on the free boundary between the liquid and solid skeleton.

References

- [1] *Kalia N., Balakotaiah V.* Effect of medium heterogeneities on reactive dissolution of carbonates // Chemical Engineering Science. - 2009. - P. 376-390.
- [2] *Cohen C.E., Ding D., Quintard M., Bazin B.* From pore scale to wellbore scale: Impact of geometry on wormhole growth in carbonate acidization // Chemical Engineering Science. - 2008. - P. 3088-3099.
- [3] *Panga M.K.R., Ziauddin M., Balakotaiah V.* Two-scale continuum model for simulation of wormholes in carbonate acidization // A.I.Ch.E. Journal. - 2005. - P. 3231-3248.
- [4] *Rogov E.I.* Sistemnyi analiz v gornom dele. - Alma-Ata: Nauka, 1976.
- [5] *Rogov E.I., Rogov S.E., Rogov A.E.* Nachalo osnov teorii tekhnologii dobychi poleznykh iskopaemykh. - Almaty, 2001.
- [6] *Rogov E.I., Yazikov V.G., Rogov A.E.* Matematicheskoe modelirovanie v gornom dele. - Almaty, 2002.
- [7] *Burridge R., Keller G.B.* Poroelasticity equations derived from microstructure // Journal of Acoustic Society of America. - 1981. - No. 4. - P. 1140-1146.
- [8] *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory - New York: Springer-Verlag, 1980.
- [9] *Nguetseng G.* Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics // SIAM J. Math. Anal. - 1990. - P. 1394-1414.
- [10] *Buchanan J.L., Gilbert R.P.* Transition loss in the farfield for an ocean with a Biot sediment over an elastic substrate // ZAMM. - 1997. - P. 121-135.
- [11] *Buckingham M.J.* Seismic wave propagation in rocks and marine sediments: a new theoretical approach. // 4th European Conference on Underwater Acoustics. - Rome: CNR-IDAC, 1998. - P. 301-306.
- [12] *Gilbert R.P., Mikelic A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part I // Nonlinear Analysis. - 2000. - V. 40. - P. 185-212.
- [13] *Clopeau T.H., Ferrin J.L., Gilbert R.P., Mikelic A.* Homogenizing the acoustic properties of the seabed: Part II // Mathematical and Computer Modelling. - 2001. - V. 33. - P. 821-841.
- [14] *Ferrin J.L., Mikelic A.* Homogenizing the acoustic properties of a porous matrix containing an incompressible inviscid fluids. // Math. Meth. Appl. Sci. - 2003. - V. 26. - P. 831-859.
- [15] *Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale convergence // Int. J. Pure and Appl. Math. - 2002. - No. 1. - P. 35-86.
- [16] *Meirmanov A.* Mathematical models for poroelastic flows. - Paris: Atlantis Press, 2013.

- [17] *Meirmanov A.* Nguetseng's two-scale convergence method for filtration and seismic acoustic problems in elastic porous media // *Siberian Mathematical Journal.* - 2007. - V. 48. - P. 519- 538.
- [18] *Meirmanov A.* Double porosity models in incompressible poroelastic media // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.* - 2010. - V. 20, No. 4. - P. 635- 659.
- [19] *Ovsyannikov L.V.* *Vvedenie v mekhaniku sploshnyh sred.* - Novosibirsk: Novosibirski Gosudarstvennyi universitet, 1977.

UDC 517.968.2

Zhunussova Zh.Kh.^{1*}, Nugmanova G.N.^{2**}, Moldanazarova U.²¹Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty²Eurasian National University named after L.N.Gumilev, Republic of Kazakhstan, Astana

E-mail: *zhzhkh@mail.ru, **nugmanovagn@gmail.com

About gauge equivalent of the generalized Landau-Lifshitz equation

In mathematics an inverse scattering transformation is a method for solving some nonlinear equations with partial derivatives. Discovering of the method became one of the crucial events in mathematical physics in the last 40 years [1]–[6]. The method presents a nonlinear analogue, in a sense generalized Fourier transformation, which is applied to solve a lot of linear equations with particular derivatives. Title "inverse scattering problem" is originated from key idea of recovery time evolution of the potential from time evolution its scattering data: inverse scattering is related to the problem about recovery of the potential from its scattering matrix, in difference from direct scattering the problem of finding a scattering matrix of potential. The inverse scattering transformation can be applied to many co-called exactly decided models, i.e. completely integrable infinite systems. Firstly it was presented by Clifford S. Gardner, John M. Greene and Martin D. Kruskal and others (1967, 1974) for Korteweg de Vries equation, and soon spread to nonlinear Scrodinger equation, sine-Gordon equation and Toda chain equation. Later the method was used to solve many another equations, such that Kadomtsev-Petviashvili equation, Ishimori equation, Dime equation etc. Characteristic property of solutions obtained by inverse scattering method is existence of solitons, solutions reminding as particles as waves, which do not have any analogues for linear equations with particular derivatives and are applied to nonlinear optics and plasma physics, and its quantum version describes many-particle system with δ -shaped interaction.

Key words: spin system, soliton, inverse scattering transformation, integrable systems, compatibility condition, Lax pair.

Жунусова Ж.Х., Нугманова Г.Н., Молданазарова У.

О калибровочном эквиваленте обобщенного уравнения Ландау-Лифшица

В математике преобразованием обратного рассеяния является метод решения некоторых нелинейных уравнений с частными производными. Открытие данного метода стало одним из самых важных событий в математической физике в последние 40 лет [1]–[6]. Метод представляет собой нелинейный аналог, а в каком-то смысле обобщения преобразования Фурье, которое само по себе применяется для решения многих линейных уравнений в частных производных. Название "метод обратной задачи рассеяния" происходит от ключевой идеи восстановления временной эволюции потенциала от временной эволюции его данных рассеяния: обратное рассеяние относится к задаче о восстановлении потенциала от его матрицы рассеяния, в отличие от прямого рассеяния задача нахождения матрицы рассеяния от потенциала. Обратное преобразование рассеяния может быть применено ко многим из так называемых точно решаемых моделей, то есть вполне интегрируемых бесконечномерных систем. Впервые он был представлен Клиффорда С. Гарднер, Джон М. Грином, и Мартин Д. Крускала и др. (1967, 1974) для уравнения Кортевега-де Фриза, и вскоре распространяется на нелинейное уравнение Шредингера, уравнение синус-Гордона и уравнения цепочки Toda. Позднее данный метод был использован для решения многих других уравнений, таких как уравнение Кадомцева-Петвиашвили, уравнение Ишимори, уравнение Дим, и так далее. Характерным свойством решений, полученных методом обратного рассеяния является существование солитонов, решений, напоминающих как частицы и волны, которые не имеют аналогов для линейных уравнений с частными производными и применяются в нелинейной оптике и в физике плазмы, а его квантовый вариант описывает многочастичную систему с δ -образным взаимодействием.

Ключевые слова: спиновая система, солитон, преобразование обратного рассеяния, интегрируемые системы, условие совместности, пара Лакса.

Жүнісова Ж.Х., Нұғманова Г.Н., Молданазарова У.

Жалпылама Ландау-Лифшиц теңдеуінің калибрлі эквиваленттігі туралы

Кейбір сызықты емес дербес туындылы теңдеулерді шешудің әдісі математикада кері сейілу түрлендіруі деп аталады. Осы әдістің ашылуы соңғы 40 жылдағы математикалық физикадағы елеулі оқиғалардың бірі [1]-[6]. Бұл әдіс өздігінен сызықты емес аналог, ал кей мағынада дербес туындылы сызықты теңдеулерді шешу үшін қолданылатын Фурье түрлендіруінің жалпылауы болып табылады. "Кері сейілу есебінің әдісі" атауы сейілу берілгендерінің уақыт эволюциясынан уақыт эволюциясының потенциалының қайта құрылуының негізгі идеясын құрайды: тікелей сейілуге қарағанда, потенциалдан сейілу матрицасының табылу есебі кері сейілудің сейілу матрицасынан потенциалды қайта құру есебіне қатысты қолданылады. Көптеген нақты шешілетін моделдерге немесе интегралданатын ақырсыз жүйелерге кері сейілу теңдеулерді қолдануға болады. Алғаш рет ол Клиффорд С. Гарднер, Джон М. Грин, Мартин Д. Крускал және басқаларымен (1967, 1974) Кортвег де Фриз теңдеуі үшін ұсынылды, кейін Шредингердің сызықты емес теңдеуіне, синус-Гордонның теңдеуіне және Тода шынжырына таралды. Кейін осы әдіс Кадомцев-Петвиашвили теңдеуі, Ишимори теңдеуі, Дим теңдеуі, т.с.с көптеген теңдеулерді шешу үшін қолданылды. Кері сейілу әдісі арқылы алынған шешімдердің характеристикалық қасиеттері болып солитондардың, дербес туындылы сызықты теңдеулерге аналогы жоқ бөлшектер мен толқын секілді шешімдердің бар болуы саналады және сызықты емес оптика мен плазма физикасында қолданылады, ал оның кванттық түрі б-түрлі өзара әсерлі көпбөлшекті жүйені сипаттайды.

Түйін сөздер: спиндік жүйе, солитон, кері сейілу түрлендіруі, интегралданатын жүйе, үйлесімділік шарты, Лакс жұбы.

1 Derivative nonlinear Schrodinger equation

Derivative nonlinear Schrodinger equation-I;

$$\phi_t + i\phi_{xx} + (|\phi|^2 \phi)_x = 0 \quad (1)$$

compatibility condition of the linear differential equations

$$\Phi_x = U\Phi \quad (2)$$

$$\Phi_t = V\Phi, \quad (3)$$

where U , V can be expressed in the form

$$U = -i\lambda^2 \sigma_3 + \lambda \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ -\phi^* & 0 \end{pmatrix} \quad (3a)$$

$$V = -(2i\lambda^4 - i|\phi|^2 \lambda^2) \sigma_3 + 2\lambda^3 \begin{pmatrix} 0 & \phi \\ -\phi^* & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & i\phi_x - |\phi|^2 \phi \\ i\phi_x^* + |\phi|^2 \phi^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (3b)$$

Derivative nonlinear Schrodinger equation-II;

$$q_t - iq_{xx} + |q|^2 q_x = 0 \quad (4)$$

compatibility condition of the linear differential equations;

$$Q_x = WQ \quad (5a)$$

$$Q_t = ZQ, \quad (5b)$$

where W and Z the following matrixes

$$W = (-i\lambda^2 + \frac{i}{4}|q|^2)\sigma_3 + \lambda \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q^* & 0 \end{pmatrix} \quad (6a)$$

$$Z = \left(-2i\lambda^4 + i|q|^2\lambda^2 + \frac{1}{4}(qq_x^* - q^*q_x) - \frac{i}{8}|q|^4 \right)\sigma_3 + 2\lambda^3 \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q^* & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & iq_x - |q|^2q/2 \\ iq_x^* + |q|^2q^*/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6b)$$

here $\phi(t, x)$ and $q(t, x)$ is a complex function (classic charged field), and $|\phi|^2 = \phi\phi^*$, $|q|^2 = qq^*$, where $*$ mens complex conjugation.

2 Spin system which is gauge equivalent the derivative nonlinear Schrodinger equation

In the chapter we propose a new spin model which is gauge equivalent the derivative nonlinear Schrodinger equation.

We present the notion of gauge equivalent introduced by L.Takhtadzhyan and V.Zakharov as the following definitions [1]:

Definition 1. Equations allowed the Lax pair

$$U_{jt} - V_{jx} + [U_j, V_j] = 0, \quad j = 1, 2$$

or

$$\Phi_x = U_j\Phi$$

$$\Phi_t = V_j\Phi$$

are called by integrable.

Definition 2. Integrable equations are called gauge equivalent, if they are connected by transformation $\Phi_1 = g^{-1}\Phi_2$, $U_1 = gU_2g^{-1} + g_xg^{-1}$, $V_1 = gV_2g^{-1} + g_tg^{-1}$ with matrix function g , not dependents on symbols pseudo-characters by other nondependable values operators entering to U и V .

We formulate the theorem.

Theorem 1. Spin system

$$S_t - iSS_{xx} - \frac{i}{2}tr(S_x^2) - 4\lambda_0^2 \left(1 - \frac{1}{32\lambda_0^4}tr(S_x^2) \right) S_x = 0 \quad (7)$$

with boundary condition

$$S^2 = I \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

is gage equivalent the derivative nonlinear Schrodinger equation-I (1).

Proof. We consider gauge transformation

$$\psi = g^{-1}\Phi, \quad (8)$$

where $\Phi(x, t)$ is a solution of the system equation (2), and $\psi(x, t)$ is a function of a class continuous functions which is solution of origin Lax pair corresponding equivalent spin system. Let $g(x, t)$ be a solution of the system (2) at $\lambda = \lambda_0, \lambda_0 = const: g = \Phi|_{\lambda=\lambda_0}$.

Derivatives by x from (8) give the following

$$\psi_x = -g^{-1}g_xg^{-1}\Phi + g^{-1}\Phi_x, \quad (9)$$

where $\Phi = g\psi$ и Φ_x is taken from system (2).

We introduce the notation [1]

$$S = g^{-1}\sigma_3g \quad (10)$$

where σ_3 is a Pauli matrix

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Then from (9a) with take into account (10) we obtain

$$\psi_x = \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)S + \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda_0}SS_x \right) \psi. \quad (11)$$

Now we calculate the derivative by t from (8)

$$\psi_t = -g^{-1}g_tg^{-1}\Phi + g^{-1}\Phi_t. \quad (12)$$

This equation is transformed with consideration (2) and (10)

$$\begin{aligned} \psi_t = & \left(- \left[2i(\lambda^4 - \lambda_0^4) - \frac{i}{8\lambda_0^2}(\lambda - \lambda_0)^2 tr(S_x^2) \right] S + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\lambda^3 - 2\lambda_0^3 + \lambda_0^2\lambda}{\lambda_0} - \frac{(\lambda - \lambda_0)}{16\lambda_0^3} tr(S_x^2) \right] SS_x + \frac{i(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0} S_{xx} \right) \psi. \end{aligned} \quad (13)$$

Thus, we solved the problem of finding the Lax pair which is gauge equivalent to linear system (2), it is Lax pair of the derivative nonlinear Schrodinger equation-I. The next step is reveal a spin system corresponding to Lax pair. We consider compatibility condition of the system (11), i.e. $\psi_{xt} = \psi_{tx}$.

$$\begin{aligned} \psi_{xt} = & \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)S_t + \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda_0}(SS_x)_t \right) \psi + \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)S + \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda_0}SS_x \right) \psi_t \\ \psi_{tx} = & \left(-2i(\lambda^4 - \lambda_0^4)S_x - \frac{i}{8\lambda_0^2}(\lambda - \lambda_0)^2(Str(S_x^2))_x + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda^3 - 2\lambda_0^3 + \lambda_0^2\lambda}{\lambda_0}(SS_x)_x - \frac{(\lambda - \lambda_0)}{16\lambda_0^3}(SS_x tr(S_x^2))_x + \frac{i(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0}S_{xxx} \right) \psi + \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(- \left[2i(\lambda^4 - \lambda_0^4) - \frac{i}{8\lambda_0^2}(\lambda - \lambda_0)^2 \text{tr}(S_x^2) \right] S + \right. \\
& \left. + \left[\frac{\lambda^3 - 2\lambda_0^3 + \lambda_0^2\lambda}{\lambda_0} - \frac{(\lambda - \lambda_0)}{16\lambda_0^3} \text{tr}(S_x^2) \right] SS_x + \frac{i(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0} S_{xx} \right) \psi_x
\end{aligned} \tag{15}$$

Equating (14) and (15) to each other with take into account the system (11) and (13), as well as expansion in powers λ we obtain the equation (7). Since the equations at $\lambda^5, \lambda^4, \lambda^3$ are equal to zero and we have combined the equations at λ, λ^0 , then the obtained equation and equation at λ^2 are the same.

Theorem 1 is proved.

Theorem 2. Spin system which gauge equivalent the derivative nonlinear Schrodinger equation-II is equation (7).

Proof. We consider the gauge transformation

$$r = g^{-1}Q \tag{16}$$

where $Q(x, t)$ is a solution of the system equation (5), and $r(x, t)$ is a function of a class continuous functions which is solution of origin Lax pair corresponding equivalent spin system. Let $g(x, t)$ be a solution of the system (5) at $\lambda = \lambda_0, \lambda_0 = \text{const}: g = \Phi|_{\lambda=\lambda_0}$.

Derivative by x of (16) gives the following

$$r_x = -g^{-1}g_xg^{-1}Q + g^{-1}Q_x, \tag{17}$$

where $Q = gr$ и Q_x is taken of the system (5).

Then from (17) with consideration (10) we get

$$r_x = \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)S + \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda_0} SS_x \right) r. \tag{18}$$

Now we calculate the derivative by t from (16)

$$r_t = -g^{-1}g_tg^{-1}Q + g^{-1}Q_t. \tag{19}$$

This equation is transformed with taking into account (2) and (10)

$$\begin{aligned}
r_t = & \left(\left[-2i(\lambda^4 - \lambda_0^4) + \frac{i}{8\lambda_0^2}(\lambda^2 - 3\lambda_0^2 + 2\lambda\lambda_0) \text{tr}(S_x^2) \right] S + \right. \\
& \left. + \left[\frac{\lambda^3 - 2\lambda_0^3 + \lambda\lambda_0^2}{\lambda_0} - \frac{(\lambda - \lambda_0)}{16\lambda_0^3} \text{tr}(S_x^2) \right] SS_x + \frac{i(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0} S_{xx} \right) r.
\end{aligned} \tag{20}$$

We consider the compatibility condition of the system (18) и (20), т.е. $r_{xt} = r_{tx}$.

$$r_{xt} = \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)S_t + \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda_0} (SS_x)_t \right) r + \left(-i(\lambda^2 - \lambda_0^2)S + \frac{\lambda - \lambda_0}{2\lambda_0} SS_x \right) r_t \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
r_{tx} = & \left(-2i(\lambda^4 - \lambda_0^4)S_x + \frac{i}{8\lambda_0^2}(\lambda^2 - 3\lambda_0^2 + 2\lambda\lambda_0)(Str(S_x^2))_x + \right. \\
& + \frac{\lambda^3 - 2\lambda_0^3 + \lambda\lambda_0^2}{\lambda_0}(SS_x)_x - \frac{(\lambda - \lambda_0)}{16\lambda_0^3}(SS_x tr(S_x^2))_x + \frac{i(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0}S_{xxx} \left. \right) r + \\
& + \left(\left[-2i(\lambda^4 - \lambda_0^4) + \frac{i}{8\lambda_0^2}(\lambda^2 - 3\lambda_0^2 + 2\lambda\lambda_0)tr(S_x^2) \right] S + \right. \\
& + \left. \left[\frac{\lambda^3 - 2\lambda_0^3 + \lambda\lambda_0^2}{\lambda_0} - \frac{(\lambda - \lambda_0)}{16\lambda_0^3}tr(S_x^2) \right] SS_x + \frac{i(\lambda - \lambda_0)}{2\lambda_0}S_{xx} \right) r_x
\end{aligned} \tag{22}$$

By equating (21) and (22) to each other and substituting the expressions r_t , r_x , expansion by powers λ we get equation (7). Since the equations at λ^5 , λ^4 , λ^3 are equal to zero and we have composed the equations at λ , λ^0 , the the obtained equation and equation at λ^2 are the same.

Theorem 2 is proved.

3 Conclusion

Derivative Heisenberg models which are equivalent two type derivative nonlinear Schrodinger equation obtained in this work. Estimated results have shown, that two type derivative nonlinear Schrodinger equation, considered in the work, corresponds the same derivative spin model.

This work was supported by the grant of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project 0893/GF4 MES RK)

References

- [1] *Takhtadzhyan L., Fadeev L.* Hamiltonian approach in the theory of solitons -M.: Nauka, 1986, -528 p.
- [2] *R. Myrzakulov, G.K. Mamyrbekova, G.N. Nugmanova, M. Lakshmanan.* // Phys. Lett A. - 2014. - V. 378, -P. 2118.
- [3] *Myrzakulov R., Mamyrbekova G. K., Nugmanova G. N., Lakshmanan M.* Integrable (2+1)-dimensional spin models with self-consistent potentials // Symmetry. - 2015. - V. 7(3), -P. 1352-1375.
- [4] *Zh. Zhunussova.* Nonlinear PDE as Immersions // Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Springer, Series: Trends in Mathematics, ISBN 978-3-319-12576-3, - 2015. -P. 289-297.
- [5] *Zh. Zhunussova.* About domain wall solution of the integrated spin system // KazNU Bulletin, ser. math., mech., inf. - 2014. - № 2(81). - P.46-51.
- [6] *Yersultanova Z.S., Zhassybayeva M., Yesmakhanova K., Nugmanova G., Myrzakulov R.* Darboux Transformation and Exact Solutions of the integrable Heisenberg ferromagnetic equation with self-consistent potentials // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. - 2016. - V. 13. -P. 1550134.

УДК 519.63; 519.684; 504.3.054

Аскарова З.Б., Асылбекулы А., Большакова Н.А., Жакебаев Д.Б.*

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы

E-mail: *daurjaz@mail.ru

Моделирование динамики твердых частиц в облаке, образовавшемся при наземном взрыве ракеты-носителя

В работе рассматривается моделирование динамики твердых частиц почвы в облаке, образовавшемся при наземном взрыве. Моделирование наземного взрыва для несущей фазы проводится на основе отфильтрованного нестационарного трехмерного уравнения Навье-Стокса, а также для моделирования дисперсной фазы осуществляется уравнением движения частицы с учетом силы взрыва. Построен численный алгоритм для решения задачи динамики твердых частиц в облаке, образовавшемся при наземном взрыве ракеты - носителя. Численное решение уравнения для движения частиц осуществляется конечно-разностным методом с использованием пента – диагональной матрицы. Для аппроксимации конвективных и диффузионных членов уравнений используется схема четвертого порядка точности $O(t^3, h^4)$. Уравнение для давления решается методом Фурье, в комбинации с матричной прогонкой. Разработанный численный алгоритм реализован в виде программного кода на языке Фортран. Полученные результаты изменения траектории частиц по времени в зависимости от начальной турбулентной энергии взрыва ракеты-носителя (РН) позволяют достаточно точно рассчитать динамику твердых частиц по времени и определить их траекторию. Данная модель может быть применена в решениях экологических проблем, связанных с техногенными процессами и аварийными ситуациями. Данная модель может быть применена в решении проблемы в экологических задачах, связанных с техногенными процессами и аварийными ситуациями.

Ключевые слова: моделирование, частицы, взрыва, ракета - носитель, конечно-разностный метод, турбулентность.

Askarova Z.B., Assylbekuly A., Bolshakova N.A., Zhakebayev D.B.

Modeling the dynamics of solid particles in the cloud formed at ground explosion booster

This work deals with the modelling of dynamics of solid soil particles in the cloud formed by ground explosion. Simulation for ground blast carrier phase is based on three-dimensional unsteady filtered Navier-Stokes equations for simulation and the dispersed phase particles is carried out by the equation of motion with regard explosion force. A numerical algorithm for solving the dynamics of the solid particles in the cloud formed by the explosion of the rocket carrier ground. The numerical solution of the equations for the motion of the particles using the finite difference method using a penta - diagonal matrix. To approximate the convective and diffusive terms of the equations the fourth order accuracy scheme $O(t^3, h^4)$ is used. The pressure equation is solved by the Fourier method, in combination with the matrix sweep methods. A numerical algorithm is implemented in the form of programm code in Fortran. The results obtained by changing the trajectories of particles of time depending on the initial turbulent energy carrier rocket explosion (CR) allows to calculate accurately the dynamics of solids in time and determine their trajectory.

Key words: modeling, particles, explosion, booster, finite-difference method, turbulence.

Асқарова З.Б., Асылбекұлы А., Большакова Н.А., Жакебаев Д.Б.

Зымыран тасымалдаушысының жер бетінде жарылыс кезіндегі бұлтта түзілген қатты бөлшектердің динамикасын модельдеу

Бұл жұмыс жарылыс кезіндегі бұлтта түзілген топырақтағы қатты бөлшектердің динамикасының моделін қарастырады. қозғалмалы фаза үшін жер бетінде жарылыс кезіндегі модельге филтрирленген стационар емес үш өлшемді Навье Стокс теңдеуі алынады, сонымен қатар дисперсті фазаны модельдеу үшін жарылыс күшін ескере отырып бөлшектердің қозғалыс теңдеуі арқылы жүзеге асырылады. Зымыран тасымалдаушысының жер бетінде жарылыс кезіндегі бұлтта түзілген топырақтағы қатты бөлшектердің динамикасына сандық алгоритм тұрғызылған. Бөлшектердің қозғалыс теңдеуі үшін сандық шешімі ақырлы айрымдылық әдіспен қоса пента диагональдік матрицамен жүзеге асады. қозғалыстың конвективті және диффузиялық мүшелерін аппроксимациялау үшін төртінші дәлдіктегі сұлба қолданылады $O(t^3, h^4)$, қысым өрісінің теңдеуі матрицалық қуалаумен бірге Фурье әдісімен шешіледі. Сандық алгоритм Fortran бағдарламалық код түрінде жүзеге асырылады. Алынған нәтижелер зымыран тасымалдаушысының (ЗТ) турбуленттік жарылыс энергиясының басапқы мәндеріне байланысты бөлшектердің уақыт бойынша траекторияларының өзгерісі арқылы қатты бөлшектердің уақыт бойынша динамикасын және олардың траекториясын дәл есептеуге мүмкіндік береді. Бұл модель техногендік процестерді және апат жағдайларына байланысты экологиялық проблемаларды шешу үшін қолданылуы мүмкін.

Түйін сөздер: модельдеу, қатты бөлшектер, жарылыс, зымыран тасымалдаушы, ақырлы-айрымдылық әдіс, турбуленттік.

1 Введение

Аварийные падения ракет-носителей часто сопровождаются наземным взрывом, при котором в атмосферу выбрасывается большое количество газообразных и твердых частиц, образуя облако, вызывающее у населения панику и опасение за свое здоровье. На сегодняшний день природа, поведение такого облака и его влияние на окружающую среду не изучены.

Как показали последние аварии ракет-носителей «Протон» в 2007 и в 2013 годах и РС-20 (РН «Днепр») в 2006 году, отсутствие информации о свойствах и динамике облака осложняет оперативный анализ складывающейся экологической ситуации и создает трудности при оценке последствий аварий на территории Республики Казахстан.

Проведение экспериментальных замеров механического и химического составов облака, его температуры, взаимодействия с окружающей средой, в связи со скоротечностью процесса его образования и рассеивания не представляется возможным. В связи с этим единственным методом для решения данной проблемы является моделирование. Это стало основанием проведения научной работы по теме «Разработка программного комплекса моделирования динамики облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя», выполняемой по Договору № 341 от 12 февраля 2015 г. между Комитетом науки Министерства образования Республики Казахстан и РГП «НИЦ «Гарыш-Экология», в рамках государственного заказа по бюджетной программе 055 «Научная и (или) научно-техническая деятельность», подпрограммы 101 «Грантовое финансирование научных исследований». Цель работы - разработать динамическую модель состава и переноса облака, образовавшегося при наземном взрыве ракеты-носителя с учетом физических и химических факторов, протекающих внутри облака.

В данной статье приводится один из этапов моделирования – создание трехмерной математической модели динамики твердых частиц и ее численная реализация.

В первые моменты после взрыва раздробленный грунт из взрывной полости выносятся в область детонации и поднимается над поверхностью в виде плотного газогрунтового «султана». По мере расширения высокотемпературного вещества «султана» и вовлечения в него окружающего воздуха формируется первичный взрывной выброс, размеры которого достигают в поперечнике десятки метров. Этот размер является начальным радиусом сферического перегретого газового клуба, покидающего первичный выброс под действием сил всплывания. Одновременно с отрывом сферического клуба происходит вылет по инерции за пределы первичного выброса твердой его фазы – грунта и фрагментов конструкций изделия. Часть выброшенного грунта образует кольцевой вал вокруг воронки. Другая часть грунта, в зависимости от размера и массы раздробленных частиц разлетается от места взрыва. Невозможность измерения дисперсности почвенных частиц объясняется сложностью обнаружения раздробленных взрывом частиц почвы на поверхности земли. По данным наблюдений основной вклад в крупно-дисперсную фазу выброса на расстояниях до 1 км от эпицентра дают частицы почвы диаметром более 1000 мкм, на расстояниях 2 – 5 км – частицы диаметром 100 – 500 мкм. Основная масса частиц диаметром менее 100 мкм выпадает из взрывного облака на удалениях более 5 км [1].

Размеры образовавшейся воронки зависят главным образом от мощности взрыва и свойств почво-грунтов. Мощность взрыва и глубина воронки связаны соотношением [2]:

$$q = K \cdot W^3(0,4 + 0,6n^3) \quad (1)$$

$$W = \sqrt[3]{\frac{q}{1,35n}} \quad (2)$$

где q – мощность взрыва; K – расчетный удельный расход ВВ, кг/м³ (для суглинков в среднем 1,35); n – показатель действия взрыва, W – глубина воронки, м.

Радиус воронки может быть определен по формуле

$$R = \frac{W}{K_B} \quad (3)$$

где K_B – коэффициент, зависящий от свойств грунта и равный 0,4 – 0,5 для сухого песка; 0,45 – 0,55 для влажного песка, супеси и суглинка; 0,5 – 0,7 для глины [3].

Объем выброшенного грунта соответствует объему образовавшейся воронки (Рисунок 1).

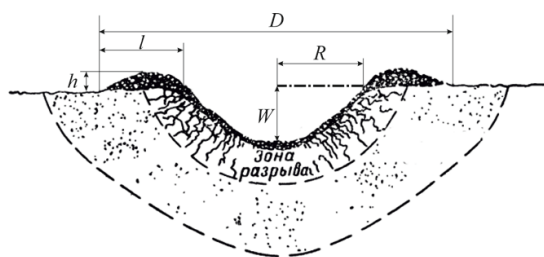


Рисунок 1 - Характерные размеры воронки: W – глубина воронки, R – радиус воронки, D – полный диаметр зоны, включающий кольцевой вал, h – высота вала, l – ширина вала.

Приближенная величина объема воронки, если принять, что она имеет форму параболоида, определяется формулой [4]

$$V_{vor} = \frac{\pi W(2R)^2}{8} \quad (4)$$

где W – глубина воронки, м; R – радиус воронки, м.

Если известен объем почвы находим массу почвы

$$M = V\rho \quad (5)$$

где M – общая масса выброшенной почвы, кг; V – объем почвы, м³; ρ – плотность почвы, кг/м³.

$$M = M_1 + M_2 \quad (6)$$

где M_1 – масса почвы, образовавшая кольцевой вал, M_2 – масса почвы, выпавшей за пределами воронки.

Полный диаметр зоны, включающий кольцевой вал, составляет примерно два диаметра воронки или четыре радиуса, а высота вала примерно равна одной четвертой части глубины воронки [4].

$$D \approx 4R \quad (7)$$

$$h = 0.25W \quad (8)$$

В соответствии с формулой (7) ширина вала l приблизительно будет равна радиусу воронки R , т.е. $l \sim R$.

При расчете объема кольцевого вала используется формула

$$V_{val} = Sh \quad (9)$$

где площадь вала $S = \pi R^2$, м²; h – высота вала, м.

Масса почвы, образующей вал, равна

$$M_1 = \pi R^2 h \rho \quad (10)$$

Масса почвы, выпавшей за пределами воронки равна

$$M_2 = M - M_1 \quad (11)$$

На этапе развития взрыва образуется огненный шар, имеющий сложную структуру: внутренняя область занята продуктами взрыва с плотностью на порядок меньше плотности невозмущенного воздуха и температурой 800 – 1000 К при взрыве РН «Протон»; внешняя область представляет собой воздушный шаровой слой, в котором температура падает от 1000 К на внутренней границе слоя до температуры невозмущенной атмосферы на его внешней границе [1]. Размеры огненного шара прямо пропорциональны мощности взрыва. Взаимосвязь между средним радиусом шара и мощностью взрыва выражена следующей формулой

$$R = 43,5q^{0,4} \quad (12)$$

где R – радиус огненного шара в метрах, q – мощность взрыва в килотоннах [4]. Объем шара находится по известной формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{13}$$

Продукты взрыва и частицы поднятой взрывом почвы за счет турбулентного перемешивания формируют газо-пылевое облако. В первые моменты после образования облако начинает подниматься до тех пор, пока не начинает проявляться стратификация среды. Объем облака за счет диффузионных процессов увеличивается. Для стандартной атмосферы высота поднятия облака связана с выделившейся энергией соотношением

$$H = 1,87E^{\frac{1}{4}} \tag{14}$$

где H – высота зависания, м; E – энергия, Дж [5].

Расчетные параметры формулы (1) - (14) объединены в таблицы баз данных, необходимых для расчета начальных и граничных условий математической модели.

2 Постановка задачи

Расчеты проводились в прямоугольной области (Рисунок 2). На рисунке представлена начальная структура облака, сформировавшегося от энергии взрыва. Данные области G получены из формул (1) - (14).

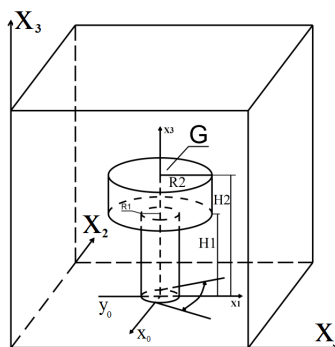


Рисунок 2 - Схематичная иллюстрация постановки задачи.

Численное моделирование движения несущей фазы описывается трехмерными уравнениями Навье-Стокса

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_p, \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \\ \tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j, \\ f_p = - \sum_{n=1}^{N_p} \frac{m_p}{\tau_p} (u_i - v_{i,n}) \delta(x_i - y_{i,n}). \end{array} \right. \tag{15}$$

где \bar{u}_i – компоненты скорости, \bar{p} – давление, t – время, $Re = Lu/\nu$ – число Рейнольдса, u – характерная скорость, L – характерная длина, ν – кинематический коэффициент вязкости, ρ – плотность, f_p – сила твердых частиц, $\tau_{i,j}$ – подсеточный тензор, отвечающий за мелкомасштабные структуры, который нужно моделировать, $i, j = 1, 2, 3$. Для моделирования подсеточного тензора используется вязкостная модель, которая представляется в виде:

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2\nu_T \bar{S}_{ij},$$

где $\nu_T = C_S \Delta^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{\frac{1}{2}}$ – турбулентная вязкость; C_S – эмпирический коэффициент; $\Delta = (\Delta_i \Delta_j \Delta_k)^{\frac{1}{2}}$ – ширина сеточного фильтра; $\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ – величина тензора скоростей деформации.

При движении в жидкости или газе тело всегда испытывает сопротивление со стороны среды, т.е. ускоряется или замедляется под действием относительного движения тела и среды. Сила сопротивления зависит как от свойств среды (плотности, вязкости), так и от скорости и формы тела. Впервые закон сопротивления для движущихся тел был получен Ньютоном в виде:

$$\vec{F}_s = -C_D S_m \rho \frac{|U|U}{2} \quad (16)$$

где \vec{F}_s – сила сопротивления; ρ – плотность потока; S_m – площадь сечения тела (максимальная площадь сечения тела в плоскости, перпендикулярной направлению его движения); $U = u_p - u$ – вектор скорости относительного движения тела и среды; u_p, u – векторы скорости тела и несущей среды; C_D – безразмерный коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела и режима движения.

В гравитационном поле на частицу (как покоящуюся, так и движущуюся) действует сила тяжести

$$F_g = \rho_p V_p g \quad (17)$$

где, V_p – объем частицы, ρ – плотность дисперсной среды, \bar{g} – вектор ускорения свободного падения.

Общее векторное уравнение движения частицы дисперсной фазы (твердой частицы, капли или пузырька) имеет вид второго закона Ньютона

$$m_p \frac{du_p}{dt} = F_g + F_s \quad (18)$$

где m_p – масса частицы; u_p – вектор скорости частицы; векторы сил, F_g, F_s действующих на частицу.

Для частицы сферической формы диаметром D :

$$m_p = \frac{\pi D^3}{6} \rho_p \quad (19)$$

где ρ_p – плотность материала частицы.

Требуется найти зависимость скорости частицы от расстояния и от времени. В нашем случае на частицу действует только сила сопротивления (несущая сила). Тогда с учетом (16)) уравнение изменения траектории частицы записывается в виде (20)

$$\frac{dx_p}{dt} = -\frac{3 C_D}{4} \frac{\rho}{d_p \rho_p} |u_p - u_i| (u_p - u_i) \quad (20)$$

3 Начальные и граничные условия

Для данной задачи важна энергия взрыва РН, определяемая тротильным эквивалентом $T\Theta_\tau$ находящегося на РН к моменту взрыва τ_1 запаса компонентов ракетного топлива (КРТ) [6]:

$$T\Theta_\tau = T\Theta_0 \left(1 - \frac{m_\Sigma \tau_1}{M_0}\right), \quad \text{кг} \quad (21)$$

где $T\Theta_0$ – тротильный эквивалент полностью заправленной РН в кг тринитротолуола (ТНТ); m_Σ – суммарный расход КРТ в полете, кг/с; M_0 – масса КРТ в полностью заправленной РН, кг.

$$M_b = (M_0 - m_\Sigma \tau_1) \frac{T\Theta_\tau}{T\Theta_0} \cdot k, \quad k = 0, 1 \quad (22)$$

где k – отношение энергий, выделяющихся при взрыве 1 кг ТНТ и сгорании 1 кг топлива. Для топливных пар «НДМГ – АТ» и «керосин – кислород» $k=0,1$ [7]. Полная энергия, выделяющаяся при взрыве РН, определяется соотношением (23):

$$A = M_b \cdot E_{KT}, \quad \text{Дж} \quad (23)$$

где E_{KT} – удельная теплота сгорания 1 кг топлива, Дж/кг, при этом $\sim 90\%$ выделяющейся при взрыве энергии расходуется на формирование ударной волны и $\sim 10\%$ – на сообщение скорости продуктам взрыва [7].

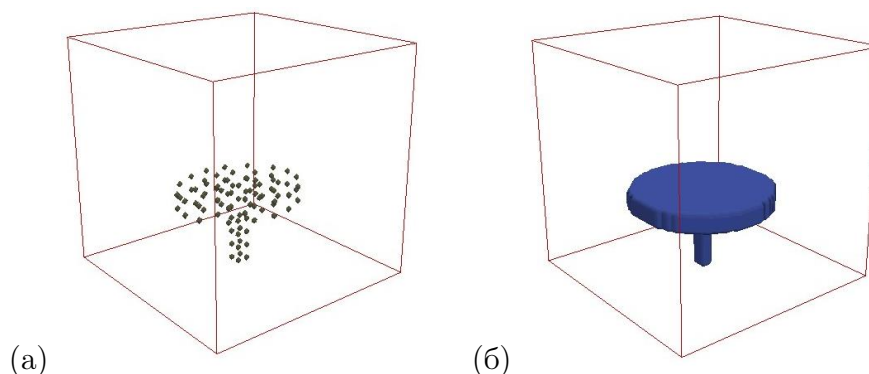


Рисунок 3 - Начальное распределение частиц почвы (а) и в облаке (б).

Начальные условия:

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t = 0) = u_p(x_1, x_2, x_3, t = 0) = u_0(x, y, z), x \in G$$

$$\bar{u}_i(x_1, x_2, x_3, t = 0) = u_p(x_1, x_2, x_3, t = 0) = 0, x \notin G, i = 1, 2, 3.$$

$$u_0(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{3}A \cdot \exp\left(-\frac{(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - y_0)^2}{R^2}\right)$$

$$\text{где } A = M_b \cdot E_{KT}, \quad R = \begin{cases} R_1^2 < (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - y_0)^2, & 0 < x_3 < H_1 \\ R_2^2 < (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - y_0)^2, & H_1 < x_3 < H_2. \end{cases}$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial u_i}{\partial n} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$u_i(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = u_p(x_1, x_2, x_3 = 0, t) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

4 Численный метод

Численное решение математической модели динамики твердых частиц почвы в облаке основанной на трехмерном уравнении Навье-Стокса и уравнении движения твердых частиц с учетом силы взрыва проведено по схеме расщепления по физическим параметрам в три этапа.

На первом этапе решается уравнение Навье-Стокса без учета давления. Для аппроксимации конвективных и диффузионных членов промежуточного уравнения для поля скоростей используется конечно-разностный метод в комбинации с пента-диагональной матрицей, который позволяет повысить порядок точности по времени и пространству $O(t^3, h^4)$ без введения изменений в количестве узлов. На втором этапе решается трехмерное уравнение Пуассона, полученное из уравнения неразрывности с учетом поля скоростей первого этапа методом матричной прогонки [8]. Полученное поле давления используется на третьем этапе для пересчета окончательных полей скоростей, значения которых применяются при решении уравнения движения твердых частиц и уравнения изменения траектории частиц.

Промежуточное поле скорости находится при использовании схемы Кранка-Николсона в комбинации с методом пятиточечной прогонки.

Рассмотрим горизонтальную составляющую компоненты скорости u_1 в точке сетки $(i + \frac{1}{2}jk)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_1 u_3)}{\partial x_3} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) - \\ &- \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \right) + f_p \end{aligned} \quad (24)$$

При применении схемы Кранка-Николсона уравнение (24) примет вид:

$$\begin{aligned} u_{1i+\frac{1}{2}jk}^{*n+1} - u_{1i+\frac{1}{2}jk}^n &= -\frac{3t}{2} [hx]_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \frac{t}{2} [hxp]_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} + t [ax]_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \\ &+ \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_1^2} \right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} + \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_2^2} \right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} + \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u_1^*}{\partial x_3^2} \right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - \\ &- \frac{3t}{2} [\tau x]_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \frac{t}{2} [\tau xp]_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} + f_p \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$[hx]_{i+\frac{1}{2}jk}^n = \left(\frac{\partial u_1 u_1}{\partial x_1}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \left(\frac{\partial u_1 u_2}{\partial x_2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \left(\frac{\partial u_1 u_3}{\partial x_3}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^n$$

$$[hxp]_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} = \left(\frac{\partial u_1 u_1}{\partial x_1}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} + \left(\frac{\partial u_1 u_2}{\partial x_2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} + \left(\frac{\partial u_1 u_3}{\partial x_3}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1}$$

$$[ax]_{i+\frac{1}{2}jk}^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^n \right]$$

$$[\tau x]_{i+\frac{1}{2}jk}^n = \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^n$$

$$[\tau xp]_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} = \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} + \left(\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} + \left(\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1}$$

Далее левую часть уравнения (25) обозначим через $q_{i+\frac{1}{2}jk}$

$$q_{i+\frac{1}{2}jk} \equiv u_{1i+\frac{1}{2}jk}^{*n+1} - u_{1i+\frac{1}{2}jk}^n \tag{26}$$

Найдем $u_{1i+\frac{1}{2}jk}^{*n+1}$ из уравнения (26)

$$u_{1i+\frac{1}{2}jk}^{*n+1} = q_{i+\frac{1}{2}jk} + u_{1i+\frac{1}{2}jk}^n$$

Заменяя все $u_{1i+\frac{1}{2}jk}^{*n+1}$ из уравнения (25) получим

$$\begin{aligned} q_{i+\frac{1}{2}jk} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_3^2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} = \\ = -\frac{3t}{2} [hx]_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \frac{t}{2} [hxp]_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} + 2 \cdot t [ax]_{i+\frac{1}{2}jk}^n - \\ - \frac{3t}{2} [\tau x]_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \frac{t}{2} [\tau xp]_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} + f_p \end{aligned} \tag{27}$$

Приведем уравнение (27) в вид

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right] q_{i+\frac{1}{2}jk} = d_{i+\frac{1}{2}jk} \quad (28)$$

где

$$d_{i+\frac{1}{2}jk} = -\frac{3t}{2} [hx]_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \frac{t}{2} [hxp]_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} + 2 \cdot t [ax]_{i+\frac{1}{2}jk}^n - \frac{3t}{2} [\tau x]_{i+\frac{1}{2}jk}^n + \frac{t}{2} [\tau xp]_{i+\frac{1}{2}jk}^{n-1} + f_p$$

Чтобы получить третий порядок точности по времени напишем

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right] \left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] \left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right] q_{i+\frac{1}{2}jk} = d_{i+\frac{1}{2}jk} \quad (29)$$

Чтобы определить $q_{i+\frac{1}{2}jk}$ уравнение (29) решается в 3-х этапах.

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right] A_{i+\frac{1}{2}jk} = d_{i+\frac{1}{2}jk}$$

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] B_{i+\frac{1}{2}jk} = A_{i+\frac{1}{2}jk}$$

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right] q_{i+\frac{1}{2}jk} = B_{i+\frac{1}{2}jk}$$

На первом этапе $A_{i+\frac{1}{2}jk}$ ищется в направлении координаты x_1 :

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right] A_{i+\frac{1}{2}jk} = d_{i+\frac{1}{2}jk}$$

$$A_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} = d_{i+\frac{1}{2}jk}$$

$$A_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{-A_{i+\frac{5}{2}jk}^{n+1} + 16 \cdot A_{i+\frac{3}{2}jk}^{n+1} - 30 \cdot A_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} + 16 \cdot A_{i-\frac{1}{2}jk}^{n+1} - A_{i-\frac{3}{2}jk}^{n+1}}{12\Delta x_1^2} = d_{i+\frac{1}{2}jk}$$

$$s_1 \cdot A_{i+\frac{5}{2}jk}^{n+1} - 16 \cdot s_1 \cdot A_{i+\frac{3}{2}jk}^{n+1} + (1 + 30 \cdot s_1) \cdot A_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - 16 \cdot s_1 \cdot A_{i-\frac{1}{2}jk}^{n+1} + s_1 \cdot A_{i-\frac{3}{2}jk}^{n+1} = d_{i+\frac{1}{2}jk} \quad (30)$$

где $s_1 = \frac{t}{24 \cdot \text{Re} \cdot \Delta x_1^2}$

Данное уравнение (30) решается методом пятиточечной прогонки, в результате применения которого находится $A_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1}$.

На втором этапе $B_{i+\frac{1}{2}jk}$ ищется в направлении координаты x_2 :

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] B_{i+\frac{1}{2}jk} = A_{i+\frac{1}{2}jk}$$

$$B_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} = A_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1}$$

$$B_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{-B_{i+\frac{1}{2}j+2k}^{n+1} + 16 \cdot B_{i+\frac{1}{2}j+1k}^{n+1} - 30 \cdot B_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} + 16 \cdot B_{i+\frac{1}{2}j-1k}^{n+1} - B_{i+\frac{1}{2}j-2k}^{n+1}}{12\Delta x_2^2} = A_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1}$$

$$s \cdot B_{i+\frac{1}{2}j+2k}^{n+1} - 16 \cdot s \cdot B_{i+\frac{1}{2}j+1k}^{n+1} + (1 + 30 \cdot s) \cdot B_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - 16 \cdot s \cdot B_{i+\frac{1}{2}j-1k}^{n+1} + s \cdot B_{i+\frac{1}{2}j-2k}^{n+1} = A_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} \quad (31)$$

где $s = \frac{t}{24 \cdot \text{Re} \cdot \Delta x_2^2}$

Данное уравнение (31) решается методом пятиточечной прогонки, в результате применения которого находится $B_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1}$.

На третьем этапе $q_{i+\frac{1}{2}jk}$ ищется в направлении координаты x_3 :

$$\left[1 - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right] q_{i+\frac{1}{2}jk} = B_{i+\frac{1}{2}jk}$$

$$q_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x_3^2}\right)_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} = B_{i+\frac{1}{2}jk}$$

$$q_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\text{Re}} \cdot \frac{-q_{i+\frac{1}{2}j+2k}^{n+1} + 16 \cdot q_{i+\frac{1}{2}j+1k}^{n+1} - 30 \cdot q_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} + 16 \cdot q_{i+\frac{1}{2}j-1k}^{n+1} - q_{i+\frac{1}{2}j-2k}^{n+1}}{12\Delta x_3^2} = B_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1}$$

$$s_2 \cdot q_{i+\frac{1}{2}j+2k}^{n+1} - 16 \cdot s_2 \cdot q_{i+\frac{1}{2}j+1k}^{n+1} + (1 + 30 \cdot s_2) \cdot q_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} - 16 \cdot s_2 \cdot q_{i+\frac{1}{2}j-1k}^{n+1} + s_2 \cdot q_{i+\frac{1}{2}j-2k}^{n+1} = B_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1} \quad (32)$$

где $s_2 = \frac{t}{24 \cdot \text{Re} \cdot \Delta x_3^2}$

Данное уравнение (32) решается методом пятиточечной прогонки, в результате применения которого находится $q_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1}$.

После того как мы определили значение $q_{i+\frac{1}{2}jk}^{n+1}$ мы находим $u_{i+\frac{1}{2}jk}^{*n+1}$.

$$u_{i+\frac{1}{2}jk}^{*n+1} = q_{i+\frac{1}{2}jk} + u_{i+\frac{1}{2}jk}^n$$

Компоненты скорости $u_{2ij+\frac{1}{2}k}^{*n+1}$ и $u_{3ijk+\frac{1}{2}}^{*n+1}$ находятся аналогично.

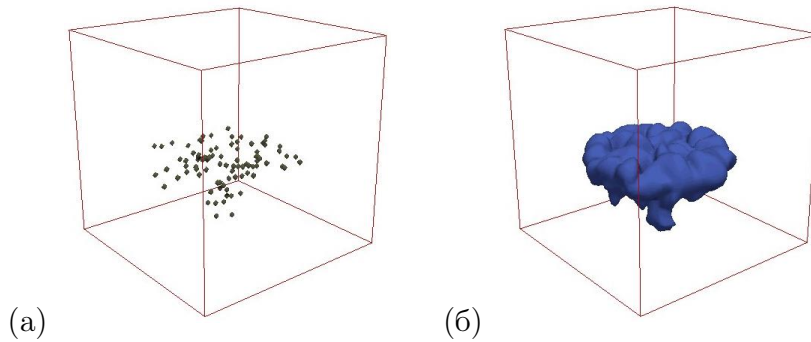


Рисунок 4 - Распределение частиц почвы (а) и в облаке (б) через 0.25 с после взрыва.

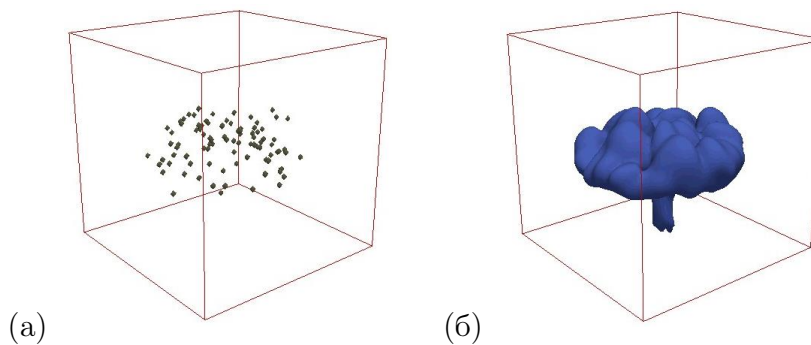


Рисунок 5 - Распределение частиц почвы (а) и в облаке (б) через 0.5 с после взрыва.

5 Результаты моделирования

Заданы следующие начальные и граничные условия: моделирование проводится в кубической области с физическим размером ребра куба 1280 м и расчетной сеткой 64x64x64; остатки КРТ на момент взрыва - 223,5 тонн и мощность взрыва $q = 40,8$. На рисунке 3 изображена начальная структура облака и распределение частиц почвы в облаке в результате энергии взрыва. Дальнейшее изменение динамики частиц происходит за счет турбулентной энергии. На рисунках 3 - 7 представлена динамика изменения объема облака, движение частиц и облака в различные моменты времени 0.25, 0.5, 0.75 и 1.0 секунд после взрыва. По рисункам видно, что от амплитуды турбулентной энергии зависит скорость частиц и поднятие облака.

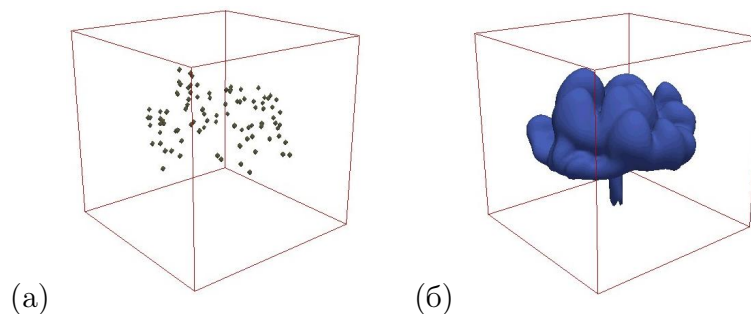


Рисунок 6 - Распределение частиц почвы (а) и в облаке (б) через 0.75 с после взрыва.

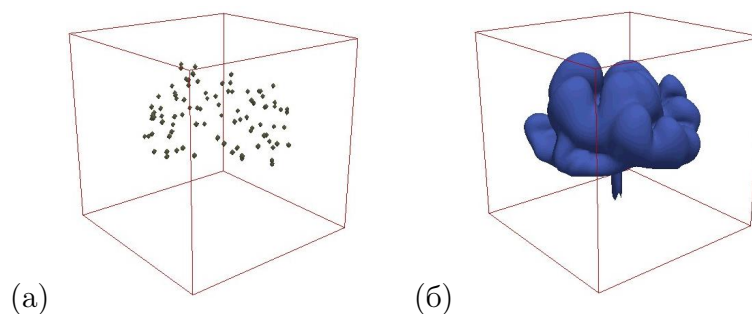


Рисунок 7 - Распределение частиц почвы (а) и в облаке (б) через 1.0 с после взрыва.

6 Заключение

Таким образом, разработана трехмерная математическая модель динамики твердых частиц в облаке, образовавшемся при наземном взрыве ракеты-носителя. С помощью расчетных параметров определены начальные и граничные условия. Разработан вычислительный алгоритм решения модели, основанный на трехмерном уравнении Навье-Стокса и уравнении движения твердых частиц с учетом силы взрыва. Проведена численная реализация модели.

Анализируя результаты моделирования можно сделать следующее заключение: при моделировании взрыва в пограничном слое атмосферы перенос твердых частиц происходит за счет турбулентной диффузии, распространяясь на весь пограничный слой. Полученные результаты позволяют достаточно точно рассчитать динамику твердых частиц по времени и определить их траекторию.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант №0383/ГФ4.

Литература

- [1] Адушкин В.В., Козлов С.И., Петров А.В. Экологические проблемы и риски воздействий ракетно-космической техники на окружающую среду. - М.: Анкил, 2002. - 640 с.
- [2] Под ред. Авдеева Ф.А. Технические правила ведения взрывных работ на дневной поверхности. - М.: Недра, 1972. - 239 с.
- [3] Под ред. Орленко Л.П. Физика взрыва. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - Т. 1. - 832 с.
- [4] Под ред. Соминского Е.М. Действие ядерного оружия. - М.: Воениздат, 1965. - 679 с.
- [5] Якуш С.Е. Гидродинамика и горение газовых и двухфазных выбросов в открытой атмосфере: дис. ... док. ф.-м. наук: 01.02.05. - Москва, 2000. - 336 с.
- [6] Бирюков Г. П., Смирнов В. И. Элементы теории проектирования ракетно космических комплексов. - М.: МАИ, 2003. - 288 с.
- [7] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. - М.: Наука, 1973. - 416 с.
- [8] Zhumagulov B.T., Zhakebayev D.B., Abdibekova A.U. The decay of mhd turbulence depending on the conducting properties of environment // Magnetohydrodynamics. -2014. -№2(50). -P. 121–138.

References

- [1] *Adushkin V.V., Kozlov S.I., Petrov A.V.* Environmental problems and the risk of exposure rocket and space technology on the environment. - M.: Ankil, 2002. - 640 p.
- [2] *Edited by Avdeev F.A.* Technical rules of blasting on the surface. - M.: Nedra, 1972. – 239 p.
- [3] *Edited by Orlenko L.P.* Explosion Physics. - M.: FIZMATLIT, 2002. - Т. 1. - 832 p.
- [4] *Edited by Sominskij E.M.* Operation of Nuclear Weapons. - M.: Voenizdat, 1965. – 679 p.
- [5] *Yakush S.E.* Hydrodynamics and burning of gas and two-phase emissions in an open atmosphere: dis. ... doctor of physico-mathematical Sciences: 01.02.05. - Moscow, 2000. – 336 p.
- [6] *Biryukov G. P., Smirnov V. I.* Elements of design theory of rocket space systems. - M.: MAI, 2003. – 288 p.
- [7] *Lavrentiev M. A., Shabat B. V.* Problems of hydrodynamics and their mathematical models. - M.: Nauka, 1973. – 416 p.
- [8] *Zhumagulov B.T., Zhakebayev D.B., Abdibekova A.U.* The decay of mhd turbulence depending on the conducting properties of environment // Magnetohydrodynamics. -2014. -№2(50). -P. 121–138.

УДК 519.63; 519.684

Исахов А.А.

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы
E-mail: alibek.issakhov@gmail.com

Оценка воздействия функционирования тепловой электростанции на окружающую среду методами математического моделирования

В работе представлена оценка воздействия функционирования тепловой электростанции на окружающую среду методами математического моделирования, которая решается уравнениями Навье - Стокса и температуры для несжимаемой жидкости в стратифицированной среде, основанные на методе расщепления по физическим параметрам, которые аппроксимируются методом контрольного объема. Численный алгоритм для решения уравнений Навье-Стокса и переноса температуры выглядит таким образом: на первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится 5-шаговым методом Рунге - Кутта. На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Якоби. На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления. На четвертом шаге численно решается уравнения переноса температуры также как уравнения движения 5-шаговым методом Рунге - Кутта. Алгоритм задачи распараллелен на высокопроизводительной системе. Полученные численные результаты трехмерного стратифицированного турбулентного течения позволяет выявить качественно и приближенно количественно основные закономерности гидротермических процессов происходящих в водоемах-охладителях.

Ключевые слова: стратифицированная среда, уравнения Навье-Стокса, эксплуатационная мощность, Экибастузский ГРЭС-2, метод конечных объемов, метод Рунге-Кутта, озеро Шандаксор.

Issakhov A.A.

Assessing the operation impact of thermal power plants on the environment by mathematical modeling method

The paper presents an assessment of the operation impact of thermal power plants on the environment by mathematical modeling method, which is solved by the Navier - Stokes and temperature equations for an incompressible fluid in a stratified medium, based on the projection method which are approximated by control volume method. A numerical algorithm for solving the Navier-Stokes and the temperature transport equations are as follows: in the first stage it is assumed that the transfer of momentum is carried out only by convection and diffusion. The intermediate velocity field is solved by 5-step Runge - Kutta method. In the second stage, based on the found intermediate velocity field, is solved the pressure field. Poisson equation for the pressure field is solved by Jacobi method. In a third step it is assumed that the transfer is carried out only by the pressure gradient. The fourth step numerically solved temperature transfer equation as the momentum equation by 5-step Runge - Kutta method. The algorithm is parallelized on high-performance systems. The obtained numerical results of three-dimensional stratified turbulent flow reveals qualitatively and quantitatively approximate the basic laws of hydrothermal processes occurring in the aquatic environment.

Key words: stratified environment, the Navier-Stokes equations, operational capacity, Ekibastuz GRES-2, finite volume method, Runge-Kutta method, Shandaksor lake.

Исахов А.А.

Математикалық модельдеу әдісі арқылы қоршаған ортаға жылу электр станцияларының жұмысының әсерін бағалау

Жұмыста ақырлы көлем әдісімен аппроксимацияланатын, физикалық параметрлер бойынша ыдырау әдісіне негізделген, стратификацияланған ортадағы сығылмайтын сұйыққа арналған Навье - Стокс және температура теңдеулерімен шешілетін, математикалық модельдеу арқылы қоршаған ортаға жылу электр станцияларының жұмысының әсерін бағалау ұсынылды. Навье-Стокс және температура теңдеулерін шешу үшін арналған сандық алгоритмы осылай болып табылады: бірінші кезеңде қозғалыс санының ауысуы конвекция мен диффузияның есебінен ғана болады деп болжанады. Аралық жылдамдық өрісі 5- қадамды Рунге - Кутта әдісімен табылады. Екінші кезеңде табылған аралық жылдамдық өрісі арқылы қысым өрісі табылады. Қысым өрісі үшін Пуассон теңдеуі Якоби әдісімен шығарылады. Үшінші кезеңде алмастыру қысым градиенті арқылы жүзеге асады деп болжаймыз. Төртінші кезеңде температура теңдеуі қозғалыс теңдеуі сияқты 5-қадам Кутта Рунге әдісі арқылы сандық шешіледі. Есептің алгоритмі жоғары өнімді жүйеде параллелденген. Алынған үшөлшемді стратификацияланған турбулентті ағыстың сандық нәтижелері су қоймаларында болып жатқан гидротермиялық процесстердің негізгі заңдылықтарын сапалы және айтарлықтай жуықтап алуға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: стратификацияланған орта, Навье-Стокс теңдеуі, операциялық қуаты, Екі-бастұз ГРЭС-2, ақырлы көлем әдісі, Рунге-Кутта әдісі, Шандаксор көлі.

1 Введение

Взаимодействие энергетических предприятий с окружающей средой происходит на всех стадиях добычи и использования топлива, переработки и передачи энергии. В составе загрязнителей - взвешенные вещества, нефтепродукты, хлориды, сульфаты, соединения тяжёлых металлов, сероводород, формальдегид и др. Основными потребителями воды на ТЭС и АЭС являются конденсаторы турбин. Расход воды зависит от параметров пара и от системы технического водоснабжения. По некоторым оценкам в перспективе будет затрачиваться воды на охлаждение конденсаторов: на ТЭС - 120 кг/(кВт. ч), на АЭС - 220 кг/(кВт. ч). Большие удельные расходы пара на АЭС определяют и большие удельные расходы воды. При промывке поверхностей агрегатов образуются разбавленные растворы соляной кислоты, едкого натра, аммиака, солей аммония, железа и других веществ. Кроме того, сбросы охлаждающей воды ядерных энергетических установок АЭС не исключают поступления радионуклидов в водную среду. Ежегодное расходование электроэнергии в индустриально развитых странах с каждым годом только растёт, что повлекло за собой рост мощностей энергетических блоков ТЭС или АЭС. Для того чтобы происходила конденсация пара охлажденная вода подается в конденсаторы. Расходы охлаждающих технических или циркуляционных вод огромны, которые составляют до 95 % от общего расхода воды на нужды ТЭС, и до 90% на нужды АЭС. ТЭС с охлаждающей водой сбрасывают 4 - 7 кДж теплоты на 1 кВт/ч вырабатываемой электроэнергии. Но по санитарным нормам сбросы теплой воды с ТЭС не должны повышать температуру водоема выше, чем на 3 °С в летнее время и на 5 °С в зимнее. Распространение тепловых выбросов от ТЭС зависит от нескольких факторов: рельефа местности, температуры окружающей среды, скорости ветра, облачности, осадок и т.д. А также ускоряет распространение и увеличивает площадь теплового загрязнения гидрометеорологические условия. В водохранилищах нуждаются как тепловые, так и атомные электростанции. Для работы этих станций требуется большое количество воды для

охлаждения агрегатов, в среднем 35-40 м. куб/сек на 1 млн. кВт установленной мощности. Отсюда становится очевидным, что для тепловой электростанций мощностью 2-4 млн. кВт требуется 70-160 м. куб. воды ежесекундно. Поэтому при выборе места строительства ТЭС и АЭС важнейшее значение приобретают вопросы их водоснабжения. Естественно, что крупные тепловые электростанции должны располагаться на берегах больших рек, водоемов и озер или искусственных водохранилищ. В качестве примера теплового воздействия ТЭС на водную среду взята Экибастузская ГРЭС-2, расположенная в поселке Солнечный, около 40 км севернее города Экибастуз, Павлодарская область, Казахстан. Экибастузская ГРЭС-2 вырабатывает электроэнергию из высококалорийного экибастузского угля двумя энергоблоками по 500 МВт, имеет установленную мощность 1000 МВт. Два её энергоблока вырабатывают сегодня около 12 % всей электроэнергии, производимой в республике.

Техническое водоснабжение Экибастузской ГРЭС-2 осуществляется по схеме обратного технического водоснабжения с искусственно созданным наливным водохранилищем-охладителем. Водоохранилище-охладитель создано на базе горько-соленого, пересыхающего, не имеющего народно-хозяйственного значения озера Шандаксор. Обратная схема водоснабжения: холодная вода забирается глубинным водозабором из водохранилища-охладителя и по подводящему каналу поступает на блочную насосную станцию, и далее на теплообменники электростанции. Теплая вода от теплообменников по отводящему каналу сбрасывается рассредоточено в водохранилище-охладитель. Максимальные размеры водохранилища-охладителя примерно является 7,2x7,7 км.

2 Математическая модель

Многие годы в изучении гидродинамики озер и водоемов имелись два независимых направления, одно из них анализ данных натуральных наблюдений, а другое - математическое моделирование [1-8]. Натурные эксперименты - наблюдения, хотя и выполненные при разнообразном комплексе условий, были пассивными, так как не позволяли активно управлять экспериментом, при этом не представлялось возможным прогнозирование на их основе гидрофизических процессов. Одним из наиболее эффективных методов исследования гидродинамики озерных вод является метод математического моделирования. В некоторых случаях этот метод может быть единственным средством прогноза изменений гидрологического режима и экосистем озер, например при изучении изменений, которые могут произойти при территориальном перераспределении вод, строительстве гидротехнических сооружений и при других мероприятиях, связанных с использованием водных объектов.

В водоемах-охладителях пространственное изменение температуры невелико. Поэтому стратифицированное течение в водоеме-охладителе можно описать уравнениями в приближении Буссинеска. Для математического моделирования рассматриваются системы уравнений, включающие уравнение движения, уравнение неразрывности и уравнение для температуры. Рассматривается развитое пространственное турбулентное течение в стратифицированном водоеме-охладителе. Для моделирования распространения температуры в водоеме используется трехмерная математическая модель [1-12, 17]:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \beta g_i (T - T_0) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u_j T}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\chi \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (3)$$

где $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$, g_i – ускорение свободного падения, β – коэффициент объёмного расширения, u_i – компоненты скорости, χ – коэффициент температуропроводности, T_0 – равновесная температура, T – отклонение температуры от равновесия.

Для замыкания системы уравнений (1) – (3) используется модель турбулентности Смагоринского [13].

Для дискретизации системы уравнений (1) – (3) используется метод контрольного объема. Для этого представим уравнения Навье - Стокса и уравнение для температуры в виде интегральных законов сохранения для произвольного фиксированного объема Ω с границей $d\Omega$ [14, 15]:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial G_i}{\partial x_i} - B_i \right) d\Omega = 0, \quad (4)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ u_j \\ T \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} u_i \\ u_i u_j + p \delta_{ij} - \tau_{ij} \\ v_i T \end{pmatrix}, \quad G_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ \chi \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta g_i (T - T_0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (4) можно записать в следующем виде

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t} - B \right) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (F_i + G_i) n_i d\Gamma = 0. \quad (5)$$

Приведем уравнения (5) такому виду

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) d\Omega + \oint_{\partial\Omega} (F_i + G_i) n_i d\Gamma = \int_{\Omega} B_i d\Omega. \quad (6)$$

Сеточные функции будут определяться в центре ячейки, а значения потоков через границу в дробных ячейках. Объем ячейки обозначим через сеточные функции.

Теперь произведем дискретизацию уравнения (6) по контрольному объему (CV) и контрольной поверхности (CS)

$$\sum_{CV} \left(\frac{\Delta U}{\Delta t} \right) \Delta \Omega + \sum_{CS} (F_i + G_i) n_i \Delta \Gamma = \bar{B}_i \Delta \Omega \quad (7)$$

или можно будет написать уравнение (7) в таком виде:

$$\sum_{CV} \Delta U \Delta \Omega + \sum_{CS} \Delta t (F_i + G_i) n_i \Delta \Gamma = \Delta t \bar{B}_i \Delta \Omega. \quad (8)$$

3 Численный алгоритм

Для численного решения уравнения (1) - (3) используется схема расщепления по физическим параметрам [14-16]. Для численной реализации системы (1) - (3) используется дискретизация вида (8). На первом этапе предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии. Промежуточное поле скорости находится 5-шаговым методом Рунге - Кутты [11, 12, 14, 15]. На втором этапе, по найденному промежуточному полю скорости, находится поле давления. Уравнение Пуассона для поля давления решается методом Якоби [14, 15]. На третьем этапе предполагается, что перенос осуществляется только за счет градиента давления. На четвертом шаге численно решаются уравнения переноса температуры также как уравнения движения 5-шаговым методом Рунге - Кутты. При решении уравнения для температуры также применяется метод конечных объемов и аналогичные вычисления как для уравнения движения [11, 12]. Алгоритм задачи распараллелен на высокопроизводительной системе. Расчеты проводились на кластерных системах URSA и T-Cluster ДГП НИИ Математики и Механики при КазНУ им. аль-Фараби.

$$I) \int_{\Omega} \frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\tau} d\Omega = -\oint_{\partial\Omega} (\nabla(\vec{u}^n \vec{u}^* - \tau_{ij}) - \nu \Delta \vec{u}^*) n_i d\Gamma,$$

$$II) \oint_{\partial\Omega} (\Delta p) d\Gamma = \int_{\Omega} \frac{\nabla \vec{u}^*}{\tau} d\Omega,$$

$$III) \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^*}{\tau} = -\nabla p,$$

$$IV) \int_{\Omega} \frac{T^* - T^n}{\tau} d\Omega = -\oint_{\partial\Omega} (\nabla \vec{u}^n T^* - \nu \Delta T^*) n_i d\Gamma.$$

4 Результаты численного моделирования

Для численного решения задач были заданы начальные и граничные условия. Начальные условия для скорости и температуры задаются в следующем виде: $u_j = 0$, ($j =$

1, 2, 3), $T = T_0$. Граничные условия для скорости на дне и боковой границе задаются условием прилипания, а для температуры - адиабатические условия. На поверхности для скорости и температуры задаются условия Неймана. А также ставятся дополнительные граничные условия для скорости и температуры в боковой границе водосброса в зависимости от эксплуатационной мощности Экибастузской ГРЭС-2. В расчетах использовалась вычислительная сетка, имеющая более 800 000 вычислительных узлов. На рисунке 1 представлена вычислительная сетка для Экибастузского ГРЭС-2. На рисунке 2 изображены расчетный пространственный контур и изолиний распределения температуры в различные моменты времени после старта работы ГРЭС-2, на поверхности воды для эксплуатационной мощности 700 МВт. На рисунке 3 показаны контур и изолиний распределения температуры в различные моменты времени после старта работы ГРЭС-2, на поверхности воды для эксплуатационной мощности 900 МВт.

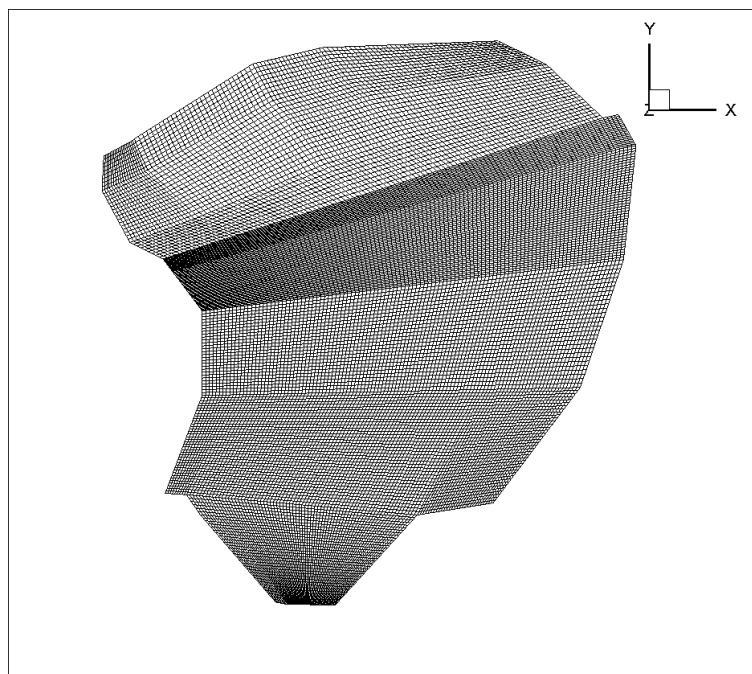


Рисунок 1 – Вычислительная сетка для Экибастузского ГРЭС-2.

На обоих рисунках 2-3 видно, что распределения температуры с удалением от стока приближается к изотермическому состоянию. Полученные результаты показывают, что распределения температуры распространяется на большую площадь. Как видно из рисунков 2-3, при повышении эксплуатационной мощности ГРЭС-2, площадь теплового воздействия становится направленным в одну сторону, и приводит к подогреву воды с одной части водоема, что отрицательно сказывается на работоспособности ГРЭС-2. При эксплуатационной мощности 900 МВт, температура распределяется в северную часть водоема и приближенно использует только половину водоема для охлаждения горячей воды с ГРЭС-2. При повышении эксплуатационной мощности Экибастузской ГРЭС-2 водоем-охладитель работает не эффективно, подогревая северную часть водоема, а остальная часть водоема практически не участвует при охлаждении подогретой воды из ГРЭС-2.

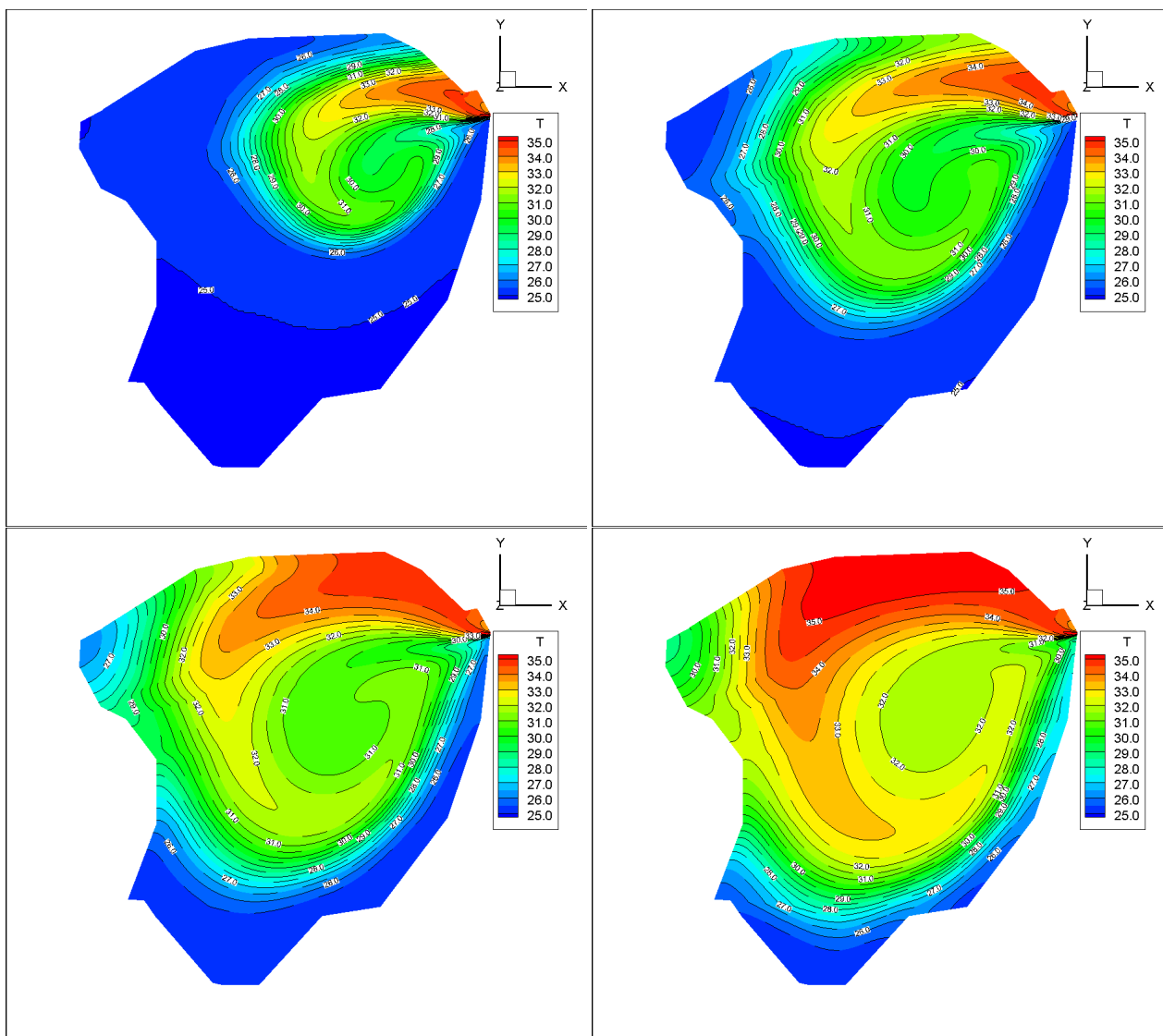


Рисунок 2 – Контур и изолиний распределения температуры через 22.5 ч., 50 ч., 72.5 ч. и 90 ч. после старта работы Экибастузского ГРЭС-2, на поверхности воды для эксплуатационной мощности 700 МВт.

5 Заключение

В этой работе было проведено прогнозное моделирование для минимизирования тепловой нагрузки на озеро Шандаксор, возле которой расположена Экибастузская ГРЭС-2. Целью данной работы заключается в том, чтобы определить размеры и пространственные распределения температуры теплой воды от водосбросного канала для различных эксплуатационных мощностей электростанции. Прогностическая математическая модель, разработанная для данного исследования, показали участки термического факела, в котором температура понижается, когда отдалается от водосбросного канала и температура факела приближается к значениям температуры водоема-охладителя. Таким

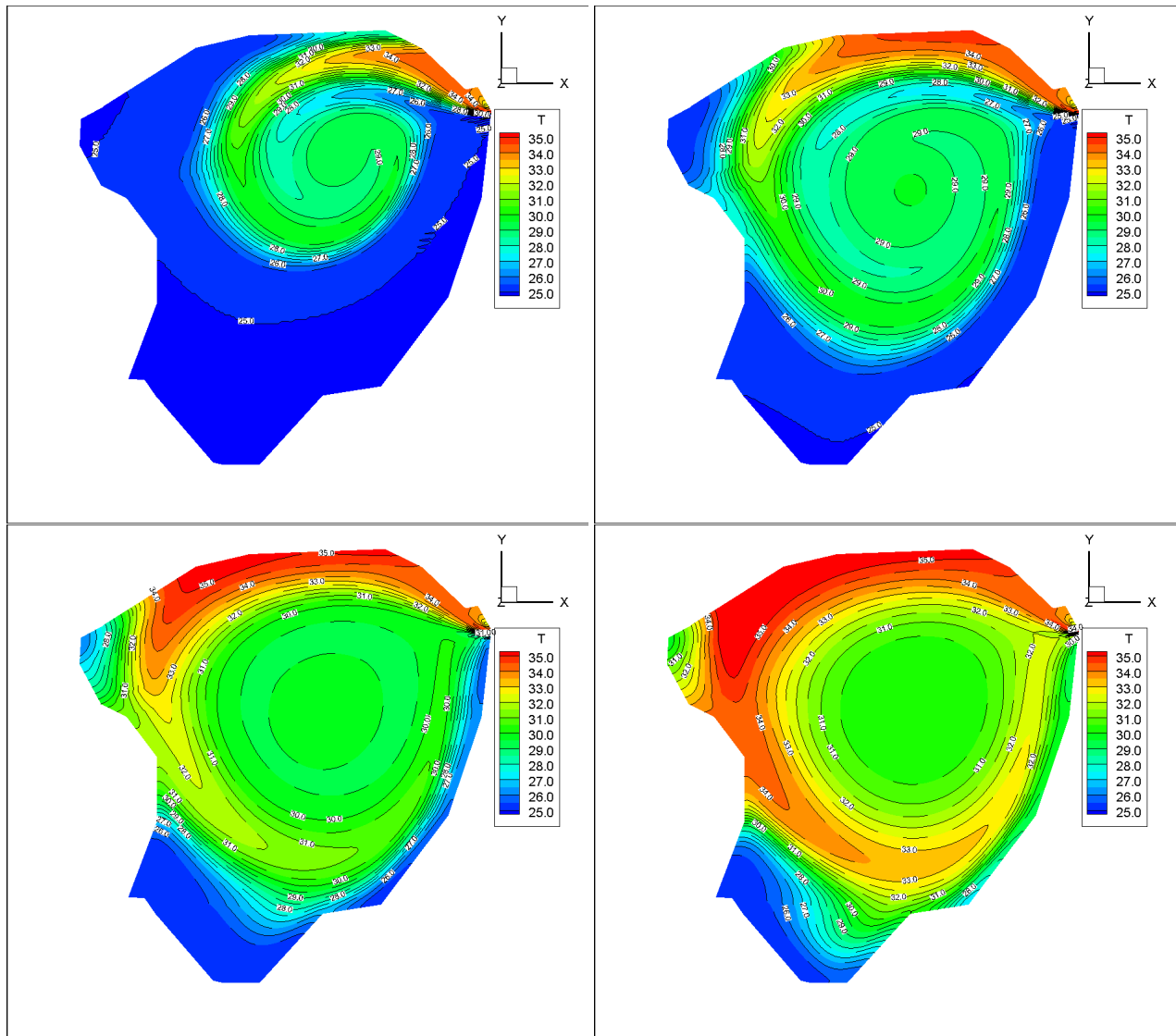


Рисунок 3 – Контур и изолиний распределения температуры через 22.5 ч., 50 ч., 72.5 ч. и 90 после старта работы Экибастузского ГРЭС-2, на поверхности воды для эксплуатационной мощности 900 МВт.

образом, развитая модель трехмерного стратифицированного турбулентного течения позволяет выявить качественно и приближенно количественно основные закономерности гидротермических процессов, происходящих в водоеме Шандаксор.

6 Примечание

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант No 2017/ГФ4

Литература

- [1] Z. Yang , T. Khangaonkar Modeling Tidal Circulation and Stratification in Skagit River Estuary Using an Unstructured Grid Ocean Model // Ocean Modelling. 2008. 28(1-3), – 34-49 pp.
- [2] C. Chen , H. Liu , R. C. Beardsley An Unstructured Grid, Finite-Volume, Three-Dimensional, Primitive Equations Ocean Model: Application to Coastal Ocean and Estuaries // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. 2003. 20(1), – 159-186 pp.
- [3] L. Zheng , C. Chen, H. Liu A modeling study of the Satilla River estuary, Georgia. I: Flooding-drying process and water exchange over the salt marsh-estuary-shelf complex // Estuaries and Coasts. 2003. 26(3), – 651-669 pp.
- [4] A. Isobe , R. C. Beardsley An estimate of the cross-frontal transport at the shelf break of the East China Sea with the Finite Volume Coastal Ocean Model // Journal of Geophysical Research. 111:C03012. doi:10.1029/2005JC 003290.
- [5] K. Aoki , A. Isobe Application of finite volume coastal ocean model to hindcasting the wind-induced sea-level variation in Fukuoka bay // Journal of Oceanography. 2007. 63(2), – 333-339 pp.
- [6] R. H. Weisberg , L. Zheng The circulation of Tampa Bay driven by buoyancy, tides, and winds, as simulated using a finite volume coastal ocean model // Journal of Geophysical Research. 111:C01005, doi:10.1029/2005JC003067, 2006.
- [7] W. Lick Numerical models of lakes currents. EPA-60013-76-020, 1976. – 140 p.
- [8] Y. Sheng , W. Lick , R.T. Gedney , F.B. Molls ANumerical computation of three-dimensional circulation of Lake Erie: A comparison of a free-surface model and rigid-Lid. Model. // J. of Phys. Ocean. 1978. 8, – 713 - 727 pp.
- [9] A. Issakhov Mathematical Modelling of the Influence of Thermal Power Plant on the Aquatic Environment with Different Meteorological Condition by Using Parallel Technologies // Power, Control and Optimization. Lecture Notes in Electrical Engineering.2013. 239, – 165-179 pp.
- [10] A.Issakhov Mathematical modelling of the influence of thermal power plant to the aquatic environment by using parallel technologies // AIP Conf. Proc. 2012. 1499, –15-18 pp. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4768963>
- [11] A. Issakhov Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. 16(5), – 1082-1096 pp.
- [12] A. Issakhov Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // Applied Mathematical Modelling. 2016. 40(2), – 229-238 pp.
- [13] M. Lesieur , O. Metais , P. Comte Large eddy simulation of turbulence. New York, Cambridge University Press, 2005. – 219 p.
- [14] T. J. Chung Computational Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2002. – 1012 p.
- [15] J. H. Ferziger, M. Peric Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer; 3rd edition, 2013, –426 p.
- [16] A. Issakhov Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method // J. Phys.: Conf. Ser. 2011. 318(4), –1282-1288 p., 042051. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051
- [17] Issakhov A. Mathematical modeling of influence of the thermal power plant with considering the meteorological condition at the reservoir-cooler // Вестник КазНУ, 2012. – No 3(74), - С. 50-59.

References

- [1] Z. Yang , T. Khangaonkar Modeling Tidal Circulation and Stratification in Skagit River Estuary Using an Unstructured Grid Ocean Model // Ocean Modelling. 2008. 28(1-3), – 34-49 pp.
- [2] C. Chen , H. Liu , R. C. Beardsley An Unstructured Grid, Finite-Volume, Three-Dimensional, Primitive Equations Ocean Model: Application to Coastal Ocean and Estuaries // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. 2003. 20(1), – 159-186 pp.
- [3] L. Zheng , C. Chen, H. Liu A modeling study of the Satilla River estuary, Georgia. I: Flooding-drying process and water exchange over the salt marsh-estuary-shelf complex // Estuaries and Coasts. 2003. 26(3), – 651-669 pp.

-
- [4] A. Isobe , R. C. Beardsley An estimate of the cross-frontal transport at the shelf break of the East China Sea with the Finite Volume Coastal Ocean Model // Journal of Geophysical Research. 111:C03012. doi:10.1029/2005JC 003290.
- [5] K. Aoki , A. Isobe Application of finite volume coastal ocean model to hindcasting the wind-induced sea-level variation in Fukuoka bay // Journal of Oceanography. 2007. 63(2), – 333-339 pp.
- [6] R. H. Weisberg , L. Zheng The circulation of Tampa Bay driven by buoyancy, tides, and winds, as simulated using a finite volume coastal ocean model // Journal of Geophysical Research. 111:C01005, doi:10.1029/2005JC003067, 2006.
- [7] W. Lick Numerical models of lakes currents. EPA-60013-76-020, 1976. – 140 p.
- [8] Y. Sheng , W. Lick , R.T. Gedney , F.B. Molls ANumerical computation of three-dimensional circulation of Lake Erie: A comparison of a free-surface model and rigid-Lid. Model. // J. of Phys. Ocean. 1978. 8, – 713 - 727 pp.
- [9] A. Issakhov Mathematical Modelling of the Influence of Thermal Power Plant on the Aquatic Environment with Different Meteorological Condition by Using Parallel Technologies // Power, Control and Optimization. Lecture Notes in Electrical Engineering.2013. 239, – 165-179 pp.
- [10] A.Issakhov Mathematical modelling of the influence of thermal power plant to the aquatic environment by using parallel technologies // AIP Conf. Proc. 2012. 1499, –15-18 pp. doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.4768963>
- [11] A. Issakhov Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant // International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. 16(5), – 1082-1096 pp.
- [12] A. Issakhov Mathematical modeling of the discharged heat water effect on the aquatic environment from thermal power plant under various operational capacities // Applied Mathematical Modelling. 2016. 40(2), – 229-238 pp.
- [13] M. Lesieur , O. Metais , P. Comte Large eddy simulation of turbulence. New York, Cambridge University Press, 2005. – 219 p.
- [14] T. J. Chung Computational Fluid Dynamics. Cambridge University Press, 2002. – 1012 p.
- [15] J. H. Ferziger, M. Peric Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer; 3rd edition, 2013, –426 p.
- [16] A. Issakhov Large eddy simulation of turbulent mixing by using 3D decomposition method // J. Phys.: Conf. Ser. 2011. 318(4), –1282-1288 p., 042051. doi:10.1088/1742-6596/318/4/042051
- [17] Issakhov A. Mathematical modeling of influence of the thermal power plant with considering the meteorological condition at the reservoir-cooler // Bulletin KazNU. 2012. 3(74), p. 50-59.

УДК 533.09.01

Машеева Р.У.¹ *, Джумагулова К.Н.¹,
Донко З.², Рамазанов Т.С.¹, Габдуллина Г.Л.¹

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы

²Институт физики твердого тела и оптики, Вигнеровский исследовательский центр Академии наук Венгрии, Венгрия, Будапешт

*E-mail:ranna_m@mail.ru

Компьютерное моделирование и исследование локализации пылевых частиц во внешнем магнитном поле

В данной работе представлены результаты по применению метода компьютерного моделирования для исследования влияния внешнего однородного магнитного поля на квазилокализацию частиц сильно связанной трехмерной пылевой системы. Детальное компьютерное моделирование и исследование физических свойств такой системы было проведено на основе Юкавской модели взаимодействия, учитывающей коллективные эффекты экранировки поля заряда пылинки окруженной плазмой буферного газа. В качестве метода компьютерного моделирования был использован метод молекулярной динамики, позволяющий проследить эволюцию системы взаимодействующих частиц во времени с помощью интегрирования уравнений движения. Для решения уравнения движения частиц был использован алгоритм Верле. Квазилокализация частиц количественно характеризуется кейгеновой корреляционной функцией, исследования которой были осуществлены для разных значений параметров системы. Также была проанализирована производная кейгеновой корреляционной функций и получены данные по временам декорреляции частиц. Авторами работы было выявлено, что магнитное поле \vec{B} усиливает время удержания частиц. Компьютерное моделирование и исследование физических свойств пылевой системы было проведено в широком диапазоне изменения параметров характеризующих поведение системы: параметр экранировки κ , параметр связи Γ и параметр магнитного поля β .

Ключевые слова: пылевая плазма, компьютерное моделирование, алгоритм, Верле, кейгеновая функция, микроскопические свойства, молекулярная динамика.

Masheyeva R.U., Dzhumagulova K.N., Donkó Z., Ramazanov T.S., Gabdullina G.L.

Computer simulations and investigation of the localization of dust particles under the magnetic field

Paper presents the results of the computer simulations for investigation of the influence of uniform external magnetic field on the quasi-localization of the particles of the strongly coupled three-dimensional dusty system. Detailed computer simulation and investigation of the physical properties of such system, in which the particles interact with each other via Yukawa interaction potential that takes into account the collective screening effects of the field dust charges surrounded by a buffer gas. Molecular dynamics method was used as a computer simulations method, this method allows to follow the evolution of a system of interacting particles in time by integrating the equations of motion. The Verlet algorithm was used to solve the equation of motion of the particles. The quasi-localization of the particles quantitatively characterized by the cage correlation functions. Also, the derivative of the cage correlation functions were analyzed and the decorrelation time of the particles was derived. It was found that the decorrelation time of the particles increases with increasing of the magnetic field \vec{B} . The investigations have been performed in a wide range of the system parameters (screening parameter κ , coupling parameter Γ and strength of magnetic field β).

Key words: dusty plasma, computer simulations, Verlet algorithm, cage correlation function, microscopic properties, molecular dynamics.

Машеева Р.У., Жұмағұлова Қ.Н., Донко З., Рамазанов Т.С., Габдуллина Г.Л.
**Сыртқы магнит өрісінің тозаңды бөлшектердің
локализациясына әсерін зерттеу және компьютерлік модельдеу**

Мақалада тығыз байланысқан үш өлшемді тозаңды жүйенің квазилокализацияна сыртқы біртекті магнит өрісінің әсерін зерттеу үшін компьютерлік модельдеу әдістерін қолдану бойынша нәтижелер келтірілген. Мұндай жүйенің физикалық қасиеттерін зерттеу және компьютерлік модельдеу Юкава әсерлесу моделінің негізінде жүзеге асырылды. Юкава әсерлесу потенциалы буферлік газ плазмасымен қоршалған тозаңды зарядтардың өрісін ұжымдық экрандау эффектісін ескереді. Компьютерлік модельдеу әдісі ретінде әсерлесетін бөлшектер жүйесінің эволюциясын олардың уақыт бойынша қозғалыс теңдеуін интегралдау арқылы бақылауға болатын молекулалық динамика әдісі қолданылды. Бөлшектердің қозғалыс теңдеуін шешу үшін Верле алгоритмі қолданылды. Бөлшектердің квазилокализациясы санды түрде кейгендік корреляциялық функциясымен сипатталады. Бұл зерттеулер жүйені сипаттайтын параметрлердің әр түрлі мәндері үшін жүргізілді. Сонымен қатар, кейгендік корреляциялық функция туынысы сарапталды және бөлшектердің декорреляциялық уақыты бойынша нәтижелер алынды. Жұмыстың авторлары магнит өрісінің \vec{B} бөлшектердің ұсталу уақытын ұлғайтатындығын анықтады. Тозаңды бөлшектердің физикалық қасиеттерін зерттеу және компьютерлік модельдеу жүйенің қасиеттерін сипаттайтын келесі параметрлердің өзгерісінің кең аумағында жүзеге асырылды: экрандалу параметрі κ , байланыс параметрі Γ , магнит өрісінің параметрі β .

Түйін сөздер: тозаңды плазма, компьютерлік модельдеу, Верле алгоритмі, кейгендік функция, микроскопиялық қасиеттері, молекулалық динамика.

1 Введение

Для моделирования ансамбля заряженных частиц под действием внешнего однородного магнитного поля был использован метод молекулярной динамики. Компьютерное моделирование является мощным средством изучения свойств и поведения много частичных систем, особенно в том случае, когда использование других теоретических подходов затруднительно. Сильно неидеальная плазма является как раз такой системой, в которой из-за отсутствия малого параметра нельзя использовать методы, основанные на разложении по малому параметру. Такая система довольно широко распространена в природе, также часто встречается в различных лабораторных установках [1]. Широкое разнообразие физических явлений, происходящих в такой системе делает их очень интересным объектом для исследования [2-4]. Сильно связанная плазма используется во многих отраслях науки и техники, которая постоянно расширяется, и исследования выполняются как экспериментальными [5, 6], так и теоретическими методами [7-13]. Одним из характерных особенностей неидеальной сильно связанной плазмы является квазилокализация частиц: частицы проводят достаточное количество времени в локальных минимумах медленно меняющейся потенциальной поверхности. В то же время, время локализации частиц ограничивается из-за преобразования потенциальной поверхности за счет диффузии частиц. Локализация отдельных частиц и изменение их окружения могут быть количественно определены с помощью корреляционного метода, введенного в работах [14,15]. Метод был использован для исследования времени локализации частиц сильно связанной Кулоновской и Юкава системы с помощью метода молекулярной динамики [16,17]. Результаты исследования подтверждают, что время локализации сильно связанной жидкости охватывает несколько периодов плазменных колебаний. Целью данной работы является компьютерное моделирование системы пылевых частиц,

взаимодействующих с помощью потенциала Юкава, во внешнем магнитном поле и исследование влияния магнитного поля на локализацию частиц, которая вычисляется с помощью кейгеновой корреляционной функции. Во второй части работы описаны методы и модель компьютерного моделирования. В третьей части представлены анализ полученных результатов.

2 Математическая модель и метод компьютерного моделирования

Взаимодействие пылинок описывалось на основе экранированного потенциала Кулона, часто упонимаемом в литературе как потенциал Дебая-Хюккеля или потенциал Юкава:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/\lambda_D)}{r}, \quad (1)$$

где Q - заряд частиц и λ_D - Дебаевская длина экранировки. Соотношение межчастичной потенциальной энергий и тепловой энергий выражается через параметр связи:

$$\Gamma = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a k_B T}, \quad (2)$$

здесь T - температура, $a = [3/(4\pi n)]^{1/3}$ - трехмерный радиус Вигнера-Зейтца и n - плотность частиц.

Для реализации метода молекулярной динамики все пространство разбивается на равные ячейки (куб), т.е. частицы двигаются в пространстве (x, y, z) и предполагается, что магнитное поле однородно и направлено вдоль оси z , то есть $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Одна из ячеек считается базовой, остальные – копии (реплики). Конфигурации частиц базовой ячейки повторяются во всех остальных ячейках. На базовую ячейку и на реплики были наложены периодические граничные условия. Начальное распределение компонент координат и скоростей частиц берется случайным, однако компоненты скоростей должны быть распределены по гауссовскому закону с заданной температурой. На первом этапе моделирования система должна перейти в равновесное состояние, что происходит достаточно быстро. Так как моделирование проводится для канонического ансамбля, используется термостат для поддержания постоянной температуры. После того, как в системе достигается равновесие, начинается сбор данных о скоростях и координатах частиц, эти данные необходимы для дальнейших вычислений.

Параметр магнитного поля выражается следующим образом:

$$\beta = \frac{\omega_c}{\omega_p}, \quad (3)$$

где $\omega_c = QB/m$ - циклотронная и $\omega_p = \sqrt{nQ^2/\epsilon_0 m}$ - 3D плазменная частота.

Время берется в единицах, обратных плазменной частоте пылевых частиц, а скорость в единицах тепловой скорости частиц

$$\nu_{Td} = (k_B T_d / m_d)^{-1/2}, \quad (4)$$

Поведение системы описывается параметрами магнитного поля β , связи Γ и экранировки κ .

Для проведения расчетов мы выбрали численный алгоритм, который был предложен в работе [18], для вычисления координат и скоростей в момент времени $t + \Delta t$ через данные в момент времени t :

$$r_x(t + \Delta t) = r_x(t) + \frac{1}{\omega_c} [v_x(t) \sin(\omega_c \Delta t) - v_y(t) C(\omega_c \Delta t)] + \frac{1}{\omega_c^2} [-a_x^C(t) C(\omega_c \Delta t) - a_y^C(t) S(\omega_c \Delta t)] + O((\Delta t)^3), \quad (5)$$

$$r_y(t + \Delta t) = r_y(t) + \frac{1}{\omega_c} [v_y(t) \sin(\omega_c \Delta t) + v_x(t) C(\omega_c \Delta t)] + \frac{1}{\omega_c^2} [-a_y^C(t) C(\omega_c \Delta t) + a_x^C(t) S(\omega_c \Delta t)] + O((\Delta t)^3), \quad (6)$$

$$r_z(t + \Delta t) = r_z(t) + \Delta t v_z(t) + \frac{1}{2} (\Delta t)^2 a_z^C(t) + O((\Delta t)^3), \quad (7)$$

где

$$S(\omega_c \Delta t) \equiv \sin(\omega_c \Delta t) - \omega_c \Delta t, \quad (8)$$

$$C(\omega_c \Delta t) \equiv \cos(\omega_c \Delta t) - 1. \quad (9)$$

Для скоростей:

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) \cos(\omega_c \Delta t) + v_y(t) \sin(\omega_c \Delta t) + \frac{1}{\omega_c} [-a_y^C(t) C(\omega_c \Delta t) + a_x^C(t) \sin(\omega_c \Delta t)] + \frac{1}{\omega_c^2} \left[-\frac{a_x^C(t + \Delta t) - a_x^C(t)}{\Delta t} C(\omega_c \Delta t) - \frac{a_y^C(t + \Delta t) - a_y^C(t)}{\Delta t} S(\omega_c \Delta t) \right] + O((\Delta t)^3), \quad (10)$$

$$v_y(t + \Delta t) = v_y(t) \cos(\omega_c \Delta t) - v_x(t) \sin(\omega_c \Delta t) + \frac{1}{\omega_c} [a_x^C(t) C(\omega_c \Delta t) + a_y^C(t) \sin(\omega_c \Delta t)] + \frac{1}{\omega_c^2} \left[-\frac{a_y^C(t + \Delta t) - a_y^C(t)}{\Delta t} C(\omega_c \Delta t) + \frac{a_x^C(t + \Delta t) - a_x^C(t)}{\Delta t} S(\omega_c \Delta t) \right] + O((\Delta t)^3), \quad (11)$$

$$v_z(t + \Delta t) = v_z(t) + \frac{1}{2} \Delta t [a_z^C(t) + a_z^C(t + \Delta t)] + O((\Delta t)^3). \quad (12)$$

Разностная схема (10)–(12) является алгоритмом второго порядка. В данном методе магнитное поле включено в уравнение движения таким образом, чтобы выбор шага по времени Δt не зависел от Ларморовской частоты и определялся только внутренними физическими свойствами рассматриваемой системы. Для исследования локализации частиц изменение окружения отдельной частицы отслеживается с помощью корреляционного метода, изложенного в работе [14, 15]. Следуя формализму [14, 15] список соседей ℓ_i частицы i определяется следующим образом:

$$\ell_i = \{f(r_{i,1}), f(r_{i,2}), \dots, f(r_{i,N})\} \quad (13)$$

где $f(r_{i,j}) = \Theta(r_c - r_{i,j})$, $r_{i,j} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ и Θ - функция Хевисайда (т.е. если $f = 1$ $r_{i,j} \leq r_c$ и $f = 0$ в противном случае). Здесь r_c - радиус обрезания («сферы»), и условие $r_{i,j} \leq r_c$ означает, что частицы близко расположены друг к другу. В данном случае радиус обрезания равен $r_c = 2.42$, который приблизительно равен расстоянию первого минимума парной корреляционной функции $g(r)$ при больших значениях параметра связи. Выбор данного значения означает, что соседние частицы расположены в первой координатной оболочке. Наши вычисления $\int_0^{r_c} g(r)$ координационного числа привели к значениям приближенным к значению 14, которое является суммой ближайших и вторых ближайших соседей, как в ОЦК так и в ГЦК решетках. В жидкой фазе эти частицы образуют общую неразрешимую оболочку вокруг пробной частицы. Взаимодействие между окружением частицы в момент времени $t = 0$ и t вычисляется с помощью функции «списка», которая определяется через скалярное произведение соседних векторов списка:

$$C_\ell(t) = \frac{\langle \ell_i(t) \ell_i(0) \rangle}{\langle \ell_i(0)^2 \rangle}, \quad (14)$$

где $\langle \dots \rangle$ усреднение по всем частицам и по начальным временам. Число частиц, покинувших начальную клетку частицы i в момент времени t , определяется следующим образом:

$$n_i^{\text{out}}(t) = |\ell_i(0)^2| - \ell_i(0) \cdot \ell_i(t). \quad (15)$$

Первая часть данного уравнения определяет число частиц, окружающих частицу i в момент времени $t = 0$, а вторая часть определяет число частиц, которые остались после некоторого момента времени t . Кейгеновая корреляционная функция C_{cage} , которая характеризует распад первичной группы частиц в клетке, вычисляется как ансамбль и среднее время функции $\Theta(c - n_i^{\text{out}})$ для разного числа частиц, покинувших клетку (окружение пробной частицы):

$$C_{\text{cage}}^c(t) = \langle \Theta(c - n_i^{\text{out}}(0, t)) \rangle. \quad (16)$$

Кейгеновая корреляционная функция может быть вычислена для разного числа значения c , обычно $c = 7$, то есть, количество частиц, покинувших клетку равно половине числа частиц, которые находились в первой координатной оболочке (в жидкой фазе). Когда $C_{\text{cage}}^7(t)$ функция опускается до 0.1 то первичная группа частиц считается уже некоррелированной.

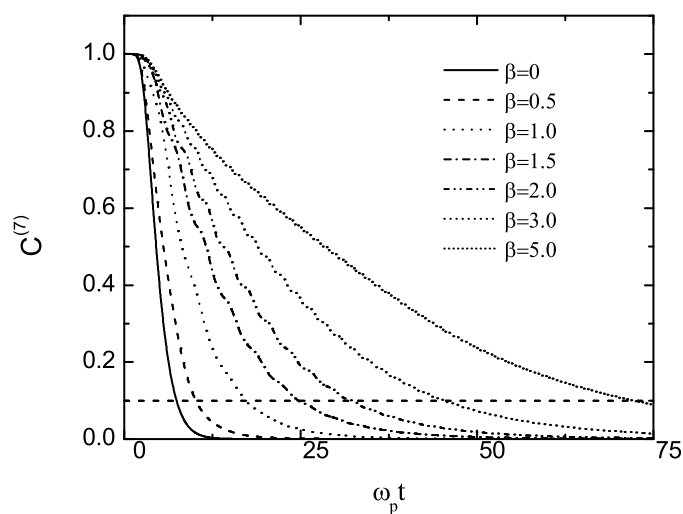


Рисунок 1 - Кейгеновая корреляционная функция для разных значений параметра магнитного поля β при $\kappa = 1$. Там же построена линия времени декорреляции $C^{(7)} = 0.1$.

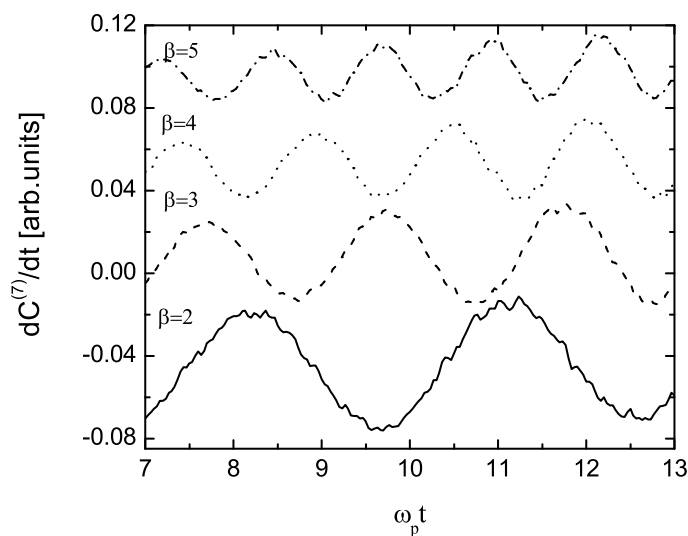


Рисунок 2 - Производная кейгеновой корреляционной функции для разных значений параметра магнитного поля β при $\kappa = 1$. Для ясности кривые были сдвинуты.

3 Результаты вычисления

На рисунке 1 представлены результаты по кейгеновым корреляционным функциям, полученные для разных значений параметра магнитного поля $0 \leq \beta \leq 5$ при $\kappa = 1$. Напомним, что время декорреляции t_{cage} определяется как $C_{cage}^{(7)} = 0.1$. Для $\kappa = 1$ время декорреляции $\omega_p t \approx 1$, что соответствует одному циклу плазменного колебания. Такое «слабо

некоррелированное» поведение кейгеновых корреляционных функции меняется с учетом влияния магнитного поля, при $\beta = 3$ время декорреляции частиц увеличивается в 6 раз. Также из рисунка 1 можно увидеть колебания кривых кейгеновых корреляционных функции, особенно тех которые совпадают промежуточным значением β . Появление таких колебаний можно объяснить, взяв производные этих кривых, которые представлены на рисунке 2. Частота этих кривых пропорциональна параметру магнитного поля, и на основе этих результатов появление таких колебаний можно объяснить тем, что частицы периодически покидают и заходят в клетку, двигаясь по циклотронной орбите. В самом деле, измерения частот ω^* кривых dC_{cage}^7/dt подтверждают $\omega^* \cong \omega_c$. Амплитуда колебания dC_{cage}^7/dt затухает с увеличением β за счет уменьшения Ларморовского радиуса траекторий частиц. С другой стороны, при малых значениях параметра магнитного поля β , колебания менее заметны, так как удержание частиц в клетке менее выражено и кейгеновая корреляционная кривая затухает на временной шкале обратной циклотронной частоте. Зависимость кейгеновой корреляционной функции от параметра связи показана на рисунке 3 при $\kappa = 1$ для фиксированного значения параметра магнитного поля $\beta = 2$. Увеличение связи в системе также способствует увеличению времени декорреляции частиц. При больших значениях параметра связи кейгеновая корреляционная функция уменьшается до значения 0.1, когда значение $\omega_p t$ достигает несколько сотен, это означает, что частицы находятся от несколько десятков до сотен плазменных колебаний в клетке. Это число возможно, так как высокие значения параметра связи соответствуют примерно 70% и 45% критическим значениям фазового перехода жидкость-твердое тело ($\Gamma = 217, 4$ и $\Gamma = 440, 1$, соответственно, для $\kappa = 1$ и $\kappa = 2$ [19]), время декорреляции для твердой фазы бесконечно.

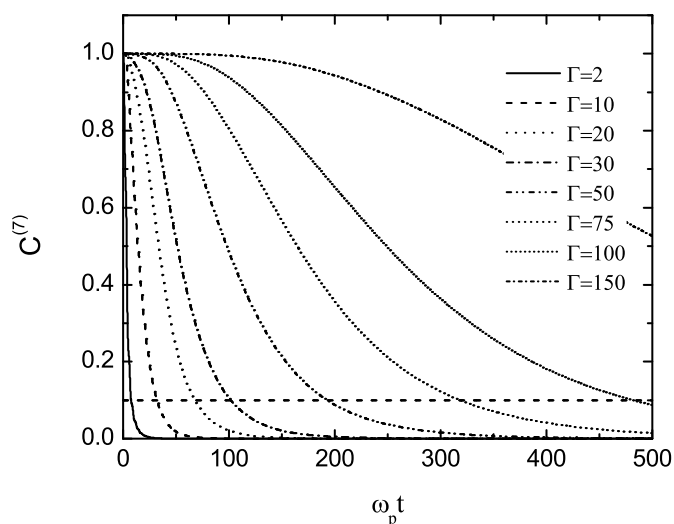


Рисунок 3 - Кейгеновая корреляционная функция для разных значений параметра связи Γ при $\kappa = 1$. Там же построена линия времени декорреляции $C^{(7)} = 0.1$.

Анализ полученных результатов по производным кейгеновых корреляционных функции показывает, что с увеличением параметра связи Γ колебания уменьшаются, и приблизительно при значении $\Gamma = 50$ исчезают. Уменьшение амплитуды колебания связано

с тем, что при больших значениях параметра связи Γ Ларморовское вращение частиц происходит синхронно. Результаты, полученные по временам декорреляции частиц, показаны на рисунке 4, который показывает зависимость t_{cage} от параметра связи при фиксированных значениях параметра магнитного поля β . Мы нашли почти линейный рост времени декорреляции с увеличением β , тогда как, связь между t_{cage} и Γ является почти степенной функцией. Помимо нескольких точек при малых значениях Γ , кривые на рисунке 4, построенные для разных значений β , почти параллельны, что указывает на универсальное поведение. Аналогичные результаты получены и для $\kappa = 2$.

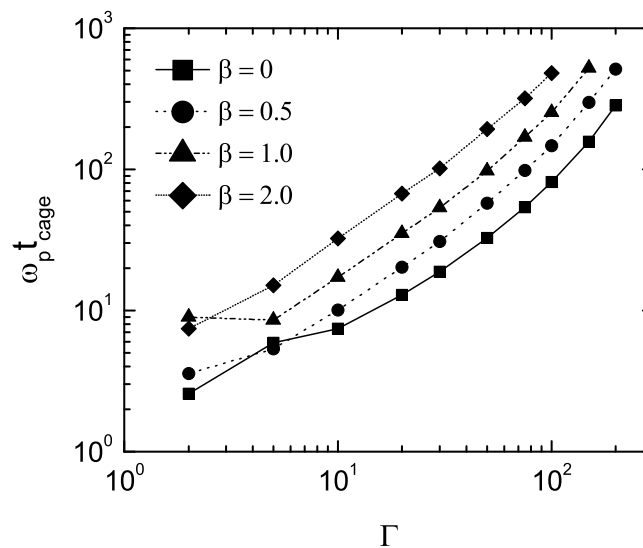


Рисунок 4 - Время декорреляции частиц для разных значений параметра магнитного поля β при $\kappa = 1$ в зависимости от параметра связи Γ .

4 Заключение

Было проведено детальное компьютерное моделирование физических свойств пылевой плазмы, частицы которой взаимодействуют с помощью потенциала Юкава во внешнем однородном магнитном поле. А также в статье вычислены кейгеновые корреляционные функции, с помощью данной функции было исследовано влияние внешнего магнитного поля, а также сильной связи в системе на локализацию частиц. Для исследования свойств системы был использован метод компьютерного моделирования молекулярной динамики, в котором эволюция системы взаимодействующих частиц отслеживается интегрированием их уравнения движения. Для решения уравнения движения был использован алгоритм Верле. Было исследовано влияние внешнего однородного магнитного поля на кейгеновые корреляционные функции в трехмерной сильно связанной Юкава жидкости при широком диапазоне изменения параметров системы: параметра связи Γ , параметра магнитного поля β , и параметра экранировки κ . Результаты показывают, что увеличение параметра магнитного поля приводит к увеличению времени декорреляции частиц из-за уменьшения Ларморовского радиуса траектории частиц, то есть частицы дольше остаются в клетке. Увеличение связи в системе также приводит к увеличению

времени декорреляции. Результаты по кейгеновым корреляционным функциям показывают колебания на кривых кейгеновых функции при $\beta > 0$, что объясняется выходом и повторным заходом частиц в клетку, что связано с циклотронной частотой. Стоит отметить, в дальнейшем концепцию кейгеновой корреляционной функции можно обобщить для включения зависимости от направления, вдоль которых частицы покидают клетку, что объясняется анизотропией в системе созданной магнитным полем.

Литература

- [1] *Kalman J., Blagoev K., and Rommel M.* Strongly Coupled Coulomb Systems. - New York: Plenum Press, 1998; *Fortov V. E., Khrapak A. G., Iakubov I. T.* Physics of Strongly Coupled Plasmas. - England: Oxford University Press, 2005.
- [2] *Khrapak S. A., Thomas M. H., Chaudhuri M., Morfill G. E., Zobnin A. V., Usachev A. D., Petrov O. F., Fortov V. E.* Particle Flows in a DC Discharge in Laboratory and Microgravity Conditions // *Physical Review E.* - 2013. - Vol. 87. - pp. 063109.
- [3] *Fortov V. E., Morfill G. E.* Strongly Coupled Dusty Plasmas on ISS: Experimental Results and Theoretical Explanation // *Plasma Physics and Controlled Fusion.* - 2012. - Vol. 54. - N 12. - pp. 124040-124045.
- [4] *Petrov O. F., Fortov V. E.* Collective Phenomena in Strongly Coupled Dissipative Systems of Charged Dust: From Ground to Microgravity Experiments // *Contributions to Plasma Physics.* - 2013. - Vol. 53. - N 10. - pp. 767-777.
- [5] *Maiorov S. A., Ramazanov T. S., Dzhumagulova K. N., Dosbolayev M. K., and Jumabekov A. N.* Investigation of Plasma-Dust Structures in He-Ar Gas Mixture // *Physics of Plasmas.* - 2008. - Vol. 15. - pp. 0937011-0937017.
- [6] *Morfill G. E., Thomas H. M., Konopka U., and Zuzic M.* The Plasma Condensation: Liquid and Crystalline Plasmas // *Physics of Plasmas.* - 1999. - Vol. 6. - pp. 1769-1780.
- [7] *Dzhumagulova K. N., Ramazanov T. S., and Masheyeva R. U.* Velocity Autocorrelation Functions and Diffusion Coefficient of Dusty Component in Complex Plasmas // *Contributions to Plasma Physics.* - 2012. - Vol. 52. - N 3. - pp. 182-185;
- [8] *Dzhumagulova K.N., Ramazanov T. S., Masheyeva R. U.* Study of the Dust-Free Region Near an Electric Probe and the Dust Particles Oscillations in Dusty Plasma // *Contributions to Plasma Physics,* - 2013. - Vol.53(4-5) - pp. 419-425;
- [9] *Dzhumagulova K.N., Ramazanov T. S., Masheyeva R. U.* Diffusion Coefficient of Three-Dimensional Yukawa Liquids // *Contributions to Plasma Physics.*- 2013. - Vol. 20. - P. 113702.
- [10] *Morfill G. E., Thomas H. M., Konopka U., and Zuzic M.* The Plasma Condensation: Liquid and Crystalline Plasmas // *Physical Review E.* - 2005. - Vol. 72. - pp. 026409.
- [11] *Kalman G. J., Hartmann P., Donkó Z. and Rosenberg M.* Two-Dimensional Yukawa liquids: Correlation and Dynamics // *Physical Review Letter* - 2004. - Vol. 92. - P. 065001;
- [12] *Kov A. Zs., Hartmann P., and Donk Z.* Dynamic Shear Viscosity in a 2D Yukawa System // *Physical Review Letter.* - 2012. - Vol. 52. - pp. 199-202.
- [13] *Ott T., Bonitz M., Donk Z., and Hartmann P.* Superdiffusion in Quasi-Two-Dimensional Yukawa Liquids // *Physical Review E.* - 2012. - Vol. 52. - N 3. - pp. 182-185.
- [14] *Rabani E., Gezelter J. D., and Berne B. J.* Calculating the Hopping Rate for Self-Diffusion on Rough Potential Energy Surfaces: Cage Correlations // *The Journal of chemical physics.* - 1997. - Vol. 107. - N 17. - pp. 6867-6876.
- [15] *Rabani E., Gezelter J. D., and Berne B. J.* Condensed Matter: Structure, etc-Direct Observation of Stretched-Exponential Relaxation in Low-Temperature Lennard-Jones Systems Using the Cage Correlation Function // *Physical Review Letter.* - 1999. - Vol. 81. - N 18. - pp. 3649-3652.
- [16] *Donk Z., Kalman G. J., and Golden K. I.* Caging of Particles in One-Component Plasmas // *Physical Review Letter.* - 2002. - Vol. 88. - P. 225001.
- [17] *Donk Z., Hartmann P., and Kalman G. J.* Molecular Dynamics Simulations of Strongly Coupled Plasmas: Localization and Microscopic Dynamics // *Physics of Plasmas.* - 2003. - Vol. 10. - P. 1563.

- [18] *Spreiter Q. and Walter M.* Classical Molecular Dynamics Simulation with the Velocity Verlet Algorithm at Strong External Magnetic Fields // Journal of Computational Physics. - 1999. - Vol. 152. - pp. 102-119.
- [19] *Ohta H. and Hamaguchi S.* Molecular Dynamics Evaluation of Self-diffusion in Yukawa Systems // Physics of Plasmas. - 2000. - Vol. 7. - P.4506.

References

- [1] *Kalman J., Blagoev K., and Rommel M.* Strongly Coupled Coulomb Systems. - New York: Plenum Press, 1998; *Fortov V. E., Khrapak A. G., Iakubov I. T.* Physics of Strongly Coupled Plasmas. - England: Oxford University Press, 2005.
- [2] *Khrapak S. A., Thomas M. H., Chaudhuri M., Morfill G. E., Zobnin A. V., Usachev A. D., Petrov O. F., Fortov V. E.* Particle Flows in a DC Discharge in Laboratory and Microgravity Conditions // Physical Review E. - 2013. - Vol. 87. - pp. 063109.
- [3] *Fortov V. E., Morfill G. E.* Strongly Coupled Dusty Plasmas on ISS: Experimental Results and Theoretical Explanation // Plasma Physics and Controlled Fusion. - 2012. - Vol. 54. - N 12. - pp. 124040-124045.
- [4] *Petrov O. F., Fortov V. E.* Collective Phenomena in Strongly Coupled Dissipative Systems of Charged Dust: From Ground to Microgravity Experiments // Contributions to Plasma Physics. - 2013. - Vol. 53. - N 10. - pp. 767-777.
- [5] *Maiorov S. A., Ramazanov T. S., Dzhumagulova K. N., Dosbolayev M. K., and Jumabekov A. N.* Investigation of Plasma-Dust Structures in He-Ar Gas Mixture // Physics of Plasmas. - 2008. - Vol. 15. - pp. 0937011-0937017.
- [6] *Morfill G. E., Thomas H. M., Konopka U., and Zuzic M.* The Plasma Condensation: Liquid and Crystalline Plasmas // Physics of Plasmas. - 1999. - Vol. 6. - pp. 1769-1780.
- [7] *Dzhumagulova K. N., Ramazanov T. S., and Masheyeva R. U.* Velocity Autocorrelation Functions and Diffusion Coefficient of Dusty Component in Complex Plasmas // Contributions to Plasma Physics. - 2012. - Vol. 52. - N 3. - pp. 182-185;
- [8] *Dzhumagulova K.N., Ramazanov T. S., Masheyeva R. U.* Study of the Dust-Free Region Near an Electric Probe and the Dust Particles Oscillations in Dusty Plasma // Contributions to Plasma Physics, - 2013. - Vol.53(4-5) - pp. 419-425;
- [9] *Dzhumagulova K.N., Ramazanov T. S., Masheyeva R. U.* Diffusion Coefficient of Three-Dimensional Yukawa Liquids // Contributions to Plasma Physics.- 2013. - Vol. 20. - P. 113702.
- [10] *Morfill G. E., Thomas H. M., Konopka U., and Zuzic M.* The Plasma Condensation: Liquid and Crystalline Plasmas // Physical Review E. - 2005. - Vol. 72. - pp. 026409.
- [11] *Kalman G. J., Hartmann P., Donkó Z. and Rosenberg M.* Two-Dimensional Yukawa liquids: Correlation and Dynamics // Physical Review Letter - 2004. - Vol. 92. - P. 065001;
- [12] *Kov A. Zs., Hartmann P., and Donk Z.* Dynamic Shear Viscosity in a 2D Yukawa System // Physical Review Letter. - 2012. - Vol. 52. - pp. 199-202.
- [13] *Ott T., Bonitz M., Donk Z., and Hartmann P.* Superdiffusion in Quasi-Two-Dimensional Yukawa Liquids // Physical Review E. - 2012. - Vol. 52. - N 3. - pp. 182-185.
- [14] *Rabani E., Gezelter J. D., and Berne B. J.* Calculating the Hopping Rate for Self-Diffusion on Rough Potential Energy Surfaces: Cage Correlations // The Journal of chemical physics. - 1997. - Vol. 107. - N 17. - pp. 6867-6876.
- [15] *Rabani E., Gezelter J. D., and Berne B. J.* Condensed Matter: Structure, etc-Direct Observation of Stretched-Exponential Relaxation in Low-Temperature Lennard-Jones Systems Using the Cage Correlation Function // Physical Review Letter. - 1999. - Vol. 81. - N 18. - pp. 3649-3652.
- [16] *Donk Z., Kalman G. J., and Golden K. I.* Caging of Particles in One-Component Plasmas // Physical Review Letter. - 2002. - Vol. 88. - P. 225001.
- [17] *Donk Z., Hartmann P., and Kalman G. J.* Molecular Dynamics Simulations of Strongly Coupled Plasmas: Localization and Microscopic Dynamics // Physics of Plasmas. - 2003. - Vol. 10. - P. 1563.
- [18] *Spreiter Q. and Walter M.* Classical Molecular Dynamics Simulation with the Velocity Verlet Algorithm at Strong External Magnetic Fields // Journal of Computational Physics. - 1999. - Vol. 152. - pp. 102-119.
- [19] *Ohta H. and Hamaguchi S.* Molecular Dynamics Evaluation of Self-diffusion in Yukawa Systems // Physics of Plasmas. - 2000. - Vol. 7. - P.4506.

2-бөлім**Раздел 2****Section 2****Механика****Механика****Mechanics**

UDC 517.958:532.546

Kudaikulov A.A.^{1*}, Josserand C.², Kaltayev A.¹¹Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty²Sorbonne Universit'es, Institut D'Alembert, CNRS and UPMC UMR 7190, 4 place Jussieu, 75005

France, Paris

*E-mail: aziz.kudaikulov@gmail.com

Numerical investigation of interface motion between two immiscible fluids in a channel

The main difficulty of the modeling of two immiscible viscous fluids flow in the channel (pipe, etc.), is the choice of the boundary condition on the line (contact line) formed by intersection of the interface between fluids with the solid surface. If the no-slip condition is used on the solid boundary to determine the flow produced when a fluid interface moves along a solid boundary, the viscous stress is approached to infinity at the vicinity of the contact line. It seems, unreasonable to continue to apply a continuum model at the vicinity of the contact line. Thus an inner region, close to the contact line, could be examined, where the molecular interactions between the two fluids and the solid must be studied, and this region matched to an outer region, where the Navier-Stokes equations would apply. Such an analysis would be very difficult, but it has been suggested that the likely outcome would be equivalent to replacing the no-slip boundary condition by a slip condition, and continuing to employ the Navier-Stokes equations. The effect of the slip on the interface motion is numerically investigated in this work. Also relation between steady-state contact angle and capillary number is investigated in this paper and compared with work [8].

Key words: Navier-Stokes equations; Flow of two immiscible fluids; Gerris program; Slip boundary condition; Volume-of-fluid (VOF) method; Contact line; Contact angle; Capillary number.

Кудайкулов А.А., Жозеранд К., Калтаев А.

Численное моделирование движения границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в канале

Основной проблемой моделирования течения двух несмешивающихся вязких жидкостей в канале (трубе и т.д.) является постановка граничного условия на линии (контактной линии), образованной пересечением поверхности раздела жидкостей с твердой поверхностью. Если выбрать граничное условие прилипания на твердой границе, тогда при движении поверхности раздела жидкостей по твердой поверхности, в окрестности контактной линии, вязкие напряжения стремятся к бесконечности. Видимо, применение модели сплошной среды в области, близкой к контактной линии, является необоснованным. Таким образом, в области, близкой к контактной линии, необходимо исследовать молекулярное взаимодействие между двумя жидкостями и твердой поверхностью, и эту область связать с областью вдали от контактной линии, где можно применить уравнения Навье-Стокса. Такой анализ будет очень сложным, но он позволяет подтвердить предположение, что вместо граничного условия прилипания можно использовать граничное условие проскальзывания.

В данной работе численно исследовано влияние проскальзывания жидкости по твердой поверхности на движение поверхности раздела жидкостей. Также исследована связь между контактным углом и капиллярным числом, при установившемся течении жидкости, и полученные результаты сравнены с результатами работы [8].

Ключевые слова: Уравнения Навье-Стокса; Течение двух несмешивающихся жидкостей; программа Gerris; Граничное условие проскальзывания; Метод объема жидкости; Контактная линия; Контактный угол; Капиллярное число.

Кудайкулов А.А., Жозеранд К., Калтаев А.

Каналдағы екі араласпайтын сұйықтардың бөліну шекарасының қозғалысын сандық арқылы модельдеу

Каналдағы екі араласпайтын сұйықтардың бөліну шекарасының қозғалысын сандық арқылы модельдеудің негізгі қиындығы - қатты беттегі шекаралық шарттарды таңдау болып табылады. Егер қатты шекарада жабысқақ шекаралық шартты таңдасақ, онда бөліну шекарасы қатты бет бойынша қозғалғанда, тұтқырлық кернеуі шексіздікке ұмтылады. Түйіскен сызықпен қатты бет арасындағы аймақта ағындар молекулярлық масштабта өтсе, тұтас орта моделін қолдану әлбетте дұрыс емес. Сонымен, түйіскен сызықпен қатты бет арасындағы аймақта екі сұйықпен қатты беттің молекулярлық өзара әрекетесуін зерттеу қажет және осы аймақты Навье-Стокс теңдеуін қолдануға болатын түйіскен сызықтан шет аймақпен байланыстыру керек. Осындай талдау өте күрделі болады, бірақ Навье-Стокс теңдеуін шешу үшін жабысқақ шекаралық шарттың орнына сырғанақ шекаралық шартты қолдануға болады деген жорамалымызды растауға мүмкіндік береді. Осы жұмыста каналдағы екі араласпайтын сұйықтардың ағыны үшін Навье-Стокс теңдеуін шешуге сұйық көлем әдісін қолданған. Сонымен қатар осы мақалада түйіскен бұрышпен капиллярлық сан арасындағы байланыс зерттеледі.

Түйін сөздер: Навье-Стокс теңдеулер; Екі араласпайтын сұйықтардың ағыны; Gerris бағдарлама; Сырғанақ шекаралық шарт; Сұйық көлем әдісі; Түйіскен сызық; Түйіскен бұрыш; Капиллярлық сан.

Introduction

When an interface between two immiscible fluids joins a solid boundary, a line is formed. This line is sometimes known as the three-phase line or the contact line. A moving contact line can be found in many different situations; some cases in which it plays a central role are the spreading of adhesives, the flowing of lubricants into inaccessible locations, the coating of solid surfaces with a thin uniform layer of liquid, the displacement of oil by water through a porous medium, etc. However, the dynamics of the fluid surrounding the contact line, and hence the contact line itself, are poorly understood. The main difficulty of the modeling of the contact line motion is the choice of the boundary condition on the solid surface. If the no-slip condition is used on the solid boundary to determine the flow produced when a fluid interface moves along a solid boundary, a viscous stress is approached to infinity [1-3], nevertheless the no-slip boundary condition has been verified for a number of liquid-solid combinations by careful experimental studies [4]. It seems, unreasonable to continue to apply a continuum model at the vicinity of the contact line. Thus an inner region, close to the contact line, could be examined, where the molecular interactions between the two fluids and the solid must be studied, and this region matched to an outer region, where the Navier-Stokes equations would apply. Such an analysis would be very difficult, but it has been suggested that the likely outcome would be equivalent to replacing the no-slip boundary condition by a slip condition, and continuing to employ the Navier-Stokes equations. Introduction of the precursor film into the model clearly allows one to remove the viscous stress singularity [2]. Experiments

indicate that this is not always the case and is in fact unlikely when the observed value of the contact angle is not small. The physical mechanisms of slip for smooth solid surfaces are still not completely understood, with possible explanations including formation of a layer of gas or small-scale bubbles between the liquid and the solid [4,5]. Significant slip can be achieved for flows near structured surfaces [6]. There are exist many models to simulate slip flow along the solid surface but one of the most popular is the Navier slip boundary condition, which in our 2D Cartesian coordinates is written as:

$$u = \lambda \frac{\partial u}{\partial y}, \text{ at } y = 0, \quad (1)$$

where u is the horizontal velocity component in the x-direction, and λ is a constant called the slip length. The latter can be interpreted as the distance below the solid-liquid interface at which the velocity $u(y)$ extrapolates to zero, as sketched in fig. 1. The viscous stress singularity is avoided when this condition is used instead of the classical no-slip condition [7]. The effect of the slip on the interface motion is numerically investigated in this work. The incompressible, two immiscible, viscous fluids flow in 2D channel is considered in this article. In order to find the shape and location of the interface between two fluids, the volume-of-fluid method is used in this work [9,10,13]. The Navier-Stokes equations are numerically solved using projection method on non-staggered grid to find the velocities and pressure of the two fluids flow in the channel [11]. The relation between steady-state contact angle and capillary number is investigated in this paper and compared with work [8]. All numerical calculations are performed using Gerris program [14].

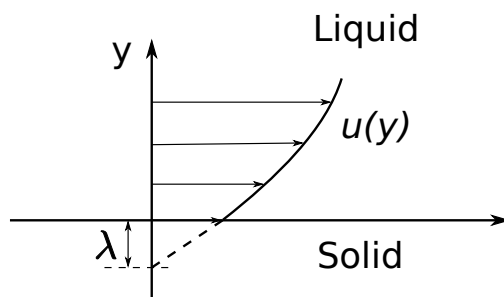


Figure 1 – Navier slip boundary condition

Formulation of the problem

We numerically solve the Navier-Stokes equations for incompressible, two immiscible, viscous fluids flow in 2D channel:

$$\frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu E), \quad (2)$$

$$E = \frac{1}{2}(\nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^T), \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (5)$$

$$\rho = F\rho_1 + (1 - F)\rho_2, \quad (6)$$

$$\mu = F\mu_1 + (1 - F)\mu_2, \quad (7)$$

where F is the parameter that identify a given fluid i ($i=1$ or 2) is present at a particular location \mathbf{x} :

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \text{ is in fluid } i \\ 0, & \text{if } x \text{ is not in fluid } i \end{cases} \quad (8)$$

If we substitute the equation (6) into the equation (5), we have that:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla F = 0. \quad (9)$$

In order to find the shape and location of the interface between the two fluids, we use the volume-of-fluid method and advect this interface using equation (9). Equations (2, 4 and 9) numerically solved using the projection method on non-staggered grid [11] and the following boundary conditions were used (see fig. 2):

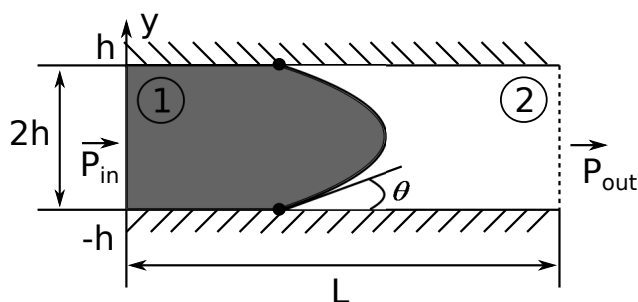


Figure 2 – The steady movement of a interface between two fluids in a channel

1) Inlet boundary condition:

$$\frac{\partial u_{in}}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$v_{in} = 0, \quad (11)$$

$$p_{in} = 1. \quad (12)$$

2) At the walls of the channel:

$$u_w = \lambda \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}, \quad (13)$$

$$v_w = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial p_w}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

where λ is the slip length and \vec{n} is the normal vector to the wall.

3) At the interface between the two fluids - S :

$$[\vec{u}]_S = 0, \quad (16)$$

$$-[-p + 2\mu\vec{n} \cdot E \cdot \vec{n}]_S = \sigma k, \quad (17)$$

$$k = -\nabla \cdot \vec{n}, \quad (18)$$

$$-[2\mu\vec{t} \cdot E \cdot \vec{n}]_S = \vec{t} \cdot \nabla_S \sigma, \quad (19)$$

where σ is the surface tension, k is the curvature, \vec{n} is the normal vector to the interface S and \vec{t} is the tangent vector to the interface S . In order to solve the equations (2, 4 and 9) we need set outlet boundary conditions too. The outflow conditions are not known a priori. But nevertheless, we need to prescribe suitable conditions to make the problem determinate. An analysis of outflow boundary conditions is given in the literature [12]. Here the following outlet boundary conditions were used:

$$\frac{\partial u_{out}}{\partial x} = 0, \quad (20)$$

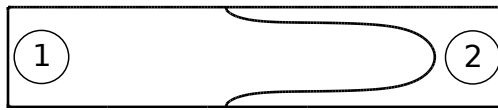


Figure 3 – Formation of fingering pattern in unstable interface between two fluids, when $\mu = 1$, $\sigma = 1$ and $\lambda = 0.01$

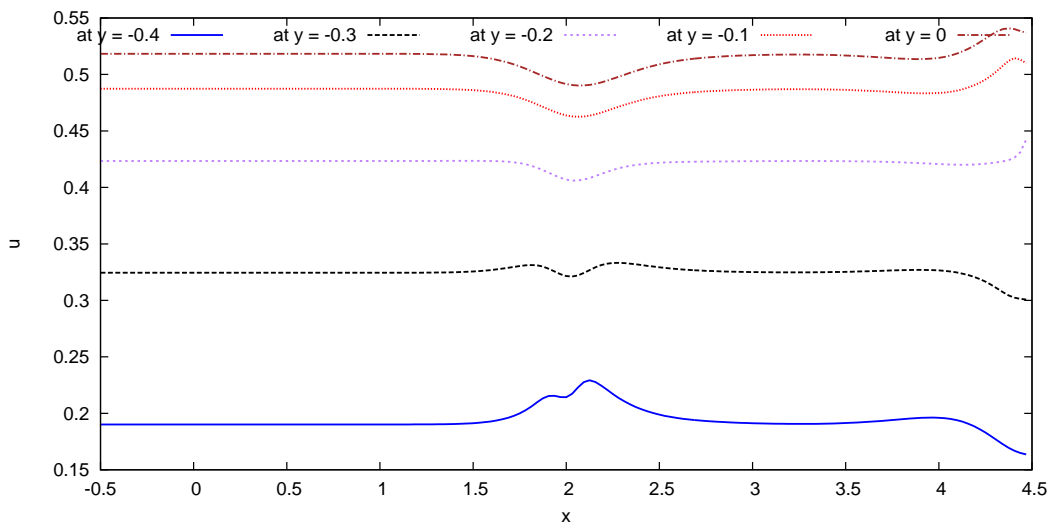


Figure 4 – Profile of horizontal component velocity, when $\mu = 1$, $\sigma = 1$ and $\lambda = 0.01$

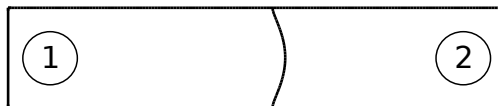


Figure 5 – Shape of the interface between two fluids, when $\mu = 1$, $\sigma = 5$ and $\lambda = 0.01$

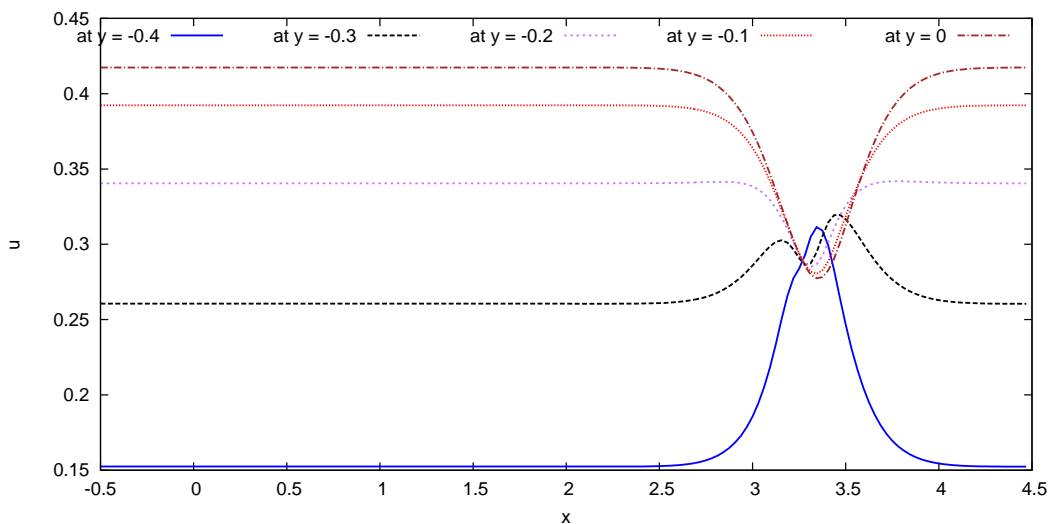


Figure 6 – Profile of horizontal component velocity, when $\mu = 1$, $\sigma = 5$ and $\lambda = 0.01$

$$v_{out} = 0, \quad (21)$$

$$p_{out} = 0. \quad (22)$$

Results

The steady state solution of the equations (2, 4) with boundary conditions at the walls of the channel (13 - 15) and with boundary conditions at the interface between the two fluids (16 - 19) can be obtained by neglecting the viscous force on the interface between the two fluids (19):

$$u = \frac{p_{in} - p_{out} - p_c}{\mu L} \left(\frac{h^2 - y^2}{2} + \lambda h \right), \quad (23)$$

where p_c is the capillary pressure. The value of capillary pressure can be obtained from Young-Laplace equation and for 2D case (see fig. 2):

$$p_c = \frac{\sigma \cos \theta}{h}. \quad (24)$$

The average value of (23):

$$\bar{u} = \frac{p_{in} - p_{out} - p_c}{\mu L} \left(\frac{h^2}{3} + \lambda h \right). \quad (25)$$

The value of the steady state contact angle θ is unknown in the equation (23) or (25). The numerical investigation of interface motion between two immiscible fluids in a channel is performed in this paper to find this contact angle. In this work the equations (2 - 9) are dimensionless. The width of the channel is $2h = 1$ and length of the channel is $L = 5$ (see fig. 2). The viscosities of the two fluids are the same: $\mu = \mu_1 = \mu_2 = 1$. Initially, the contact angle equals 90 degrees. The apparent contact angle is introduced in this article, and it is difference between initial contact angle and steady state contact angle:

$$\theta_{app} = 90^\circ - \theta. \quad (26)$$

When the surface tension is sufficiently small the fingering pattern is formed in unstable interface between two fluids (see fig. 3), and as can be seen in fig. 4, the velocities are different along the transverse section of the channel at the interface between two fluids. However, if we increase the surface tension, the fingering pattern is no longer formed in the interface between two fluids (see fig. 5), and the velocities are same along the transverse section of the channel at the interface between two fluids (see fig. 6). In this paper we only considered the

case when the fingering pattern is not formed in the interface between two fluids. Three cases considered in this article to verify the relation between apparent contact angle and capillary number, which is investigated in [8]:

$$\theta_{app}^3 \sim Ca, \quad (27)$$

where Ca is the capillary number. Capillary number is the ratio between viscous force and surface tension force:

$$Ca = \frac{\mu U_{CL}}{\sigma}, \quad (28)$$

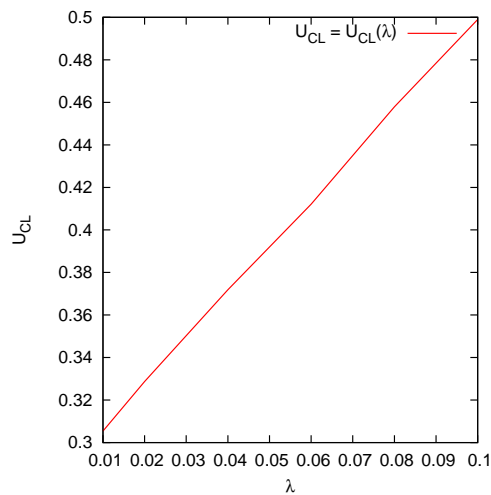


Figure 7 – Relation between contact line velocity and slip length, when $\mu = 1$, $\sigma = 5$

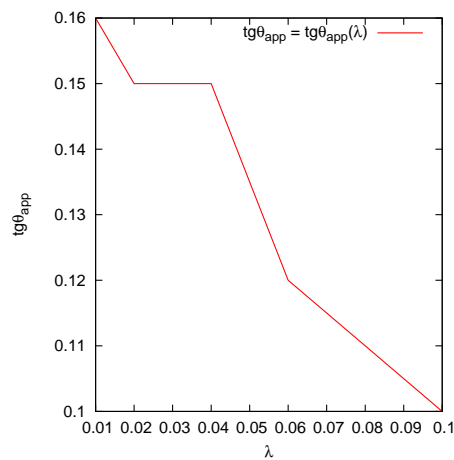


Figure 8 – Relation between apparent contact angle and slip length, when $\mu = 1$, $\sigma = 5$

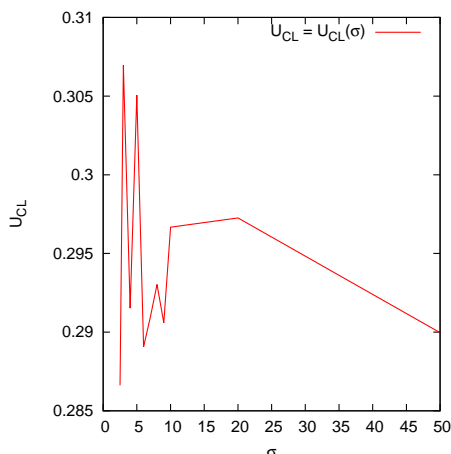


Figure 9 – Relation between contact line velocity and surface tension, when $\mu = 1$ and $\lambda = 0.01$

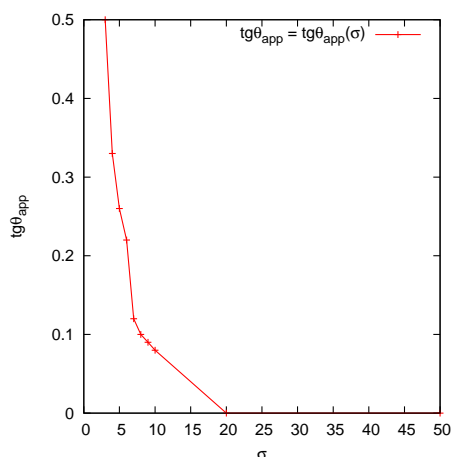


Figure 10 – Relation between apparent contact angle and surface tension, when $\mu = 1$, $\lambda = 0.01$

where U_{CL} is the contact line velocity. In the first case, the surface tension is constant, and relation between the apparent contact angle and slip length is investigated. As can be seen in fig. 7, the contact line velocity are linearly depends on the slip length, so it is mean that the viscous stress is constant at the walls of the channel. Since the viscous stress is constant at the walls of the channel (1) and surface tension is constant too, therefore as can be seen in fig. 8, the apparent contact angle almost doesn't depend on the slip length. In the second case, the slip length is constant, but the surface tension is changed, and relation between the apparent contact angle and surface tension is investigated (see fig. 10). As can be seen in fig. 9, the contact line velocity is slowly changed when surface tension is greater than 5, so in this region the viscous stress at the walls is almost constant. We can verify the relation between the apparent contact angle and capillary number for this case (see fig. 11). In the third case, the slip length and surface tension is constant, but the pressure drop is changed, and relation between the apparent contact angle and pressure drop is investigated (see fig. 13). The relation between the apparent contact angle and capillary number also verified for this case (see fig. 14).

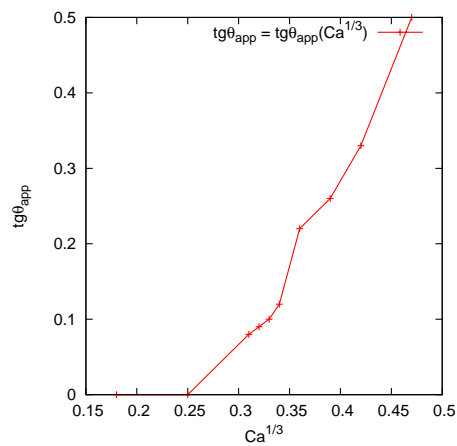


Figure 11 – Relation between apparent contact angle and capillary number, when $\mu = 1$, $\lambda = 0.01$

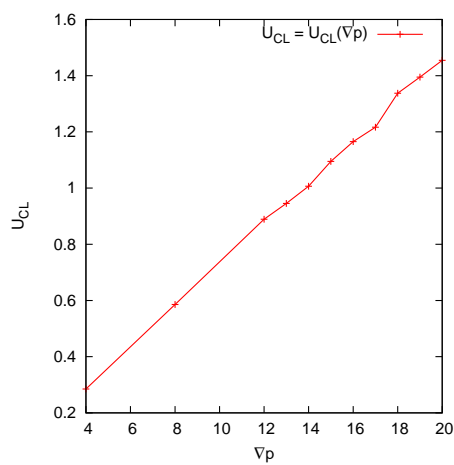


Figure 12 – Relation between contact line velocity and pressure drop, when $\mu = 1$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.01$

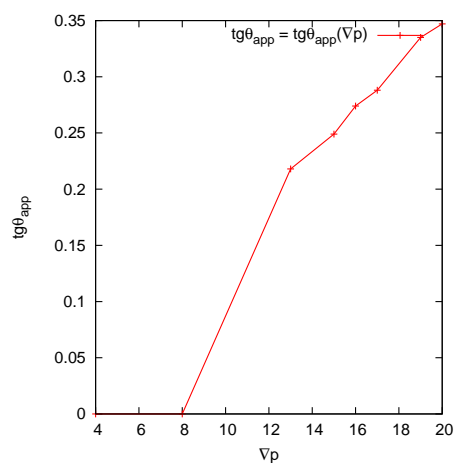


Figure 13 – Relation between apparent contact angle and pressure drop, when $\mu = 1$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.01$

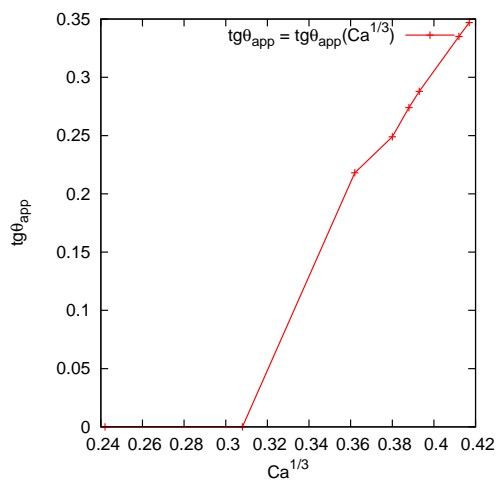


Figure 14 – Relation between apparent contact angle and capillary number, when $\mu = 1$, $\sigma = 20$, $\lambda = 0.01$

Conclusion

A moving contact line can be found in many different situations; some cases in which it plays a central role are the spreading of adhesives, the flowing of lubricants into inaccessible locations, the coating of solid surfaces with a thin uniform layer of liquid, the displacement of oil by water through a porous medium, etc. In most cases it is necessary to calculate the steady state contact angle, to find the capillary pressure (24) or at least find the relation between steady state contact angle and other parameters (surface tension, viscosity etc.). In this article the relation between steady state contact angle and capillary number is numerically investigated, and this relation is reasonably good matched with [8].

Acknowledgments

This work was supported by the Committee of Science of Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, grant №1735/ГФ4 МОИ РК.

References

- [1] *Dussan V.E.B.* On the spreading of liquid on solid surfaces: static and dynamic contact lines // *Annu. Rev. Fluid Mech.* - 1979. - Vol.11. - P. 371-400.
- [2] *de Gennes P.G.* Wetting: statics and dynamics // *Rev. Mod. Phys.* - 1985. - Vol. 57. - P. 827-863.
- [3] *Huh C. and Scriven L.* Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line // *J. Coll. Interf. Sci.* - 1971. - Vol. 35. - P. 85-101.
- [4] *Lauga E., Brenner M.P., Stone H.A.* Microfluidics: The no-slip boundary condition, in *Handbook of Experimental Fluid Dynamics* (Chapter 19) // Springer, 2007.
- [5] *Vinogradova O.I.* Slippage of water over hydrophobic surfaces // *Int. J. Mineral Processing.* - 1999. - Vol. 56. - P. 31-60.
- [6] *Teo C.J., Khoo B.C.* Analysis of Stokes flow in microchannels with superhydrophobic surfaces containing a periodic array of micro-grooves // *Microfluid Nanofluid.* - 2009. - Vol. 7. - P. 353-382.
- [7] *Greenspan H.P.* On the motion of a small viscous droplet that wets a surface // *J. Fluid Mech.* - 1978. - Vol. 84. - P. 125-143.

- [8] *Bonn D., Eggers J., Indekeu J., Meunier J. and Rolley E.* Wetting and spreading // *Rev. Mod. Phys.* - 2009. - Vol. 81. - P. 739-805.
- [9] *Pilliod J.E., Jr. and Puckett E.G.* Second-order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces // *J. Comput. Phys.* - 2004. - Vol. 199. - P. 465-502.
- [10] *Scardovelli R. and Zaleski S.* Analytical relations connection linear interfaces and volume fractions in rectangular grids // *J. Comput. Phys.* - 2000. - Vol. 164. - P. 228-237.
- [11] *Brown D.L., Cortez R. and Minion M.L.* Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations // *J. Comput. Phys.* - 2001. - Vol. 168. - P. 464-499.
- [12] *Christer B. and Johansson V.* Boundary Conditions for Open Boundaries for the Incompressible Navier-Stokes Equation // *J. Comput. Phys.* - 1993. - Vol. 105. - P. 233-251.
- [13] *Tryggvason G., Scardovelli R. and Zaleski S.* *Direct Numerical Simulations Of Gas-Liquid Multiphase Flows* // Cambridge University Press, 2011.
- [14] *Popinet S.* The Gerris Flow Solver: <http://gfs.sourceforge.net>

UDC 531.1+629.195

Zhilisbayeva K.S.^{1*}, Saspayeva A.D.^{2**}¹ Kazakh National University after al-Farabi,
Republic of Kazakhstan, Almaty² Joint stock company «National center of space researches and technologies»,
Republic of Kazakhstan, Almaty

E-mail: *zhilisbaeva@mail.ru, **asem.saspaeva@mail.ru

Programed motion of the magnetized spacecraft

This paper focuses on the problem of creation of control of the rotational motion of the magnetized dynamically symmetric Earth's satellite in a polar circular orbit plane in the geomagnetic field. It is assumed that the permanent magnetic moment of the satellite is directed along the axis of its dynamic symmetry. The rotational motion of the satellite is caused by interaction of the magnetic moment of the satellite and the Earth's magnetic field, which is modeled by the direct dipole. Influence of gravitational moment is not considered. The objective of the control system is to implement the required programed motion. The satellite's rotation around its own axis is selected as the programed motion (in this case the angle deviation of the axis should be constant). Equations of programed motion of the magnetized satellite in the semi-combined coordinate system are derived. The control moments that ensure the specified programed motion are obtained. The solutions of the motion equations of the control system are found by Runge-Kutta method using the mathematical package Maple. According to the results the graphs of change of the kinematic parameters of the motion are obtained with and without control moments which demonstrate uncontrolled motion of the satellite. It is shown that the programed motion can be implemented by selection of the values of the deviation angle and the angular velocity, even when there is an asymptotic instability of Lyapunov's programmed motion.

Key words: magnetized satellite, geomagnetic field, control moment, program motion.

Жилисбаева К.С., Саспаева А.Д.

Программное движение намагниченного космического аппарата

В данной работе рассматривается задача построения управления вращательным движением намагниченного динамически симметричного спутника Земли по полярной плоской круговой орбите в геомагнитном поле. Предполагается, что постоянный магнитный момент спутника направлен по оси его динамической симметрии. Вращательное движение спутника обусловлено взаимодействием магнитного момента спутника и магнитного поля Земли, которое моделируется прямым диполем. Влияние гравитационного момента не учитывается. Задачей системы управления является реализация требуемого программного движения. В качестве программного движения выбрано вращение спутника вокруг собственной оси с постоянной угловой скоростью, при этом угол отклонения оси должен быть постоянным. Построены уравнения программного движения намагниченного спутника в полусвязанной системе координат. Получены управляющие моменты, обеспечивающие заданное программное движение. С помощью математического пакета Maple методом Рунге-Кутты найдены решения уравнений движения управляемой системы. По результатам решений получены графики изменения кинематических параметров движения с управляющими моментами и в случае отсутствия управляющих моментов, которые демонстрируют неконтролируемые движения спутника. Показано, что подбором значений угла отклонения оси и угловой скорости можно реализовать программные движения даже при асимптотической неустойчивости программного движения по Ляпунову.

Ключевые слова: намагниченный спутник, геомагнитное поле, управляющий момент, программное движение.

Жылысбаева Қ.С., Саспаева Ә.Д.

Магниттелген ғарыштық аппараттың бағдарламалық қозғалысы

Мақалада геомагниттік өрістегі динамикалық симметриялы, магниттелген ғарыштық аппараттың полярлы жазық орбитадағы айналмалы қозғалысын басқаруды құру есебі қарастырылған. Серіктің тұрақты магниттік моменті динамикалық симметрия өсімен бағытталған. Серіктің айналмалы қозғалысы серіктің магниттік моменті мен тура дипольмен моделденетін Жердің магниттік өрісінің өзара әрекетімен беріледі. Гравитациялық моменттің әсері ескерілмеген. Басқару жүйесінің есебі - қажетті бағдарламалық қозғалыс болып табылады. Бағдарламалық қозғалыс ретінде серіктің өз өсі бойында тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналатын қозғалысы алынған. Аталған жағдайда өстен ауытқу бұрышы тұрақты болып қалады. Магниттелген серіктің қозғалыс теңдеуі жартылай бекітілген санақ жүйесінде құрылды. Берілген бағдарламалық қозғалысты қанағаттандыратын басқару моменттері табылды. Басқарылатын жүйенің қозғалыс теңдеуінің шешімі Maple математикалық пакетінде Рунге-Кутта әдісімен шығарылды. Шешімнің нәтижесі бойынша қозғалыстың кинематикалық параметрлерлерінің графиктері алынып, келесідей қорытынды жасалынды: басқару моменттері ескерілмеген кезде серіктің қозғалысы басқарылмайтындығы анықталды. Асимптотикалық орнықсыздық кезінде өстің ауытқу бұрышы мен бұрыштық жылдамдықтың мәнін таңдап алу барысында бағдарламалық қозғалысты жүзеге асыруға болатындығы көрсетілді. **Түйін сөздер:** магниттелген серік, геомагниттік өріс, басқарушы момент, бағдарламалық қозғалыс.

1 Introduction

Today, the interest in problem of rotational motion control of magnetized satellites has risen due to the practical needs of progressing technology of space flights and systems of magnetic stabilizing [1-2]. Especially, it concerns targets of orientation and stabilization of the magnetized artificial satellites of Earth in the geomagnetic field. Non-uniform rotation of the vector of geomagnetic field strength in inertial space and variation in its magnitude during the motion of the satellite's center of mass along an orbit does not allow providing exact orientation of a longitudinal axis of the satellite along this vector. In addition, the presence of forcing oscillations of the satellite relative to the local vector of geomagnetic field strength causes danger of onset of resonances between a basic frequency of the satellite and a frequency of the forcing moment. Therefore, there is a question to reduce the amplitude of forcing oscillations of the satellite by selection of control input. The physical meaning of control input can be of different nature: it can be directly the control forces and moments or control signals that are supplied to these mechanisms when their functioning is needed to take into account. This paper deals with the problem of forming the control moments through rotational motion of dynamically symmetric Earth satellite that has permanent magnetic moment directed along the axis of its dynamic symmetry. The magnetized satellite moves on a flat circular polar orbit in the geomagnetic field simulated by the dipole, which is antiparallel to the Earth spin axis. The orbits will be assumed to be independent of the satellite motion regarding their own center of mass.

2 Equations of motion

Hereafter, we consider the rotational motion of magnetized dynamically symmetric Earth satellite moving on a flat circular polar orbit in the geomagnetic field. It is expected that

Table 1. The table of direction cosines

-	x_2	y_2	z_2
x	$\cos \psi$	$\sin \psi$	0
y	$-\sin \psi \cos \theta$	$\cos \psi \cos \theta$	$\sin \theta$
z	$\sin \psi \sin \theta$	$-\cos \psi \sin \theta$	$\cos \theta$

the rotational motion of satellite is caused by interaction between the satellite's magnetic moment and the Earth magnetic field, which is simulated by the direct dipole. The effect of the gravitational torque is not taken into account. Derivation of equations of satellite motion will be carried out relative to the system of $x_2y_2z_2$ axes with the origin at its center of mass G , parallel regarding the geocentric reference frame (Fig.1).The permanent magnetic moment of satellite is directed along the axis of its dynamic symmetry. We will choose the semi-related right system of Rezal axes in the satellite body: z axis is directed on a symmetry axis; then x and y axes will lie in the equatorial plane, and the x axis will be directed perpendicularly to the zGz_2 plane so that looking through its end it will be seen the turn from the z_2 axis to z anticlockwise on the θ angle. An angle between the x_2 and x axes is defined via ψ [3]. Mutual position of introduced reference frames can be determined by the table of direction cosines (Table 1). By means of projection of the vector of magnetic strength H onto the x and y axes this yields:

$$H_x = H'_x \cos \psi + H'_y \sin \psi \quad H_y = -H'_x \sin \psi \cos \theta + H'_y \cos \psi \cos \theta + H'_z \sin \theta,$$

Then the magnetic torque is defined as follows:

$$\vec{M} = \vec{I} \times \vec{H}$$

and for the projections of the magnetic torque onto the satellite axes we have:

$$\begin{cases} M_x = -\frac{I\mu_e}{R^3} (1.5 \sin i \sin 2u \sin \psi \cos \theta + [\sin \nu - 3 \sin i \cos(\nu - 1) \sin^2 u] \cos \theta + \\ + [\cos \nu + 3 \sin i \sin(\nu - 1) \sin^2 u] \sin \theta) \\ M_y = \frac{I\mu_e}{R^3} (-1.5 \sin i \sin 2u \cos \psi + (\sin \nu - 3 \sin i \cos(\nu - 1) \sin^2 u) \sin \psi) \\ M_z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where I is the magnetic moment of the satellite.

Projection of the satellite's resulting angular velocity $\vec{\omega}$ onto the Rezal axes has the form:

$$\omega_x = \dot{\theta}, \omega_y = \dot{\psi} \sin \theta, \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}$$

where $\dot{\varphi}$ is the angular velocity of satellite rotation with respect to xyz reference frames.

Hence, the equations of satellite motion regarding the center of mass will be written as follows [4]:

$$\begin{cases} A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta = M_x \\ A\ddot{\psi} \sin \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - Cr\dot{\theta} = M_y \\ r = r_0 \end{cases} \quad (2)$$

These equations do not depend on φ , i.e., the angle at which the satellite turned around its axis. Then the projection of angular velocity onto the axis of symmetry r is permanent, and the θ and ψ angles are defined from the first two equations (Eq. 2).

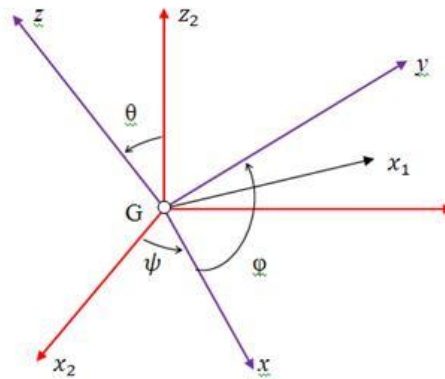


Figure 1 - The coordinate system

3 Building the programm motion

In this work as the program motion we will understand a task of determination of the active forces and moments applied to the spacecraft at which the motion with the given properties is one of its possible motions. The task of definition of the control vector, which provides the program of motion, leads to the solution of the linear equation relative to the control vector. The obtained common solution allows defining the sought differential equations for which using numerical methods of solution is possible to derive the methods of solution of non-linear equations system. Now, let us pass to consideration of building the program control for the prescribed motions of the satellite described in this paper. As a program motion we will choose the satellite's rotation around its axis with permanent angular velocity $\dot{\psi}_p = k_2$, by the same time saving the constant magnitude of angle of the axis deviation $\theta_p = k_1$, then we have:

$$\begin{cases} \theta_p = k_1 \\ \dot{\psi}_p = k_2 t \end{cases} \quad (3)$$

In order to realize this prescribed motion (Eq. 3) we will add the control moments M_1 and M_2 to the right side of equations of the motion of satellite (Eq. 2), and, when the polarity of the satellite $i = \frac{\pi}{2}, \nu = \frac{\pi}{2}$ is taken into account, we will get:

$$\begin{cases} A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta = \\ = -\frac{I\mu_e}{R^3} (1.5 \sin 2u \sin \psi \cos \theta + (1 - 3 \sin^2 u) \cos \psi \cos \theta) + M_1 \\ A\ddot{\psi} \sin \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - Cr\dot{\theta} = \\ = \frac{I\mu_e}{R^3} (-1.5 \sin 2u \cos \psi + (1 - 3 \sin^2 u) \sin \psi) + M_2 \end{cases} \quad (4)$$

To find these control moments, which are program control, we will substitute the values $\theta_p = k_1$ and $\dot{\psi}_p = k_2 t$ relative to prescribed motion. Then, for defining of control moments we obtain the following expressions:

$$\begin{cases} M_1 = Ak_2^2 \sin k_1 \cos k_1 + Crk_2 \sin k_1 + \\ + \frac{I\mu_e}{R^3} (1.5 \sin 2u \sin k_2 t \cos k_1 + (1 - 3 \sin^2 u) \cos k_2 t \cos k_1) \\ M_2 = -\frac{I\mu_e}{R^3} (-1.5 \sin 2u \cos k_2 t + (1 - 3 \sin^2 u) \sin k_2 t) \end{cases} \quad (5)$$

In consideration of Eq. 5 the equations of motion of control system will assume the form:

$$\begin{cases} A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + Cr\dot{\psi} \sin \theta = \\ = -\frac{I\mu_e}{R^3}(1.5 \sin 2u \sin \psi \cos \theta + (1 - 3 \sin^2 u) \cos \psi \cos \theta) + Ak_2^2 \sin k_1 \cos k_1 + Crk_2 \sin k_1 + \\ + \frac{I\mu_e}{R^3}(1.5 \sin 2u \sin k_2 t \cos k_1 + (1 - 3 \sin^2 u) \cos k_2 t \cos k_1) \\ A\dot{\psi} \sin \theta + 2A\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \theta - Cr\dot{\theta} = \\ = \frac{I\mu_e}{R^3}(-1.5 \sin 2u \cos \psi + (1 - 3 \sin^2 u) \sin \psi) - \frac{I\mu_e}{R^3}(-1.5 \sin 2u \cos k_2 t + (1 - 3 \sin^2 u) \sin k_2 t) \end{cases} \quad (6)$$

Note that investigated program motion (Eq. 3) is a solution of this system of equations by the choice of control moments M_1 and M_2 . Let's resolve these equations regarding the second derivatives:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + k_2^2 \sin k_1 \cos k_1 + \frac{C}{A}r(k_2 \sin k_1 - \dot{\psi} \sin \theta + \\ + \frac{I\mu_e}{R^3}(1.5 \sin 2u(\sin k_2 t \cos k_1 - \sin \psi \cos \theta) + (1 - 3 \sin^2 u)(\cos k_2 t \cos k_1) - \cos \psi \cos \theta) \\ \ddot{\psi} = 2\dot{\psi}\dot{\theta} \coth \theta + \frac{Cr\dot{\theta}}{A \sin \theta} + \frac{I\mu_e}{AR^3 \sin \theta}(-1.5 \sin 2u(\cos \psi - \cos k_2 t) + (1 - 3 \sin^2 u)(\sin \psi) - \sin k_2 t) \end{cases} \quad (7)$$

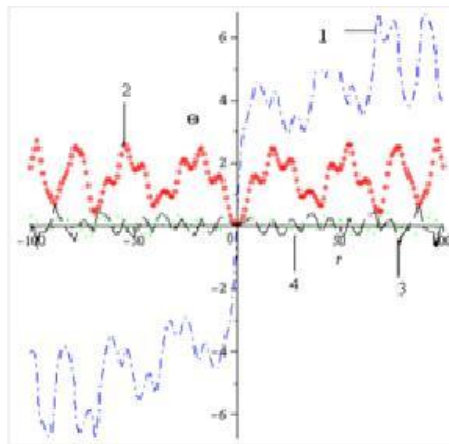


Figure 2 -Solution of the equations of motion without control

4 The solution of the motion equations

The motion equations of control system are obtained by the Runge - Kutta method using a mathematical package Maple. Solutions of equations of non-control motion show uncontrolled motion of the satellite. The primary program motion is a solution of the received system, however, it will be one of possible for physical realization only in case of its asymptotic stability by Lyapunov. If the decision is asymptotically unstable by Lyapunov, then the possibility of unlimited growth of deviations of magnitudes from their preset values actually means that the system makes the uncontrollable motions (see Fig. 2). Similar results were obtained in [7-9]. Here are following descriptions in the Figures 2, 3: 1 - $\psi(t)$ (precession angle), 2 - $\theta(t)$ (nutation angle), 3 - $q(t)$, 4- $p(t)$ (the projections of satellite's angular velocity onto the equatorial principal axes of inertia of the satellite).

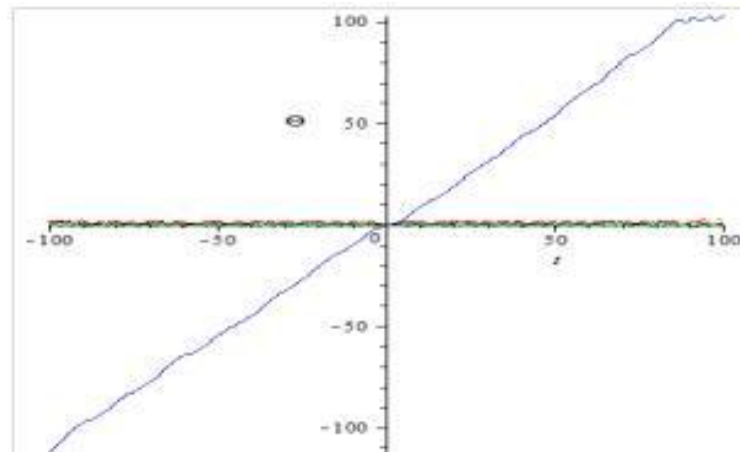


Figure 3 -Solution of the equations of motion with control

The figure 2 represents the graphs of the variation of precession angle, nutation angle and the projections of satellite's angular velocity onto the equatorial principal axes of inertia of the satellite in case of absence of control moments that demonstrate the non-control motion of satellite. Similarly, the figure 3 shows the graphs with presence of control moments, which provide prescribed motion, also are possible for realization. The results point out that through selection of values $k_1 = \frac{2\pi}{3}$ and $k_2 = 0.5$ it is possible to realize the program motion even at an asymptotic instability by Lyapunov.

5 Conclusion

The equations of control motion of magnetized satellite that moves on a flat circular polar orbit in the geomagnetic field simulated by the dipole, are constructed in this paper. The control moments that provide prescribed motion are obtained for chosen program motion. The solution of motion equations of control system is obtained by the Runge - Kutta method using a mathematical package Maple. Also we received the graphs of the variation of precession angle, nutation angle and the projections of satellite's angular velocity onto the equatorial principal axes of inertia of the satellite in case of absence of control moments that demonstrate the non-control motion of satellite. It is shown that through selection of values k_1 and k_2 it is possible to realize the program motion even at an asymptotic instability by Lyapunov. This work was partially supported by the grant of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project 0091/GF4 MON RK)

References

- [1] *M.J.Sidi*. Spacecraft dynamics and control. Cambridge: Univercity Press, 2002.- 409p.
- [2] *Ivanov D.S., Ovchinnikov M.Y., Tkachev S.S. C.C.* Upravlenie orientatsiei tverdogo tela, podveshannogo na strune s ispolsovaniem ventilatornykh dvigatelei //Isvestia RAN. Theory i systemy upravleniya. 2011.–№1. C.127-139 (in Russian)
- [3] *Hentov A.A.* Passivnaya stabilisatsiya iskusstvennykh sputnikov po magnitnomu polu Zemli // Kosmisheskie issledovannie. - 1967. - Tom. 5, № 4. - S. 540-553.(in Russian)
- [4] *Appel P.* Teoretisheskaya mehanika. - M.: Fizmatkis, 1960. - 487 s.(in Russian)

-
- [5] *Mukhametzyanov I.A., Muchartlyamov R.G.* Uravnenie programmnykh dvizheni. M.: Izd. RUDN, 1986 (in Russian)
- [6] *Bezglasnyi S.P.* Stabilisatsiya i upravleniya dvizheniem dynamicheskikh sistem . Electronnoe ushebnoe posobie. - Samara, 2010. - 102 s.(in Russian)
- [7] *Zhilisbayeva K.S., Tureeva Zh.U.* O beznutatsionnom dvizhenii namagnishennogo dynamicheski simmetrichnogo sputnika // Vestnik KazGU, ser. matem., mehanika, informatika. - 2005. - №3(46), - С. 85-90.
- [8] *Zhilisbayeva K.S.* O kolebaniyakh namagnishennogo sputnika v okrestnosti statsionarnogo dvizhenia . // Sb. Methody eksperimentalnoi fizyki. - 2010. - S. 49-52.(in Russian)
- [9] *Zhilisbayeva K.S., Ismailova A.* Passive Magnetic Stabilization of the Rotational Motion of the Satellite in its Inclined Orbit // Applied Mathematical Sciences. - 2015. - Vol. 9, no. 16. - P. 791-802.
- [10] *Saspayeva A.D* Postoenie uravneniya dvizhenia iskustvennogo sputnika Zemli v gravitatsionnykh polyakh Zemli i Luny // Mezhdunarodaya konferentsia "Aktualnye problemy matematiki i matematicheskogo modelirovaniya". -Almaty, Kazakhstan. - 2015. - S. 352-353. (in Russian)

УДК 624.131

Баймахан А.Р.^{1*}, Абдирахметова З.М.¹, Сейнасинова А.А.², Баймахан Р.Б.³¹ Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы² Академия гражданской авиации, Республика Казахстан, г. Алматы³ Казахский государственный женский педагогический университет, Республика Казахстан, г. Алматы

E-mail: *baimahan-aigerim@mail.ru

Разработка условий пластичности для грунтов анизотропного строения

В статье рассматривается вопрос разработки новых обобщенных условия пластичности (прочности) применительно к грунтам анизотропного, в частности для грунтов трансверсально-изотропного (транстропного) строения. Предлагается вывести такие условия обобщения известных условия пластичности Кулона - Мора $\tau_c = C + \sigma_n \tan \varphi$, для двух направлений: вдоль слоев \parallel и в крест слоям, то есть для направлений \perp к слоям, относительно плоскости изотропии для грунтов, которые имеют транстропное строение, систематизированное впервые А.К. Бугровым и А.И. Голубевым. Авторы анализируют также возможности обобщения условий пластичности (прочности) по главным напряжениям σ_1 и σ_2 , а также по значениям критических главных напряжений σ_{1c} и σ_2 , предложенное и развитое в свое время для грунтов изотропного строения Н.А. Цытовичем и Н.С. Булычевым, следуя подходу В.Витке, который предложил такого критерия применительно к горным породам ортотропного строения. Приведением экспериментальных данных о физико-механических и прочностных свойствах грунтов анизотропного строения и на базе предложенных новых обобщенных условий делается вывод о том, что можно определить зоны пластичности грунта транстропного строения.

Ключевые слова: анизотропия, грунт, пластичность, плоскость изотропии, угол наклона, касательные напряжения .

Baimakhan A.R., Abdiakhmetova Z.M., Seynasinova A.A., Baimakhan R.B.

Development of plasticity conditions for isotropic structure of the soil

The article discusses the development of new generalized condition of plasticity (strength) with respect to ground anisotropic, in particular for the transversely isotropic soils (transtropic) structure. It is proposed to bring these terms generalize the known condition of plasticity Coulone - Mohr $\tau_c = C + \sigma_n \tan \varphi$, for two directions: along and across the strike of layers \parallel layers, i.e. for \perp direction to the layers with respect to the plane of isotropy for soils that have transtropic structure systematized for the first time A.K. Bugrov and A.I. Golubev. The authors also analyze the possibility of generalization of the plasticity conditions (strength) on the main stress and σ_1 and σ_2 , as well as the critical values of the principal stresses σ_{1c} and σ_2 , proposed and developed in time for the isotropic structure of soil N.A.Tsytovich and N.S.Bulychev, the following approaches V.Vitke who suggested such criteria as applied to rocks orthotropic structure. These experimental data on the physical-mechanical and strength properties of the anisotropic structure of the soil and on the basis of the proposed new generalized conditions concludes that it is possible to determine the area of soil plasticity transtropic structure.

Key words: anisotropy, soil plasticity and isotropic plane, the angle of inclination, shear stresses.

Баймахан А.Р., Абдирахметова З.М., Сейнасинова А.А., Баймахан Р.Б.

Анизотропты құрылымды грунт үшін иілгіштік шарттарын өңдеу

Мақалада анизотропты, нақтылай келгенде транстропты құрылымды грунттарға қатысты болатын иілгіштіктің (мықтылық) жаңа жалпы шарттарын өңдеу мәселелері қарастырылады.

Кулон-Мордың $\tau_c = C + \sigma_n \tan \varphi$ илгіштік шарттарының трансропты құрылымы бар болатын грунттар үшін жалпылау шарттарын изотропия жазықтығына қатысты екі бағытта енгізу ұсынылады: грунттардың изотропия жазықтығына қатысты болатын алғаш рет А.К.Бугров және А.И.Голубевтер жүйелеген трансропты құрылымы бар қабаттар бойымен \parallel және қабаттарға перпендикуляр \perp бағытта. Авторлар басты кернеулер σ_1 және σ_2 , сонымен қатар кезінде изотропты құрылымы бар грунттар үшін В.Витке әдісі бойынша Н.А. Цытович және Н.С. Булычевтар ұсынып, зерттеген басты кернеулердің критикалық мәндері σ_{1c} және σ_{2c} бойынша илгіштіктің шарттарын жалпылау мүмкіндіктерін талдайды. Анизотропты құрылымы бар грунттардың мықтылық және физика-математикалық қасиеттері туралы тәжірибелік мәліметтерді келтіре отырып, және ұсынылып отырған жаңа жалпылама шарттар негізінде трансропты құрылымы бар грунттардың илгіштік аймақтарын анықтауға болады деген қорытынды жасалды.

Түйін сөздер: анизотропия, грунт, илгіштік, изотропия жазықтығы, көлбеу бұрышы, жанама кернеулер.

1 Введение

Важнейшим вопросом механики грунтов является теория прочности грунтов, которая была одной из первых инженерных теорий, нашедших широчайшее применение на практике. В настоящее время вопросам прочности посвящено огромное число отдельных работ, изложение и анализ которых потребовали бы многотомного труда. Не ставя перед собой такой задачи, в работе ограничились рассмотрением лишь важнейших положений теории прочности грунтов и их приложений к расчету прочности в свете новейших данных механики грунтов.

2 Постановка задачи

В геомеханике известно, что классическое условие пластичности (прочности) Кулона – Мора для изотропных материалов запишется так [1], [2]

$$\tau_c = C + \sigma_n \tan \varphi, \quad (1)$$

где τ_c - касательные напряжения на площадках скольжения; C - сцепление, Мпа; σ_n - нормальные напряжения на площадках скольжения; φ - угол внутреннего трения. Условие пластичности (прочности) в главных напряжениях (σ_3 - не оказывает влияние на прочности) определяется с помощью:

$$\sigma_{1c} = \sigma_{max} = \sigma_c + \beta \sigma_{2c}, \quad (2)$$

где β -параметр объемной прочности:

$$\beta = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad (3)$$

Условию предельного равновесия для несвязных сыпучих грунтов можно определить с помощью угла внутреннего трения [1]:

$$\frac{\sigma_{c1} - \sigma_{c2}}{\sigma_{c1} + \sigma_{c2}} = \sin \varphi, \quad (4)$$

где σ_{c1} и σ_{c2} - предельные главные напряжения. Несложными тригонометрическими преобразованиями можно получить

$$\sigma_{2c} = \xi \sigma_{1c}, \quad (5)$$

где

$$\xi = \frac{1}{\beta} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (6)$$

Или из выражений (5) с помощью (3) можно получить

$$\sigma_{1c} = \beta \sigma_{2c}. \quad (7)$$

Выражению (5) с учетом (6) можно представить в виде

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \tan^2(45^\circ \pm \frac{\varphi}{2}). \quad (8)$$

Это выражение широко используется в теории давления грунтов на ограждения. Знак минус в скобках соответствует активному давлению, а знак плюс – пассивному сопротивлению сыпучих грунтов. Теперь запишем условие предельного равновесия для связных грунтов

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2 + c \operatorname{ctg} \varphi} = \sin \varphi, \quad (9)$$

откуда

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2 \sin \varphi \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + c \operatorname{ctg} \varphi \right). \quad (10)$$

или

$$\sigma_1 = \sigma_2 + 2 \sin \varphi \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + c \operatorname{ctg} \varphi \right). \quad (11)$$

Определяемые выражениями (1), (11) и широко применяемые на сегодня условия пластичности для грунтов остается справедливой для грунтов только в рамках изотропного строения. Как известно в природе грунты и горные породы часто имеют анизотропные строения. Сюда входят горизонтальные и наклонные слоистости, неоднородные строения, сложный состав скелета грунта, куда входят грунты различной мощности и различного состава.

3 Определение условия пластичности для двух направлений

Поэтому возникает вопрос о необходимости обобщить эти критерии к грунтам анизотропного строения. Но в анизотропных грунтах пластичность может развиваться по крайней мере в двух направлениях. Ими являются направления вдоль плоскости изотропии (\parallel) и направления в крест к ней (\perp). Так как упругие свойства (E_1 и E_2) анизотропных материалов относительно плоскости изотропии различные, компоненты напряжений тоже будут разными. Поэтому запишем условию пластичности для этих двух направлений. Такая идея, имеется в работе [3] относительно вопросов горной породы. Но такой подход конечно, справедлив и для грунтов [4]. И так известное условие пластичности Кулона - Мора теперь будет выглядеть так:

$$\tau_{\parallel c} = C_{\parallel} + \sigma_{\parallel n} \tan \varphi_{\parallel}, \quad (12)$$

$$\tau_{\perp c} = C_{\perp} + \sigma_{\perp n} \tan \varphi_{\perp}, \quad (13)$$

где $\tau_{\parallel c}, \tau_{\perp c}$ - касательные напряжения на площадках скольжения; C_{\parallel}, C_{\perp} -сцепления, Мпа; $\sigma_{\parallel n}, \sigma_{\perp n}$ -нормальные напряжения на площадках скольжения в направлениях \parallel и \perp к плоскости изотропии определяются из эксперимента или снимается из кругов Мора; $\varphi_{\parallel}, \varphi_{\perp}$ - углы внутренних трений.

Для наклоннослоистых анизотропных материалов углов наклонов плоскостей изотропии относительно горизонтальной оси декартовой системы координат xOz обозначим через $\bar{\varphi}$. Следует сказать, что углы φ и $\bar{\varphi}$ имеют совершенно разные смыслы и не связаны друг с другом. Условию пластичности (предела прочности) на одноосное сжатие для изотропной среды имеет вид /2/:

$$\sigma_c = \frac{2C \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad (14)$$

Распространим это условие для грунтов анизотропного строения:

$$\sigma_{\parallel c} = \frac{2C_{\parallel} \cos \varphi_{\parallel}}{1 - \sin \varphi_{\parallel}}, \quad (15)$$

$$\sigma_{\perp c} = \frac{2C_{\perp} \cos \varphi_{\perp}}{1 - \sin \varphi_{\perp}}, \quad (16)$$

В главных напряжениях условие пластичности (прочности) будет иметь вид

$$\sigma_{1\parallel c} = \sigma_{\max\parallel c} = \sigma_{\parallel c} + \beta_{\parallel} \sigma_{2\parallel c}, \quad (17)$$

$$\sigma_{1\perp c} = \sigma_{\max\perp c} = \sigma_{\perp c} + \beta_{\perp} \sigma_{2\perp c}, \quad (18)$$

где параметры объемной прочности $\beta_{||}, \beta_{\perp}$ -вычисляются также отдельно для этих двух направлений:

$$\beta_{||} = \frac{1 + \sin \varphi_{||}}{1 - \sin \varphi_{||}}, \quad (19)$$

$$\beta_{\perp} = \frac{1 + \sin \varphi_{\perp}}{1 - \sin \varphi_{\perp}}, \quad (20)$$

Аналогично, условия предельного равновесия для несвязных сыпучих грунтов будет иметь вид

$$\frac{\sigma_{c1||} - \sigma_{c2||}}{\sigma_{c1||} + \sigma_{c2||}} = \sin \varphi_{||}, \quad (21)$$

$$\frac{\sigma_{c1\perp} - \sigma_{c2\perp}}{\sigma_{c1\perp} + \sigma_{c2\perp}} = \sin \varphi_{\perp}. \quad (22)$$

В этих выражениях $\sigma_{c1\perp}$ и $\sigma_{c2||}$ -являются предельными главными напряжениями. Также запишем и выражению (18) в виде

$$\sigma_{2c||} = \xi_{||} \sigma_{1c||}, \quad (23)$$

$$\sigma_{2c\perp} = \xi_{\perp} \sigma_{1c\perp}. \quad (24)$$

в свою очередь:

$$\xi_{||} = \frac{1}{\beta_{||}} = \frac{1 - \sin \varphi_{||}}{1 + \sin \varphi_{||}}. \quad (25)$$

$$\xi_{\perp} = \frac{1}{\beta_{\perp}} = \frac{1 - \sin \varphi_{\perp}}{1 + \sin \varphi_{\perp}}. \quad (26)$$

Произведя следующие операции из выражений (23), (24) с помощью (19) и (20) получим

$$\sigma_{1c||} = \beta_{||} \sigma_{2c||}, \quad (27)$$

$$\sigma_{1c\perp} = \beta_{\perp} \sigma_{2c\perp}. \quad (28)$$

Теперь выражению (23) и (24) с учетом (25) и (26) относительно плоскости изотропии трансропной среды, представим в виде

$$\frac{\sigma_{2C\parallel}}{\sigma_{1C\parallel}} = \tan^2(45^\circ \pm \frac{\varphi_{\parallel}}{2}). \quad (29)$$

$$\frac{\sigma_{2C\perp}}{\sigma_{1C\perp}} = \tan^2(45^\circ \pm \frac{\varphi_{\perp}}{2}). \quad (30)$$

Эти условия для изотропной среды в форме (21) применяется в теории давления грунтов на ограждения. Знаки в выражениях (29) и (30) минус в скобках соответствует активным давлениям и плюс – пассивным сопротивлениям сыпучих грунтов.

На подпорную стенку, давления по (29) будет действовать либо перпендикулярно, либо под углом, в зависимости от наклонов слоев плоскостей изотропии грунтов наклонно слоистого строения. Давления по выражению (30) действует в крест слоям изотропии. Поэтому относительно стенки, они будут действовать параллельно к стенке в точках сцепления, то есть на пограничном слое.

Продолжим такую разработку - условию предельных равновесий для связных грунтов:

$$\frac{\sigma_{1C\parallel} - \sigma_{2C\parallel}}{\sigma_{1C\parallel} + \sigma_{2C\parallel} + C_{\parallel} \operatorname{ctg} \varphi_{\parallel}} = \sin \varphi_{\parallel}. \quad (31)$$

$$\frac{\sigma_{1C\perp} - \sigma_{2C\perp}}{\sigma_{1C\perp} + \sigma_{2C\perp} + C_{\perp} \operatorname{ctg} \varphi_{\perp}} = \sin \varphi_{\perp}. \quad (32)$$

Преобразуя представим их в виде

$$\sigma_{1\parallel} - \sigma_{2\parallel} = 2 \sin \varphi_{\parallel} \left(\frac{\sigma_{1\parallel} + \sigma_{2\parallel}}{2} + c_{\parallel} \operatorname{ctg} \varphi_{\parallel} \right). \quad (33)$$

$$\sigma_{1\perp} - \sigma_{2\perp} = 2 \sin \varphi_{\perp} \left(\frac{\sigma_{1\perp} + \sigma_{2\perp}}{2} + c_{\perp} \operatorname{ctg} \varphi_{\perp} \right). \quad (34)$$

Данные о значениях физико-механических и прочностных свойств грунтов анизотропного (трансропного) строения немногочисленные.

В работе [4] имеется такие данные для некоторых видов грунтов. Собранные из разных разделов этой работы такие экспериментальные данные (объемный вес, параметр прочности, модуль упругости, модуль сдвига, коэффициент Пуассона, сила сцепления, угол внутреннего трения, предел прочности и др.) и дополненные нами теоретическими вычислениями по предложенным формулам (15) и (16) значения пределов прочности грунтов, а также значение $G_{\parallel\perp}$, вычисленной для скальной породы по Сен-Венану /4/ приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Экспериментально установленные физико-механические, прочностные свойства и вычисленные теоретически, пределы прочности на одноосное сжатие некоторых грунтов.

№	Грунты	Объемн вес	Параметр проч	Модуль упруг	Модуль упруг	Модуль сдвиг	Коэф Пуассона	Коэф Пуассона	Сила сцепление	Сила сцепление	Угол внутрен	Угол внутрен	Предел прочн ости	Предел прочн ости
		$\gamma, kH / M^3$	ξ_0	$E_{ }, Mпа$	$E_{\perp}, Mпа$	$G_{ \perp}, Mпа$	$\nu_{ }$	ν_{\perp}	$c_{ }, Mпа$	$c_{\perp}, Mпа$	$\varphi_{ }^0$	φ_{\perp}^0	$\sigma_{c }$	$\sigma_{c\perp}$
1	Суглинок	17.0	0.60	13.4	26.4	7.6	0.16	0.24	0.025	0.050	26	26	0.080	0.160
2	Песок	17.0	0.43	23.0	16.0	7.0	0.30	0.30	0.005	0.005	27	33	0.016	0.180
3	Суглинок, насыщенный	20.0	0.48	30.0	15.0	7.6	0.36	0.24	0.030	0.060	19	23	0.084	0.197
4	Грунт	19.0	1.00	10.0	20.0	7.4	0.30	0.40	0.080	0.120	20	24	0.230	0.370
5	Суглинок	9.4	0.65	12.0	8.0	3.4	0.39	0.35	0.010	0.014	20	24	0.029	0.043
6	Суглинок	8.0	0.65	6.0	4.0	1.7	0.39	0.35	0.050	0.007	15	18	0.130	0.019
7	Суглинок	9.2	0.65	9.0	6.0	2.5	0.39	0.35	0.006	0.008	18	22	0.017	0.024
8	Супесь текучая	19.8	0.53	19.6	18.4	7.1	0.31	0.30	0.003	0.003	18	21	0.008	0.009
9	Суглинок тугопластичн	19.9	0.58	39.8	27.0	10.0	0.36	0.35	0.02	0.02	13	17	0.005	0.054
10	Песок мелкий	21.1	0.25	81.3	85.0	32.7	0.28	0.30	0.002	0.002	35	37	0.008	0.008
11	Горная порода. Известняк	2.5	0.33	3200	1600	1185	0.38	0.32	47	0.25	31	29	116.1	0.849
12	Бетон ВП-РЕ (полиэстр) [5]	1.65		4941	4941	1930	0.28	0.28	-	-	-	-	201.4	0.849

Для вычисления наибольших главных напряжений их представим теперь в виде:

$$\sigma_{1||} = \sigma_{2||} + 2 \sin \varphi_{||} \left(\frac{\sigma_{1||} + \sigma_{2||}}{2} + c_{||} \operatorname{ctg} \varphi_{||} \right). \quad (35)$$

$$\sigma_{1\perp} = \sigma_{2\perp} + 2 \sin \varphi_{\perp} \left(\frac{\sigma_{1\perp} + \sigma_{2\perp}}{2} + c_{\perp} \operatorname{ctg} \varphi_{\perp} \right). \quad (36)$$

Для определенных типов грунтов если известно экспериментальное критическое значение сжимающих главных напряжений $\sigma_{1||}$ и $\sigma_{1\perp}$, то и $\sigma_{2||}$ и $\sigma_{2\perp}$, можно вычислить, преобразуя для этого выражений (33), (34) к виду

$$\sigma_{2c||} = \xi_{||} \sigma_{1c||} - 2c_{||} \frac{\cos \varphi_{||}}{1 + \sin \varphi_{||}}. \quad (37)$$

$$\sigma_{2c\perp} = \xi_{\perp} \sigma_{1c\perp} - 2c_{\perp} \frac{\cos \varphi_{\perp}}{1 + \sin \varphi_{\perp}}. \quad (38)$$

Вычисляя главные напряжения $\sigma_{max} = \sigma_1$ и $\sigma_{min} = \sigma_2$, например методом конечных элементов по алгоритмам работ [6], [7], [8], [9] далее с помощью выражений (15) и (16) или сравнивая их с критическими значениями по таблице 1 и по выражениям (35)-(38) нетрудно найти зоны, которые переходят в пластическое состояние и направлению их дальнейшего развития [10-16].

4 Заключение

Проведенные расчеты по экспериментальным данным и дополненные нами теоретические вычисления позволяют определить зоны, которые переходят в пластическое состояние и направлению их дальнейшего развития. Разработаны новые обобщенные условия пластичности (прочности) применительно к грунтам анизотропного, в частности для грунтов трансверсально-изотропного (транстропного) строения. Выведены условия обобщения известных условия пластичности Кулона-Мора $\tau_c = C + \sigma_n \tan \varphi$, для двух направлений.

Литература

- [1] *Цытович Н.А.* Механика грунтов. - Москва: «Высшая школа», 1979. -114-116 с.
- [2] *Н.С. Бульчев* Механика подземных сооружений в примерах и задачах. - Москва: Недра, 1989. -59-61 с.
- [3] *Витке В.* Механика скальных пород. - Москва: Недра, 1990. - 440 с.
- [4] *Бугров А.К., Голубев А.И.* Анизотропные грунты и основания сооружения. - Санкт-Петербург: «Недра», 1993. -245 с.
- [5] BIT United ltd. England. 2007-2014. URL: <http://www.bitunited.ru//84> (дата обращения 25.05.2014)
- [6] *Рысбаева А.К.* Разработка анизотропной модели строения селезащитных грунтовых плотин и обоснование инновационной технологии ее возведения: // автореф: канд. тех. наук: 06.02.01. - Бишкек, 2014. -22 с.
- [7] *Рысбаева Г.П. Баймахан Р.Б.* Закономерности трещинообразования в массиве вблизи контура подземного сооружения в анизотропном массиве. - Алматы, 2016. – 177 с.
- [8] *Сейнасинова А.А.* Напряженное состояние слабосвязанного массива в окрестности подземной выработки с учетом естественных и искусственных неоднородностей. // Автореферат дисс. канд. физ.-мат. наук Алматы, 2010, 21с.
- [9] *Баймахан Р.Б.* Расчет сейсмонапряженного состояния подземных сооружений в неоднородной толще методом конечных элементов. Монография (Под ред. академика Ш.М. Айталиева).- Алматы, 2002. -232с.
- [10] *Тер-Мартirosян З. Г.* Механика грунтов. — М.: Изд-во АСВ, 2005.
- [11] *Ухов С.Б., Семенов В. В., Знаменский В. В. и др.* Механика грунтов, основания и фундаменты. — М.: Изд-во АСВ, 2005.
- [12] *Далматов Б.И.* Механика грунтов, основания и фундаменты. Л., 1988.
- [13] *Веселов В.А.* Проектирование оснований и фундаментов. - М., 1990.
- [14] *Под ред. Е.А.Сорочана и Ю.Г.Трофименкова.* Основания, фундаменты и подземные сооружения. Справочник проектировщика - М., 1985.
- [15] *Иванов П.Л.* Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов. - М., 1991.
- [16] *Далабаев С., Мухамбетжанов С.Т., Абдиакметова З.М.* Simulation-based adaptive filter matlab //Вестник КазНУ им.аль-Фараби. Серия "Математика, механика, информатика". - Алматы, 2013. №4(79), стр.5-12.

References

- [1] *Tsytoovich N.A.* Soil Mechanics. - Moscow: "High School 1979. - p.114-116.
- [2] *N.S. Bulychev* Mechanics of underground structures in the examples and problems. - Moscow: Nedra, 1989. -p.59-61.
- [3] *Vitke V.* Rock mechanics. - Moscow: Nedra, 1990. - 440 p.
- [4] *Bugrov A.K. Golubev A.I.* Anisotropic soils and foundation structures.- St. Petersburg. "Bosom". 1993. -245p.
- [5] BIT United ltd. England. 2007-2014. URL: <http://www.bitunited.ru//84> (request date 25.05.2014)
- [6] *Rysbaeva A.K.* Development of anisotropic structure antimud slide protection earth dams and justification of the innovative technology of its construction : // Abstract of dissertation for the degree of candidate of technical sciences. -Bishkek, 2014, -22 p.
- [7] *Rysbaeva G.P., Baymahan R.B.* Laws of cracking in the vicinity of the array circuit of underground structures in an anisotropic array. - Almaty, 2016 -177 p.
- [8] *Seynasinova A.A.* The state of stress in the vicinity of a weakly bound array of underground production, taking into account natural and artificial inhomogeneities. //Abstract of diss. cand. Sci. Almaty Sciences, 2010, 21 p.
- [9] *Baymahan R.B.* Calculation seysmonapryazhennogo of underground structures in the non-uniform thickness of the finite element method. Monograph (Ed. Academician Sh Aytaliev). -Almaty, 2002. -232c.
- [10] *Ter-Martirosyan Z.G.* Soil Mechanics. - M .: Publishing House of the DIA 2005.
- [11] *Ukhov S.B., Semenov V.V., Znamensky V.V., et al.* Soil mechanics, foundation and foundations. - M .: Publishing House of the DIA, 2005.
- [12] *Dalmatov B.I.* Soil mechanics, foundation and foundations. -L. 1988.
- [13] *Veselov V.A.* Design of the foundations. - M., 1990.
- [14] *Ed. E.A.Sorochana and Yu.G.Trofimenkova.* Grounds, foundations and underground structures. Designer Directory - Moscow, 1985.
- [15] *Ivanov P.L.* Soils and foundation of hydraulic structures. Soil Mechanics. - M., 1991.
- [16] *Dalabaev S., Mukhambetzhanov S.T., Abdiakhmetova Z.M.* Simulation-based adaptive filter matlab. -Almaty, 2013. №4(79), p.5-12.

UDC 519.62

Kunakbayev T.* , Nigmatov D.** , Turekhanova V.**

Al-Farabi Kazakh National University, Republic of kazakhstan, Almaty

E-mail: *kutulegen@mail.ru, **nigmatov_d@mail.ru, ***turekhanova_venera92@mail.ru

Dynamic calculation of an optimum arrangement of rotary wind turbines on floors of a compact multystoried wind farm

In view of the deterioration of the ecological situation on the planet Earth and decreasing feedstock for conventional sources of energy it has recently become urgent creation of non-traditional, non-polluting and renewable energy sources. Many farms of the Republic of Kazakhstan are interested in use of autonomous sources of electric energy and, first of all, the energy of a stream of wind which is available much in the most part of our country. It is generated by a variety of reasons – and remoteness of some farms from system of power supply, and forwarding character of certain consumers, and, at last, simply deficiency of the electric power in the republic and therefore desire to leave from tactical and market whims in distribution of fuel and energy resources. In al-Farabi Kazakh National University we have offered a compact multystoried wind farm (CMWF) representing a multystoried design on which floors wind turbines of various type of the small power settle down. For performance of conditions of compactness of CMWF it is necessary to define minimum possible (optimum) distance between three wind turbines on internal floors of a wind farm for free passing of a wind stream. For the solution of this task packages of application programs of Autodesk family have been used.

Key words: multi-storey wind farm, "Baiterek", wind turbine Darrieus type, optimal location, CMWF, Autodesk.

Кунакбаев Т., Нигметов Д., Туреханова В.

Динамический расчет оптимального расположения карусельных ветротурбин на этажах компактной многоэтажной ветроэлектростанции

В виду ухудшения экологической обстановки на планете Земля и понижением сырьевых запасов для традиционных источников энергии в последнее время становится актуальным создание нетрадиционных, экологически чистых и возобновляемых источников энергии. Многие хозяйства Республики Казахстан заинтересованы в использовании автономных источников электрической энергии и, прежде всего, энергии потока ветра, имеющейся в избытке в большей части нашей страны. Это порождено рядом причин – и отдаленностью некоторых хозяйств от системы электроснабжения, и экспедиционным характером отдельных потребителей, и, наконец, просто дефицитом электроэнергии в республике, и потому желанием уйти от конъюнктурно-рыночных капризов в распределении топливно-энергетических ресурсов. В Казахском национальном университете им. аль-Фараби нами предложена оригинальная компактная многоэтажная ветроэлектростанция (КМВЭС) представляющая собой многоэтажную конструкцию, на этажах которой располагаются ветротурбины различного типа небольшой мощности. Для выполнения условий компактности КМВЭС необходимо определить минимально возможное (оптимальное) расстояние между тремя ветротурбинами на внутренних этажах ветроэлектростанции для свободного прохождения ветрового потока. Для решения этой задачи были использованы пакеты прикладных программ семейства Autodesk: Inventor и CFD Simulation.

Ключевые слова: многоэтажная ветроэлектростанция, "Байтерек", ветротурбина Дарье, оптимальное расположение, КМВЭС, Autodesk.

Кунакбаев Т., Нигметов Д., Туреханова В.

Көпқабатты желэлектростанцияның қабаттарында карусель типті желтурбиналарды тиімді орналастыру динамикалық есебі

Экологиялық жағдайдың құлдыраумен және щикызат қорының түсуімен бүкіл әлемде соңғы кезде әдетті энергия көзі орнына экологиялық таза және жаңартылатын энергия көзіні пайдалану өзекті болып табылады. Қазақстан Республикасының көптеген шаруашалықтарында автономдық электрлік көзін қолдану әсерінің маңыздылығы өсіп келеді, біріншіден, ол мемлекетіміздің көптеген бөлігінде артықшылығы бар жел ағымының энергиясы. Бұл бірқатар себептермен туындалған – біршама шаруашылықтарының электрмен жабдықтау жүйесінен алшақ орналасуымен және де жекелеген тұтынушыға, қарапайым электр қуатының жетіспеушілігіне, жағу-энергетика ресурстарынан коньютур-базалық құбылыстарының өзгеруіне байланысты. Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінде біз көпқабатты конструкциядан құрастырылған желэлектростанциясын (КҚЖЭС) ұсындық, әрбір қабатта шағын қуатты әртүрлі желтурбиналары орналасқан. КҚЖЭС-тың жинақы шарттарын орындау үшін, желэлектростанциясының ішкі қабаттарында, жел ағымының тегін өтуіне, үш желтурбиналарының арасындағы қашықтық ықтималын шамасын (ең қолайлы) анықтау қажет. Бұл тапсырманы шешу үшін, Autodesk: Inventor және CFD Simulation қолданбалы геоақпаратты бағдарламаларының жиынтықтары қолданылған.

Түйін сөздер: көпқабатты желэлектростанция, "Бәйтерек", Дарье желтурбинасы, тиімді орналастыруы, КҚЖЭС, Autodesk.

1 Introduction

In view of the deterioration of the ecological situation on the planet Earth and decreasing feedstock for conventional sources of energy it has recently become urgent creation of non-traditional, non-polluting and renewable energy sources. Many farms of the Republic of Kazakhstan are interested in use of autonomous sources of electric energy and, first of all, the energy of a stream of wind which is available much in the most part of our country. It is generated by a variety of reasons – and remoteness of some farms from system of power supply, and forwarding character of certain consumers, and, at last, simply deficiency of the electric power in the republic and therefore desire to leave from tactical and market whims in distribution of fuel and energy resources [1].

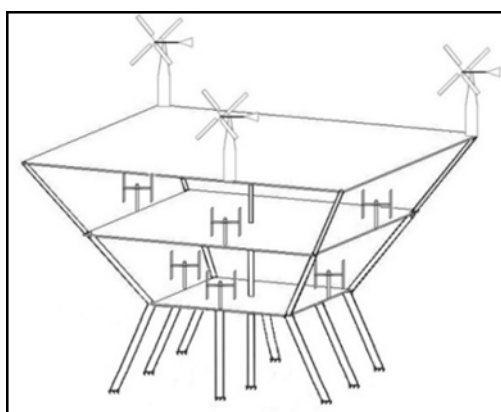


Figure 1 – Sketch a compact three-story wind farm

Wind – a natural, environmentally friendly power source. In all developed countries of the world, a significant role in the energy balance, as a source of energy, the wind begins to play.

Constantly expanding manufacture and installation of efficient wind turbines. In al-Farabi Kazakh National University we have offered a compact multystoried wind farm (CMWF) representing a multystoried design on which floors wind turbines of various type of the small power (fig. 1) settle down [2].

On internal floors CMWF advantageous to use rotary (vertical axis) wind turbine Darrieus type [2], at which the turbulence occurs around their themselves [3]. While there have propeller the turbulent trace which is a negative effect on neighboring wind turbine (Fig.2).



Figure 2 – The turbulent wake behind a propeller-type hydraulic turbines

The compact multistorey wind farm has the following advantages in comparison with usual land wind farms and separate wind turbines of identical power [2]: 1. Economy of the territory: CMWF occupies the territory several times smaller, than a usual wind farm of the same power with the wind turbines located to one floor on the ground. 2. A more sustainable use of wind power because of an arrangement of wind turbines at different heights as the speed of the wind flow has a different value depending on the height. 3. The space between floor overlappings forms the air passage promoting effective course of a wind stream as in a wind tunnel (effect of draft). 4. Simplicity of a design, her assembly and dismantling (as the Kazakh yurt) in comparison with the separate wind turbine of the same power. At the same time, the supporting structure of the separate wind turbine of big power will be less steady, than the multistorey CMWF supporting framework of the same power. 5. A possibility of a combination of different types of wind turbines with different speeds of rotation. 6. Than above the floor wind turbines settle down, subjects efficiency size them wind power increases as the speed of wind is usually higher at big heights. By us it is shown that installation on floors of CMWF of wind turbines in number of three is optimum [2]. Separate wind turbines of big power, occupying the small territory, have the following disadvantages: 1) complexity of a design; 2) big noise level; 3) the complexity of the installation and repair. CMWF is created for the first time in the world, there are no analogs [4]. The production technology of wind turbines of big power is rather difficult and it isn't in Kazakhstan. Whereas the production technology of wind turbines of low power is less difficult and is already created in Kazakhstan including us (a photo 2 and 3) [2]. Therefore in the countries where there is no production technology of wind turbines of big power (more than 100 kW), it is favorable to use CMWF. For performance of conditions of compactness of CMWF it is necessary to define minimum possible (optimum) distance between three wind turbines on internal floors

of a wind farm for free passing of a wind stream [5]. Existence of the laminar stream passing between wind turbines will be the main criterion of receiving the required results. For the solution of this task packages of application programs of Autodesk family have been used: – Autodesk Inventor Pro© [6] for creation of solid-state models; – Autodesk Simulation CFD© [6] based on base of the equations of Navier-Stokes, for modeling of a flow a wind stream of the rotating wind turbines in the form of solid-state models.

2 Modeling

Process of research can be divided into the following stages: – to construct solid-state model of the wind turbine; – to build the internal floor of CMWF and to arrange on it 3 wind turbines; – to carry out numerical modeling of a task; – to analyse the received results. The three-blade wind turbine has been used, and as the cross section of a wing of the wind turbine the NACA 8416 profile has been chosen. In a software package of Inventor we create sketches of an axis of the wind turbine and three blades, for receiving three-dimensional model we squeeze out solid-state models of blades from our sketches we connect them to an axis as it is shown in figures 3 and 4 respectively:

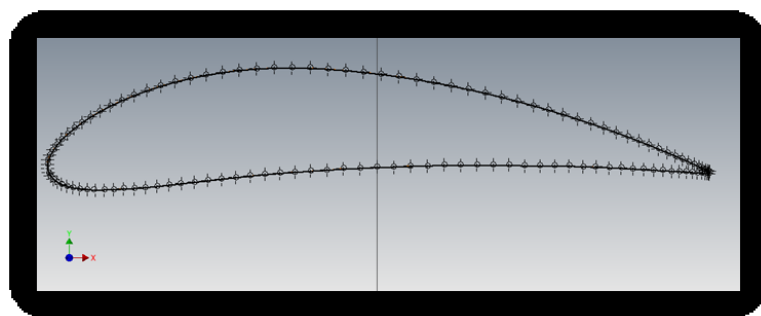


Figure 3 – Sketch of an blade cross section with a profile of NACA 8416

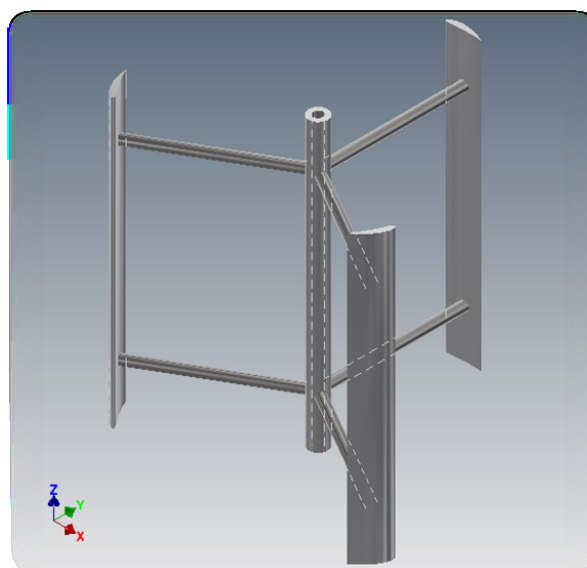


Figure 4 – The squeezed-out three-dimensional model of the wind turbine with three blades

By the same way it is received three-dimensional model of the floor of CMWF in the form of a hexagon with three three-blade wind turbines (fig. 5).

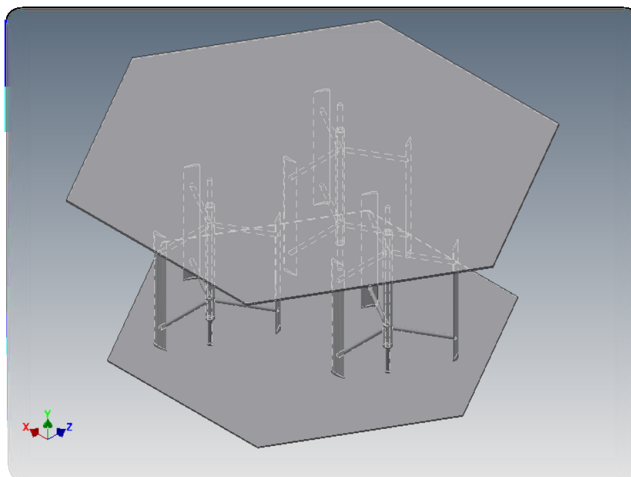


Figure 5 – Three-dimensional model of the floor of CMWF in the form of a hexagon with three three-blade wind turbines

Further, for modeling of a flow a wind stream of three wind turbines installed on the floor of CMWF we use the software package of Autodesk Simulation CFD©. For this purpose we create an environment which flows round wind turbines in the floor of CMWF – air, and we set boundary conditions: Entrance (inlet): size of speed of a wind stream; Exit (outlet): pressure – 0 Pas; Slip conditions on all surfaces. The settlement grid for the decision is built automatically, wind turbines have "free wheeling" and rotate under the influence of a wind stream, acts as a solver the model of turbulence SST k-omega, quantity of steps of the decision – 1000, with a temporary step – 1 second (fig. 6 and 7).

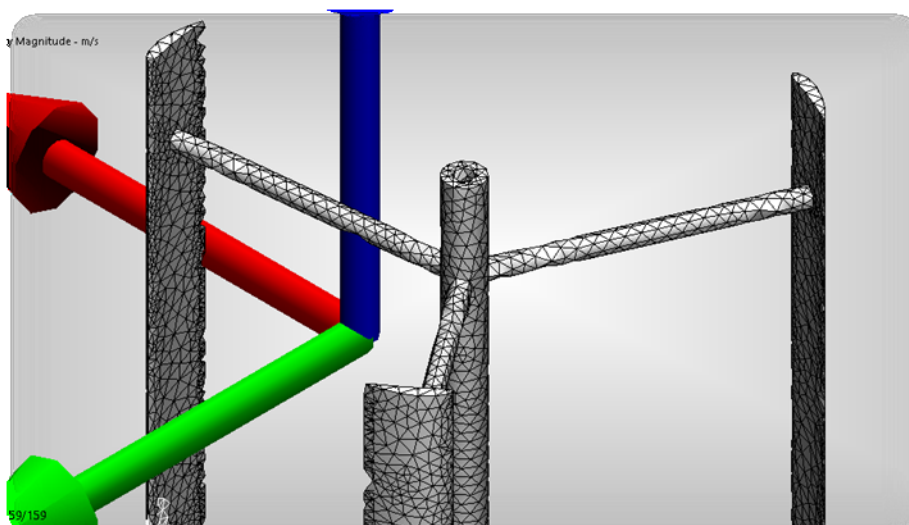


Figure 6 – A settlement grid on the example of the wind turbines

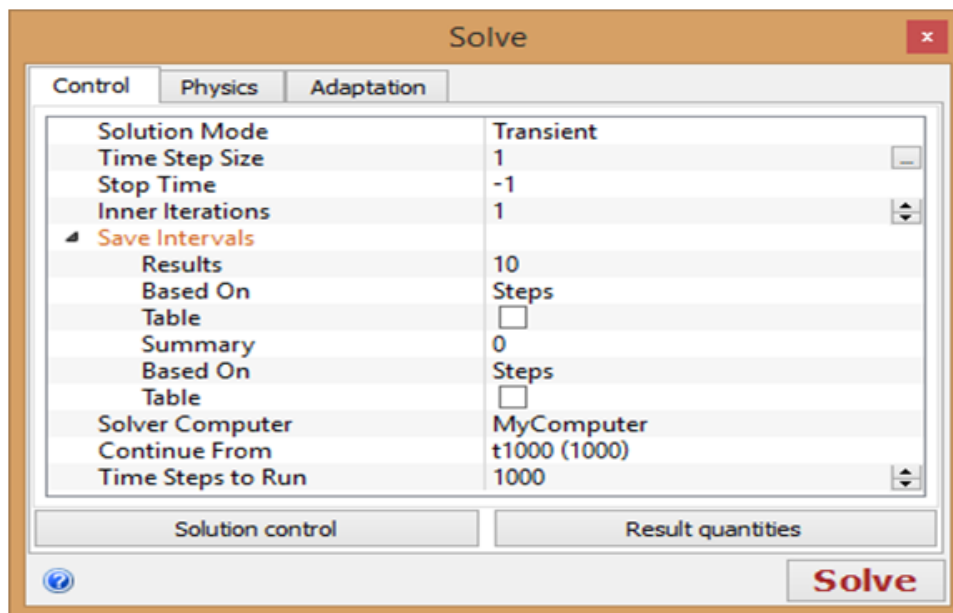


Figure 7 – Decision parameters

3 Conclusion

The received result in the form of animation of a flow are shown in figures 8.

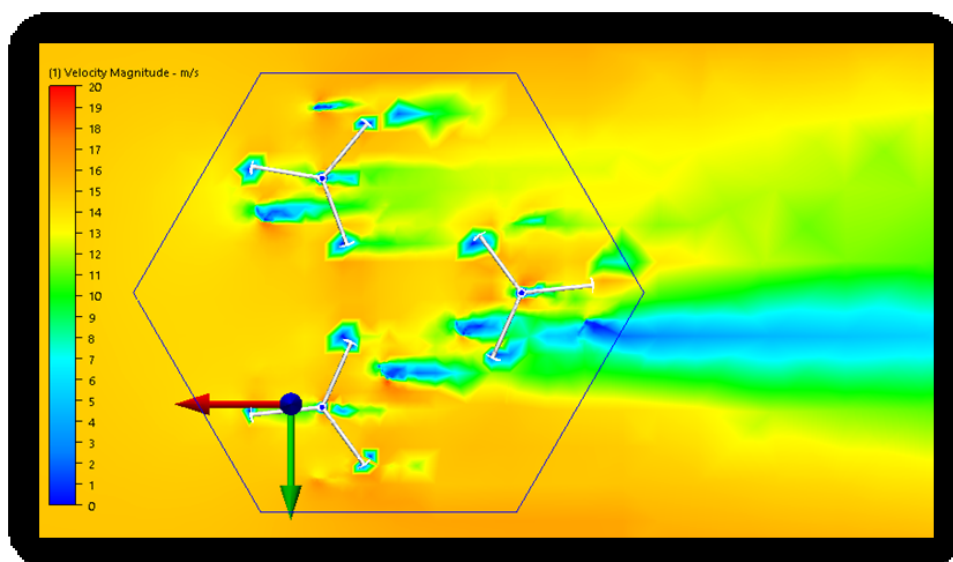


Figure 8 – Animation of a flow. Top view

From this picture it is visible what between wind turbines begins to pass a stream of air which speed is equal to tentative speed that will indicate emergence of a laminar flow between wind turbines. And at this moment the necessary minimum size of distance between wind turbines is defined. Results of calculations are given in a type of schedules (fig. 9).

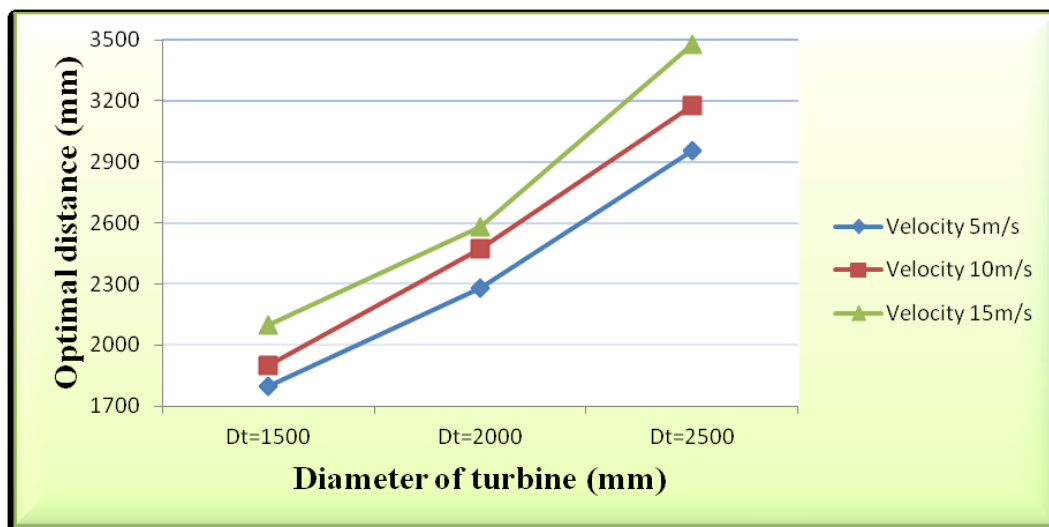


Figure 9 – The schedule of dependence of minimum size of distance between wind turbines from flow rates of air and dimeters of wind turbines

Thus, we have shown a possibility of finding of minimum possible (optimum) distance between three wind turbines on internal floors of CMWF with Autodesk family of software applications packages. This work was supported by the grant No 100 of the Committee of Science of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, in affiliated state enterprise "Research Institute of Mathematics and Mechanics" (IMM) of the Republican state enterprise "al-Farabi Kazakh National University", under the direction of Candidate of Physical and Mathematical Science, the senior lecturer of the Department of Mechanics – Kunakbayev T.O.

References

- [1] *Ershina A.K., Ershin S.A., Zhapbasbayev U.K.* Basic theory of wind turbine Darrieus. – Almaty: KazGosINTI, 2001. – 104 pages.
- [2] The final report on an innovative grant for 2012-14. "Development, production and pilot studies of efficiency of a compact wind farm". Research supervisor Kunakbayev T. - Almaty. - 2014.
- [3] *Gorelov D.N.* Energy characteristics of the rotor Darrieus (review). Thermophysics and Aeromechanics // Omsk Branch of the Institute of Mathematics. S.L. Sobolev. – 2010. – volume 17. – number 3. –p. 325-333.
- [4] *Piralova O.F.* Certificate on the state registration of the rights for object of copyright No. 183 from 01.02.2011. A compact wind farm on the basis of rotary wind turbines of type to Darrieus and Savonius / Kunakbayev T., Otelbayev M.
- [5] *Loitsiansky L.G.* Fluid Mechanics. – 5th Edition. – Moscow.: Nauka, 1978. – 736 pages.
- [6] Autodesk | 3D Design, Engineering & Entertainment Software. URL: <http://www.autodesk.com.htm> – official page of the Autodesk© company.

3-бөлім**Информатика****Раздел 3****Информатика****Section 3****Computer
science**

UDC 004.8:004.9

Tukeyev U.A.*, Rakhimova D.R., Zhumanov Zh.M., Kartbayev A.Zh.

Al-Farabi Kazakh National University, Republic of Kazakhstan, Almaty

*E-mail: ualsher.tukeyev@gmail.com

Single state transducer model for Kazakh and Russian morphology

This paper provides a broad overview of issues related to the construction of finite state transducers with one state for the two-level morphology of inflectional languages, particularly, the direct transformation of word endings to the grammatical characteristics. This problem has been studied on the base of the Kazakh and Russian languages, which are usually named the inflectional languages. The solution of this problem is the trivial Mealy automaton with one state, i.e. a single state transducer, and a multi-valued mapping method is used as well. We study the problem of completeness of the finite state transducers input for the analyzed languages. The determination of transducer input completeness for morphological analysis gives a guarantee that all the words of the analyzed language will be accepted. The problem of determining the completeness of the set of possible endings for agglutinative languages is a complex issue. In this article, we define the completeness of a set of endings in Kazakh language. The proposed technology is implemented for the Russian-Kazakh machine translation, a translation quality assessment performed by the method of BLEU.

Key words: machine translation, finite transducer, two-level morphology, inflectional languages, multi-valued mapping.

Тукеев У.А., Рахимова Д.Р., Жуманов Ж.М., Картбаев А.Ж.

Орыс және қазақ тілдері морфологиясының бір күйлі түрлендіргіш моделі

Бұл жұмыста сөз құрылымы күрделі тілдердің екі деңгейлі морфологиясын зерттеу мақсатында бір санаттағы ақырлы автоматты құруды зерттеу, яғни сөздердің жалғауларын грамматикалық характеристикаларға тікелей өзгерту қаралған. Бұл мәселе агглютинативті және флективті жолмен өзгеретін қазақ және орыс тілдерінің негізінде зерттелген. Мели тривиальды автоматы мен көпмағыналы байланыстыруды қолдану осы мәселенің шешілуіне әкелді. Біз аталған тілдердегі мәтіндер үшін ақырлы автоматтың толықтығын анықтадық. Осы нәтиже морфологиялық анализ жасалған барлық сөздердің қабылдануына кепілдеме береді. Агглютинативті тілдер үшін қиын мәселе ауқымында қазақ тілінің сөздері үшін толықтық ерекшеліктері зерттелген. Аталған технология орысша-қазақша машинамен аударуы үшін жасалған, аударманың дұрыстығы BLEU үлгісімен тексерілген.

Түйінді сөздер: екі деңгейлі морфология, машинамен аудару, ақырлы автоматтар, флективтік тілдер, көпмәнді байланыстыру.

Тукаев У.А., Рахимова Д.Р., Жуманов Ж.М., Картбаев А.Ж.
**Модель преобразователя с одним состоянием для морфологии
казахского и русского языков**

В статье представлено исследование по построению конечных автоматов с одним состоянием для анализа двухуровневой морфологии языка со сложным строением слов, а именно, прямое преобразование их окончаний в грамматические характеристики. Это проблема изучена на основе казахских и русских языков, которые являются флективными и агглютинативными по своей природе. Для решения этой проблемы применены тривиальный автомат Мели с одним состоянием и многозначное отображение. Мы изучили полноту ввода конечного автомата для анализируемых языков. Определение этой полноты для морфологического анализа гарантирует принятие конечным автоматом всех слов анализируемого языка. Для агглютинативных языков проблема определения полноты множества возможных окончаний является сложной задачей. Казахский язык является агглютинативным языком со сложной морфологией для многоуровневого машинного изучения. Далее в статье мы определим полноту множества окончаний казахского языка. Предложенная технология реализована для русско-казахского машинного перевода, оценка качества перевода выполнена метрикой BLEU.

Ключевые слова: двухуровневая морфология, машинный перевод, конечные автоматы, флективные языки, многозначные отображения.

1 Introduction

An issue of morphological analysis is important in the natural language processing. The attempt to determine a basic concept of finite state approach in the morphological analysis refers to the two-level morphology concept proposed Koskeniemi, 1983[1], and implemented through the use of finite state transducers. In this paper we consider the possibility of using single state transducer(SST) for two-level morphology of inflected languages. SST - is a trivial Mealy finite state transducer (FST), particularly, a FST with one state[2]:

$$y(t) = f_y(x(t)), \quad (1)$$

where $x(t)$ - input of the machine, $y(t)$ - output of the machine, t - current time, f_y - the output function of the machine. The advantage of SST is its high speed. Essentially, SST is a mapping $x(t)$ to $y(t)$.

Mealy machine model is generally represented by the following equations:

$$s(t+1) = f_s(s(t), x(t)), \quad y(t) = f_y(s(t), x(t)), \quad (2)$$

where $s(t+1)$ - the state of the machine in the next time, $s(t)$ - the current state of the machine, f_s - state transition function of the automaton.

Moore FST model represented by the following equations:

$$s(t+1) = f_s(s(t), x(t+1)), \quad y(t) = f_y(s(t)). \quad (3)$$

A distinctive feature of the Moore machine is that the output of the machine is determined only by its state.

There are many publications on the branch of using two level morphology and FST technology for different languages [3, 4, 5, 6].

In this paper the use of the SSTs for morphological analysis of the Kazakh and Russian languages is described.

2 Description of the method

Let's consider the steps of machine translation, using SSTs in a scheme of translation. Input of this scheme is a sentence of source natural language.

1. Mark out of words in a sentence.
2. Finding the characteristic part of speech for words.
3. Split words on the stem and ending.
4. Morphological analysis of words with SSTs: "ending "grammatical characteristics."
5. Translation the stem from the source language into the target language.
6. Transfer the grammatical characteristics of a source language word in grammatical characteristics of a target language word.
7. Morphological generation the endings of a target language words by the grammatical characteristics source language words using SSTs.
8. A compound words stems of the target language with the endings.
9. Implementation of structural transfers of the source language sentence to the target language sentence.

Output of this scheme is a sentence of target natural language.

Below the mapping of SSTs of steps 4 and 7 for the Kazakh and Russian languages is a more detailed study.

These mappings allow getting the corresponding word ending in the target language for each word in the source language. Joining the stem and the ending in the target language produces the required output word. After that, phrases and sentences of target natural language are produced by joining words into a sequence.

Formally, a multivalued mapping is defined as follows.

Let X, Y be discrete spaces, $P(Y)$ is a set of all subsets of Y . Then a multivalued mapping F from X onto Y is a correspondence that for each point $x \in X$ assigns an empty subset $F(x) \in P(Y)$, called the image of point x , i.e. $F : X \rightarrow P(Y)$. We shall call this mapping m-mapping (from X onto Y).

Let Γ_F be a subset of set $X \times Y$; then $\Gamma_F = \{(x, y) \mid x \in X, y \in F(x)\}$ is called a graph of m-mapping F . A graph of m-mapping F is a tabular representation of m-mapping F , which is very important and convenient for computer representation of multivalued mappings.

Consider conversion of multivalued mapping into single-valued mapping. For these we add to set X an additional set of parameters T :

$$F : X \times T \rightarrow Y, \tag{4}$$

Then, the multivalued mapping F can be transformed into a series of single-valued mappings $\{f_i : X \rightarrow Y\}$, $f_i(x) \in F(x)$.

The machine translation process of source language into target language based on the assumptions made by a scheme that mentioned before, especially, a multivalued mapping system for stages of morphological analysis and synthesis will be as follows:

$$F_{s^k} : X_{i^k} \rightarrow Y_{i^k}, \quad F_{t^k} : Y_{j^k} \rightarrow Z_{j^k}, \quad F_{st^k} : Y_{i^k} \rightarrow Y_{j^k}, \quad (5)$$

where

X_{i^k} is the space of source natural language L_i endings for the k -th part of speech; it is an input space for multivalued mapping F_{s^k} ;

Y_{i^k} is the space of grammatical features for the source language's k -th part of speech; it is an output space for multivalued mapping F_{s^k} ;

Y_{j^k} is the space of grammatical features for the target language's k -th part of speech; it is an output space for multivalued mapping F_{t^k} ;

Z_{j^k} is the space of target natural language L_j endings for the k -th part of speech; it is an output space for multivalued mapping F_{st^k} ;

F_{s^k} is a multivalued mapping of space of endings for the source language's k -th part of speech into space of grammatical features for the source language's k -th part of speech;

F_{t^k} is a multivalued mapping of space of grammatical features for the target language's k -th part of speech into space of endings for the target language's k -th part of speech;

F_{st^k} is a mapping of space of grammatical features for the source language's k -th part of speech into space of grammatical features for the target language.

3 Completeness of the endings of the Kazakh language

The set of endings of the Kazakh language is necessary for the construction of multi-valued maps, using the model presented before:

- $F_s : X_s \rightarrow Y_s$ (for the source language),
- $F_t : Y_t \rightarrow Z_t$ (for the target language), where X_s - source language endings,
- Y_s - grammatical characteristics of words of the source language,
- Y_t - grammatical characteristics of words of the target language,
- Z_t - the endings of the target language.

In this mapping system to ensure the correctness of transformations any word of language pair in machine translation requires that a set of endings of a target and (or) a source language was complete. Completeness of set endings of the source language is very important for the morphological analysis of the sentences of the source language, as a guarantee that every word will be analyzed in terms of its grammatical (lexical) properties.

In this paper, we consider the completeness of the endings of the Kazakh language.

Since the completeness of the system of endings of one language in a linguistic pair of machine translation indirectly determines the overall completeness of the transformed system on the lexical level from one language to another language, it is an important issue for all machine translation system.

Consider a system of Kazakh word endings: nominal endings (nouns, adjectives, numerals) and verbal endings (verbs, participles, gerunds, mood and voice).

The nominal endings of the Kazakh language have four types:

- Plural endings (denoted by K),
- Possessive endings (denoted by T),
- Case endings (denoted by C),
- Personal endings (denoted by J).

Consider all types of endings placements variants: of one type, of the two types, of the three types, and of the four types. Number of placements determined by the formula:

$$A_{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (6)$$

Then, the number of placements will be determined as follows: $A_{4^1} = \frac{4!}{(4-1)!} = 4$, $A_{4^2} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$, $A_{4^3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$, $A_{4^4} = \frac{4!}{(4-4)!} = 64$. All possible placements number is 64. Consider what placements are semantically valid.

The endings placements of one type are semantically valid. The endings placements for two types are the following: KT, TC, CJ, JK KC, TJ, CT, JT KJ, TK, CK, JC. The analysis of the semantics of the two types of endings placements shows that bold placements are valid, and the remaining placements belongs to unacceptable. For example, TK is unacceptable: after the possessive endings plural endings are not used, CK is unacceptable: after case endings are not accepted to put the plural, JC is unacceptable: after the personal endings are not accepted to put the case endings, CT is unacceptable: after case endings are not put possessive endings, JT - unacceptable: after personal endings are not put possessive endings. Belongs to the unacceptable the type JK - after personal endings plural ending, as this type of placements is covered by the plural personal endings.

In general, the types of endings T and J are the endings defining the dependence of subjects, objects, and actions. In the words with a nominal base the type TJ is possible for the cases of differences of substances (subjects, objects, actions): 'apa-ng-myn' ('apa-ng' it refers (personification) to a other subject then speaker, and the personal ending '-myn' determines the dependence (personification) to the speaker. In the type TJ double definition of a dependency to one substance (twice perconification to one substance) is prohibited, for example: 'apa-m-myn' do not say.

It should be noted that the type of endings CJ has limitations on cases ilik (genitive) and tabys(accusative).

Thus, the number of valid (correct) placements of two types of endings is 6. The endings plasements of the three types are as follows:

KTC, KTJ, TCJ, TCK,
 CJK, CJT, JKT, JKC
 KCJ, KCT, TJK, TJC,
 CTK, CTJ, JTK, JTC
 KJT, KJC, TKC, TKJ,
 CKT, CKJ, JCK, JCT.

Determination of permissible placements of three types of endings do the following rule: if the placement of the three types have invalid placement of two types, this placement - unacceptable. Then, the permissible endings placements of three types is 4 (in bold).

The endings placements of the four types are as follows:

KTJC, TKJC, CKTJ, JKTC
 KTCJ, TKCJ, CKJT, JKCT
 KJTC, TJKC, CTKJ, JTKC
 KJCT, TJCK, CTJK, JTCK
 KCTJ, TCJK, CJKT, JCKT
 KCJT, TCKJ, CJTK, JCTK

Determination of permissible placements endings of the four types follows this rule: if the placement of the four types has invalid placement of two types, this placement is unacceptable. Then, the permissible ending's placements of the four types will be 1 (in bold). Total permissible ending's placements of one type are 4, of two types are 6, of three types are 4, four types is one.

So, the total number of valid types of ending's placements in the nominal words is 15. To the type of endings of words with verbal stems are related to: verbs, participles, adverbs, moons, voices. The system of endings of verbs include the following types: tense (8 tense), person (3 types), negation. Then, the number of possible types of verb endings is 25. The system of participle endings include the following types: participle's base endings (denoted R), plural endings (denoted K), possessive endings (T), case endings (denoted C), personal endings (denoted J). Then, possible variants of endings types (participle's base endings for all variants is the same) will be:

- one type endings:

RK, RT, RC, RJ;

- two type endings:

RKT, RTC, RCJ, RJK

RKC, RTJ, RCT, RJT

RKJ, RTK, RCK, RJC;

- three type endings:

RKTC, RTCJ, RCJK, RJKT

RKTJ, RTCK, RCJT, RJKC

RKCJ, RTJK, RCTK, RJTK

RKCT, RTJC, RCTJ, RJTC

RKJT, RTKC, RCKT, RJCK

RKJC, RTKJ, RCKJ, RJCT;

- four type endings:

RKTJC, RTKJC, RCKTJ, RJKTC

RKTCJ, RTKCJ, RCKJT, RJKCT

RKJTC, RTJKC, RCTKJ, RJTKC

RKJCT, RTJCK, RCTJK, RJTCK

RKCTJ, RTCJK, RCJKT, RJCKT

RKCJT, RTCKJ, RCJTK, RJCTK.

Let's consider a semantic permissibility of variants of the endings.

All variants of participleTs endings on one type of the endings are semantically permissible. The analysis of semantics of placements of two types of the participle's endings shows, that the placements allocated by bold font are permissible, and other placements is carried to unacceptable. Allowable variants of the endings of participles same as in system of the endings with nominal bases, but from them for participles are inadmissible variant RTJ as sequence ending of participle - possessive endings for participles in all cases means personification action with a verbal basis. And personification action cannot second time doing to personal ending. For example, 'bar-ghan-ym' (my arrival, my coming) is substance, but is impossible to tell 'bar-ghan-ym-syng', as action ('bar-ghan-ym') not personifiable, namely, action cannot be transferred to subject.

Similarly, endings RTCJ and RKTTCJ have no restrictions on two types of the endings, i.e. possible pairs of the endings inside of these types of the endings are allowable, but they break the previous rule action cannot be transferred to subject. For example, for RTCJ: 'bar-ghan-ym-gha-myn', where 'bar-ghan-ym-gha' (to my arrival - to my coming) - declination of action that cannot be presented by the subject. For RKTTCJ: 'bar-ghan-dar-yng-nan-byz', where 'bar-ghan-dar-yng-nan' (from your arrivals - from yours coming) - declination of actions that cannot be presented by subjects.

Thus, the quantity of types of the endings of participles is 11. Let's consider types of the endings of verbal adverbs. They are represented by the endings of transitive future time for which follows personal endings: PJ, where P - the base ending of a verbal adverb, J - personal endings. For the given class we shall allocate only the following base endings: - ghany,-geli, -qaly,-keli. Thus, we count, that quantity of types of the endings of a verbal adverb is 1.

Let's consider the endings of moods, namely, conditional, imperative, desirable. The endings of an indicative mood coincide with the endings of verbs in the present, the past and the future. The type of the endings of declinations is similar adverbs, i.e. the base endings of moods which personal endings follow. Thus, we consider that there are three types of the endings of moods: conditional, imperative, desirable.

Types of the endings of voices, namely, reflexive, passive, joint and compulsory, also are determined under the previous scheme: the base endings of voices for which follow personal endings. And, types of the endings of voices are 4.

So, the total of types of the endings of words with verbal bases is 48. The total of the endings of words with nominal bases plus total of types of the endings of words with verbal bases equal 63.

The following task is on the received types of the endings to determine forms of the endings and their quantity. It to make simply as for each type of a part of speech are available rules. In the given direction authors construct final sets of the endings for all basic parts of speech of the Kazakh language. So, for parts of speech with nominal bases the number of endings equal 862, and the number of endings of parts of speech with verbal bases makes: verbs are 432, participles are 1588, verbal adverbs are 48, moods are 230, voices are 80. Total, '3240' is the number of all Kazakh endings.

Table 1 – Comparative evaluation of the machine translation from Russian into Kazakh for three thematic selections

Type of text	BLEU
T1	30.47
T2	31.90
T3	33.89

4 Practical results

The submitted technology is approved on a set of endings of the Bektayev model for the Kazakh language with the number of endings equal to 753 [7]. To evaluate the quality of machine translation technique we used BLEU. A comparative evaluation of the machine translation from Russian into Kazakh is done for three thematic selections: T1-text of simple sentences with from a general domain, T2-text of simple sentences from a political domain, and T3-text of simple sentences from a technical (Informatics) domain. Low level of estimation for text T3 is explained by poor of dictionary for informatics area.

5 Resume and the future works

The paper presents the application of trivial Mealy transducers with multivalued mappings for a stage of morphological analysis of inflectional languages by the example of the Kazakh and Russian languages. We investigated completeness of trivial Mealy transducers with multivalued mappings on a random input. This is highly important to guarantee a covering of the endings of analyzed language. Also it is important for indirect ensuring of their completeness for a stage of generation in machine translation. Future works include: investigation of completeness of endings for other inflective languages, for example, the Russian language; investigation of possibility to create universal tool for inflectional FST based on endings tables.

References

- [1] *Koskenniemi K.* Two-level morphology: A general computational model of word-form recognition and production. // Technical report publication of the University of Helsinki. - 1983. - No.11. - p.115-159.
- [2] *Gurenko V.V.* Introduction to automata theory - M.:MGTU, 2013. - 62 p.
- [3] *Oflazer K.* Two-level description of Turkish morphology // Literary and Linguistic Computing. - Stroudsburg. - 1994. - No.2. - p.137-148.
- [4] *Washington J. N., Salimzyanov I., Tyers F.M.* Finite-state morphological transducers for three Kypchak languages. // Proceedings of the 9th Conference on Language Resources and Evaluation. - Reykjavik. - 2014. - pp.545-548.
- [5] *Kairakbay B.M., Zaurbekov D. L.* Finite State Approach to the Kazakh Nominal Paradigm. // Proceedings of the 11th International Conference on Finite State Methods and Natural Language Processing. - St. Andrews. - 2013. - p.108-112.
- [6] *Kessikbayeva G., Cicekli I.* Rule Based Morphological Analyzer of Kazakh Language // Proceedings of the 2014 Joint Meeting of SIGMORPHON and SIGFSM.- Baltimore. - 2014. - p.137-148.
- [7] *Bektayev K.* Big Kazakh-Russian and Russian-Kazakh dictionary. - Almaty: Altyn Kazyna, 1999. - 704 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Christophe Josserand* - Professor at Sorbonne Universit'es, Institut D'Alembert, Paris, France
2. *Айсағалиев Серікбай Абдигалиевич* - профессор механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук
3. *Абдирахметова Зухра Муратовна* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
4. *Аскарова Зүлфия Бахытбекқызы* - студент механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
5. *Баймахан Рысбек Баймаханұлы* - профессор Казахского государственного женского педагогического университета, доктор технических наук
6. *Баймахан Айгерім Рысбековна* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
7. *Байгереев Досан Рақимғалиевич* - PhD докторант Восточно-Казахстанского государственного технического университета им. Д. Серікбаева
8. *Большакова Наталья Александровна* - ведущий научный сотрудник РГП "НИЦ Гарыш Экология"
9. *Габдуллина Гульмира Лайкеевна* - старший преподаватель физико-технического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
10. *Джумагулова Карлығаш Нурмановна* - заместитель декана по научно-инновационной работе и международным связям физико-технического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
11. *Жылысбаева Карлыға Сансызбаевна* - доцент Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор физико-математических наук
12. *Жакебаев Даурен Бақытбекулы* - заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования Казахского национального университета им. аль-Фараби, доктор PhD
13. *Жунисова Жанат Хавизовна* - доцент механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
14. *Жуманов Жандос* - старший преподаватель кафедры информационных систем Казахского национального университета им. аль-Фараби
15. *Жүмәлі Айнұр Серікбайқызы* - PhD докторант Казахстанско-Британского технического университета
16. *Золтан Донко* - профессор Института физики твердого тела и оптики Вигнеровского исследовательского центра Академии наук Венгрии
17. *Калтаев Айдархан Жусупбекович* - профессор механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор физико-математических наук
18. *Кудайкулов Азиз Анарбаевич* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
19. *Кунакбаев Толеген Оспанович* - доцент Казахского национального университета имени Аль-Фараби, кандидат физико-математических наук

20. *Картбаев А.Ж.* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
21. *Кабидолданова Асем* - старший преподаватель механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
22. *Машеева Ранна Уытбаевна* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
23. *Молданазарова У.С.* - PhD докторант Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева
24. *Нугманова Гулгасыл Нукаримовна* - доцент Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева, кандидат физико-математических наук
25. *Нигметов Даулет* - магистрант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
26. *Рамазанов Тлеккабул Сабитович* - проректор по научно-инновационной деятельности Казахского национального университета им. аль-Фараби, доктор физико-математических наук
27. *Рахимова Диана Рамазановна* - доцент кафедры информационных систем Казахского национального университета им. аль-Фараби
28. *Тукеев Уалишер Ануарбекович* - профессор механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук
29. *Темирбеков Нурлан Муханович* - ректор Казахстанского инженерно-технологического университета, доктор физико-математических наук
30. *Туреханова Венера* - магистрант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
31. *Саспаева Асем Даулетпековна* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им. аль-Фараби
32. *Сейнасинова Асима Асылбекқызы* - ассоциированный профессор Академии гражданской авиации, кандидат физико-математических наук

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набранные только в текстовом формате $\text{\LaTeX}2\epsilon$ на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat-dairbayeva@mail.ru (ответственному секретарю редколлегии, Дайрабаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета $\text{\LaTeX}2\epsilon$ или формат eps [см. п.7]. Указывается код по УДК. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.

5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 15 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 5 страниц. В начале работы после заголовка и фамилий авторов работы помещается её аннотация в объеме 200-250 слов на том же языке, на котором набран основной текст. Кроме сведений, которые можно почерпнуть из заголовка, аннотация должна отражать методы исследования, основные результаты статьи, их новизну и указывать на смежные работы.

После аннотации задаются ключевые слова. Для каждой работы задайте 5-6 ключевых слов в порядке их значимости, т.е. самое важное ключевое слово статьи должно быть первым в списке.

Название работы, ФИО авторов, аннотация и ключевые слова должны быть представлены в статье на трех языках: казахском, русском и английском.

Использованная литература должна быть оформлена в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления". Список литературы должен состоять не более чем из 20 наименований. Ссылки на источники в тексте статьи даются только в квадратных скобках (без цитирования [12], при цитировании или пересказе авторского текста [12, с. 29]). Нумерация ссылок в статье производится по порядковому номеру источника в пристатейном списке литературы. Архивные материалы в список не включаются, ссылки на них помещаются в тексте в круглых скобках. При использовании в статье источников из электронных ресурсов или удаленного доступа (Интернета) в списке литературы приводится библиографическая запись источника и ссылка на сетевой ресурс с полным сетевым адресом в Интернете. Желательно указывать дату обращения к ресурсу.

Список литературы на языке оригинала сопровождается списком литературы (references) в английской транслитерации.

6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов $\text{\LaTeX}2\epsilon$ и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps , либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета Latexcad. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера Conversion Artist. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ

1-бөлім**Раздел 1****Математика****Математика**

Aisagaliev S.A., Aisagalieva S.S., Kabidoldanova A.A.

Solvability and construction of solutions of integral equations 3

Temirbekov N.M., Baigereyev D.R.

On the stability of a difference scheme for the three-phase non-isothermal flow problem 19

Zhumali A.S.

Numerical implementation of the one-dimensional microscopic model of in-situ leaching 27

Zhununsova Zh.Kh., Nugmanova G.N., Moldanazarova U.

About gauge equivalent of the generalized Landau-Lifshitz equation 35

Аскарова З.Б., Асылбекулы А., Большакова Н.А., Жакебаев Д.Б.

Моделирование динамики твердых частиц в облаке, образовавшемся при наземном взрыве ракеты-носителя 41

Исахов А.А.

Оценка воздействия функционирования тепловой электростанции на окружающую среду методами математического моделирования 55

Машеева Р.У., Джумагулова К.Н., Донко З., Рамазанов Т.С., Габдуллина Г.Л.

Компьютерное моделирование и исследование локализации пылевых частиц во внешнем магнитном поле 65

2-бөлім**Раздел 2****Механика****Механика**

Kudaikulov A.A., Jossierand C., Kaltayev A.

Numerical investigation of interface motion between two immiscible fluids in a channel 75

Zhilisbayeva K.S., Saspayeva A.D.

Programed motion of the magnetized spacecraft 87

Баймахан А.Р., Абдуахметова З.М., Сейнасинова А.А., Баймахан Р.Б.

Разработка условий пластичности для грунтов анизотропного строения 94

Kunakbayev T., Nigmatov D., Turekhanova V.

Dynamic calculation of an optimum arrangement of rotary wind turbines on floors of a compact multystoried wind farm 103

3-бөлім**Раздел 3****Информатика****Информатика**

Tukeyev U.A., Rakhimova D.R., Zhumanov Zh.M., Kartbayev A.Zh.

Single state transducer model for Kazakh and Russian morphology 110

Сведения об авторах	118
К сведению авторов	120

CONTENS

Section 1

Matematics

<i>Aisagaliev S.A.*, Aisagalieva S.S., Kabidoldanova A.A.</i> Solvability and construction of solutions of integral equations	3
<i>Temirbekov N. M., Baigereyev D.R.</i> On the stability of a difference scheme for the three-phase non-isothermal flow problem	19
<i>Zhumali A.S.</i> Numerical implementation of the one-dimensional microscopic model of in-situ leaching	27
<i>Zhunussova Zh.Kh., Nugmanova G.N., Moldanazarova U.</i> About gauge equivalent of the generalized Landau-Lifshitz equation	35
<i>Askarova Z.B., Assylbekuly A., Bolshakova N.A., Zhakebayev D.B.</i> Modeling the dynamics of solid particles in the cloud formed at ground explosion booster	41
<i>Issakhov A.A.</i> Assessing the operation impact of thermal power plants on the environment by mathematical modeling method	55
<i>Masheyeva R.U., Dzhumagulova K.N., Donkó Z., Ramazanov T.S., Gabdullina G.L.</i> Computer simulations and investigation of the localization of dust particles under the magnetic field ...	65

Section 2

Mechanics

<i>Kudaikulov A.A., Josserand C., Kaltayev A.</i> Numerical investigation of interface motion between two immiscible fluids in a channel	75
<i>Zhilisbayeva K.S., Saspayeva A.D.</i> Programed motion of the magnetized spacecraft	87
<i>Baimakhan A.R., Abdiakhmetova Z.M., Seynasimova A.A., Baimakhan R.B.</i> Development of plasticity conditions for isotropic structure of the soil	94
<i>Kunakbayev T., Nigmatov D., Turekhanova V</i> Dynamic calculation of an optimum arrangement of rotary wind turbines on floors of a compact multystoried wind farm	103

Section 3

Computer science

Tukeyev U.A., Rakhimova D.R., Zhumanov Zh.M., Kartbayev A.Zh.

Single state transducer model for Kazakh and Russian morphology 110

Сведения об авторах 118

К сведению авторов 120