

ISSN 1563 – 0285  
Индекс 75872; 25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

# ҚазҰУ ХАБАРШЫСЫ

Математика, механика, информатика сериясы

---

КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

# ВЕСТНИК КазНУ

Серия математика, механика, информатика

---

AL-FARABI KAZAKH NATIONAL UNIVERSITY

# KazNU BULLETIN

Mathematics, Mechanics, Computer Science Series

---

№ 1 (88)

Алматы  
«Қазақ университеті»  
2016

Зарегистрирован в Министерстве культуры, информации и общественного  
согласия Республики Казахстан, свидетельство № 956-Ж от 25.11.1999 г.  
(Время и номер первичной постановки на учет № 766 от 22.04.1992 г.)  
Выходит 4 раза в год

#### Редакционная коллегия:

научный редактор: М.А. Бектемесов - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби  
заместитель научного редактора: А.Б. Кыдырбекулы - д. т. н., профессор, КазНУ им. аль-Фараби  
ответственный секретарь: Г.М. Даирбаева - к. ф.-м. н., доцент, КазНУ им. аль-Фараби

#### Члены редколлегии:

Айсағалиев С.А. - д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан  
Алиев Ф.А. - д.ф.-м.н., профессор, академик Национальной академии наук Азербайджана, Институт прикладной математики Бакинского государственного университета, Азербайджан  
Ахмед-Заки Д.Ж. - д.т.н., КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан  
Бадаев С.А. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан  
Жайнаков А.Ж. - д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Кыргызской Республики, Кыргызский государственный технический университет им. И.Раззакова, Кыргызстан  
Кабанихин С.И. - д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия  
Калтаев А.Ж. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан  
Кангужин Б.Е. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан  
Майнке М. - профессор, Департамент Вычислительной гидродинамики Института Аэродинамики, Германия  
Мальшикин В.Э. - д.т.н., профессор, Новосибирский государственный технический университет, Россия  
Мейрманов А.М. - д.ф.-м.н., профессор, Белгородский государственный университет, Россия  
Мухамбетжанов С.Т. - д.ф.-м.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан  
Отелбаев М.О. - д.ф.-м.н., профессор, академик Национальной академии наук РК, Евразийский национальный университета им. Л.Н. Гумилева, Казахстан  
Панфилов М. - д.ф.-м.н., профессор, Национальный политехнический институт Лотарингии, Франция  
Ружанский М. - д.ф.-м.н., профессор, Имперский колледж Лондона, Великобритания  
Тайманов И.А. - д.ф.-м.н., профессор, академик Российской академии наук, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия  
Тукеев У.А. - д.т.н., профессор, КазНУ им.аль-Фараби, Казахстан  
Шокин Ю.И. - д.ф.-м.н., профессор, академик Российской академии наук, Институт вычислительных технологий СО РАН, Россия  
Юлдашев З.Х. - д.ф.-м.н., профессор, Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан

#### Научное издание

Вестник КазНУ

Серия математика, механика, информатика

№ 1(88) 2016

Редакторы: Г.М. Даирбаева

Компьютерная верстка: Б.А. Аетова

**ИБ N 9449**

Подписано в печать 28.03.2016 г. Формат 60 × 84 1/8. Бумага офсетная.

Печать цифровая. Объем 9.9 п.л. Тираж 500 экз. Заказ N 1893.

Издательский дом "Қазақ университеті"

Казахского национального университета им. аль-Фараби.

050040, г. Алматы, пр.аль-Фараби, 71, КазНУ.

Отпечатано в типографии издательского дома "Қазақ университеті".

1-бөлім

Раздел 1

Section 1

Математика

Математика

Mathematics

УДК 517.968.2

Айсағалиев С.А.\* , Жунусова Ж.Х.\*\*

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы

E-mail: \*serikbai.aisagaliev@kaznu.kz, \*\*zhzhkh@mail.ru

### Разрешимость и построение решения уравнения Фредгольма первого рода

Разрешимость и построение общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода относятся к числу мало исследованных проблем математики. Существуют различные подходы к решению данной проблемы. Следует отметить следующие методы решения некорректной задачи: метод регуляризации, метод последовательных приближений, метод неопределенных коэффициентов. Цель данной работы создание нового метода для разрешимости и построение решения интегрального уравнения первого рода. Как следует из вышеизложенного, исследования разрешимости и построение решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода является актуальным. В данной работе рассматриваются разрешимость и построение решения матричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Построение приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Полученные результаты верны для матричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода, как с несимметричным ядром, так и с симметричным. Предлагается новый метод исследования разрешимости и построения решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Получены необходимые и достаточные условия существования решения при заданной правой части, для двух случаев: когда искомая функция принадлежит пространству  $L_2$ ; искомая функция принадлежит заданному множеству из  $L_2$ . Получены условия разрешимости и метод построения приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

**Ключевые слова:** интегральное уравнение, разрешимость, построения решения, экстремальная задача, градиент функционала, минимизирующие последовательности.

Aisagaliev S.A., Zhunussova Zh.Kh.

#### Solvability and construction of solution of the first kind Fredholm integral equation

The solvability and construction of the general solution of the the first kind Fredholm integral equation are among the few studied problems in mathematics. There are various approaches to solving this problem. Note the following methods for solving ill-posed problem: regularization method, the method of successive approximations, the method of undetermined coefficients. The purpose of this work to create a new method for solvability and construction of solution of integral equation of the first kind. It follows from the foregoing, the study of the solvability and construction of the solution of the Fredholm integral equation of the first kind is topical. In this paper the solvability and construction of the solution matrix Fredholm integral equation of the first kind is considered. Construction of an approximate solution of Fredholm integral equation of the first kind. The results are valid for the matrix Fredholm integral equation of the first kind, like with asymmetric core and symmetric. A new method for studying of solvability and construction of a solution for Fredholm integral equation of the first kind is proposed. Necessary and sufficient conditions for existence of solutions for a given right-hand side are obtained in two cases: when the origin function belongs to the space  $L_2$ ; origin function belongs to a given set of  $L_2$ . Solvability conditions and the method of construction an approximate solution of the integral Fredholm equation of the first kind are obtained.

**Key words:** integral equation, solvability, construction of a solution, extreme problem, functional gradient, minimizing sequences.

Айсағалиев С.А., Жунусова Ж.Х.

### Бірінші текті Фредгольмнің теңдеуінің шешімінің құру мен шешімділігі

Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешімділігі мен құрылуы аз зерттелген математиканың проблемаларына жатады. Осы проблеманы шешудің әртүрлі әдістері бар. Ол келесі әдістер: регуляризация әдісі, біртіндеп жуықтау әдісі, анықталмаған коэффициенттер әдісі. Бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешімділігі мен құрылуына жана әдіс ұсыну осы жұмыстың мақсаты. Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешімділігі мен құрылуын зерттеу маңызды мәселе. Осы жұмыста Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешімділігі мен құрылуы қарастырылады. Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің жуықтау шешімін құру. Алынған нәтижелер матрицалық Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің симметриялық және симметриялық емес өзегіне дұрыс. Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешімділігін зерттеудің және оның шешімін құрудың жана әдісі ұсынылады. Оң жақ бөлігі алдын ала анықталған шешімнің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары: а) ізделініп отырған функция  $L_2$  кеңістігіне және б) ізделініп отырған функция  $L_2$  кеңістігіне тиісті берілген жиынға жататын екі жағдай үшін алынған. Фредгольмнің бірінші текті интегралдық теңдеуінің шешімділігінің шарттары мен оның жуық шешімін құрудың әдісі алынған.

**Түйін сөздер:** интегралдық теңдеу, шешімділік, шешім құру, экстремалды есеп, функционалдың градиенті, минималдаушы тізбек.

## 1 Введение

Решения проблем управляемости динамических систем [1-3], математической теории оптимальных процессов [4-6], краевых задач дифференциальных уравнений с фазовыми и интегральными ограничениями [7-9] сводятся к разрешимости и построению общего решения интегрального уравнения первого рода

$$Ku = \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau)u(\tau)d\tau = f(t), \quad (1)$$

где  $K(t, \tau)$  – измеримая функция на множестве  $S_0 = \{(t, \tau) \in R^2 / t_0 \leq t \leq t_1, t_0 \leq \tau \leq t_1\}$  и существует интеграл

$$P^2 = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} |K(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty,$$

функция  $f(t) \in L_2(I, R^1)$ . Необходимо найти решение  $u(\tau) \in L_2(I, R^1)$ , где  $I = [t_0, t_1]$ .

Разрешимость и построение общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода относятся к числу мало исследованных проблем математики.

Как следует из [10], норма  $\|K\| \leq P$ , оператор  $K$  с ядром из  $L_2(S_0)$  является вполне непрерывным оператором, который всякую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся. Обратный оператор не ограничен [11], уравнение  $Ku = f$  не может быть разрешимо при всех  $f \in L_2$ . Это приводит к тому, что малая погрешность в  $f$  приводит к сколь угодно большой ошибке в решении уравнения (1).

Известные теоретические результаты по разрешимости уравнения (1) относятся к случаю, когда  $K(t, \tau) = K(\tau, t)$  т.е. уравнению (1) с симметричным ядром. Одним из основных результатов разрешимости уравнения (1) является теорема Пикара [12]. Однако

для применения данной теоремы необходимо доказать полноту собственных функций симметричного ядра.

Таким образом, разрешимость и построение решения интегрального уравнения (1) является сложной мало исследованной некорректной задачей. Существуют различные подходы к решению данной проблемы. Следует отметить следующие методы решения некорректной задачи:

1) Метод регуляризации [13], основанный на сведении исходной задачи к корректной задаче. Для регуляризации необходимо выполнения априорных требований к исходным данным задачи. В работах [14, 15] предложены методы решения корректной задачи, после регуляризации. К сожалению дополнительные требования, налагаемые к исходным данным задачи, не всегда выполняются и методы решения корректной задачи трудоемки;

2) Метод последовательных приближений [16] для решения уравнения (1). Метод применим, когда  $K(t, \tau)$  симметричное положительное ядро в  $L_2$  и требуется определение наименьшего характеристического числа;

3) Метод неопределенных коэффициентов [17]. Предлагается искать решения уравнения (1) в виде ряда. Однако, в общем случае, определение коэффициентов ряда чрезвычайно трудно.

Как следует из вышеизложенного исследования разрешимости и построение решения уравнения (1) является актуальным.

Цель данной работы создание нового метода для разрешимости и построение решения интегрального уравнения первого рода.

## 2 Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$Ku = \int_a^b K(t, \tau)u(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [t_0, t_1] = I, \quad (2)$$

где  $K(t, \tau) = \|K_{ij}(t, \tau)\|$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  – известная матрица порядка  $n \times m$ , элементы матрицы  $K(t, \tau)$  функции  $K_{ij}(t, \tau)$  измеримы и принадлежат классу  $L_2$  на множестве  $S_1 = \{(t, \tau) \in R^2 / t_0 \leq t \leq t_1, a \leq \tau \leq b\}$ ,

$$\int_a^b \int_{t_0}^{t_1} |K_{ij}(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty,$$

функция  $f(t) \in L_2(I, R^n)$  – заданная,  $u(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$ ,  $I_1 = [a, b]$  – искомая функция, величины  $t_0, t_1, a, b$  – фиксированы,  $K : L_2(I_1, R^m) \rightarrow L_2(I, R^n)$ .

Ставятся следующие задачи:

**Задача 1** Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения (2) при заданном  $f(t) \in L_2(I, R^n)$ .

**Задача 2** Найти решение интегрального уравнения (2) при заданном  $f(t) \in L_2(I, R^n)$ .

**Задача 3** Найти необходимое и достаточное условия существования решения интегрального уравнения (2) при заданном  $f(t) \in L_2(I, R^n)$ , когда искомая функция  $u(\tau) \in U(\tau) \subset L_2(I_1, R^m)$ .

**Задача 4** Найти решения интегрального уравнения (2) при заданном  $f(t) \in L_2(I_1, R^m)$ , когда  $u(\tau) \in U(\tau) \subset L_2(I_1, R^m)$ .

**Задача 5** Найти приближенное решение интегрального уравнения (2).

Как следует из постановки задачи рассматриваются разрешимость и построение решения матричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Построение приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Полученные результаты верны для матричного интегрального уравнения Фредгольма первого рода, как с несимметричным ядром, так и с симметричным.

Данная работа является продолжением исследований приведенных в [1-9, 18-22].

### 3 Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Рассмотрим решения задач 1, 2. для интегрального уравнения (2). Решения задач 1, 2 могут быть сведены к исследованию экстремальной задачи: минимизировать функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} |f(t) - \int_a^b K(t, \tau)u(\tau)d\tau|^2 dt \rightarrow \inf \quad (3)$$

при условии

$$u(\tau) \in L_1(I_1, R^m), \quad (4)$$

где  $f(t) \in L_2(I, R^n)$  – заданная функция,  $|\cdot|$  – евклидова норма.

**Теорема 1** Пусть ядро оператора  $K(t, \tau)$  измеримо и принадлежит классу  $L_2$  в прямоугольнике  $S_1 = \{(t, \tau) / t \in I = [t_0, t_1], \tau \in I_1 = [a, b]\}$ .

Тогда:

1) функционал (3) при условии (4) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала  $J'(u) \in L_2(I_1, R^m)$  в любой точке  $u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m)$  определяется по формуле

$$J'(u) = -2 \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau)f(t)dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b K^*(t, \tau)K(t, \sigma)u(\sigma)d\sigma dt \in L_2(I_1, R^m); \quad (5)$$

2) градиент функционала  $J'(u) \in L_2(I_1, R^m)$  удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'(u+h) - J'(u)\| \leq l\|h\|, \quad \forall u, u+h \in L_2(I_1, R^m); \quad (6)$$

3) функционал (3) при условии (4) является выпуклым, т.е.

$$J(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v), \quad \forall u, v \in L_2(I_1, R^m), \quad \forall \alpha, \alpha \in [0, 1]; \quad (7)$$

4) вторая производная по Фреше равна

$$J''(u) = 2 \int_{t_0}^{t_1} K^*(t, \sigma) K(t, \tau) dt. \quad (8)$$

5) если выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \xi^*(\sigma) \left[ \int_{t_0}^{t_1} K^*(t, \sigma) K(t, \tau) dt \right] \xi(\tau) d\tau d\sigma &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau) \xi(\tau) d\tau \right]^2 dt \geq \\ &\geq \mu \int_a^b |\xi(\tau)|^2 d\tau, \quad \mu > 0, \quad \forall \xi, \xi \in L_2(I_1, R^m), \end{aligned} \quad (9)$$

то функционал (3) при условии (4) является сильно выпуклым.

**Доказательство.** Как следует из (3) функционал

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{t_0}^{t_1} [f^*(t)f(t) - 2f^*(t) \int_a^b K(t, \tau)u(\tau)d\tau + \\ &+ \int_a^b \int_a^b u^*(\tau)K^*(t, \tau)K(t, \sigma)u(\sigma)d\sigma] dt. \end{aligned}$$

Тогда приращение функционала

$$\begin{aligned} \Delta J = J(u + h) - J(u) &= \int_a^b \left\langle -2 \int_{t_0}^{t_1} K^*(t, \sigma) f(t) dt, h(\sigma) \right\rangle d\sigma + \\ &+ \int_a^b \left\langle 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b K^*(t, \sigma) K(t, \tau) u(\tau) d\tau dt, h(\sigma) \right\rangle d\sigma + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \int_a^b h^*(\tau) K^*(t, \tau) K(t, \sigma) h(\sigma) d\sigma d\tau dt = \\ &= \langle J'(u), h \rangle_{L_2} + o(h), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$|o(h)| = \left| \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_a^b \int_a^b h^*(\tau) K^*(t, \tau) K(t, \sigma) h(\sigma) d\sigma d\tau \right] dt \right| \leq c_1 \|h\|_{L_2}^2.$$

Из (10) следует, что  $J'(u)$  определяется по формуле (5). Так как

$$J'(u+h) - J'(u) = 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b K^*(t, \tau) K(t, \sigma) h(t, \sigma) d\sigma dt,$$

то

$$\begin{aligned} |J'(u+h) - J'(u)| &\leq 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b \|K^*(t, \tau)\| \|K(t, \sigma)\| |h(t, \sigma)| d\sigma dt \leq \\ &\leq c_2(\tau) \|h\|_{L_2}, \quad c_2(\tau) > 0, \quad \tau \in I_1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|J'(u+h) - J'(u)\|_{L_2} = \left( \int_{t_0}^{t_1} |J'(u+h) - J'(u)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq l \|h\|_{L_2},$$

для любых  $u, u+h \in L_2(I_1, R^m)$ . Отсюда следует неравенство (6).

Покажем, что функционал (3) при условии (4) является выпуклым. В самом деле, для любых  $u, w \in L_2(I_1, R^m)$  верно неравенство

$$\begin{aligned} \langle J'(u) - J'(w), u - w \rangle_{L_2} &= \langle 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b K^*(t, \tau) K(t, \sigma) [u(\sigma) - w(\sigma)] d\sigma dt, u - w \rangle_{L_2} = \\ &= 2 \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_a^b \int_a^b [u(\sigma) - w(\sigma)]^* K^*(t, \tau) K(t, \sigma) [u(\sigma) - w(\sigma)] d\sigma dt \right\} d\tau = \\ &= 2 \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_a^b K(t, \sigma) [u(\sigma) - w(\sigma)] d\sigma \right]^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

Это означает, что функционал (3) является выпуклым, т.е. выполнено неравенство (7). Как следует из (5)

$$\begin{aligned} J'(u+h) - J'(u) &= \langle J''(u), h \rangle = \langle 2 \int_{t_0}^{t_1} K^*(t, \sigma) K(t, \tau) dt, h \rangle_{L_2} = \\ &= 2 \int_{t_0}^{t_1} K^*(t, \tau) K(t, \sigma) h(\sigma) d\sigma dt. \end{aligned}$$

Следовательно,  $J''(u)$  определяется по формуле (8). Из (8), (9) следует, что

$$\langle J''(u)\xi, \xi \rangle_{L_2} \geq \mu \|\xi\|^2, \quad \forall u, u \in L_2(I_1, R^m), \quad \forall \xi, \xi \in L_2(I_1, R^m).$$

Это означает, что функционал  $J(u)$  сильно выпуклый в  $L_2(I_1, R^m)$ . Теорема доказана.



**Теорема 2** Пусть для экстремальной задачи (3), (4) построена последовательность  $\{u_n(\tau)\} \in L_2(I_1, R^n)$  по алгоритму [21]

$$u_{n+1}(\tau) = u_n(\tau) - \alpha_n J'(u_n), \quad g_n(\alpha_n) = \min g_n(\alpha), \quad \alpha \geq 0,$$

$$g_n(\alpha) = J(u_n - \alpha J'(u_n)), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда числовая последовательность  $\{J(u_n)\}$  монотонно убывает, предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} J'(u_n) = 0$ .

Если, кроме того, множество  $M(u_0) = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^n) / J(u) \leq J(u_0)\}$  ограничено, то:

1) последовательность  $\{u_n(\tau)\} \subset M(u_0)$  является минимизирующей, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = J_* = \inf J(u), \quad u \in L_2(I, R^m);$$

2) последовательность  $\{u_n\}$  слабо сходится к множеству  $U_*$ , где  $U_* = \{u_*(\tau) \in L_2(I_1, R^m) / J(u_*) = \min_{u \in M(u_0)} J(u) = J_* = \inf_{u \in L_2(I_1, R^m)} J(u)\}$ ,  $u_n \xrightarrow{c.l.} u_*$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

3) справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(u_n) - J(u_*) \leq \frac{m_0}{n}, \quad m_0 = \text{const} > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

4) если выполнено неравенство (9), то последовательность  $\{u_n\} \subset L_2(I_1, R^n)$  сильно сходится к точке  $u_* \in U_*$ . Справедливы следующие оценки

$$0 \leq J(u_n) - J(u_*) \leq [J(u_0) - J_*]q^n, \quad q = 1 - \frac{\mu}{l}, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad \mu > 0, \quad (12)$$

$$\|u_n - u_*\| \leq \left(\frac{2}{\mu}\right) [J(u_0) - J(u_*)]q^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $J_* = J(u_*)$ ;

5) для того, чтобы интегральное уравнение Фредгольма первого рода (2) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы значение  $J(u_*) = 0$ ,  $u_* \in U_*$ . В этом случае функция  $u_*(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$  – решение интегрального уравнения (2).

6) если значение  $J(u_*) > 0$ , то интегральное уравнение (2) не имеет решения при заданном  $f(t) \in L_2(I, R^n)$ .

**Доказательство.** Так как  $g_n(\alpha_n) \leq g_n(\alpha)$ , то  $J(u_n) - J(u_{n+1}) \geq J(u_n) - J(u_n - \alpha J'(u_n))$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . С другой стороны из включения  $J(u) \in C^{1,1}(L_2(I_1, R^m))$  следует, что

$$J(u_n) - J(u_n - \alpha J'(u_n)) \geq \alpha \left(1 - \frac{\alpha l}{2}\right) \|J'(u_n)\|^2, \quad \alpha \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \geq \frac{1}{2l} \|J'(u_n)\|^2 > 0.$$

Отсюда следует, что числовая последовательность  $\{J(u_n)\}$  монотонно убывает и  $\lim_{n \rightarrow \infty} J'(u_n) = 0$ . Первое утверждение теоремы доказано.

Поскольку функционал  $J(u)$  выпуклый при  $u \in L_2$ , то множество  $M(u_0)$  выпукло. Тогда

$$0 \leq J(u_n) - J(u_*) \leq \langle J'(u_n), u_n - u_* \rangle_{L_2} \leq \|J'(u_n)\| \|u_n - u_*\| \leq D \|J'(u_n)\|,$$

$$u_n \in M(u_0), \quad u_* \in M(u_0),$$

где  $D$  – диаметр множества  $M(u_0)$ . Так как  $M(u_0)$  – ограниченное выпуклое замкнутое множество в  $L_2$ , то оно слабо бикомпактно. Выпуклый непрерывно дифференцируемый функционал  $J(u)$  слабо полунепрерывен снизу. Тогда множество  $U_* \neq \emptyset$ ,  $\emptyset$  – пустое множество,  $U_* \subset M(u_0)$ ,  $\{u_n\} \subset M(u_0)$ ,  $u_* \in M(u_0)$ . Заметим, что

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) - J(u_*) \leq D \lim_{n \rightarrow \infty} \|J'(u_n)\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = J(u_*) = J_*.$$

Следовательно, на множестве  $M(u_0)$  достигается нижняя грань функционала  $J(u)$  в точке  $u_* \in U_*$ , последовательность  $\{u_n\} \subset M(u_0)$  является минимизирующей. Итак, доказано второе утверждение теоремы.

Третье утверждение теоремы следует из включения  $\{u_n\} \subset M(u_0)$ ,  $M(u_0)$  – слабо бикомпактное множество,  $J(u_*) = \min J(u) = J_* = \inf J(u)$ ,  $u \in M(u_0)$ . Следовательно,  $u_n \xrightarrow{с.л.} u_*$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Из неравенств

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \leq \frac{1}{2l} \|J'(u_n)\|^2, \quad 0 \leq J(u_n) - J(u_*) \leq D \|J'(u_n)\|,$$

$$u_n \xrightarrow{с.л.} u_* \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

следует оценка (11), где  $m_0 = 2D^2l$ . Четвертое утверждение теоремы доказано.

Если выполнено неравенство (9), то функционал (3) при условии (4) является сильно выпуклым. Тогда

$$J(u_n) - J(u_*) \leq \langle J'(u_n), u_n - u_* \rangle - \frac{\mu}{2} \|u_n - u_*\|^2 \leq 2\mu \|J'(u_n)\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$J(u_n) - J(u_{n+1}) \geq \frac{1}{2l} \|J'(u_n)\|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что  $a_n - a_{n+1} \geq \frac{\mu}{l} a_n$ , где  $a_n = J(u_n) - J(u_*)$ . Следовательно,  $0 \leq a_{n+1} \leq a_n(1 - \frac{\mu}{l}) = qa_n$ . Тогда  $a_n \leq qa_{n-1} \leq q^2 a_{n-2} \leq \dots \leq q^n a_0$ , где  $a_0 = J(u_0) - J(u_*)$ . Отсюда следует оценки (12). Пятое утверждение теоремы доказано.

Как следует из (3), значение  $J(u) \geq 0$ ,  $\forall u$ ,  $u \in L_2(I_1, R^m)$ . Последовательность  $\{u_n\} \subset L_2(I_1, R^m)$  является минимизирующей для любой начальной точки  $u_0 = u_0(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$  т.е.  $J(u_*) = \min_{u \in L_2(I_1, R^m)} J(u) = J_* = \inf_{u \in L_2(I_1, R^m)} J(u)$ .

Если  $J(u_*) = 0$ , то  $f(t) = \int_a^b K(t, \tau) u_*(\tau) d\tau$ . Таким образом, интегральное уравнение (2) имеет решение тогда и только тогда, когда значение  $J(u_*) = 0$ , где  $u_* = u_*(\tau) \in L_2(I_p, R^n)$  – решение интегрального уравнения (2). Если значение  $J(u_*) > 0$ , то  $f(t) \neq$

$\int_a^b K(t, \tau)u_*(\tau)d\tau$ , следовательно,  $u_* = u_*(\tau)$ ,  $\tau \in I_1$  не является решением интегрального уравнения (2). Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда искомая функция  $u(\tau) \in U(\tau) \subset L_2(I_1, R^m)$ , где, в частности, либо

$$U(\tau) = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) / \alpha(\tau) \leq u(\tau) \leq \beta(\tau), \text{ п.в. } \tau \in I_1\},$$

либо

$$U(\tau) = \{u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m) / \|u\|^2 \leq R^2\}.$$

Решения задач 3, 4 могут быть получены из решения оптимизационной задачи: минимизировать функционал

$$J_1(u, v) = \int_{t_0}^{t_1} |f(t) - \int_a^b K(t, \tau)u(\tau)d\tau|^2 dt + \|u - v\|_{L_2}^2 \rightarrow \inf \quad (13)$$

при условии

$$u(\cdot) \in L_2(I_1, R^m), \quad v(\tau) \in U(\tau) \subset L_2(I_1, R^m), \quad \tau \in I_1, \quad f(t) \in L_2(I, R^n). \quad (14)$$

**Теорема 3** Пусть ядро оператора  $K(t, \tau)$  измеримо и принадлежит  $L_2$ . В прямоугольнике  $S_1 = \{(t, \tau) \in R^2 / t \in I, \tau \in I_1\}$ . Тогда:

1) функционал (13) при условии (14) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала

$$J'_1(u, v) = (J'_{1u}(u, v), J'_{1v}(u, v)) \in L_2(I_1, R^m) \times L_2(I_1, R^m)$$

в любой точке  $(u, v) \in L_2(I_1, R^m) \times L_2(I_1, R^m)$  определяется по формуле

$$J'_{1u}(u, v) = -2 \int_{t_0}^{t_1} K(t, \tau)f(t)dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_a^b K^*(t, \tau)K(t, \sigma)u(\sigma)d\sigma dt + \\ + 2(u - v) \in L_2(I_1, R^m), \quad J'_{1v}(u, v) = -2(u - v) \in L_2(I_1, R^m); \quad (15)$$

2) градиент функционала  $J'_1(u, v)$  удовлетворяет условию Липшица

$$\|J'_1(u + h, v + h_1) - J'_1(u, v)\| \leq l_2(\|h\| + \|h_1\|),$$

$$\forall (u, v), (u + h, v + h_1) \in L_2(I_1, R^m) \times L_2(I_1, R^m);$$

3) функционал (13) при условии (14) является выпуклым.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

**Теорема 4** Пусть для оптимизационной задачи (13), (14) построены последовательности (см. (15))

$$u_{n+1} = u_n - \alpha_n J'_{1u}(u_n, v_n), \quad v_{n+1} = P_U[v_n - \alpha_n J'_{1v}(u_n, v_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\varepsilon_0 \leq \alpha \leq \frac{2}{l_2 + 2\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда числовая последовательность  $\{J_1(u_{n1}, v_n)\}$  монотонно убывает, предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_{n+1}\| = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v_{n+1}\| = 0$ .

Если, кроме того, множество  $M(u_0, v_0) = \{(u, v) \in L_2 \times U / J_1(u, v) \leq J(u_0, v_0)\}$  ограничено, то:

1) последовательность  $\{u_n, v_n\} \subset M(u_0, v_0)$  является минимизирующей, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_1(u_n, v_n) = J_* = \inf J(u, v), \quad (u, v) \in L_2 \times U;$$

2)  $u_n \xrightarrow{c/n} u_*$ ,  $v_n \xrightarrow{c/n} v_*$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $(u_*, v_*) \in U_* = \{(u_*, v_*) \in L_2 \times U / J_1(u_*, v_*) = \min J_1(u, v) = J_* = \inf J_1(u, v), (u, v) \in L_2 \times U\}$ ;

3) для того, чтобы интегральное уравнение (2) при условии  $u(\tau) \in U$  имело решение, необходимо и достаточно, чтобы значение  $J_1(u_*, v_*) = 0$ .

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

#### 4 Приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$Ku = \int_a^b K(t, \tau)u(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in I = [t_0, t_1] \quad (16)$$

Пусть в  $L_2$  дана полная система, в частности,  $1, t, t^2, \dots$ , а соответствующая полная ортонормированная система  $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ ,  $t \in I = [t_0, t_1]$ . Так как выполнено условие теоремы Фубини о перемене порядка интегрирования, то (см. (16))

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \int_a^b K_{ij}(t, \tau)u_j(\tau)d\tau \right) \varphi_k(t)dt = \int_a^b \left( \int_{t_0}^{t_1} K_{ij}(t, \tau)\varphi_k(t)dt \right) u_j(\tau)d\tau =$$

$$= \int_a^b L_{ij}^{(k)}(\tau)u_j(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f_i(t)\varphi_k(t)dt = a_{ik}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $K(t, \tau) = \|K_{ij}(t, \tau)\|$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ ,  $t \in I$ ,  $\tau \in I_1$ , через  $L_{ij}^{(k)}(\tau)$  обозначено  $\int_{t_0}^{t_1} K_{ij}(t, \tau)\varphi_k(t)dt$ .



где  $L(\tau)$  – матрица порядка  $Nn \times m$ ,  $N = \infty$ .

Следует отметить, что если для некоторого  $k = k_*$ ,  $L_j^{(k_*)}(\tau) = 0$  и соответствующие  $\bar{a}_j^{(k_*)} = 0$ , то из системы (18) необходимо исключить соотношения

$$\int_a^b L_j^{(k_*)}(\tau)u(\tau)d\tau = \bar{a}_j^{(k_*)}.$$

Заметим, что если  $L_j^{(k_*)}(\tau) = 0$ , однако  $\bar{a}_j^{(k_*)} \neq 0$ , то интегральное уравнение (16) не имеет решения.

**Теорема 5** Пусть матрица

$$C_N = \int_a^b L_N(\tau)L_N^*(\tau)d\tau$$

порядка  $nN \times nN$  положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (??) определяется по формуле

$$u_N(\tau) = L_N^*(\tau)C_N^{-1}\bar{a}_N + p_N(\tau) - L_N^*(\tau)C_N^{-1} \int_a^b L_N(\eta)p_N(\eta)d\eta, \quad \tau \in I_1, \quad (19)$$

где  $p_N(\tau) \in L_2(I_1, R^m)$  – произвольная функция.

Доказательство теоремы для конечного  $N$  можно найти в [18].

## 5 Заключение

В данной работе предложен новый метод исследования разрешимости и построения решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Получены необходимые и достаточные условия существования решения при заданной правой части, для двух случаев: когда искомая функция принадлежит пространству  $L_2$ ; искомая функция принадлежит заданному множеству из  $L_2$ . Получены условия разрешимости и метод построения приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

По сравнению с традиционными методами построения решения согласно предлагаемому методу можно построить приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Доказаны несколько теорем о разрешимости вышесказанного уравнения. Приведен пример иллюстрирующий данный метод. В дальнейшем планируется продолжить исследования в данном направлении и разработать приложения на основе предложенного метода.

## Литература

- [1] Айсагалиев С.А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения.-1991. т. 27, - No.9. - с. 1475-1486.

- [2] *Айсағалиев С.А., Белогуров А.П.* Управляемость и быстродействие процесса, описываемого параболическим уравнением с ограниченным управлением // Сибирский математический журнал, январь- февраль, т. 53, 2011, No. 1, с. 3-21.
- [3] *Айсағалиев С.А.* Теория управляемости динамических систем. – Алматы, Қазақ университеті, -2014. – 158 с.
- [4] *Aisagaliev S.A.* Controllability and Optimal Control in Nonlinear Systems. Journal of Computer and Systems. – Sciences International, No. 32(5), 1994, p. 73-80.
- [5] *Aisagaliev S.A., Кабидолданова А.А.* Оптимальное управление динамических систем. Verlag, Palmarium Academic Publishing (Германия), 2012. – 288 с.
- [6] *Айсағалиев С.А., Кабидолданова А.А.* Об оптимальном управлении линейными системами с линейным критерием качества и ограничениями // Дифференциальные уравнения, 2012, т. 48, No. 6, с. 826-838.
- [7] *Айсағалиев С.А., Айсағалиев Т.С.* Методы решения краевых задач. – Алматы, Қазақ университеті, 2002. – 348 с.
- [8] *Айсағалиев С.А., Калымолдаев М.Н.* Конструктивный метод решения краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 2015, том 51, № 2, с. 147-160.
- [9] *Aisagaliev S.A., Zhunussova Zh.Kh.* To the boundary value problem of ordinary differential equations. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (EJQTDE), 2015, No. 57, 1-17; doi: 10.14232/ejqtde.2015.1.57 <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>
- [10] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Том IV, часть первая, М.: 1974. 336 с.
- [11] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989, – 624 с.
- [12] *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975, 304 с.
- [13] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. –М.: Наука, 1986. – 288 с.
- [14] *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Изд-во СО РАН СССР, 1962, – 305 с.
- [15] *Иванов В.К.* Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода. – Дифференциальные уравнения, 1967, 3, No. 3, с. 21-32.
- [16] *Фридман В.М.* Метод последовательных приближений для интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода, УМН XI, вып. I, 1956. с. 56-85.
- [17] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы математической физики. ТТ. I, II. ИЛ, 1958. – 536 с.
- [18] *Айсағалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал, 2005, т. 5, No. 4 (18), с. 17-34.
- [19] *Айсағалиев С.А.* Конструктивная теория краевых задач оптимального управления. – Алматы: Қазақ университеті, 2007. – 328 с.
- [20] *Айсағалиев С.А., Белогуров А.П., Севрюгин И.В.* К решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для функции нескольких переменных // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2011, No. 1(68), с. 3-16.
- [21] *Айсағалиев С.А.* Лекции по оптимальному управлению. – Алматы: Қазақ университеті, 2007. – 278 с.
- [22] *Айсағалиев С.А., Севрюгин И.В.* Управляемость и быстродействие процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. – 2014, No. 2(81), с. 20-37.

## References

- [1] *S.A. Aisagaliev*. Controllability of a differential equation system. *Differential Equations*, Vol 27, No. 9, 1991, pp. 1037-1045.
- [2] *S.A. Aisagaliev, A.P. Belogurov*. Controllability and speed of the process described by a parabolic equation with bounded control. © Aisagaliev S.A. and Belogurov A.P. *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 53, No. 1, 2012, pp. 13-28.
- [3] *S.A. Aisagaliev*. Controllability theory of the dynamic systems. – Almaty, Kazakh university, 2014. – 158 p.
- [4] *S.A. Aisagaliev*. Controllability and Optimal Control in Nonlinear Systems. *Journal of Computer and Systems. – Sciences International*, No. 32(5), 1994, p. 73-80.
- [5] *S.A. Aisagaliev, A.A. Kabidoldanova*. Optimal control by dynamic systems. Palmarium Academic Publishing (Verlag, Germany) – 2012. - P. 288.
- [6] *S.A. Aisagaliev, A.A. Kabidoldanova*. On the Optimal Control of Linear Systems with Linear Performance Criterion and Constraints. *Differential Equations*. 2012, Vol. 48, No. 6, pp. 832-844.
- [7] *S.A. Aisagaliev, T.S. Aisagaliev*. Methods for solving the boundary value problems. – Almaty, Kazakh university, 2002. – 348 p.
- [8] *S.A. Aisagaliev, M.N. Kalimoldaev*. Constructive method for solving a boundary value problem for ordinary differential equations. MAIK NAUKA/INTERPERIODICA/SPRINGER, 233 SPRING ST, NEW YORK, NY 10013-1578 USA. *Differential Equations*. Volume: 51. Issue: 2. Pages: 149-162. Published: FEB 2015. DOI: 10.1134/S0012266115020019
- [9] *S.A. Aisagaliev, Zh.Kh. Zhunussova*. To the boundary value problem of ordinary differential equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations (EJQTDE)*, 2015, No. 57, 1-17; doi: 10.14232/ejqtde.2015.1.57 <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>
- [10] *V.I. Smirnov*. Course of higher mathematics. - M.: Science, 1974, - v. 4, - P. 336.
- [11] *A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin*. Elements of the function theory and functional analysis. – M.: Science, 1989, – 624 p.
- [12] *M.L. Krasnov*. Integral equations. M.: Science, 1975, 304 p.
- [13] *A.N. Tikhonov, V.Ya. Arsenin*. Methods for solving of the ill-posed problems. –M.: Science, 1986. – 288 p.
- [14] *M.M. Lavrentev*. About some ill-posed problems of mathematical physics. RAS, 1962, – 305 p.
- [15] *V.K. Ivanov*. On Fredholm integral equations of the first kind. – *Differential equations*, 1967, 3, No. 3, p. 21-32.
- [16] *V.M. Fridman*. Method of successive approximations for Fredholm integral equations of the first kind, UMN XI, Vol. I, 1956, pp. 56-85.
- [17] *F.M. Mors, G. Feshbah*. Methods of mathematical physics. Vol. I, II. 1958. – 536 p.
- [18] *S.A. Aisagaliev*. General solution of a class integral equations // *Mathematical journal*. Institute of Mathematics MES RK. - 2005. - Vol. 5, No. 4. - P. 7-13.
- [19] *S.A. Aisagaliev*. Constructive theory of the optimal control boundary value problems. – Almaty: Kazakh university, 2007. – 328 p.
- [20] *S.A. Aisagaliev, A.P. Belogurov, I.V. SevruGIN*. To solution of Fredholm integral equations of the first kind for function with several variables // *Bulletin KazNU*, – 2011, No. 1(68), pp. 3-16.
- [21] *S.A. Aisagaliev*. Lectures on optimal control. – Almaty: Kazakh university, 2007. – 278 p.
- [22] *S.A. Aisagaliev, I.V. SevruGIN*. Controllability and high-speed performance of processes described by ordinary differential equations // *Bulletin KazNU*, – 2014, No. 2(81), pp. 20-37.



УДК 517.946

Дильман Т.Б.

Кызылординский государственный университет имени Коркыт Ата, Республика Казахстан,  
г. Кызылорда

E-mail: DilmanTB@mail.ru

### **Единственность решения одной задачи интегральной геометрии в многомерном пространстве**

В данной статье рассматривается следующий класс задач интегральной геометрии: о восстановлении функции, заданной интегралами по некоторому семейству кривых. Эти задачи связаны с многочисленными приложениями. В целях изучения внутреннего строения земных недр на поверхности Земли производится серия взрывов. Для каждого взрыва на системе приборов измеряются режимы колебаний земной поверхности. Цель исследования – по показаниям приборов определить внутри Земли распределение физических параметров, связанных с законами распространения сейсмических волн. Наиболее четкий функционал в показаниях приборов – время прихода сейсмической волны, именно он служит основой в практике интерпретации. Известно, что линеаризованная задача интерпретации данных сейсморазведки есть задача интегральной геометрии. К интегральной геометрии сводятся задачи, связанные с просвечиванием, в частности, задачи интерпретации рентгеновских снимков. Потемнение рентгеновской пленки функционально связано с интегралом поглощения вдоль рентгеновского луча от источника до точки на пленке. Таким образом, задача определения пространственного коэффициента поглощения есть задача интегральной геометрии – требуется определить функцию, если заданы интегралы от этой функции по семейству лучей. В работе исследуется задача интегральной геометрии для семейства пространственных кривых. Доказывается теорема единственности решения рассматриваемой задачи интегральной геометрии.

**Ключевые слова:** интегральная геометрия, семейство кривых, интегральное уравнение, решение, единственность.

Dilman T.B.

### **Uniqueness theorem of solution the integral geometry problem for family curves in multidimensional space**

In this article the following class of integral geometry problems is considered: about the function reconstruction, shared by the integrals on some set of curves. These problems are correlated with several applications. In order to study internal earth structure multiple explosions are held on Earth surface. Then, fluctuations regimes of earth surface are measured on equipment for each explosion. The purpose of research is to determine distribution of physical parameters inside the Earth according to equipment measurements correlated with laws on dissemination of seismic waves. The most clear functional of such equipment is arrival time of seismic wave, which exactly serves as a base for interpretation practice. It is known that linearized problem of seismic-exploration data interpretation is actually the problem of integral geometry. Integral geometry also includes problems related to radiography, particularly interpretation problem of X-ray images. For instance, an X-ray film darkening is functionally correlated with absorption coefficient is also actually an integral geometry problem. In this case, it is required to determine the function if the integrals of this function on set of rays were set. An integral geometry problem in multidimensional space is studied in this work. The theorem of solution uniqueness is proven for the considered integral geometry problem.

**Key words:** integral geometry, family of curves, integral equation, solution, uniqueness.

Дильман Т.Б.

**Көп өлшемді кеңістіктегі бір интегралдық геометрия есебі туралы**

Бұл мақалада интегралдық геометрия есептерінің келесі класы қарастырылады: белгілі бір қисықтар үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функция ізделінеді. Бұл есептер қолданыстағы көптеген есептермен тығыз байланысты. Сейсмикалық барлаудың нәтижелерін түсіндіру мәселесінде Жердің ішкі құрылымын зерттеу үшін оның бетінде жарылыстар жасалынады. Әрбір жарылыс кезінде арнаулы құралдармен Жер қыртысында пайда болған тербелістер өлшенеді. Зерттеу мақсаты – құралдар көрсеткіштері бойынша сейсмикалық толқындардың таралу заңдылықтарымен байланысты физикалық параметрлерді анықтау. Құрал көрсеткіштерінің негізгі функционалы ретінде сейсмикалық толқындардың келу уақыттары алынады. Сейсмикалық барлаудың нәтижелерін түсіндірудің сызықтандырылған есебі интегралдық геометрия есебі екені белгілі. Рентгендік түсірілімдерді түсіндіріп беру мәселесі қарастырылған интегралдық геометрия есептеріне келтіреді. Пленкадағы қоюлану рентгендік сәуленің қайнар көзінен пленкадағы нүктеге дейінгі алынған жұтылу интегралымен функционалды байланыста болады. Сонымен кеңістіктегі жұтылу коэффициентін анықтау мәселесі келесі интегралдық геометрия есебіне келтіріледі: сәулелер үйірі бойынша алынған интегралдар арқылы интеграл астындағы функцияны табу керек. Мақалада көп өлшемді кеңістіктегі қисықтар үйірі үшін интегралдық геометрия есебі зерттеліп, шешімнің жалғыздығы туралы теорема дәлелденеді.

**Түйін сөздер:** интегралдық геометрия, қисықтар үйірі, интегралдық теңдеу, шешім, жалғыздық.

**1 Введение**

Обратными задачами для дифференциальных уравнений, как известно, принято называть задачи определения дифференциальных уравнений по известной информации о решениях этих уравнений [1,2]. Многие прикладные вопросы, касающиеся исследования кинематических задач сейсмологии, теории потенциала, уравнения Штурма-Лиувилля и других процессов, привели к обратным задачам.

Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений часто некорректны в классическом смысле Адамара. Поэтому актуальность приобретают вопросы единственности и поиск минимальной информации, которая делает обратную задачу определенной. Требуется установить условную корректность в смысле Тихонова некорректно поставленных задач.

Обратные задачи приводят к операторным уравнениям 1-рода. Например, некоторые обратные задачи для гиперболических уравнений могут быть редуцированы к исследованию интегральных уравнений типа Вольтерра 1-рода. Это позволяет для одномерных обратных задач получить интегральное уравнение Вольтерра 2-рода с оператором, обладающими достаточно хорошими свойствами. В многомерных обратных задачах информации о решениях уравнений задается лишь на части границы рассматриваемой области и поэтому такую обратную задачу невозможно свести к интегральному уравнению 2-рода. Как известно, причиной является некорректность многих обратных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Многие обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики тесно связаны с задачами интегральной геометрии. Возникает необходимость исследования новых задач интегральной геометрии, когда интегрирование искомого функции (или нескольких функций) производится по семейству сложных многообразий.

Рассмотрим следующую задачу интегральной геометрии

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{S(\xi, \eta, \zeta)} u(x, y, z) dS, \quad (1)$$

где  $S(\xi, \eta, \zeta)$  – семейство конусов

$$(\zeta - z)^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \quad (0 \leq z \leq \zeta)$$

или  $z = \zeta - \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$  с вершинами в точках  $(\xi, \eta, \zeta)$ , опирающихся на плоскость  $z = 0$ .

Учитывая, что

$$p = z'_x = \frac{\xi - x}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}, \quad q = z'_y = \frac{\eta - y}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}},$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{2}$$

поверхностный интеграл (1) можно свести к повторному интегралу

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{D(\xi, \eta, \zeta)} u(x, y, \zeta - \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}) dx dy.$$

Вводим полярную систему координат  $\xi = x + r \cos \varphi$ ,  $\eta = y + r \sin \varphi$ , тогда имеем

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\zeta} u(\xi - r \cos \varphi, \eta - r \sin \varphi, \zeta - r) r dr d\varphi.$$

Применяем преобразование Фурье к обеим частям уравнения по переменным  $\xi, \eta$ :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\lambda, \mu, \zeta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi, \eta, \zeta) e^{i(\lambda\xi + \mu\eta)} d\xi d\eta = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\zeta} r dr d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi - r \cos \varphi, \eta - r \sin \varphi, \zeta - r) e^{i(\lambda\xi + \mu\eta)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Далее вводя замену переменных  $\xi - r \cos \varphi = t$ ,  $\eta - r \sin \varphi = \tau$  последнее уравнение преобразуем к виду

$$\tilde{v}(\lambda, \mu, \zeta) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\zeta} r e^{ir(\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi)} \tilde{u}(\lambda, \mu, \zeta - r) dr d\varphi,$$

где  $\tilde{u}(\lambda, \mu, z)$  – преобразование Фурье функции  $u(x, y, z)$  по переменным  $x, y$ . Меняя порядок интегрирования получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно функции  $\tilde{u}(\lambda, \mu, z)$ :

$$\tilde{v}(\lambda, \mu, \zeta) = \int_0^{\zeta} rK(\lambda, \mu, r)\tilde{u}(\lambda, \mu, \zeta - r)dr, \quad (2)$$

где

$$K(\lambda, \mu, r) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} e^{ir(\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi)} d\varphi.$$

Замена  $\zeta - r = \rho$  позволяет получить уравнение

$$\tilde{v}(\lambda, \mu, \zeta) = \int_0^{\zeta} (\zeta - r)K(\lambda, \mu, \zeta - \rho)\tilde{u}(\lambda, \mu, \rho)d\rho.$$

Дифференцируя это уравнение по  $\zeta$  получаем

$$\tilde{v}'_{\zeta}(\lambda, \mu, \zeta) = \int_0^{\zeta} [K(\lambda, \mu, \zeta - \rho) + (\zeta - r)K'_{\zeta}(\lambda, \mu, \zeta - \rho)]\tilde{u}(\lambda, \mu, \rho)d\rho.$$

Продифференцировав еще раз по  $\zeta$  приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \tilde{v}''_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu, \zeta) &= K(\lambda, \mu, 0)\tilde{u}(\lambda, \mu, \zeta) + \\ &+ \int_0^{\zeta} [2K'_{\zeta}(\lambda, \mu, \zeta - \rho) + (\zeta - r)K''_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu, \zeta - \rho)] \tilde{u}(\lambda, \mu, \rho)d\rho. \end{aligned} \quad (3)$$

Вычислим интеграл  $K(\lambda, \mu, r) = 2\sqrt{2}\pi[J_0(\lambda r) + J_0(\mu r)]$  [3, формула (3.715)] где  $J_0(x)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Как известно,  $J_0(0) = 1$ , поэтому  $K(\lambda, \mu, 0) = 4\sqrt{2}\pi$ . Следовательно, уравнение (3) можно записать в виде интегрального уравнения Вольтерра второго рода [4]

$$\tilde{v}''_{\zeta\zeta}(\lambda, \mu, \zeta) = 4\sqrt{2}\pi\tilde{u}(\lambda, \mu, \zeta) + \int_0^{\zeta} \Psi(\lambda, \mu, \zeta - \rho)\tilde{u}(\lambda, \mu, \rho)d\rho,$$

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda, \mu, \zeta - \rho) &= 4\sqrt{2}\pi[\lambda J'_0(\lambda(\zeta - \rho)) + \mu J'_0(\mu(\zeta - \rho))] + \\ &+ 2\sqrt{2}\pi(\zeta - \rho)[\lambda^2 J''_0(\lambda(\zeta - \rho)) + \mu^2 J''_0(\mu(\zeta - \rho))]. \end{aligned}$$

Таким образом доказана

**Теорема 1** Если функция  $v(\xi, \eta, \zeta)$  имеет финитную непрерывность по переменным  $\xi, \eta$  и дважды дифференцируема по  $\zeta$ , то решение  $u(x, y, z)$  рассматриваемой задачи интегральной геометрии единственно в классе финитных непрерывных функций.

Рассмотрим более общую задачу интегральной геометрии

$$v(\vec{\xi}, \eta) = \int_{S(\vec{\xi}, \eta)} u(\vec{x}, y) dS, \quad (4)$$

где  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ,  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $S(\vec{\xi}, \eta)$  – семейство поверхностей

$$|\eta - y| = |\vec{x} - \vec{\xi}| \quad (0 \leq y \leq \eta) \quad \text{или} \quad y = \eta - \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2}.$$

Учитывая, что

$$p_i = y'_{x_i} = -(x_i - \xi_i) / \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2} \quad (i = \overline{1, n}), \quad \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n p_i^2} = \sqrt{2}$$

преобразуем поверхностный интеграл (4) к виду

$$v(\vec{\xi}, \eta) = \sqrt{2} \int_{D(\vec{\xi}, \eta)} u(\vec{x}, \eta - |\vec{x} - \vec{\xi}|) d\vec{x},$$

где  $D(\vec{\xi}, \eta)$  – проекция поверхности  $S(\vec{\xi}, \eta)$  на гиперплоскость  $y = 0$ .

Вводим замену переменных  $x_i = \xi_i - r \cos \varphi_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), где  $\cos \varphi_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – направляющие косинусы нормального вектора  $\vec{\psi}$  к заданной поверхности семейства  $S(\vec{\xi}, \eta)$ ;  $r = |\vec{\psi}|$ . Учитывая соотношение

$$\sum_{i=1}^n \cos^2 \varphi_i = 1$$

получим  $x_i = \xi_i - r \cos \varphi_i$  ( $i = \overline{1, n-1}$ ),  $x_n = \xi_n - r \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \cos^2 \varphi_i}$ .

Якобиан такого преобразования (приложения 1)  $R(r, \vec{\varphi}) = r^{n-1} S(\vec{\varphi})$ , где

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}), \quad S(\vec{\varphi}) = \prod_{i=1}^{n-1} \sin \varphi_i / \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n-1} \cos^2 \varphi_i}.$$

Тогда

$$v(\vec{\xi}, \eta) = \sqrt{2} \int_0^\eta \int_0^{2\pi} u(\vec{\xi} - r\vec{\psi}, \eta - r) R(r, \vec{\varphi}) dr d\vec{\varphi}.$$

К обеим частям уравнения применяем преобразование Фурье по вектору  $\vec{\xi}$ :

$$\tilde{v}(\vec{\lambda}, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\vec{\lambda}, \vec{\xi})} d\vec{\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\eta} \sqrt{2} u(\vec{\xi} - r\vec{\psi}, \eta - r) R(r, \vec{\varphi}) dr d\vec{\varphi}.$$

Теперь изменяем порядок интегрирования

$$\tilde{v}(\vec{\lambda}, \eta) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\eta} R(r, \vec{\varphi}) dr d\vec{\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{\xi} - r\vec{\psi}, \eta - r) e^{i(\vec{\lambda}, \vec{\xi})} d\vec{\xi}.$$

С помощью замены  $\vec{\xi} - r\vec{\psi} = \vec{t}$  ( $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ) имеем

$$\tilde{v}(\vec{\lambda}, \eta) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\eta} R(r, \vec{\varphi}) e^{i(\vec{\lambda}, r\vec{\psi})} dr d\vec{\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\vec{t}, \eta - r) e^{i(\vec{\lambda}, \vec{t})} d\vec{t},$$

отсюда

$$\tilde{v}(\vec{\lambda}, \eta) = \int_0^{\eta} r^{n-1} \left( \sqrt{2} \int_0^{2\pi} S(\vec{\varphi}) e^{ir(\vec{\lambda}, \vec{\psi})} d\vec{\varphi} \right) \tilde{u}(\vec{\lambda}, \eta - r) dr,$$

где  $\tilde{u}$  – преобразование Фурье функции  $u$  по вектору  $\vec{\xi}$ .

Замена переменной  $\eta - r = \rho$  позволяет написать последнее уравнение в виде

$$\tilde{v}(\vec{\lambda}, \eta) = \int_0^{\eta} (\eta - \rho)^{n-1} T(\vec{\lambda}, \eta - \rho) \tilde{u}(\vec{\lambda}, \rho) d\rho,$$

или

$$\tilde{v}(\vec{\lambda}, \eta) = \int_0^{\eta} K(\vec{\lambda}, \eta - \rho) \tilde{u}(\vec{\lambda}, \rho) d\rho, \quad (5)$$

где

$$K(\vec{\lambda}, \eta - \rho) = (\eta - \rho)^{n-1} T(\vec{\lambda}, \eta - \rho), \quad T(\vec{\lambda}, \eta - \rho) = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} S(\vec{\varphi}) e^{i(\eta - \rho)(\vec{\lambda}, \vec{\psi})} d\vec{\varphi}.$$

Дифференцируем по  $\eta$  семейство интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\tilde{v}'_{\eta}(\vec{\lambda}, \eta) = K(\vec{\lambda}, 0) \tilde{u}(\vec{\lambda}, \eta) + \int_0^{\eta} K_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho) \tilde{u}(\vec{\lambda}, \rho) d\rho.$$

Учитывая, что  $K(\vec{\lambda}, 0) = 0$ , продифференцируем последнее уравнение еще раз по  $\eta$

$$\tilde{v}_{\eta\eta}''(\vec{\lambda}, \eta) = K_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda}, 0)\tilde{u}(\vec{\lambda}, \rho) + \int_0^{\eta} K_{\eta}^{(2)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho)\tilde{u}(\vec{\lambda}, \rho)d\rho.$$

Из формул

$$\begin{aligned} K_{\eta}^{(j)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho) &= \frac{(n-1)!}{(n-j-1)!}(\eta - \rho)^{n-j-1}T(\vec{\lambda}, \eta - \rho) + \\ &+ C_j^1 \frac{(n-1)!}{(n-j)!}(\eta - \rho)^{n-j}T_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho) + \\ &+ C_j^2 \frac{(n-1)!}{(n-j+1)!}(\eta - \rho)^{n-j+1}T_{\eta}^{(2)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho) + \dots + \\ &+ C_j^{j-1}(n-1)(\eta - \rho)^{n-2}T_{\eta}^{(j-1)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho) + (\eta - \rho)^{n-1}T_{\eta}^{(j)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho), \end{aligned}$$

где  $C_j^2$  – количество сочетаний,

$$T_{\eta}^{(j)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho) = i^j \sqrt{2} \int_0^{2\pi} S(\vec{\varphi}) e^{i(\eta-\rho)(\vec{\lambda}, \vec{\psi})} (\vec{\lambda}, \vec{\psi})^j d\vec{\varphi},$$

следует, что

$$K_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda}, 0) = K_{\eta}^{(2)}(\vec{\lambda}, 0) = \dots = K_{\eta}^{(n-2)}(\vec{\lambda}, 0) = 0.$$

Из формулы

$$\begin{aligned} K_{\eta}^{(n-1)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho) &= (n-1)!T(\vec{\lambda}, \eta - \rho) + \\ &+ C_{n-1}^1(n-1)!(\eta - \rho)T_{\eta}^{(1)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho) + \dots + (\eta - \rho)^{n-1}T_{\eta}^{(n-1)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho) \end{aligned}$$

получим

$$K_{\eta}^{(n-1)}(\vec{\lambda}, 0) = (n-1)!T(\vec{\lambda}, 0) = (n-1)!\sqrt{2} \int_0^{2\pi} S(\vec{\varphi})d\vec{\varphi} \neq 0,$$

так как можно доказать неравенство (приложение 2)

$$\int_0^{2\pi} S(\vec{\varphi})d\vec{\varphi} \geq (2\pi)^{n-1}.$$

Таким образом, дифференцируя интегральное уравнение (5) всего  $n$  раз по  $\eta$  получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tilde{v}_{\eta}^{(n)}(\vec{\lambda}, \eta) = K_{\eta}^{(n-1)}(\vec{\lambda}, 0)\tilde{u}(\vec{\lambda}, \rho) + \int_0^{\eta} K_{\eta}^{(n)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho)\tilde{u}(\vec{\lambda}, \rho)d\rho,$$

или

$$\frac{\tilde{v}_\eta^{(n)}(\vec{\lambda}, \eta)}{K_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda}, 0)} = \tilde{u}(\vec{\lambda}, \rho) + \int_0^\eta \frac{K_\eta^{(n)}(\vec{\lambda}, \eta - \rho)}{K_\eta^{(n-1)}(\vec{\lambda}, 0)} \tilde{u}(\vec{\lambda}, \rho) d\rho.$$

Следовательно, справедлива

**Теорема 2** Если  $v(\vec{\xi}, \eta)$  имеет финитную непрерывность по вектору  $\vec{\xi}$  и  $n$  раз дифференцируема по  $\eta$ , то решение  $u(\vec{x}, y)$  задачи (4) единственно в классе финитных непрерывных функций.

### Приложение 1.

Якобиан

$$\begin{aligned} R(r, \vec{\varphi}) &= \begin{vmatrix} x'_{1r} & x'_{1\varphi_1} & x'_{1\varphi_2} & \dots & x'_{1\varphi_{n-1}} \\ x'_{2r} & x'_{2\varphi_1} & x'_{2\varphi_2} & \dots & x'_{2\varphi_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x'_{n-1r} & x'_{n-1\varphi_1} & x'_{n-1\varphi_2} & \dots & x'_{n-1\varphi_{n-1}} \\ x'_{nr} & x'_{n\varphi_1} & x'_{n\varphi_2} & \dots & x'_{n\varphi_{n-1}} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -r \sin \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cos \varphi_2 & 0 & -r \sin \varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos \varphi_{n-1} & 0 & 0 & \dots & -r \sin \varphi_{n-1} \\ \cos \varphi_n & \frac{r \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_n} & \frac{r \cos \varphi_2 \sin \varphi_2}{\cos \varphi_n} & \dots & \frac{r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \end{vmatrix} = \\ &= \cos \varphi_1 \begin{vmatrix} 0 & -r \sin \varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r \sin \varphi_{n-1} \\ \frac{r \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_n} & \frac{r \cos \varphi_2 \sin \varphi_2}{\cos \varphi_n} & \dots & \frac{r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \end{vmatrix} - \\ &- \cos \varphi_2 \begin{vmatrix} -r \sin \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r \sin \varphi_{n-1} \\ \frac{r \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_n} & \frac{r \cos \varphi_2 \sin \varphi_2}{\cos \varphi_n} & \dots & \frac{r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \end{vmatrix} + \dots + \\ &+ (-1)^{n-2} \cos \varphi_{n-1} \begin{vmatrix} -r \sin \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r \sin \varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{r \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_n} & \frac{r \cos \varphi_2 \sin \varphi_2}{\cos \varphi_n} & \dots & \frac{r \cos \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \end{vmatrix} + \\ &+ (-1)^{n-1} \cos \varphi_n \begin{vmatrix} -r \sin \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r \sin \varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r \sin \varphi_{n-1} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{n-2} \frac{r \cos^2 \varphi_1 \sin \varphi_1}{\cos \varphi_n} \begin{vmatrix} -r \sin \varphi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r \sin \varphi_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r \sin \varphi_{n-1} \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^{n-2} \frac{r \cos^2 \varphi_2 \sin \varphi_2}{\cos \varphi_n} \begin{vmatrix} -r \sin \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r \sin \varphi_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r \sin \varphi_{n-1} \end{vmatrix} + \dots + \\
 &+ (-1)^{n-2} \frac{r \cos^2 \varphi_{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \begin{vmatrix} -r \sin \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r \sin \varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r \sin \varphi_{n-2} \end{vmatrix} + \\
 &+ (-1)^{n-1} \cos \varphi_n \begin{vmatrix} -r \sin \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -r \sin \varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -r \sin \varphi_{n-1} \end{vmatrix} = \\
 &= \frac{r^{n-1} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} [\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \dots + \cos^2 \varphi_{n-1}] + \\
 &\quad + r^{n-1} \cos \varphi_n \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1} = \\
 &= \frac{r^{n-1} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1}}{\cos \varphi_n} \sum_{k=1}^n \cos^2 \varphi_k = \frac{r^{n-1}}{\cos \varphi_n} \prod_{i=1}^{n-1} \sin \varphi_i.
 \end{aligned}$$

**Приложение 2.**

При  $n = 2$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1}} d\varphi_1 = 2\pi.$$

При  $n = 3$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2}} d\varphi_1 d\varphi_2 \geq \\
 &\geq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2}} d\varphi_1 d\varphi_2 = \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2}{\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi_1)(1 - \cos^2 \varphi_2)}} d\varphi_1 d\varphi_2 = (2\pi)^2.
 \end{aligned}$$

При  $n = 4$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3}} d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 \geq \\
& \geq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 + \cos^2 \varphi_1 (\cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3) + I}} = \\
& = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3}{\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi_1)(1 - \cos^2 \varphi_2)(1 - \cos^2 \varphi_3)}} d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 = (2\pi)^3,
\end{aligned}$$

так как

$$\cos^2 \varphi_1 (\cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3) + I \geq 0,$$

где

$$I = \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 \cos^2 \varphi_3.$$

По методу математической индукции полагаем при  $n = k$

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-2} \sin \varphi_{k-1}}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \dots - \cos^2 \varphi_{k-2} - \cos^2 \varphi_{k-1}}} d\varphi_1 \dots d\varphi_{k-2} d\varphi_{k-1} \geq (2\pi)^{k-1}.$$

Докажем при  $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-1} \sin \varphi_k d\varphi_1 \dots d\varphi_{k-1} d\varphi_k}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \dots - \cos^2 \varphi_{k-1} - \cos^2 \varphi_k}} \geq \\
& \geq \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-1} \sin \varphi_k d\varphi_1 \dots d\varphi_{k-1} d\varphi_k}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \dots - \cos^2 \varphi_{k-1} - \cos^2 \varphi_k + U}} = \\
& = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-1} \sin \varphi_k d\varphi_1 \dots d\varphi_{k-1} d\varphi_k}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \dots - \cos^2 \varphi_{k-1} - \cos^2 \varphi_k + U \cos^2 \varphi_k}} = \\
& = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-1} \sin \varphi_k d\varphi_1 \dots d\varphi_{k-1} d\varphi_k}{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \dots - \cos^2 \varphi_{k-1} - \cos^2 \varphi_k (1 - U)}} = \\
& = \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-1} \sin \varphi_k d\varphi_1 \dots d\varphi_{k-1} d\varphi_k}{\sqrt{(1 - \cos^2 \varphi_1 - \dots - \cos^2 \varphi_{k-1})(1 - \cos^2 \varphi_k)}} \geq
\end{aligned}$$

$$\geq (2\pi)^{k-1} \int_0^{2\pi} d\varphi_k = (2\pi)^k,$$

где  $u = \cos^2 \varphi_1 + \dots + \cos^2 \varphi_{k-1}$ . Следовательно, для любого натурального  $n \geq 2$  справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} S(\vec{\varphi}) d\vec{\varphi} \geq (2\pi)^{n-1}.$$

### Литература

- [1] *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – Москва: Наука, 1980. – 286 с.
- [2] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008. – 460 с.
- [3] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Наука, 1971. – 1108 с.
- [4] *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. Москва: Наука, 1959. – 232 с.

### References

- [1] *Lavrentev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.P.* Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki I analiza. – Moskva: Nauka, 1980. – 286 s.
- [2] *Kabanikhin S.I.* Obratnyei nekorrektnye zadachi. – Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izdatelstvo, 2008. – 460 s.
- [3] *Gradshtein I.S., Ryzhik I.M.* Tablitsy integralov, sum, ryadov I proizvedenij. – Moskva: Nauka, 1971. – 1108 s.
- [4] *Mikhlin S.G.* Lektsii po lineinym integralnym uravneniyam. – Moskva: Fizmatgiz, 1959. – 232 s.

УДК 517.956

Қытайбеков Е.

Казахский национальный педагогический университет имени Абая,  
Республика Казахстан, г. Алматы  
E-mail: Eг-kaz\_89@mail.ru

### Задача Дирихле для трехмерных гиперβολо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка

Краевые задачи для гиперβολо-параболических уравнений на плоскости хорошо изучены, где исследованы задача Трикоми и первая краевая задача. Смешанная задача, характеристическая задача Коши и задача Дарбу для многомерных гиперβολо-параболических уравнений ранее рассмотрены. Проблема задачи Трикоми для гиперβολо-параболических уравнений в многомерных областях ставилась и исследовалась разными авторами. Теория краевых задач для вырождающихся гиперβολо - параболических уравнений на плоскости также хорошо изучены. Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах исследованы. Корректности задач Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений доказаны. В данной работе в цилиндрической области для трехмерных гиперβολо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка цилиндрической области показана разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле.

**Ключевые слова:** задача Дирихле, вырождение типа и порядка, разрешимость, плотность.

Kitaybekov E.T.

### Dirichlet problem for three-dimensional hyperbolic-parabolic equations with type and order extinction

Boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations in the plane have been studied properly, where Tricomi problem and the first boundary value problem were investigated. The mixed problem, Cauchy characteristic problem and Darboux problem for multidimensional hyperbolic-parabolic equations have been considered before. Different authors have defined and investigated Tricomi problem for hyperbolic-parabolic equations in multidimensional domains. The theory of boundary value problems for degenerating hyperbolic-parabolic equations in the plane has also been studied properly. Besides, multidimensional analogues of these problems in generalized spaces have been investigated. Correctness of Dirichlet problems for degenerating multidimensional hyperbolic equations has been proved. In this work the author showed solvability and obtained an explicit classical solution of Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional hyperbolic-parabolic equations with type and order extinction.

**Key words:** Dirichlet problem, degeneration of the type and order, solvability, density.

Қытайбеков Е.

### Түрі мен реті азғындалған үш өлшемді гиперβολо-параболалық теңдеулерге Дирихле есебі

Гиперβολо-параболалық теңдеулер үшін шеттік есептер жазақтықтарда жақсы таныс, мұнда Трикоми есебі және бірінші шеттік есеп зерттелген. Сипатамалық Коши есебі және Дарбу есебі үшін көп өлшемді гиперβολо-параболалық теңдеулерге аралас есеп бұрын қаралған. Көпөлшемді облыста Трикоми есебінің шешілу мәселесі қойлған. Және де бұл сұрақтар әр түрлі аторлармен зерттелген. Азғындалған гиперβολо-параболалық теңдеулерге шеттік есептер теориясы сондай-ақ жазақтықтар үшін жақсы зерттелген. Көпөлшемді аналогтары осы міндеттерді жалшылама кеңістіктерде зерттелді. Азғындалған көпөлшемді гиперболалық теңдеулер үшін Дирихле есебінің қисындылығы дәлелденді. Бұл жұмыста түрі мен реті азғындалған үш өлшемді гиперβολо-параболалық теңдеулердің цилиндрлік облыста шешімділігі көсетілген және Дирихле есебінің классикалық шешімнің айқын түрі алынған.

**Түйін сөздер:** Дирихле есебі, түрі мен реті азғындалған, шешімділік, тығыздық.

## 1 Введение

Известно, что колебания упругих мембран в пространстве моделируются уравнениями в частных производных. Если прогиб мембраны считать функцией  $u(x, t)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $m \geq 2$ , то по принципу Гамильтона приходим к многомерным вырождающимся гиперболическим уравнениям.

Математическое моделирование процесса распространения тепла в среде заполненной массой берет свое начало еще с работ Фурье.

Обозначим через  $u(x, t)$  температуру в среде в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Тогда в силу закона Фурье задача распространения тепла в среде описывается многомерными вырождающимися параболическими уравнениями.

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболо - параболических уравнений на плоскости изучены в [1]. Многомерные аналоги этих задач в обобщенных пространствах исследованы в [2]. Корректности задач Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений доказаны [3, 4].

В данной работе в цилиндрической области для трехмерных гиперболо - параболических уравнений с вырождением типа и порядка показано разрешимость задачи Дирихле.

## 2 Постановка задачи и результат

Пусть  $\Omega_{\alpha\beta}$  – цилиндрическая область евклидова пространства  $E_3$  точек  $(x_1, x_2, t)$ , ограниченная цилиндром  $\Gamma = \{(x, t) : |x| = 1\}$ , плоскостями  $t = \alpha > 0$  и  $t = \beta < 0$ , где  $|x|$  – длина вектора  $x = (x_1, x_2)$ .

Обозначим через  $\Omega_\alpha$  и  $\Omega_\beta$  части области  $\Omega_{\alpha\beta}$ , а через  $\Gamma_\alpha$ ,  $\Gamma_\beta$  – части поверхности  $\Gamma$ , лежащие в полупространствах  $t > 0$  и  $t < 0$ ;  $\sigma_\alpha$  – верхнее, а  $\sigma_\beta$  – нижнее основания области  $\Omega_{\alpha\beta}$ .

Пусть далее  $S$  – общая часть границ областей  $\Omega_\alpha$  и  $\Omega_\beta$  представляющее множество  $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$  в  $E_2$ .

В области  $\Omega_{\alpha\beta}$  рассмотрим вырождающихся трехмерные гиперболо-параболические уравнения

$$0 = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 p_i(t)u_{x_i x_i} - p_3(t)u_{tt} + \sum_{i=1}^2 a_i(x, t)u_{x_i} + b(x, t)u_t + c(x, t)u, & t > 0, \\ \sum_{i=1}^2 g_i(t)u_{x_i x_i} - u_t + \sum_{i=1}^2 d_i(x, t)u_{x_i} + e(x, t)u, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $p_i(t) > 0$  при  $t > 0$ ,  $p_i(0) = 0$ ,  $g_i(t) > 0$  при  $t < 0$  и могут обращаться в нуль при  $t = 0$ ,  $p_i(t) \in C([0, \alpha]) \cap C^2((0, \alpha))$ ,  $g_j(t) \in C([\beta, 0])$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$ .

В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат  $x_1, x_2, t$  с полярными  $r, \theta, t$ :  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

**Задача 1 (Дирихле).** Найти решение уравнения (1) в области  $\Omega_{\alpha\beta}$  при  $t \neq 0$  из класса  $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$u \Big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r, \theta), \quad u \Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad (2)$$

$$u \Big|_{\Gamma_\beta} = \psi_2(t, \theta), \quad u \Big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r, \theta). \quad (3)$$

при этом  $\varphi_1(1, \theta) = \psi_1(\alpha, \theta)$ ,  $\psi_1(0, \theta) = \psi_2(0, \theta)$ ,  $\psi_2(\beta, \theta) = \varphi_2(1, \theta)$ .

Пусть  $\frac{a_i(r, \theta, t)}{p_3(t)}$ ,  $\frac{b(r, \theta, t)}{p_3(t)}$ ,  $\frac{c(r, \theta, t)}{p_3(t)} \in C^1(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$ ,  $d_i(r, \theta, t)$ ,  $e(r, \theta, t) \in C^1(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$ .

Тогда справедлива

**Теорема 1.** Если  $\varphi_1(r, \theta) \in C^1(\bar{\sigma}_\alpha) \cap C^3(\sigma_\alpha)$ ,  $\varphi_2(r, \theta) \in C^1(\bar{\sigma}_\beta) \cap C^3(\sigma_\beta)$ ,  $\psi_1(t, \theta) \in C^1(\bar{\Gamma}_\alpha) \cap C^3(\Gamma_\alpha)$ ,  $\psi_2(t, \theta) \in C^1(\bar{\Gamma}_\beta) \cap C^3(\Gamma_\beta)$ , и имеет место

$$\cos \mu_{s,n} \alpha' \neq 0, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

то задача 1 разрешима, где  $\mu_{s,n}$  – положительные нули функций Бесселя первого рода  $J_n(z)$ ,  $\alpha' = \int_0^\alpha \sqrt{\frac{[p_1(\xi) + p_2(\xi)]}{2p_3(\xi)}} d\xi$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .

### 3 Доказательство теоремы

Сначала покажем разрешимость задачи (1), (3). Ее решение будем искать в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = u_{10}(r, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{1n}(r, t) \cos n\theta + u_{2n}(r, t) \sin n\theta), \quad (5)$$

где  $u_{10}(r, t)$ ,  $u_{1n}(r, t)$ ,  $u_{2n}(r, t)$  – функции, которые будут определены ниже.

Подставляя (5) в (1), в области  $\Omega_\beta$ , полярных координатах будем иметь

$$\begin{aligned} L_1 u \equiv & g_1(t) \left( \cos^2 \theta u_{10rr} + \frac{\sin^2 \theta}{r} u_{10r} \right) + g_2(t) \left( \sin^2 \theta u_{10rr} + \frac{\cos^2 \theta}{r} u_{10r} \right) - u_{10t} + \\ & + d_1(r, \theta, t) \cos \theta u_{10r} + d_2(r, \theta, t) \sin \theta u_{10r} + e(r, \theta, t) u_{10} + \\ & + \sum_{i=1}^2 \left\{ g_1(t) \left[ \cos^2 \theta (\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \frac{\sin^2 \theta}{r} (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\sin n\theta u_{1nr} - \cos n\theta u_{2nr}) + \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{n^2 \sin^2 \theta}{r^2} (\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \right] + g_2(t) \left[ \sin^2 \theta (\cos n\theta u_{1nrr} + \sin n\theta u_{2nrr}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n \sin 2\theta}{r} (\cos n\theta u_{2nr} - \sin n\theta u_{1nr}) + \frac{\cos^2 \theta}{r} (\cos n\theta u_{1nr} - \sin n\theta u_{2nr}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{n \sin 2\theta}{2r^2} (\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) - \frac{n^2}{r^2} \cos^2 \theta (\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \right] - u_{1nt} \cos n\theta - \right. \\ & \left. - u_{2nt} \sin n\theta + d_1 \left[ \cos \theta (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n \sin \theta}{r} (\sin n\theta u_{1n} - \cos n\theta u_{2n}) \right] + \right. \\ & \left. + d_2 \left[ \sin \theta (\cos n\theta u_{1nr} + \sin n\theta u_{2nr}) + \frac{n \cos \theta}{r} (\cos n\theta u_{2n} - \sin n\theta u_{1n}) \right] + \right. \\ & \left. + e(\cos n\theta u_{1n} + \sin n\theta u_{2n}) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь полученное выражение (6) сначала умножим на  $\rho(\theta) \neq 0$ , а затем проинте-

грируем от 0 до  $2\pi$ . После несложных преобразований получим ряд

$$\begin{aligned} & \frac{(g_1 + g_2)}{2} \rho_{10} \left( u_{10rr} + \frac{1}{r} u_{10r} \right) - \rho_{10} u_{10t} + \frac{(g_1 - g_2)}{2} d_{10} \left( u_{10rr} - \frac{1}{r} u_{10} \right) + \\ & + a_{10}(r, t) u_{10r} + c_{10}(r, t) u_{10} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{(g_1 + g_2)}{2} \rho_{jn} (u_{jnrr} + \right. \right. \\ & + \frac{1}{r} u_{jnrr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn}) - \rho_{jn} u_{jnt} + \frac{(g_1 - g_2)}{2} d_{jn} \left( u_{jnrr} - \frac{1}{r} u_{jnrr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn} \right) + \\ & \left. \left. + \frac{(g_2 - g_1)n}{2} e_{jn} \left( u_{jnrr} - \frac{u_{jn}}{2r} \right) + a_{jn}(r, t) u_{jnrr} + c_{jn}(r, t) u_{jn} \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{1n} &= \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad \rho_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin n\theta d\theta, \quad d_{1n} = \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \cos n\theta d\theta, \\ d_{2n} &= \int_0^{2\pi} \rho \cos 2\theta \sin n\theta d\theta, \quad e_{1n} = - \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \sin n\theta d\theta, \quad e_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho \sin 2\theta \cos n\theta d\theta, \\ a_{1n} &= \int_0^{2\pi} \rho (d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta) \cos n\theta d\theta, \quad a_{2n} = \int_0^{2\pi} \rho (d_1 \cos \theta + d_2 \sin \theta) \sin n\theta d\theta, \\ c_{1n} &= \int_0^{2\pi} \rho \left[ (d_1 \sin \theta - d_2 \cos \theta) \frac{n \sin n\theta}{r} + e \cos n\theta \right] d\theta, \\ c_{2n} &= \int_0^{2\pi} \rho \left[ (d_2 \cos \theta - d_1 \sin \theta) \frac{n \cos n\theta}{r} + e \sin n\theta \right] d\theta, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$g(t) \rho_{10} \left( u_{10rr} + \frac{1}{r} u_{10r} \right) - \rho_{10} u_{10t} = 0, \quad g(t) = \frac{g_1(t) + g_2(t)}{2}, \quad (8)$$

$$g(t) \rho_{j1} \left( u_{j1rr} + \frac{1}{r} u_{j1r} - \frac{u_{j1}}{r^2} \right) - \rho_{10} u_{j1t} = \frac{(g_2 - g_1) d_{10}}{2} \left( u_{10rr} - \frac{u_{10r}}{r} \right) - a_{10} u_{10r} - c_{10} u_{10}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} g(t) \rho_{jn} \left( u_{jnrr} + \frac{1}{r} u_{jnrr} - \frac{n^2}{r^2} u_{jn} \right) - \rho_{jn} u_{jnt} &= - \frac{(g_1 - g_2) d_{jn}}{2} \left( u_{jn-1rr} - \frac{1}{r} u_{jn-1r} - \right. \\ & - \frac{(n-1)^2}{r^2} u_{jn-1} \left. \right) - \frac{(g_2 - g_1)(n-1)}{r} e_{jn-1} \left( u_{jn-1r} - \frac{u_{jn-1}}{2r} \right) - \\ & - a_{jn-1} u_{jn-1r} - c_{jn-1} u_{jn-1}, \quad j = 1, 2, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что если  $\{u_{10}, u_{jn}\}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  — решение системы (8), (9), то оно является и решением уравнения (7).

Далее, учитывая ортогональность [5] систем тригонометрических функций  $\{\frac{1}{2}, \cos n\theta, \sin n\theta, n = 1, 2, \dots\}$  на отрезке  $[0, 2\pi]$  из краевого условия (3) в силу (5) будем иметь

$$u_{10}(r, \beta) = \varphi_{210}(r), \quad u_{10}(1, t) = \psi_{210}(t), \quad (10)$$

$$u_{jn}(r, \beta) = \varphi_{2jn}(r), \quad u_{jn}(1, t) = \psi_{2jn}(t), \quad j = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$\varphi_{210}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(r, \theta) d\theta, \quad \varphi_{210}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(t, \theta) d\theta,$$

$$\varphi_{21n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(r, \theta) \cos n\theta d\theta, \quad \psi_{21n}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(t, \theta) \cos n\theta d\theta,$$

$$\varphi_{22n}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_2(r, \theta) \sin n\theta d\theta, \quad \psi_{22n}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(t, \theta) \sin n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, задача (1)-(3) сведена к системе уравнений (8) -(9) с данными (10) и (11). Теперь будем находить решения этих задач. Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8),(9) можно представить в виде

$$g(t) \left( u_{nrr}^k + \frac{1}{r} u_{nr}^k - \frac{n^2}{r^2} u_n^k \right) - u_{nt} = f_n^k(r, t), \quad (12)$$

где  $f_n(r, t)$  определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом  $f_0(r, t) \equiv 0$ .

В [6] показана, что краевые задачи для уравнения (12) с условиями (10) и (11) имеют единственные решения.

Следовательно, сначала решив задачу (8), (10) ( $j = 1, n = 0$ ), а затем (9), (11) ( $j = 1, 2, n = 1$ ) и т.д. найдем последовательно все  $u_{10}(r, t), u_{jn}(r, t), j = 1, 2, n = 1, 2, \dots$ .

Итак, показано, что

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta) L_1 u d\theta = 0. \quad (13)$$

Пусть  $f(r, \theta, t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$ , причем  $R(r) \in V_0, V_0$  – плотна в  $L_2((0, 1))$ ,  $\rho(\theta) \in C^\infty((0, 2\pi))$  – плотна в  $L_2((0, 2\pi))$ , а  $T(t) \in V_1, V_1$  – плотна в  $L_2((\beta, 0))$ . Тогда  $f(r, \theta, t) \in V, V = V_0 \otimes (0, 2\pi) \otimes V_1$  – плотна в  $L_2(\Omega_\beta)$  [5].

Отсюда и из (13) следует, что

$$\int_{\Omega_\beta} f(r, \theta, t) L_1 u d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_1 u = 0, \quad \forall (r, \theta, t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1),(3) в области  $\Omega_\beta$  является функция (4), где  $u_{10}(r, t), u_{jn}(r, t), j = 1, 2, n = 1, 2, \dots$  определяются из предыдущих двумерных задач.

Учитывая ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции  $\varphi_2(r, \theta), \psi_2(t, \theta)$ , аналогично, как в [6], можно показать, что полученное решение (4) принадлежит классу  $C^1(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$ .

Далее, из (4) при  $t \rightarrow -0$  имеем

$$u(r, \theta, 0) = \tau(r, \theta) = u_{10}(r, 0) + \sum_{n=0}^{\infty} (u_{1n}(r, 0) \cos n\theta + u_{2n}(r, 0) \sin n\theta), \quad (14)$$

при этом  $\tau(r, \theta) \in C^1(\bar{S}) \cap C^3(S)$ .



Следовательно, учитывая краевые условия (14) и (2) приходим в области  $\Omega_\alpha$  к задаче Дирихле для вырождающихся гиперболических уравнений

$$L_2 u \equiv \sum_{i=1}^2 p_i(t) u_{x_i x_i} - p_3(t) u_{tt} + \sum_{i=1}^2 a_i(x, t) u_{x_i} + b(x, t) u_t + c(x, t) u = 0,$$

с данными

$$u|_S = \tau(r, \theta), \quad u|_{\Gamma_\alpha} = \psi_1(t, \theta), \quad u|_{\sigma_\alpha} = \varphi_2(r, \theta),$$

которое имеет решение [7], если выполняется условие (4).

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлено.

#### 4 Заключение

В данной работе в цилиндрической области для трехмерных гиперболо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка показана разрешимость и получен явный вид классического решения задачи Дирихле.

#### Литература

- [1] *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных, -М.: Наука, 2006. - 287 с.
- [2] *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. -Новосибирск: НГУ, 1983. - 84 с.
- [3] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина // Научные ведомости БелГУ. «Математика, Физика». - Белгород: 2012. – Т. 26, №5(124) - С. 12-25.
- [4] *Алдашев С.А.* Задачи Дирихле и Пуанкаре в цилиндрической области для вырождающихся трехмерных гиперболических уравнений// Матер. IV междунар. конф. «Математическая физика и ее приложения». – Самара: СамГУ, 2014. - С. 46.
- [5] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1976. – 543 с.
- [6] *Алдашев С.А.* Корректность задачи Дирихле для вырождающихся многомерных гиперболо-параболических уравнений// Владикавказский матем. журнал. -2014. -Т. 16, №4. -С. 3-8.
- [7] *Кутайбеков Е.Т.* Задача Дирихле в цилиндрической области для трехмерных гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физ.-мат. науки». - Алматы, 2015. - №4(52). -С. 27-31.

#### References

- [1] *Nakhushhev A. M.* Displacement problems for partial differential equation, M.; Nauka, -2006. - 287 p.
- [2] *Vragov V.N.* Boundary value problems for nonclassical equations of Math Physics. -Novosibirsk: NSU, 1983.- 84 p.
- [3] *Aldashev S. A.* Correctness of Dirichlet and Poincare problem in a cylindrical domain for degenerating multi-dimensional hyperbolic equations with Chaplygin operator // HScientific gazette of BelSU. «Mathematics, Physics». -Belgorod: 2012, - Vol. 26, No. 5(124). – P. 12-25.
- [4] *Aldashev S. A.* Dirichlet and Poincare problems in a cylindrical domain for degenerating three-dimensional hyperbolic equations // Mater. of IV internation. conf. «Math Physics and its applications». – Samara: SamSU, 2014. – P. 46.

- [5] *Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of function theory and functional analysis. –M.: Nauka, 1976, - P. 543.
- [6] *Aldashev S. A.* Correctness of Dirichlet problem for degenerating multi-dimensional hyperbolic-parabolic equations// Vladicaucasusmath journal. -2014. -vol. 16, No.4 . P. 3-8.
- [7] *Kitaybekov. E.T.* Dirichlet problem in a cylindrical domain for three-dimensional hyperbolic equations with type and order confluence // Bulletin of KazNPU named after. Abay. Series of physical-math sciences. –Almaty. 2015. No. 4(52). – P. 27-31.

УДК 517.51

Кыдырмина Н.А.

РГКП «Институт прикладной математики» КН МОН РК, Республика Казахстан,  
г. Караганда  
E-mail: nurgul-k@mail.ru

### Прямые и обратные теоремы приближения в метрике глобального пространства типа Морри

В последние годы увеличивается число исследований в теории общих пространств типа Морри. Пространство Морри первоначально придумано самим Морри в 1938 году для изучения локальных свойств решений эллиптических уравнений. А в дальнейшем теория пространства Морри стала самостоятельно развиваться и находить широкое применение в функциональном анализе, в теории дифференциальных уравнений в частных производных. В данной работе рассматриваются глобальные пространства типа Морри с точки зрения теории приближения. В начале статьи приводится небольшой исторический экскурс в историю развития такого важного раздела теории приближения, как прямая теорема приближения, также известной как неравенство Джексона, и обратная теорема приближения. Для функций из данных пространств доказываются аналоги неравенства Минковского и неравенства Бернштейна. Далее на их основе устанавливаются прямые и обратные теоремы приближения посредством целых функций экспоненциального типа в метрике глобального пространства типа Морри и показывается зависимость скорости приближения от дифференциальных свойств функции.

**Ключевые слова:** пространство Морри, прямая теорема приближения, обратная теорема приближения.

Kudyrmina N.

### The direct and inverse approximation theorems in metrics of the global Morrey-type space

In recent years, number of research works in the theory of the general Morrey type spaces are increased. The Morrey space was originally introduced by C. Morrey in 1938 to study the local properties of solutions of elliptic equations. Then theory of the Morrey spaces continued to develop at its own discretion and found wide application in functional analysis, theory of partial differential equations. In this paper we consider the global Morrey type spaces in terms of approximation theory. At the beginning of this work we take a short journey into the history of such important section of approximation theory as direct approximation theorem, also known as Jackson's inequality, and inverse approximation theorem. For functions from this spaces there are proved the analogue of the Minkowski inequality and analogue of the Bernstein inequality. Further, exploiting them and entire functions of exponential type, we obtain the direct and inverse approximation theorems in metrics of the global Morrey-type space and show that the degree of approximation depends on differential properties of function.

**Key words:** Morrey space, direct approximation theorem, inverse approximation theorem.

Кыдырмина Н.А.

**Глобалды Морри типті кеңістікте тура және кері жуықтау теоремалары**

Соңғы кезде Морридің жалпыланған кеңістіктері туралы мақалалар ғылыми журналдарда көптеп басылуда. Морри кеңістігін 1938 жылы, Морридың өзі, эллиптикалық теңдеулердің жергілікті қасиеттерін зерттеу үшін енгізген болатын. Ал, соңынан Морри кеңістігі функционалдық талдау, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теорияларында кең қолданыс тауып, өз бетінше қарыштап дами бастады. Бұл жұмыста глобалды Морри кеңістігі жуықтау теориясының тұрғысынан зерттелді. Статъяның басында функциялар теориясының маңызды бір тармағы болып табылатын тура және кері жуықтау теоремалары жөнінде қысқаша тарихи мәлімет келтірілді. Бұл екі теореманы, сәйкесінше, Джексон теңсіздігі және кері жуықтау теоремасы деп атайды. Глобалды Морри кеңістігінде Минковскийдің және экспоненциалды типті бүтін функциялар үшін Бернштейннің теңсіздіктерінің аналогтары дәлелденді. Осылардың көмегімен глобалды Морри кеңістігінде экспоненциалды типті бүтін функциялармен жуықтаудың тура және кері теоремалары дәлелденіп, Морри кеңістігінің элементтерінің дифференциалдық қасиеттерінен осы функцияны жуықтаудың жылдамдығының тәуелділігі көрсетілді.

**Түйін сөздер:** Морри кеңістігі, тура жуықтау теоремасы, кері жуықтау теоремасы.

**1 Введение**

В 1911 году Д. Джексон [1] уточнил классическую теорему Вейерштрасса о стремлении к нулю в равномерной метрике, показав зависимость скорости стремления к нулю от структурного свойства функции

$$E_n(f; a, b) \leq C \omega \left( f, \frac{b-a}{n} \right). \quad (1)$$

Здесь  $E_n(f; a, b)$  – наилучшее приближение произвольной непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f$  алгебраическими многочленами степени  $\leq n$ ,  $C > 0$  – константа, не зависящая от  $f$  и  $n$ ,  $\omega(f; \delta)$  – модуль непрерывности функции на  $[a, b]$ .

Это неравенство называется неравенством Джексона или прямой теоремой теории приближения. Данное неравенство справедливо и в периодическом случае.

Н.И.Ахиезер получил подобное неравенство с использованием модуля непрерывности второго порядка [2], а в 1951 году С.Б. Стечкин [3] в периодическом случае еще раз уточнил упомянутый результат, получив неравенство типа неравенств Джексона (1) с модулем гладкости порядка  $k$ :

$$E_n(f) \leq C \omega_k \left( f, \frac{1}{n+1} \right).$$

Здесь  $k$  – целое число,  $k \geq 3$ .

Для классов функций из  $L_p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$  в случае приближения функции целыми функциями экспоненциального типа неравенства типа неравенств Джексона

$$A_\nu(f)_{L_q(\mathbb{R})} \leq C_k \omega_k \left( f, \frac{1}{\nu} \right)_{L_q(\mathbb{R})}$$

были получены в [2], [4]. Здесь  $A_\nu(f)_{L_q(\mathbb{R})}$  – наилучшее приближение функции  $f$  посредством целых функций экспоненциального типа  $\nu$  в метрике пространства  $L_q(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq q \leq +\infty$ , а  $\omega_k \left( f, \frac{1}{\nu} \right)_{L_q(\mathbb{R})}$  – модуль гладкости функции в метрике  $L_q(\mathbb{R})$ .

В 1950 году А.Ф. Тиман и М.Ф. Тиман [4] установили в метрике  $L_q[0, 2\pi)$ ,  $1 \leq q < +\infty$  для периодических функций неравенство:

$$\omega_k \left( f, \frac{1}{n} \right)_{L_q[0, 2\pi)} \leq \frac{c_k}{n_k} \sum_{\nu=0}^n (\nu + 1)^{k-1} E_\nu(f)_{L_q[0, 2\pi)},$$

называемое в последующем обратной теоремой теории приближения. Здесь сомножитель  $c_k > 0$  зависит лишь от порядка модуля гладкости.

В случае  $q = +\infty$  подобный результат был получен в [3]. На случай классов функций из  $L_q(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq q < +\infty$  подобное неравенство перенесено в [5].

Более подробные исторические сведения по данной тематике можно получить в [6] и [7].

В данной работе прямые и обратные теоремы приближения посредством целых функций получены для классов функций из обобщенного пространства типа Морри [8], [9] и определена зависимость скорости приближения от дифференциальных свойств функции.

## 2 Предварительные сведения

Пространства Морри в настоящее время, являясь бурно развивающимся разделом теории функциональных пространств, все больше находят применение в теории дифференциальных уравнений в частных переменных, поэтому исследования конструктивных и структурных свойств функций являются одной из важных задач в теории пространств Морри.

**Определение 1 ([8])** Пусть  $0 < p, \theta \leq +\infty$  и  $w$  – неотрицательная измеримая по Лебегу функция на  $(0, +\infty)$ . Через  $LM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  обозначим локальное пространство типа Морри всех измеримых на  $\mathbb{R}$  функций  $f$  с конечной квази-нормой

$$\|f\|_{LM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \|w(r)\|f\|_{L_p(B(0,r))} \|_{L_\theta(0, \infty)}.$$

А через  $GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  обозначим глобальное пространство типа Морри всех измеримых на  $\mathbb{R}$  функций  $f$  с конечной квази-нормой

$$\|f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \|f(x + \cdot)\|_{LM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \|w(r)\|f\|_{L_p(B(x,r))} \|_{L_\theta(0, \infty)}.$$

Заметим, что если  $w(r) \equiv 1$ , то  $LM_{p\infty, 1}(\mathbb{R}) = GM_{p\infty, 1}(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R})$ . Более того,

$$GM_{p\infty, r^{-\lambda}}(\mathbb{R}) \equiv M_p^\lambda(\mathbb{R}), \quad 0 < p \leq +\infty, \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p},$$

где  $M_p^\lambda(\mathbb{R})$  – классическое пространство Морри.

**Определение 2** Пусть  $0 < p, \theta \leq +\infty$ . Через  $\Omega_\theta$  обозначим множество всех неотрицательных, измеримых на  $(0, +\infty)$  функций  $w$  не равных 0 и таких, что для некоторого  $t > 0$

$$\|w(r)\|_{L_\theta(t, \infty)} < \infty.$$

Через  $\Omega_{p\theta}$  обозначим множество всех неотрицательных, измеримых на  $(0, +\infty)$  функций  $w$  не равных 0 и таких, что для всех  $t > 0$

$$\|w(r)r^{\frac{1}{p}}\|_{L_\theta(0,t)} < \infty, \quad \|w(r)\|_{L_\theta(t,\infty)} < \infty.$$

В работах [10, 11] была доказана следующая лемма.

**Лемма 1** Пусть  $0 < p, \theta \leq +\infty$  и  $w$  – неотрицательная измеримая по Лебегу функция на  $(0, +\infty)$  не равная нулю. Тогда пространство  $LM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  нетривиально, в том смысле что  $LM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R}) \neq \Theta$ , тогда и только тогда, когда  $w \in \Omega_\theta$ , а пространство  $GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  нетривиально тогда и только тогда, когда  $w \in \Omega_{p\theta}$ .

Более того, если  $w \in \Omega_\theta$  и  $\tau = \inf\{s > 0: \|w\|_{L_\theta(s,\infty)} < \infty\}$ , тогда пространство  $LM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  содержит в себе все функции  $f \in L_p$  такие, что  $f = 0$  на  $B(0, t)$  для некоторого  $t > \tau$ . Если же  $w \in \Omega_{p\theta}$ , то

$$L_p \cap L_\infty \subset GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R}).$$

Держа в уме данное утверждение, всегда будем предполагать, что  $w \in \Omega_\theta$  для случая локального пространства типа Морри, и что  $w \in \Omega_{p\theta}$  для случая глобального пространства типа Морри.

Теперь докажем неравенство Минковского для глобальных пространств типа Морри.

**Лемма 2** Пусть  $A \subset \mathbb{R}$  – измеримое множество,  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $w \in \Omega_{p\theta}$ . Предположим, что  $f$  – измеримая функция из  $A \times \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ . Пусть  $f(\cdot, y) \in GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  для почти всех  $y \in A$  и

$$\int_A \|f(\cdot, y)\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} dy < +\infty.$$

Тогда интеграл  $\int_A f(x, y) dy$  имеет смысл для почти всех  $x \in \mathbb{R}$  и имеет место неравенство Минковского для глобальных пространств типа Морри

$$\left\| \int_A f(\cdot, y) dy \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \int_A \|f(\cdot, y)\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} dy.$$

**Доказательство.** Применив неравенство Минковского для лебеговых пространств в  $B(x, r) \times A$  и в  $(0, \infty) \times A$ , получим

$$\begin{aligned} \left\| \int_A f(\cdot, y) dy \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\| w(r) \left\| \int_A f(\cdot, y) dy \right\|_{L_p(B(x, r))} \right\|_{L_\theta(0, \infty)} \leq \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\| w(r) \int_A \|f(\cdot, y)\|_{L_p(B(x, r))} dy \right\|_{L_\theta(0, \infty)} \leq \\ &\leq \int_A \sup_{x \in \mathbb{R}} \|w(r)\|_{L_\theta(0, \infty)} \|f(\cdot, y)\|_{L_p(B(x, r))} dy = \int_A \|f(\cdot, y)\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} dy. \end{aligned}$$

□

**Определение 3** Пусть  $f \in GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$ . Для любого числа  $h \in \mathbb{R}$  определим разность

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть  $k \in \mathbb{N}$  и по индукции определим  $k$ -разность функции

$$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h(\Delta^{k-1} f(x)), \quad \Delta_h^0 f(x) = f(x), \quad \Delta_h^1 = \Delta_h.$$

Известно, что

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k+\nu} c_k^\nu f(x + \nu h).$$

Отсюда элементарным образом следует нужное нам в дальнейшем неравенство

$$\|\Delta_h^k f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq 2^k \|f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \quad (2)$$

Далее нам необходимо будет и следующее соотношение для функции  $f$ , для которой существует  $f^{(r)} \in GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$

$$\|\Delta_h^r f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq |h|^r \|f^{(r)}\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \quad (3)$$

Его доказательство основано на обобщенном неравенстве Минковского и инвариантности квазинормы глобальных пространств типа Морри относительно сдвига

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^r f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} &= \left\| \int_0^h du_1 \dots \int_0^h f^{(r)}(\cdot + u_1 + u_2 + \dots + u_r) du_r \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq \int_0^{|h|} du_1 \dots \int_0^{|h|} \|f^{(r)}(\cdot + u_1 + u_2 + \dots + u_r)\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} du_r = |h|^r \|f^{(r)}\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

**Определение 4** Модулем непрерывности  $k$ -порядка функции  $f$  по норме глобального пространства типа Морри назовем величину

$$\omega_k(f; \delta)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \sup_{|h| \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})},$$

где  $\delta > 0$ .

Из неравенств (2) и (3) вытекают соответственно

$$\omega_k(f; \delta)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq 2^k \|f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \quad (4)$$

если существует  $f^{(r)} \in GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$ , то

$$\omega_r(f; \delta)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \delta^r \|f^{(r)}\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \quad (5)$$

Через  $\mathfrak{M}_{\nu p\theta}^{w(\cdot)}$  обозначим множество целых функций экспоненциального типа  $\nu$ , которые принадлежат пространству  $GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$ ,  $0 < p, \theta \leq +\infty$ ,  $w \in \Omega_{p\theta}$ .

**Определение 5** Через  $A_\nu(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}$  обозначим наилучшее приближение функции  $f$  посредством целых функций экспоненциального типа в  $GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$ , т.е.

$$A_\nu(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \inf \left\{ \|f - g_k\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} : g_k \in \mathfrak{M}_{\nu p\theta}^{w(\cdot)}, 0 \leq k \leq \nu \right\}.$$

### 3 Прямая теорема приближения

**Теорема 1** Пусть  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $w \in \Omega_{p\theta}$ . Пусть для функции  $f \in GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  существует обобщенная производная  $f^{(r)} \in GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Тогда для этой функции при любом фиксированном  $k \in \mathbb{N}$  имеет место следующее неравенство

$$A_\nu(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \frac{c_{prk}}{\nu^r} \omega_k \left( f^{(r)}; \frac{1}{\nu} \right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}.$$

Здесь множитель  $c_{prk} > 0$  зависит лишь от указанных параметров.

**Доказательство.** Пусть  $l = r + k$ . Выберем целую функцию экспоненциального типа 1 так, чтобы она была неотрицательной четной функцией, удовлетворяющей следующим условиям:

$$2 \int_0^{+\infty} g(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} g(|\xi|) d\xi = 1, \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) |t|^l dt < +\infty. \quad (7)$$

Примером такой функции является функция

$$g(z) = \mu \left( \frac{\sin \frac{z}{\lambda}}{z} \right)^\lambda \in \mathfrak{M}_{1,1}.$$

Здесь  $\lambda > (l + 1)$  и является четным числом.

Согласно определению конечной разности имеем

$$\begin{aligned} (-1)^{l+1} \Delta_h^l(f)(x) &= \sum_{s=0}^l (-1)^{s+1} c_l^s f(x + sh) = \\ &= \sum_{s=1}^l (-1)^{s+1} c_l^s f(x + sh) - f(x) = \sum_{s=1}^l d_s f(x + sh) - f(x). \end{aligned}$$

Здесь  $d_s = (-1)^{s+1} c_l^s$ ,  $s = \overline{1, l}$ , к тому же  $\sum_{s=1}^l d_s = 1$ , поскольку  $\sum_{s=0}^l (-1)^{s+1} c_l^s = 0$ .

Теперь для функции  $f \in LM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  рассмотрим конструкцию:

$$\begin{aligned} g_\nu(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \left\{ (-1)^{l+1} \Delta_{\frac{t}{\nu}}^l(f)(x) + f(x) \right\} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \sum_{s=1}^l d_s f \left( x + s \frac{t}{\nu} \right) dt = \end{aligned}$$



$$= \left( u = x + s \frac{t}{\nu}; \quad t = \frac{u-x}{s} \nu; \quad dt = \frac{\nu}{s} du \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_\nu(u-x) f(u) du,$$

где  $R_\nu(u) = \sum_{s=1}^l d_s \frac{\nu}{s} g\left(\frac{\nu|u|}{s}\right)$ .

Мы знаем, что  $R_\nu(z)$  – целая функция экспоненциального типа  $\nu$ .

С учетом (6) будем иметь, что

$$\begin{aligned} \|g_\nu\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \sum_{s=1}^l d_s \left\| f\left(\cdot + s \frac{t}{\nu}\right) \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \|f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} dt = \|f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) dt = \\ &= \|f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} < +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем утверждать, что  $g_\nu \in \mathfrak{M}_{\nu p\theta}^{w(\cdot)}$ .

Рассмотрим разность

$$f(x) - g_\nu(x) = (-1)^l \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \Delta_{\frac{t}{\nu}}^l(f)(x) dt.$$

Тогда, используя свойство модуля гладкости  $\omega_k(\varphi; \alpha\delta)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq (1 + \alpha)^k \omega_k(\varphi, \delta)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}$ ,  $\alpha > 0$ , получим

$$\begin{aligned} A_\nu(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} &\leq \|f - g_\nu\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \Delta_{\frac{t}{\nu}}^l f(\cdot) dt \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \left\| \Delta_{\frac{t}{\nu}}^l(f) \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) \left(\frac{|t|}{\nu}\right)^r \left\| \Delta_{\frac{t}{\nu}}^k f^{(r)} \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\nu^r} \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) |t|^r \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{|t|}{\nu}\right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} dt \leq \\ &\leq \frac{\omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{\nu}\right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}}{\nu^r} \int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) |t|^r (1 + |t|)^k dt. \end{aligned}$$

Согласно построению функции  $g_\nu(x)$ , можно утверждать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(|t|) |t|^r (1 + |t|)^k dt = c_{kr} < +\infty.$$

Таким образом,

$$A_\nu(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \frac{c_{kr}}{\nu^r} \omega_k \left( f^{(r)}; \frac{1}{\nu} \right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}.$$

□

#### 4 Обратная теорема приближения

**Лемма 3** Для любой целой функции  $g_\nu \in \mathfrak{M}_{\nu p\theta}^{w(\cdot)}(\mathbb{R})$  справедлив аналог неравенства Бернштейна

$$\|g'_\nu\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \nu \|g_\nu\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}.$$

**Доказательство.** Для целых функций экспоненциального типа  $g_\nu \in \mathfrak{M}_{\nu p\theta}^{w(\cdot)}(\mathbb{R})$  справедлива следующая интерполяционная формула

$$g'_\nu(x) = \nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(\pi/2 - k\pi)^2} g_\nu \left( \frac{k\pi - \pi/2}{\nu} + x \right),$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ . Тогда для всех  $x \in \mathbb{R}$  и  $\forall r > 0$  имеем

$$\begin{aligned} \|g'_\nu\|_{L_p(B(x,r))} &\leq \nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - k\pi)^2} \left\| g_\nu \left( \frac{k\pi - \frac{\pi}{2}}{\nu} + \cdot \right) \right\|_{L_p(B(x,r))} \leq \\ &\leq \nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - k\pi)^2} \|g_\nu\|_{L_p\left(B\left(x + \frac{k\pi - \frac{\pi}{2}}{\nu}, r\right)\right)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|g'_\nu\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \|w(r) \|g'_\nu\|_{L_p(B(x,r))}\|_{L_\theta(0, \infty)} \leq \\ &\leq \nu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - k\pi)^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\| w(r) \|g_\nu\|_{L_p\left(B\left(x + \frac{k\pi - \frac{\pi}{2}}{\nu}, r\right)\right)} \right\|_{L_\theta(0, \infty)} \leq \\ &\leq \nu \sup_{z \in \mathbb{R}} \|w(r) \|g_\nu\|_{L_p(B(z,r))}\|_{L_\theta(0, \infty)} = \nu \|g_\nu\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

□

**Теорема 2** Пусть  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $w \in \Omega_{p\theta}$ . Тогда для любого фиксированного  $k \in \mathbb{N}$  существует константа  $c_{p\nu k} > 0$  такая, что для любой функции  $f \in GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  и  $\forall n \in \mathbb{N}$  справедливо неравенство

$$\omega_k \left( f; \frac{1}{n} \right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \frac{c_{p\nu k}}{n^k} \left\{ \sum_{s=0}^n (s+1)^{k-1} A_s(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right\}.$$

Здесь  $c_{p\nu k} > 0$  зависит лишь от указанных параметров.

**Доказательство.** Пусть  $\{g_\nu(x)\}_{\nu=0}^{+\infty}$  – последовательность целых функций экспоненциального типа из  $\mathfrak{M}_{p\theta}^{w(\cdot)}(\mathbb{R})$  наилучшего приближения функции  $f \in GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  по норме этого пространства, т.е.:

$$A_\nu(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \|f - g_\nu\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}, \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^+,$$

$$A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \|f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}.$$

Произвольным образом берем  $n \in \mathbb{N}$  и  $\nu \in \mathbb{N}$  так, чтобы  $2^\nu \leq n < 2^{\nu+1}$ . Пусть  $k \in \mathbb{N}$  – фиксированное число. Тогда

$$\begin{aligned} \omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} &= \omega_k\left(f - g_{2^{\nu+1}} + g_{2^{\nu+1}}; \frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq \omega_k\left(f - g_{2^{\nu+1}}; \frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \omega_k\left(g_{2^{\nu+1}}; \frac{1}{n}\right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq \left[ \omega_k(\varphi, \delta)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq 2^k \|f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}, \quad \omega_k(\varphi, \delta)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \delta^r \|f^{(r)}\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right] \leq \\ &\leq 2^k \|f - g_{2^{\nu+1}}\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \frac{1}{n^k} \left\| g_{2^{\nu+1}}^{(k)} \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (8)$$

Нам в дальнейшем понадобится равенство:

$$g_{2^{\nu+1}}^{(k)}(x) = g_1^{(k)}(x) + \sum_{s=0}^{\nu} \left( g_{2^{s+1}}^{(k)}(x) - g_{2^s}^{(k)}(x) \right).$$

Так как  $g_0(x) \equiv \text{const}$  на  $\mathbb{R}$ , то

$$g_{2^{\nu+1}}^{(k)}(x) = (g_1(x) - g_0(x))^{(k)} + \sum_{s=0}^{\nu} (g_{2^{s+1}}(x) - g_{2^s}(x))^{(k)}.$$

Далее, применяя неравенство Бернштейна в  $GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})$  для целых функций и учитывая свойство монотонности последовательности  $\{A_\nu(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}\}$ , имеем

$$\begin{aligned} \left\| g_{2^{\nu+1}}^{(k)} \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} &\leq \left\| (g_1 - g_0)^{(k)} \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu} \left\| (g_{2^{s+1}} - g_{2^s})^{(k)} \right\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq 1^k \|g_1 - g_0\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)k} \|g_{2^{s+1}} - g_{2^s}\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq \|g_1 - f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \|f - g_0\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \\ &+ \sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)k} \left( \|g_{2^{s+1}} - f\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \|f - g_{2^s}\|_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right) = \\ &= A_1(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)k} \left( A_{2^{s+1}}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right) \leq \\
& \leq 2A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)k} 2A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} = \\
& = 2 \left\{ A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)k} A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right\}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Теперь из неравенств (8) и (9) следует, что

$$\begin{aligned}
& \omega_k \left( f; \frac{1}{n} \right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq 2^k A_{2^{\nu+1}}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \\
& + \frac{2}{n^k} \left\{ A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{(s+1)k} A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right\} \leq \\
& \leq \frac{2^{k+1}}{n^k} \left( n^k A_{2^{\nu+1}}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk} A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right) \leq \\
& \leq \frac{2^{k+1}}{n^k} \left( A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + 2^{(\nu+1)k} A_{2^{\nu}}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk} A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right) \leq \\
& \leq \frac{2^{2k+1}}{n^k} \left( A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + 2^{\nu k} A_{2^{\nu}}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk} A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right) \leq \\
& \leq \frac{2^{2k+1}}{n^k} \left( A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + 2 \sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk} A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right) \leq \\
& \leq \frac{2^{2k+2}}{n^k} \left( A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk} A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right) = \\
& = \frac{B_{p\lambda k}}{n^k} \left( A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=0}^{\nu} 2^{sk} A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right). \tag{10}
\end{aligned}$$

Так как  $A_{\nu}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \downarrow 0$  при  $\nu \rightarrow +\infty$ , то

$$2^{sk} A_{2^s}(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq 2^k \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} l^{k-1} A_l(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})}, \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

В силу этого факта, (10) продолжим следующим образом:

$$\omega_k \left( f; \frac{1}{n} \right)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \leq \frac{B_{p\lambda k}}{n^k} \left( A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + A_1(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{s=1}^{\nu} 2^k \sum_{l=2^{s-1}+1}^{2^s} l^{k-1} A_l(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \Big) \leq \\
& \leq \frac{C_{p\lambda k}}{n^k} \left( A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + A_1(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{l=2}^{2^\nu} l^{k-1} A_l(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right) \leq \\
& \leq \frac{C_{p\lambda k}}{n^k} \left( A_0(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + 1^{k-1} A_1(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} + \sum_{l=2}^n l^{k-1} A_l(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right) \leq \\
& \leq \frac{C_{p\lambda k}}{n^k} \left( \sum_{l=0}^n (l+1)^{k-1} A_l(f)_{GM_{p\theta, w(\cdot)}(\mathbb{R})} \right).
\end{aligned}$$

□

## 5 Заключение

Для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) доказаны неравенство Бернштейна, прямая теорема Джексона теории приближения и обратная теорема приближения ц.ф.э.т. в метрике глобального пространства типа Морри и показана зависимость от скорости стремления к нулю наилучших приближений ц.ф.э.т. по метрике глобального пространства типа Морри структурных и дифференциальных свойств элементов глобального пространства типа Морри.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научных исследований Комитетом науки МОН РК (проект N 1777/ГФ4 МОН РК).

## Литература

- [1] Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung: Dissertation. – Göttingen, 1911.
- [2] Ахизер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 323 с.
- [3] Стечкин С.Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – N 15(3). – С. 219-242.
- [4] Тиман А.Ф., Тиман М.Ф. Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем // Докл. АН СССР. – 1950. – Т. 71. – С. 17-20.
- [5] Тиман А.Ф., Тиман М.Ф. О зависимости между модулями гладкости функций, заданных на всей вещественной оси // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 113, N 5. – С. 995-997.
- [6] Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 624 с.
- [7] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1977. – 455 с.
- [8] Burenkov V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I // Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – N 3(3). – P. 11-32.
- [9] Burenkov V.I. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – N 4(1). – P. 21-45.
- [10] Burenkov V.I., Guliyev H.V. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces // Stud. Math. – 2004. – N 163(2). – P. 157-176.

- [11] *Burenkov V.I. , Jain P., Tararykova T.V.* On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal. – 2011. – N 2(1). – P. 52-80.

## References

- [1] *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung: Dissertation. – Göttingen, 1911.
- [2] *Akhiezer N.I.* Theory of approximation. – Dover Publications, 1992. – 307 p.
- [3] *Stechkin S.B.* On the Order of the Best Approximations of Continuous Functions // Izv. AN SSSR, Ser. Mat. – 1951. – N 15(3). – P. 219-242.
- [4] *Timan A.F., Timan M.F.* Generalized modulus of continuity and best approximation in the mean // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1950. – Vol. 71. – P.17-20.
- [5] *Timan A.F., Timan M.F.* On the relation between the moduli of smoothness of functions defined on the whole real axis // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1957. – Vol. 113, N 5. – P. 995-997.
- [6] *Timan A.F.* Theory of approximation of functions of a real variable. – Dover Publications, 1994. – 643 p.
- [7] *Nikol'skii S.M.* Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1975. – 420 p.
- [8] *Burenkov V.I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I // Eurasian Mathematical Journal. – 2012. – N 3(3). – P. 11-32.
- [9] *Burenkov V.I.* Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. –N 4(1). – P. 21-45.
- [10] *Burenkov V.I. , Guliyev H.V.* Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces // Stud. Math. – 2004. –N 163(2). – P. 157-176.
- [11] *Burenkov V.I. , Jain P., Tararykova T.V.* On boundedness of the Hardy operator in Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal. – 2011. – N 2(1). – P. 52-80.

UDC 517.938

Mirzakulova A. E., Aldazharova M.M., Moldabek Zh.T., Aldibekov T.M\*.

Kazakh National University after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan

\* E-mail: tamash59@mail.ru

**Generalized singular exponents linear system of differential equations \***

Consider a finite-dimensional linear homogeneous system of differential equations with continuous bounded coefficients in an infinite interval in critical cases of singular exponents. We introduce generalized singular upper and generalized singular lower exponents of the finite-dimensional linear homogeneous system of differential equations with continuous and tending to zero coefficients in an infinite interval. Formulas for calculating the generalized upper and generalized lower singular exponents of the linear homogeneous system of differential equations with continuous and tending to zero coefficients in an infinite interval were found. Introduced the asymptotic characteristics of linear homogeneous systems of differential equations are used for researches of nonlinear systems of differential equations. With the first approximation method investigated non-linear system of differential equations and uniform upper bounds of solutions of nonlinear differential equations in a defined class of nonlinear differential systems were established. We found sufficient conditions for asymptotic stability of the zero solution of the nonlinear system of differential equations. The generalized exponential stability of the zero solution of the nonlinear system of differential equations was established.

**Key words:** linear differential systems, singular exponents, nonlinear differential systems, stability, asymptotic stability

Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М., Молдабек Ж.Т., Алдибеков Т.М.

**Обобщенные особые показатели линейной системы дифференциальных уравнений**

Рассматривается конечномерная линейная однородная система дифференциальных уравнений с непрерывными ограниченными коэффициентами на бесконечном промежутке в критических случаях особых показателей. Вводятся обобщенное особое верхнее и обобщенное особое нижнее показатели конечномерной линейной однородной системы дифференциальных уравнений с непрерывными, со стремящейся к нулю коэффициентами на бесконечном промежутке. Найдены формулы для вычисления обобщенной верхней и обобщенной нижней особых показателей линейной однородной системы дифференциальных уравнений с непрерывными и со стремящимися к нулю коэффициентами на бесконечном промежутке. Введенные асимптотические характеристики линейной однородной системы дифференциальных уравнений применяются для исследования нелинейной системы дифференциальных уравнений. Методом первого приближения исследована нелинейная система дифференциальных уравнений и установлена равномерная оценка сверху решений нелинейной системы дифференциальных уравнений в определенном классе нелинейных дифференциальных систем. Найдено достаточное условие асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. Приведен обобщенная экспоненциальная устойчивость нулевого решения нелинейной системы дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** линейные дифференциальные системы, особые показатели, нелинейные дифференциальные системы, устойчивость, асимптотическая устойчивость

---

\*This work was supported by funding of the program in G2015.

Мирзакулова А.Е., Алдажарова М.М., Молдабек Ж.Т., Әлдибеков Т.М.

**Сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесінің  
жалпылама ерекше көрсеткіштері**

Коэффициенттері үзіліссіз шенелген ақырлы өлшемді сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің ақырсыз аралықта ерекше көрсеткіштері сыни жағдайларда қарастырылады. Коэффициенттері үзіліссіз, нөлге ұмтылатын ақырлы өлшемді сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің ақырсыз аралықта жалпылама ерекше жоғарғы және жалпылама ерекше төменгі ерекше көрсеткіштері ендіріледі. Коэффициенттері үзіліссіз және нөлге ұмтылатын сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің ақырсыз аралықта жалпылама ерекше жоғарғы және жалпылама ерекше төменгі ерекше көрсеткіштерін есептеудің формулалары табылған. Келтірілген сызықты біртекті дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің асимптотикалық сипаттауыштары сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйелерін зерттегенде қолданылады. Сызықты емес дифференциалдық жүйелердің анықталған класында бірінші жуықтау әдісімен сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімдерінің жоғарыдан бірқалыпты бағалауы орнатылған және сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйелері зерттелген. Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімінің асимптотикалық орнықтылығының жеткілікті шарты табылған. Сызықты емес дифференциалдық теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімінің жалпылама экспоненциалдық орнықтылығының белгісі келтірілген.

**Түйін сөздер:** сызықты дифференциалдық жүйелер, ерекше көрсеткіштер, сызықты емес дифференциалдық жүйелер, орнықтылық, асимптотикалық орнықтылық

## 1 Introduction

The upper and lower singular exponents of the differential system introduced in the works [1, 2]. History of the discovery of these important asymptotic characteristics is contained in [3]. Detailed information about singular exponents of a homogeneous system of linear differential equations with bounded continuous coefficients is contained in the book [4] and review in [5]. In this paper, singular exponents of the differential system is investigated in critical cases, i.e., for zero values of these characteristics. Definition of generalized exponential stability of the zero solution of the nonlinear system of differential equations is given in [6]. The work is closely related with the work [7].

## 2 Linear system of differential equations

Consider linear homogeneous system of differential equations

$$\dot{x} = A(t)x, x \in R^n, t \geq t_0 \quad (1)$$

where  $A(t)$  is a continuous matrix and satisfies the condition

$$\|A(t)\| \leq C_A \varphi(t), t \geq t_0, \quad (2)$$

where  $C_A$  is a constant depending on the choice of matrix  $A$ ,  $\varphi(t)$  is a positive continuous function on the interval  $[t_0, +\infty)$  and these function such, that,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0 \text{ and integral } I(\varphi) = \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(s) ds \text{ are diverges.}$$



Denote by

$$q(t) = \int_{t_0}^t \varphi(s) ds. \quad (3)$$

Definition 1. Constants  $n(q)$  and  $N(q)$  are called respectively generalized lower and generalized upper exponents with respect to  $q$  for system (1) with condition (2), if for any  $\varepsilon > 0$ , for all nonzero solutions  $x(t)$  of the system (1) is performed the estimation

$$d_{n,\varepsilon} \exp\{(n(q) - \varepsilon)q(t)\} \leq \frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} \leq D_{N,\varepsilon} \exp\{(N(q) + \varepsilon)q(t)\} \quad (4)$$

for all  $t \geq s \geq t_0$ , where  $D_{N,\varepsilon}$   $d_{n,\varepsilon}$  are constants, depending on the choice of  $N(q)$ ,  $n(q)$   $\varepsilon > 0$  and function  $q(t)$  defined by the formula (3).

The set  $\{N(q)\}$  generalized upper constants of the system (1) is called upper class of the system with respect to  $q$  and denoted by the symbol  $B_0(A, q)$ .

The set  $\{n(q)\}$  generalized lower constants of the system (1) is called lower class of the system (1) with respect to  $q$  and denoted by the symbol  $H_0(A, q)$ .

Definition 2. Number

$$\Omega_0(A, q) = \inf_{N(q) \in B_0(A, q)} N(q) \quad (5)$$

is called a generalized upper singular exponent of the system (1) with respect to  $q$ .

Number

$$\omega_0(A, q) = \sup_{n(q) \in H_0(A, q)} n(q) \quad (6)$$

is called a generalized lower singular exponent of the system (1) with respect to  $q$ .

From definition 1 it follows, that is valid the inequality

$$\omega_0(A, q) \leq \Omega_0(A, q) \quad (7)$$

Remark 1. If we consider linear system (1) with continuous bounded coefficients without the condition (2) and  $q(t) = t$ , then the generalized singular exponents will convert to numbers, entered by Bohl-Persidskii.

Note, that for any  $\varepsilon > 0$  exist  $D_\varepsilon > 0$  and  $d_\varepsilon > 0$  and for Cauchy matrix of the linear system (1) with the condition (2) are valid the inequalities

$$\|X(t, t_0)\| \leq D_\varepsilon e^{(\Omega_0(A, q) + \varepsilon)(q(t) - q(t_0))} \quad (8)$$

and

$$d_\varepsilon e^{(\omega_0(A, q) - \varepsilon)(q(t) - q(t_0))} \leq \|X(t, t_0)\| \quad (9)$$

for all  $t \geq t_0$ .

Remark 2. Singular exponents of Bohl and Persidskii of the system (1) satisfying the condition (2) are equal to zero, i.e., occurs critical cases.

Lemma 1. Generalized upper singular exponent of the system (1) with respect to  $q$ , satisfying the condition (2) defined by the formula

$$\Omega_0(A, q) = \overline{\lim}_{t-s \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|X(t, s)\|}{q(t) - q(s)}.$$

Proof. From the inequality (8) follows, that for any  $\varepsilon > 0$  for all  $t \geq s \geq t_0$  is valid the inequality

$$\frac{\ln \|X(t, s)\|}{q(t) - q(s)} \leq \frac{\ln D_\varepsilon}{q(t) - q(s)} + \Omega_0(A, q) + \varepsilon \quad (10)$$

Consequently, take place the inequality

$$\exists \mu \equiv \overline{\lim}_{t-s \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|X(t, s)\|}{q(t) - q(s)} \leq \Omega_0(A, q) + \varepsilon$$

Hence, turn to  $\varepsilon \rightarrow 0$  we obtain the inequality

$$\mu \leq \Omega_0(A, q) \quad (11)$$

We will prove that take place and the converse inequality. Such that

$$\mu = \overline{\lim}_{t-s \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|X(t, s)\|}{q(t) - q(s)}$$

then, for any  $\varepsilon > 0$  exists  $\bar{t} - \bar{s} \geq 0$  and for all  $t - s > \bar{t} - \bar{s} \geq 0$  is valid the inequality

$$\frac{\ln \|X(t, s)\|}{q(t) - q(s)} \leq \mu + \varepsilon.$$

It follows that,

$$\|X(t, s)\| \leq e^{(\mu+\varepsilon)(q(t)-q(s))}$$

In respect that the segment  $[t_0, \bar{t}]$ , we obtain, that for  $\varepsilon > 0$  exist  $\bar{D}_\varepsilon > 0$  and for Cauchy matrix of the linear system (1) with the condition (2) is valid the inequality

$$\|X(t, s)\| \leq \bar{D}_\varepsilon e^{(\mu+\varepsilon)(q(t)-q(s))}$$

for all  $t \geq s \geq t_0$  Such number  $\Omega_0(A, q)$  is a infimum of numbers performing such estimation, then occurs the inequality

$$\Omega_0(A, q) \leq \mu \quad (12)$$

Combining the inequalities (11), (12) we obtain the required assertion. Lemma 1 is proved.

Lemma 2. Generalized lower singular exponent of the system (1) with respect to  $q$ , satisfying the condition (2) is defined by the formula

$$\omega_0(A, q) = \underline{\lim}_{t-s \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|X(t, s)\|}{q(t) - q(s)}.$$

Proof. From the inequality (9) follows, that for any  $\varepsilon > 0$  for all  $t \geq s \geq t_0$  is valid the inequality

$$\frac{\ln d_\varepsilon}{q(t) - q(s)} + \omega_0(A, q) - \varepsilon \leq \frac{\ln \|X(t, s)\|}{q(t) - q(s)}$$

Consequently, take place the inequality

$$\exists \gamma \equiv \varliminf_{t-s \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|X(t, s)\|}{q(t) - q(s)} \geq \omega_0(A, q) - \varepsilon$$

Hence, turn to  $\varepsilon \rightarrow 0$  we obtain the inequality

$$\omega_0(A, q) \leq \gamma \tag{13}$$

We will prove that take place and the converse inequality. Such that

$$\gamma = \varliminf_{t-s \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|X(t, s)\|}{q(t) - q(s)}$$

then, for any  $\varepsilon > 0$  exists  $\bar{t} - \bar{s} \geq 0$  and for all  $t - s > \bar{t} - \bar{s} \geq 0$  is valid the inequality

$$\frac{\ln \|X(t, s)\|}{q(t) - q(s)} \geq \gamma - \varepsilon.$$

or

$$\|X(t, s)\| \geq e^{(\gamma - \varepsilon)(q(t) - q(s))},$$

for all  $t - s > \bar{t} - \bar{s} \geq 0$  In respect that the segment  $[t_0, \bar{t}]$ , we obtain, that for  $\varepsilon > 0$  exist  $\bar{d}_\varepsilon > 0$  and for Cauchy matrix of the linear system (1) with the condition (2) is valid the inequality

$$\|X(t, s)\| \geq \bar{d}_\varepsilon e^{(\gamma - \varepsilon)(q(t) - q(s))}$$

for all  $t \geq s \geq t_0$  Such number  $\omega_0(A, q)$  is a supremum of numbers performing such estimation, then take place the inequality

$$\omega_0(A, q) \geq \gamma \tag{14}$$

Combining the inequalities (13), (14) we obtain the required assertion. Lemma 2 is proved.

Lemma 3. Equality

$$\Omega_0(A, q) = -\omega_0(A, q)$$

holds if and only if

$$\{N(q)\} = -\{n(q)\}$$

Proof. From the inequality (4) follows, that for any  $\varepsilon > 0$ , for all nonzero solutions  $x(t)$  of the system (1) occurs the inequality

$$\begin{aligned} d_{n,\varepsilon} \exp\{(-N(q) - \varepsilon)q(t)\} &\leq \frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} \exp\{(-1)(N(q) + n(q))q(t)\} \leq \\ &\leq D_{N,\varepsilon} \exp\{(-n(q) + \varepsilon)q(t)\} \end{aligned}$$

Hence, using definition of the generalized singular exponents, we obtain the required assertion. Lemma 3 is proved.

### 3 Nonlinear system of differential equations

Consider nonlinear system of differential equations

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), x \in R^n, t \in I \equiv [t_0, +\infty), \quad (15)$$

where  $A(t)$  is a continuous matrix for  $t \geq t_0$  and satisfy the condition (2),  $f(t, x)$  is a continuous vector function in the domain  $G = I \times R^n$  and  $f(t, 0) = 0$ .

Denote by  $L(\varphi(t))$  class of vector function  $f(t, x)$  satisfying the inequality

$$\|f(t, x)\| \leq \delta(t)\|x\|, \quad (16)$$

where  $\delta(t)$  is a continuous perturbation norm for  $t \geq t_0$  and satisfy the condition

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\delta(t)}{\varphi(t)} = 0. \quad (17)$$

Theorem 1. If a nonlinear system (15), first approximation of the system (1) satisfy the condition (2) and perturbation  $f(t, x) \in L(\varphi(t))$ , then for any  $\varepsilon > 0$  exist  $D_\varepsilon > 0$  such, that uniformly for all nonzero solutions of the system (15) are valid the inequality

$$\|x(t)\| \leq D_\varepsilon \|x(t_0)\| e^{(\Omega_0(A, q) + \varepsilon)(q(t) - q(t_0))} \quad (18)$$

for all  $t \geq t_0$ .

Proof. As is well known solutions of the perturbed system (15) satisfy the equation

$$x(t) = X(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t X(t, s)f(s, x(s))ds. \quad (19)$$

We fix  $\varepsilon > 0$ . From (8) follows the inequality

$$\|X(t, t_0)\| \leq D_{\varepsilon_1} e^{(\Omega_0(A, q) + \varepsilon_1)(q(t) - q(t_0))} \quad (20)$$

where

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}, \quad D_{\varepsilon_1} > 0.$$

Using (16) and (20) estimating the norm (19) we obtain the inequality

$$\|x(t)\| \leq D_{\varepsilon_1} e^{(\Omega_0(A, q) + \varepsilon_1)(q(t) - q(t_0))} \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t D_{\varepsilon_1} e^{(\Omega_0(A, q) + \varepsilon_1)(q(t) - q(s))} \delta(s) \|x(s)\| ds \quad (21)$$

for all  $t \geq s \geq t_0$ .

From (21) follows the following inequality

$$y(t) \leq D_{\varepsilon_1} \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t D_{\varepsilon_1} \delta(s) y(s) ds \quad (22)$$

where

$$y(t) = \|x(t)\| e^{-(\Omega_0(A,q)+\varepsilon_1)(q(t)-q(t_0))}.$$

From (22) we obtain, that

$$y(t) \leq D_{\varepsilon_1} \|x(t_0)\| e^{\int_{t_0}^t D_{\varepsilon_1} \delta(\tau) d\tau}$$

or

$$\|x(t)\| \leq D_{\varepsilon_1} \|x(t_0)\| e^{(\Omega_0(A,q)+\varepsilon_1)(q(t)-q(t_0))+\int_{t_0}^t D_{\varepsilon_1} \delta(\tau) d\tau}.$$

Consequently, by virtue of (3) follows, that

$$\|x(t)\| \leq D_{\varepsilon_1} \|x(t_0)\| e^{(\Omega_0(A,q)+\varepsilon_1)(q(t)-q(t_0))+\int_{t_0}^t D_{\varepsilon_1} \frac{\delta(\tau)}{\varphi(\tau)} dq(\tau)}. \quad (23)$$

From the condition (17) follows, that exist such  $T \geq t_0$ , that for all  $t \geq T \geq t_0$  have place the inequality

$$D_{\varepsilon_1} \frac{\delta(t)}{\varphi(t)} < \varepsilon_1.$$

Then from (23) we obtain the following inequality

$$\|x(t)\| \leq D_{\varepsilon_1} \overline{D}_{\varepsilon} \|x(t_0)\| e^{(\Omega_0(A,q)+2\varepsilon_1)(q(t)-q(t_0))},$$

where

$$\overline{D}_{\varepsilon} = \frac{\exp(\int_{t_0}^T D_{\varepsilon_1} \delta(\tau) d\tau)}{\exp(\varepsilon_1(q(T) - q(t_0)))}.$$

Now supposing  $D_{\varepsilon} \equiv D_{\varepsilon_1} \overline{D}_{\varepsilon}$  and considering, that  $2\varepsilon_1 < \varepsilon$  we obtain, that for all nonzero solutions of the system (15) uniformly the inequality (18) for all  $t \geq t_0$ . Theorem 1 is proved.

Note, that generalized upper singular exponent with respect to  $q$ , is stable up of a asymptotic characteristic linear system (1) with the condition (2) in the class  $L(\varphi(t))$ . The following assertion holds.

**Theorem 2.** If a linear system (1) with the condition (2) have negative generalized upper singular exponent with respect to  $q$ , then zero solution of the nonlinear system (15) asymptotically Lyapunov stable as  $t \rightarrow +\infty$ , where perturbation  $f(t, x) \in L(\varphi(t))$ .

*Proof.* In fact, for all nonzero solutions of the system (15) is valid uniformly the inequality (18) for all  $t \geq t_0$  and linear system (1) with the condition (2) have negative generalized upper singular exponent with respect to  $q$ , hence follows assertion. Theorem 2 is proved.

Such (18) means by the definition exponential stability with respect to  $q$ , as  $t \rightarrow +\infty$ , zero solution of nonlinear system (15) then we have the following statement to clarify Theorem 2.

**Theorem 3.** If linear system (1) with the condition (2) have negative generalized upper singular exponent with respect to  $q$ , then zero solution of nonlinear system (15) exponential stable with respect to  $q$ , as  $t \rightarrow +\infty$ .

*Example.* Consider the differential equation

$$\dot{x} = \frac{\sin t - 2}{t}x + f(t, x), \quad x \in R$$

where  $f(t, x)$  is a continuous function in  $t \geq t_0 \geq 1$  and continuously differentiable with  $x$  function such, that  $f(t, 0) = 0$ .

Equation of the first approximation

$$\dot{x} = \frac{\sin t - 2}{t}x + f(t, x)$$

has generalized upper singular exponent

$$\Omega_0(q) = -1, \quad q(t) = \ln t, \quad t \geq t_0 \geq 1.$$

Therefore, when the following condition is satisfied

$$|f(t, x)| \leq \delta(t)|x|, \quad t\delta(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty$$

zero solution of the nonlinear differential equation is asymptotically Lyapunov stable as  $t \rightarrow +\infty$ .

## 4 Conclusion

Defined the upper and lower generalized singular exponents of linear systems of differential equations in critical cases of singular exponents. Established the uniform upper bound for solutions of nonlinear system of differential equations in a defined class of nonlinear differential systems. We found a sufficient condition for the asymptotic stability of the zero solution of the nonlinear system of differential equations. The generalized exponential stability of the zero solution of the nonlinear system of differential equations was established.

## References

- [1] *Bohl P.* Uber Differentialgleichungen // J. Reine und angew. Math. – 1913. –B. 144. – p. 284-318.
- [2] *Persidskii K.P.* On the stability of motion in the first approximation // Mathematical collection. - 1933. - V. 40, №3. – p. 284-292.(in Russian)
- [3] *Daletskii Y.L., Krein M.G.* Stability of solutions of differential equations in a Banach space. - M., Nauka, 1970. – 536 p. (in Russian)
- [4] *Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V.* The theory of Lyapunov exponents and its application to stability issues. - M., 1966.- 576 p. (in Russian)
- [5] *Izobov N.A.* Linear systems of ordinary differential equations // Mathematical analysis. The results of science and technology. - 1974. – Vol. 12. – p. 71-146. (in Russian)
- [6] *T.M. Aldibekov, M.M. Aldazharova.* On the Stability by the First Approximation of Lyapunov Characteristic Exponents in Critical Cases // Differential Equations, 2014.– Vol. 50, No. 10.– p. 1-5
- [7] *T.M. Aldibekov, A.E.Mirzakulova, M.M. Aldazharova* About stable asymptotic characteristics of differential systems // KazNU Bulletin, ser. math., mech., inf. - 2015. - № 2(85). - S.33-41. (in Russian)

УДК 517.956.6

Садыбеков М.А.<sup>1\*</sup>, Дилдабек Г.<sup>2\*\*</sup>, Тенгаева А.А.<sup>3\*\*\*</sup><sup>1</sup>Институт математики и математического моделирования, Республика Казахстан, г. Алматы<sup>2</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы<sup>3</sup>Казахский национальный аграрный университет, Республика Казахстан, г. Алматы

E-mail: \*sadybekov@math.kz, \*\*dildabek.g@gmail.com, \*\*\*ajjan0973@mail.ru

### О новой нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа

В настоящей работе сформулирована новая нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа. Рассматривается уравнение парабола-гиперболического типа. Его относят к первому роду потому, что линия изменения типа не является характеристикой уравнения. Нелокальное условие связывает между собой точки на границах параболической части области и гиперболической части области. Эта задача является обобщением хорошо известных задач типа Франкля. При ее решении возникает краевая задача для уравнения теплопроводности с условиями типа Самарского-Ионкина. В отличие от имеющихся публикаций других авторов, близких по тематике, необходимо отметить, что в этих работах нелокальные задачи рассматривались в прямоугольных областях. В нашей же постановке задачи гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником. Сформулированная задача эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Доказана однозначная сильная разрешимость сформулированной задачи.

**Ключевые слова:** нелокальные граничные условия, уравнение парабола-гиперболического типа, функция Грина, сильное решение.

Sadybekov M.A., Dildabek G., Tengayeva A.A.

#### On a new nonlocal boundary value problem for an equation of the mixed parabolic-hyperbolic type

In the present work a new nonlocal boundary value problem for an equation of the mixed type is formulated. This equation is parabolic-hyperbolic and belongs to the first kind because the line of type change is not a characteristic of the equation. Nonlocal condition links points on boundaries of the parabolic and hyperbolic parts of the domain with each other. This problem is generalization of the well-known problems of Frankl type. A boundary value problem for the heat equation with conditions of the Samarskii-Ionkin type arises in solving this problem. Unlike the existing publications of the other authors related to the theme it is necessary to note that in this papers nonlocal problems were considered in rectangular domains. But in our formulation of the problem the hyperbolic part of the domain coincides with a characteristic triangle. The formulated problem is equivalently reduced to an integral Volterra equation of the second kind. Unique strong solvability of the formulated problem is proved.

**Key words:** nonlocal boundary conditions; equation of the parabolic-hyperbolic type; Green's function; strong solution.

Садыбеков М.А., Дилдабек Г., Тенгаева А.А.  
**Парабола-гипербола типті аралас теңдеу үшін  
жаңа бейлокал шеттік есеп туралы**

Бұл жұмыста аралас типті теңдеу үшін жаңа бейлокал шеттік есеп қойылған. Парабола-гипербола типті теңдеу қарастырылған. Теңдеу бірінші текті теңдеуге жатады, өйткені типтің өзгеру сызығы характеристикалық сызық болып табылмайды. Бейлокалдың шарты облыстың параболалық және гиперболалық бөліктері шекараларының нүктелерін өзара байланыстырады. Бұл есеп белгілі Франкль тектес есептердің жалпыламасы болып табылады. Оны шешу кезінде жылутаралу теңдеуі үшін Самарский-Ионкин типті шартпен берілген шеттік есеп пайда болады. Өзге авторлардың мақаланың тақырыбына ұқсас белгілі зерттеулерінен айырмашылығы, ол жұмыстарда бейлокал есеп тіктөртбұрышты облыстарда қарастырылғандығы болып табылады. Біздің қарастыратын есепте облыстың гиперболалық бөлігі характеристикалық үшбұрышпен сәйкес келеді. Қарастырылған есеп эквивалентті екінші түрдегі Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтіріледі. Есептің бірімәнді әлді шешілімділігі дәлелденеді.

**Түйін сөздер:** бейлокал шекаралық шарт, парабола-гипербола типті теңдеу, Грин функциясы, әлді шешім.

## 1 Введение

Теория уравнений смешанного типа является одним из центральных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это связано с выявлением множества прикладных задач, математическое моделирование которых обуславливает изучение различных типов уравнений в рассматриваемой области изменения независимых переменных.

Проблемам теории краевых задач для уравнений смешанного типа посвящены многочисленные работы авторов из ближнего и дальнего зарубежья. Достаточно полный обзор полученных результатов содержится в книгах А.В. Бицадзе, Л. Берса, М.М. Смирнова, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, Т.Ш. Кальменова.

Впервые на важность изучения уравнений смешанного типа указал С.А. Чаплыгин в 1902 году в своей работе "О газовых струях". Начало же исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в 20 - 30 годы прошлого века работами Ф. Трикоми, С. Геллерстедта. Новым толчком в развитии этой теории послужили работы М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, Ф.И. Франкля, К.И. Бабенко, где наряду с теоретическими исследованиями ряда существенных вопросов этой теории была указана и их практическая значимость. В большинстве своем, это были работы, посвященные теоретическим и прикладным аспектам уравнений смешанного эллиптического - гиперболического типа. Исследование уравнений параболо - гиперболического типа получило бурное развитие сравнительно недавно. Особый интерес эти задачи представляют в связи с их приложением к различным задачам механики и физики.

Существенный вклад в развитие теории краевых задач для параболо - гиперболических уравнений внесли исследования М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева, А.М. Нахушева, А.С. Бердышева. Вопросы обобщенной разрешимости в классе  $L_2$  на основе представления решения в виде билинейного ряда рассмотрены в работах Н.Ю. Капустина [1], [2].

В отличие от теории локальных краевых задач, гораздо менее исследованными являются нелокальные краевые задачи. Известные к сегодняшнему дню результаты



можно проследить из списка цитирований монографий А.В. Бицадзе, Л. Берса, М.М. Смирнова, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Джураева. Особенно для уравнений парабола-гиперболического типа – в недавно вышедшей монографии А.С. Бердышева [3].

В газовой динамике Ф.И. Франкль [4], [5] для уравнения Чаплыгина:

$$k(y) u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

где  $k(0) = 0$ ,  $k'(y) > 0$ , впервые поставил краевую задачу, в которой носителем нелокального краевого условия ("скачка уплотнения")

$$u(0, y) - u(0, -y) = f(y)$$

является часть  $-a < y < a$  границы  $x = 0$  области, состоящей из частей границ подобластей эллиптичности и гиперболичности уравнения. Поэтому нелокальные краевые условия такого типа – связывающие значения функций на границах областей разного типа уравнения, называют условиями типа Франкля.

Из недавних публикаций, близких по тематике, можно отметить работы [6 – 9]. Однако в этих работах нелокальные задачи рассматривались в прямоугольных областях. В нашей же постановке задачи гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником.

## 2 Постановка задачи

Пусть  $\Omega \subset R^2$  - конечная область, ограниченная при  $y > 0$  отрезками  $AA_0$ ,  $A_0B_0$ ,  $B_0B$ ,  $A = (0, 1)$ ,  $B_0 = (1, 1)$ ,  $B = (1, 0)$ , а при  $y < 0$  - характеристиками  $AC : x + y = 0$  и  $BC : x - y = 1$  уравнения смешанного парабола-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy}, y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy}, y < 0 \end{cases} = f(x, y) \quad (1)$$

Это уравнение смешанного типа. Его относят к первому роду потому, что линия изменения типа  $y = 0$  не является характеристикой уравнения.

Через  $W_2^l(\Omega) = H^l(\Omega)$  обозначим пространство С.Л. Соболева со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)_l$  и нормой  $\|\cdot\|_l$ ,  $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ ;  $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$ ,  $\Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$ .

В области  $\Omega$  рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу, являющуюся обобщением аналога задачи Франкля для парабола - гиперболического уравнения (1).  
ЗАДАЧА F. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее классическим краевым условиям

$$u|_{AA_0} = 0, \quad u_y|_{A_0B_0} = 0 \quad (2)$$

и нелокальному краевому условию

$$u(\theta(t)) = (1 + \alpha)u(\theta_0(t)) + (1 - \alpha)u(\theta_1(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3)$$

где  $\theta(t) = (t, 1)$ ,  $\theta_0(t) = (\frac{t}{2}, -\frac{t}{2})$ ,  $\theta_1(t) = (\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2})$ ,  $\alpha$  – произвольное число.

Легко видеть, что  $\theta(t) \in A_0B_0$ ,  $\theta_0(t) \in AC$ ,  $\theta_1(t) \in BC$ . Поэтому новое нелокальное краевое условие (3) связывает между собой значения искомого решения на параболической части границы  $A_0B_0$  и на гиперболических частях границы области – на характеристиках  $AC$  и  $BC$ . Отметим, что краевые условия в гиперболической части области вида

$$\alpha u(\theta_0(t)) + \beta u(\theta_1(t)) = 0$$

хорошо известны и носят название краевых условий со смещением. Они впервые введены А.М. Нахушевым для волнового уравнения (см. [10]).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Функцию  $u \in L_2(\Omega)$  назовем сильным решением задачи, если существует последовательность функций  $\{u_n\}$ ,*

$$u_n \in W = C^1(\bar{\Omega}) \cap C_{x,y}^{1,2}(\bar{\Omega}_1) \cap C^2(\bar{\Omega}_2),$$

*удовлетворяющих краевым условиям (2) - (3) задачи, такая, что последовательности  $u_n$  и  $Lu_n$  сходятся в пространстве  $L_2(\Omega)$ , к функциям  $u$  и  $f$ , соответственно.*

### 3 Формулировка основного результата

**ТЕОРЕМА.** *Для любой функции  $f \in L_2(\Omega)$  существует единственное сильное решение  $u(x, y)$  задачи  $F$ . Это решение принадлежит классу  $H^1(\Omega) \cap H_{x,y}^{1,2}(\Omega_1) \cap C(\bar{\Omega})$ , и удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_1 \leq C \|f\|_0. \quad (4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу однозначной разрешимости задачи Коши для волнового уравнения, решение уравнения (1) при  $y < 0$  представляется в виде

$$u(x, y) = - \int_{\xi}^{\eta} d\xi_1 \int_{\xi_1}^{\eta} f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 + \frac{1}{2} [\tau(\xi) + \tau(\eta)] - \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\eta} \nu(s) ds, \quad (5)$$

где

$$\tau(x) = u(x, 0), \quad \tau(0) = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = x - y,$$

$$\nu(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0), \quad f_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4} f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\xi - \eta}{2}\right).$$

Отсюда, с учетом  $\tau(0) = 0$ , непосредственным вычислением, получаем

$$\begin{aligned} (1 + \alpha) u(\theta_0(t)) + (1 - \alpha) u(\theta_1(t)) &= \tau(t) - \frac{(1 + \alpha)}{2} \int_0^t \nu(s) ds - \frac{(1 - \alpha)}{2} \int_t^1 \nu(s) ds + \\ &+ \frac{(1 - \alpha)}{2} \tau(1) - (1 + \alpha) \int_0^t d\xi_1 \int_{\xi_1}^t f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 - (1 - \alpha) \int_t^1 d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1. \end{aligned}$$

Вводя дополнительное обозначение  $u(t, 0) - u(t, 1) = \varphi(t)$ , отсюда и из краевого условия (3), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(t) = u(t, 0) - u(t, 1) = \tau(t) - u(\theta(t)) = \frac{(1+\alpha)}{2} \int_0^t \nu(s) ds + \frac{(1-\alpha)}{2} \int_t^1 \nu(s) ds - \\ - \frac{(1-\alpha)}{2} \tau(1) + (1+\alpha) \int_0^t d\xi_1 \int_{\xi_1}^t f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1 + (1-\alpha) \int_t^1 d\xi_1 \int_{\xi_1}^1 f_1(\xi_1, \eta_1) d\eta_1. \end{aligned}$$

Дифференцируя полученное по переменной  $t$ , будем иметь

$$\varphi'(t) = \alpha\nu(t) + \Phi_2(t), \quad 0 < t < 1, \quad (6)$$

где

$$\Phi_2(t) = (1+\alpha) \int_0^t f_1(\xi_1, t) d\xi_1 + (1-\alpha) \int_t^1 f_1(t, \eta_1) d\eta_1. \quad (7)$$

Это есть основное соотношение между  $\varphi'(t)$  и  $\nu(t)$ , полученное из гиперболической части области.

#### 4 Вспомогательная параболическая задача

В параболической части области рассмотрим задачу с краевым условием типа Самарского-Ионкина:

**ЗАДАЧА SI.** *Найти в области  $\Omega_1$  решение уравнения теплопроводности*

$$u_x - u_{yy} = f(x, y),$$

*удовлетворяющее классическим начально-краевым условиям*

$$u|_{AA_0} = 0, \quad u_y|_{A_0B_0} = 0 \quad (8)$$

*и нелокальному краевому условию*

$$u(t, 0) - u(t, 1) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (9)$$

Очевидно, что необходимым условием существования решения является естественное условие согласования  $\varphi(0) = 0$ . В дальнейшем его будем считать выполненным. Эта задача впервые была предложена А.А. Самарским, в начале 70-х годов XX века. Задача возникла при моделировании нелинейной нестационарной теории неустойчивости в токовой плазме при малом превышении порога (параметрической неустойчивой плазмы). Математически задача была решена Н.И. Ионкиным [11], а в более общей постановке Н.И. Ионкиным и Е.И. Моисеевым [12]. В связи с этим, краевые задачи такого вида называют задачами Самарского-Ионкина. В [13] рассмотрена задача для обыкновенного дифференциального оператора с возмущенными краевыми условиями Самарского-Ионкина. Система собственных функций задачи полна, но образует базиса. На основе этой системы построен новый базис и показано его применение для решения

методом разделения переменных задач для уравнений в частных производных. Очевидно, что решение задачи  $F$  в параболической части области может быть представлено в виде решения задачи  $SI$  при специальном выборе граничной функции  $\varphi(x)$ . Считая эту функцию известной, построим соотношение между  $\nu(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0)$  и  $\varphi(x)$ . Имеет место

ЛЕММА. Пусть  $\varphi(0) = 0$ , а  $u(x, y)$  - решение задачи  $SI$ . Тогда имеет место соотношение

$$\nu(x) = - \int_0^x k(x-t) \varphi'(t) dt + \Phi_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (10)$$

где

$$k(x-t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(x-t)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{n^2}{4(x-t)}\right\}, \quad (11)$$

$$\Phi_1(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_0(x-x_1, y_1) f(x_1, y_1) dy_1, \quad (12)$$

$$G_0(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x^{3/2}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (y+n) \exp\left\{-\frac{(y+n)^2}{4x}\right\}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение задачи  $SI$  представим в виде

$$u(x, y) = C(x, y) + S(x, y), \quad (14)$$

где  $C(x, y)$  и  $S(x, y)$  - четные и нечетные по переменной  $y$  на интервале  $(0, 1)$  части функции  $u(x, y)$ :

$$2C(x, y) = u(x, y) + u(x, 1-y), \quad 2S(x, y) = u(x, y) - u(x, 1-y). \quad (15)$$

Не трудно убедиться в том, что функции  $C(x, t)$  и  $S(x, t)$  являются в области  $\Omega$  решениями уравнений теплопроводности:

$$C_x(x, y) - C_{yy}(x, y) = f_0(x, y), \quad (16)$$

$$S_y(x, y) - S_{yy}(x, y) = f_1(x, y), \quad (17)$$

и удовлетворяют однородным начальным условиям

$$C(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (18)$$

$$S(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (19)$$

где  $2f_0(x, y) = f(x, y) + f(x, 1-y)$ ,  $2f_1(x, y) = f(x, y) - f(x, 1-y)$ . Найдем краевые условия по переменной  $y$ , которым на границе области  $\Omega$  удовлетворяют функции  $C(x, y)$  и  $S(x, y)$ . Подчиняя функцию (14) краевым условиям (8), (9), с учетом соотношений (15), получаем:

$$S(x, 0) = \frac{1}{2}\varphi(x), \quad S(x, 1) = -\frac{1}{2}\varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (20)$$

$$C_y(x, 0) = S_y(x, 0), \quad C_y(x, 1) = -S_y(x, 0), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (21)$$

Таким образом, для построения решения задачи SI получаем две (более простые) задачи, которые нужно решить последовательно. Сначала решаем задачу для  $S(x, y)$ . Это первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности (17) с однородным начальным условием (19) и неоднородными краевыми условиями Дирихле (20). Это классическая задача, ее решение существует и единственно. Оно может быть построено с помощью функции Грина первой начально-краевой задачи.

Имея решение  $S(x, y)$ , решаем вторую задачу для  $C(x, y)$ . Это вторая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности (16) с однородным начальным условием (18) и неоднородными краевыми условиями Неймана (21). Это также классическая задача, ее решение существует и единственно. Оно также может быть построено с помощью функции Грина второй начально-краевой задачи.

Легко видеть, что

$$\nu(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \left( \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial y} \right)(x, 0) = 2S_y(x, 0). \quad (22)$$

Поэтому для получения соотношения (10) достаточно решить задачу (17), (19), (20) для  $S(x, y)$ . Это первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Ее функция Грина имеет вид [14, с. 197]:

$$G(x, y, y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \exp \left\{ -\frac{(y - y_1 + 2n)^2}{4x} \right\} - \exp \left\{ -\frac{(y + y_1 + 2n)^2}{4x} \right\} \right]. \quad (23)$$

Поэтому для решения задачи (17), (19), (20) имеет место представление

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \int_0^x dx_1 \int_0^1 G(x - x_1, y, y_1) f_1(x_1, y_1) dy_1 + \\ &+ \int_0^x G_{y_1}(x - x_1, y, 0) S(x_1, 0) dx_1 - \int_0^x G_{y_1}(x - x_1, y, 1) S(x_1, 1) dx_1. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом краевых условий (20) и явного вида (23) функции Грина, непосредственным вычислением получаем

$$S(x, y) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G(x - x_1, y, y_1) f_1(x_1, y_1) dy_1 + \frac{1}{2} \int_0^x G_0(x - x_1, y) \varphi(x_1) dx_1, \quad (24)$$

где  $G_0$  определяется по формуле (13). Интегрированием по частям, с учетом условия  $\varphi(0) = 0$ , второе слагаемое в (24) представим в виде

$$\frac{1}{2} \int_0^x G_0(x - x_1, y) \varphi(x_1) dx_1 = \frac{1}{2} \int_0^x G_1(x - x_1, y) \varphi'(x_1) dx_1, \quad (25)$$

где

$$G_1(x - x_1, y) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{\frac{y+n}{2\sqrt{(x-x_1)}}} e^{-z^2} dz + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\frac{y+n}{2\sqrt{(x-x_1)}}}^{+\infty} e^{-z^2} dz.$$

Теперь непосредственным вычислением из (24), с учетом (25), получаем

$$S_y(x, 0) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial y}(x - x_1, y, y_1) \Big|_{y=0} f_1(x_1, y_1) dy_1 - \frac{1}{2} \int_0^x k(x-t) \varphi'(t) dt,$$

где  $k(x-t)$  определяется по формуле (11). Первое слагаемое представляем в виде

$$\int_0^x dx_1 \int_0^1 \left\{ \frac{\partial G}{\partial y}(x - x_1, y, y_1) \Big|_{y=0} - \frac{\partial G}{\partial y}(x - x_1, y, 1 - y_1) \Big|_{y=0} \right\} f(x_1, y_1) dy_1.$$

Для него непосредственным вычислением находим, что

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x - x_1, y, y_1) \Big|_{y=0} - \frac{\partial G}{\partial y}(x - x_1, y, 1 - y_1) \Big|_{y=0} = G_0(x - x_1, y_1).$$

Суммируя полученное, с учетом (22), приходим к формуле (10). Лемма доказана. Формула (10) дает основное соотношение между  $\nu(x)$  и  $\varphi(x)$ , получаемое из параболической части области.

## 5 Основное интегральное уравнение

Исключая  $\nu(x)$  из соотношений (6) и (10), получаем для  $\varphi'(x)$  интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi'(x) + \alpha \int_0^x k(x-t) \varphi'(t) dt = \Phi(x), \quad \Phi(x) = \alpha \Phi_1(x) + \Phi_2(x). \quad (26)$$

Таким образом, задача  $F$  эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода (26). Заметим, что полученное интегральное уравнение совпадает (за исключением правой части уравнения и коэффициента перед интегральным оператором) с интегральными уравнениями, возникающими при решении локальных краевых задач Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа. Методы решения таких интегральных уравнений широко известны.

Также необходимо отметить, что наиболее простым случаем является  $\alpha = 0$ . При этом из (26) сразу определяется значение  $\varphi'(x)$  и решение задачи  $F$  строится в явном виде.

В общем же случае, так как ядро  $k(x)$  представимо в виде

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \tilde{k}(x),$$

где  $\tilde{k}(x) \in C^\infty[0, 1]$ , то  $k(x)$  – ядро со слабой особенностью. Поэтому существует единственное сильное решение уравнения (26) и оно имеет вид

$$\varphi'(x) = \Phi(x) + \int_0^x \Gamma(x-t) \Phi(t) dt, \quad (27)$$

где  $\Gamma(x)$  – резольвента уравнения (26):

$$\Gamma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} K_j(x), \quad K_1(x) = -\alpha k(x),$$

$$K_{j+1}(x) = \int_0^x K_1(x-t) K_j(t) dt, \quad j \in N.$$

Из (27) легко убедиться в справедливости оценки

$$\|\varphi'(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c_1 \|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)},$$

а из (7) и (12) находим, что

$$\|\Phi(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c_2 \|f\|_0.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\|\varphi'(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c \|f\|_0. \quad (28)$$

## 6 Построение решения задачи $F$

Из (27), с учетом  $\varphi(0) = 0$ , после несложных преобразований получим

$$\varphi(x) = \int_0^x \Gamma_1(x-t) \Phi(t) dt, \quad \Gamma_1(x) = 1 + \int_0^x \Gamma(t) dt. \quad (29)$$

Теперь решение задачи  $F$  восстанавливается в области  $\Omega_1$ , как решение задачи SI с граничной функцией  $\varphi(x)$  из (29). По построенному в области  $\Omega_1$  решению находим  $\tau(x)$  и  $\nu(x)$ . Поэтому в области  $\Omega_2$  для решение задачи  $F$  однозначно восстанавливается, как решение задачи Коши по формуле Даламбера (5).

Отсюда и из свойств решения первой начально - краевой задачи для уравнения теплопроводности следует, что решение задачи  $F$  принадлежит  $H^1(\Omega) \cap H_{x,y}^{1,2}(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega})$  и, как следствие оценки (28), удовлетворяет неравенству (4).

Покажем, что найденное решение будет сильным. Так как  $C_0^1(\overline{\Omega})$  плотно в  $L_2(\Omega)$ , то для любой функции  $f \in L_2(\Omega)$  существует последовательность функций  $f_n \in C_0^1(\overline{\Omega})$  таких, что  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Обозначим  $u_n = L^{-1}f_n$ .

При  $f_n \in C_0^1(\overline{\Omega})$  нетрудно видеть, что  $\Phi_n(x) \in C^1[0,1]$ . Поэтому уравнение (27) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве  $C^1[0,1]$ . Следовательно,  $\varphi'_n(x) \in C^1[0,1]$ . Отсюда  $u_n(x,0) \in C^2[0,1]$ ,  $\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0) \in C^1[0,1]$ . Из свойств решений первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности и задачи Коши для волнового уравнения, получаем, что  $u_n \in W$  для всех  $f_n \in C_0^1(\overline{\Omega})$ .

В силу неравенства (4) имеем

$$\|u_n - u\|_1 \leq c \|f_n - f\|_0 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,  $\{u_n\}$  – есть последовательность, отвечающая определению сильного решения. Поэтому задача  $F$  сильно разрешима для любой правой части  $f$ , и сильное решение принадлежит классу  $H^1(\Omega) \cap H_{x,y}^{1,2}(\Omega_1) \cap C(\overline{\Omega})$ . Теорема доказана.

## 7 Заключение

В работе предложена новая нелокальная краевая задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа. Особенностью рассматриваемой задачи является то, что нелокальные краевые условия связывают значения искомой функции на частях границы параболической и гиперболической областей. В отличие от работ других авторов, в предлагаемой новой постановке гиперболическая часть области совпадает с характеристическим треугольником.

Задача редуцирована к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода. При этом полученное уравнение аналогично интегральным уравнениям, возникающим при решении задач Трикоми (которые можно считать классическими).

Доказана однозначная сильная разрешимость сформулированной задачи. Полученный результат позволяет в дальнейшем рассмотреть спектральную задачу с таким нелокальным краевым условием, наподобии исследований спектральных свойств задачи Трикоми [15 - 17].

## 8 Благодарности

В заключение авторы выражают признательность Т.Ш. Кальменову, Б.Е. Кангужину и всем участникам Общегородского научного семинара "Дифференциальные операторы и их приложения" за плодотворное обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0825/ГФ4.

## Литература

- [1] Капустин Н.Ю. Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми для парабола-гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. – 1984. – Т. 274, № 6. – С. 1294 – 1298.
- [2] Капустин Н.Ю. Существование и единственность  $L_2$ -решения задачи Трикоми для одного парабола-гиперболического уравнения // Доклады АН СССР. – 1986. – Т. 291, № 2. – С. 288 – 292.
- [3] Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного парабола-гиперболического и смешанно-составного типов. – Алматы. – 2015. – 224 с.
- [4] Франкль Ф.И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Серия математика. – 1945. – Т. 9, № 2. – С. 121 – 142.
- [5] Франкль Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уклонения. – Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, № 2. – С. 196 – 202.
- [6] Рахманова Л.Х. Решение нелокальной задачи спектральным методом для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 36 – 40.
- [7] Сабитов К.Б., Рахманова Л.Х. Начально-граничная задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т.44, № 9. – С. 1175 – 1181.
- [8] Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения парабола-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89, №4. – С. 596 – 602.
- [9] Моисеев Е.И., Нефедов П.В., Холмеева А.А. Аналогии задач Трикоми и Франкля в трехмерных областях для уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50, № 12. – С. 1677 – 1680.
- [10] Назгушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.



- [11] *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т.13, № 2. – С. 294 – 304.
- [12] *Ионкин Н.И., Моисеев Е.И.* О задаче для уравнения теплопроводности с двучечными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т.15, № 7. – С. 1284 – 1295.
- [13] *Dildabek G., Tengayeva A.A.* Constructing a basis from systems of eigenfunctions of one not strengthened regular boundary value problem // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2015. – № 1(84). – С. 36 – 44.
- [14] *Бабич В.М. и др. Под ред. СГ Михлина.* Справочная математическая библиотека. Линейные уравнения математической физики. – М.: Наука. – 1964.
- [15] *Садыбеков М.А., Тойжанова Г.Д.* Спектральные свойства одного класса краевых задач для парабола-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1992. – Т. 28, № 1. – С. 176 – 179.
- [16] *Бердышев А.С.* О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе – Самарского для смешанного парабола-гиперболического уравнения // Сибирский математический журнал. – 2005. – Т. 46, №3. – С. 500 – 510.
- [17] *Ахтаева Н.С., Каримов Э.Т.* О краевой задаче с условием сопряжения интегрального вида для смешанного парабола - гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2013. – № 2(77). – С. 64 – 70.

## References

- [1] *Kapustin N.Yu.* A generalized solvability of Tricomi problem for parabolic-hyperbolic equation // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1984. – Т. 274, № 6. – С. 1294 – 1298.
- [2] *Kapustin N.Yu.* The existence and uniqueness of  $L_2$ -solutions of Tricomi problem for a parabolic-hyperbolic equation // Doklady Akademii Nauk SSSR. – 1986. – Т. 291, № 2. – С. 288 – 292.
- [3] *Berdyshev A.S.* Kraevye zadachi i ih spektral'nye svoystva dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo i smeshanno-sostavnogo tipov. – Almaty. – 2015. – 224 p. (in Russ.).
- [4] *Frankl F.* To the theory of the Laval nozzle // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. – 1945. – Т. 9, № 2. – P. 121 – 142.
- [5] *Frankl F.I.* Subsonic flow about a profile with a supersonic zone // Prikl. Mat. Mekh. – 1956. – Т. 20, № 2. – P. 196 – 202.
- [6] *Rakhmanova L.Kh.* Solution of a nonlocal problem for a mixed-type parabolic-hyperbolic equation in a rectangular domain by the spectral method // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 2007. – № 11 (546). – P. 36 – 40.
- [7] *Sabitov K.B., Rakhmanova L.K.* Initial-boundary value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type in a rectangular domain // Differential Equations. – 2008. – Т.44, № 9. – P. 1175 – 1181.
- [8] *Sabitov K.B.* Nonlocal Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation in a Rectangular Domain // Mat. Zametki. – 2011. – Т. 89, №4. – P. 596 – 602.
- [9] *Moiseev E.I., Nefedov P.V., Kholomeeva A.A.* Analogs of the Tricomi and Frankl problems for the Lavrent'ev-Bitsadze equation in three-dimensional domains // Differential Equations. – 2014. – Т. 50, № 12. – С. 1677 – 1680.
- [10] *Nakhushev A.M.* Problems with displacements for partial differential equations. – Nauka, Moscow. – 2006.
- [11] *Ionkin N.I.* Solution of a boundary value problem with non-classical boundary condition in heat conduction theory // Differential Equations. – 1977. – Т.13, № 2. – P. 294 – 304.
- [12] *Ionkin N.I., Moiseev E.I.* A problem for the heat conduction equation with two-point boundary condition // Differential Equations. – 1979. – Т.15, № 7. – P. 1284 – 1295.
- [13] *Dildabek G., Tengayeva A.A.* Constructing a basis from systems of eigenfunctions of one not strengthened regular boundary value problem // BVestnik KazNU, ser. mat., meh., inf. – 2015. – № 1(84). – P. 36 – 44.
- [14] *Babich V.M. et al., Mihlin S.G. Ed.* Linear equations of mathematical physics // Ref. Math. Library. – Nauka, Moscow. – 1964.

- [15] *Sadybekov M.A., Toizhanova G.D.* Spectral properties of a class of boundary value problems for a parabolic-hyperbolic equation // *Differential Equations*. – 1992. – Т. 28, № 1. – P. 176 – 179.
- [16] *Berdyshev A.S.* The volterra property of some problems with the Bitsadze–Samarskii-type conditions for a mixed parabolic-hyperbolic equation // *Sibirsk. Mat. Zh.* – 2005. – Т. 46, №3. – P. 500 – 510.
- [17] *Akhtaeva N.S., Karimov E.T.* A boundary value problem with adjoining condition of integral type for mixed parabolic - hyperbolic equations with non-characteristic line type change // *Vestnik KazNU, ser. mat., meh., inf.* – 2013. – № 2(77). – P. 64 – 70.

**2-бөлім****Раздел 2****Section 2****Механика****Механика****Mechanics**

ӘОЖ 533.6

Туралина Д.Е. \*, Майханова А.Қ. \*\*

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Қазақстан Республикасы, Алматы қаласы

E-mail: \*Dinara.Turalina@kaznu.kz, \*\*maykhanova.akmarzhan@mail.ru

**Параллель орналасқан екі биік ғимараттың аэродинамикасын зерттеу**

Бұл мақалада параллель орналасқан биік екі ғимарат аэродинамикасы бойынша жүргізілген зерттеулер нәтижесі баяндалады. Зерттеу сандық әдіс арқылы Comsol Multiphysics бағдарламасында жүргізілді. Алдымен зерттелетін жұмыс аймағы ретінде COMSOL Multiphysics бағдарламасында тіктөртбұрышты аэродинамикалық құбырдың пішіні салынды. Оның ішіне өзара параллель (қатар) орналасқан, биіктіктері әр түрлі екі ғимараттың пішіндері тұрғызылды. Ғимаратқа әсер ететін жел әсерін бақылау үшін COMSOL Multiphysics бағдарламасында ауа ағынын турбулентті, қозғалыс стационар емес деп қарастырылды. Есеп сығылмайтын сұйыққа арналған Навье-Стокс теңдеуіне RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes) әдісі қолданылып шығарылды. Есептеулер ғимараттардың бір-бірінен арақашықтығын өзгерте отырып жүргізілді, нәтижелері салыстырылды.

**Түйін сөздер:** аэродинамика, биік ғимараттар аэродинамикасы, ғимаратты ауаның ағып өтуі, жылдамдықтың таралуы, қысымның таралуы, COMSOL Multiphysics бағдарламасы, RANS(Reynolds-averaged Navier-Stokes).

Turalina D.E., Maihanova A.K.

**The investigations of aerodynamics of two parallel high-rise buildings**

This article presents the results of investigations of aerodynamics of two parallel high-rise buildings. The objective of the study the impact of wind on buildings associated with the large-scale design of high-rise buildings, seeking opportunities to use natural ventilation, optimization of air flow inside the building, as well as silicenum heat loss of buildings. Research into the aerodynamics of tall buildings is conducted using the Software Package COMSOL Multiphysics. The study area is constructed in the form of waves of the wind tunnel. Inside the wind tunnel are placed the layout of the two parallel arranged high-rise building. The flow around high-rise building occurs from left to right. The air flow is considered turbulent, non-stationary process. Turbulent motion of the air flow described by the Navier Stokes equations. Modeling of turbulent flow is carried out using the RANS method. The results of calculations performed for various distances between two tall buildings at a fixed air velocity and for different velocities of air flow at a fixed distance between the buildings.

**Key words:** aerodynamics, aerodynamics of high-rise building, the flow around high-rise buildings, velocity distribution, pressure distribution, the Software Package COMSOL Multiphysics, the RANS method.

Туралина Д.Е., Майханова А.К.

**Исследование аэродинамики двух параллельных высотных зданий**

В данной статье представлены результаты исследования аэродинамики двух параллельно расположенных высотных зданий.

Задача исследования влияния ветра на постройки связаны со значительными масштабами проектирования высотных зданий, поисками возможностей использования в них естественного проветривания, оптимизации воздушных потоков внутри здания, а также с увеличением теплопотери зданий. Исследования аэродинамики высотных зданий проводится с использованием Программного Пакета COMSOL Multiphysics. Область исследования строится в виде прямоугольной аэродинамической трубы. Внутри аэродинамической трубы располагаются макеты двух параллельно расположенных высотных зданий. Обтекание высотных зданий происходит с лева на право. Течение воздуха рассматривается турбулентным, процесс нестационарным. Турбулентное движение воздушного потока описывается уравнениями Навье Стокса. Моделирование турбулентного течения осуществляется с использованием метода RANS. Приводятся результаты расчетов проведенных для различных расстояний между двумя высотными зданиями при фиксированной скорости воздушного потока и наоборот, для различных скоростей воздушного потока при фиксированном расстоянии между зданиями.

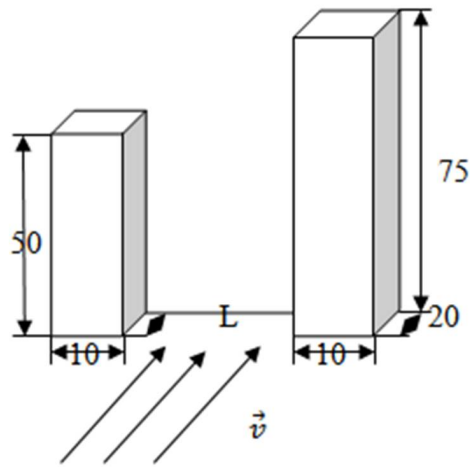
**Ключевые слова:** аэродинамика, аэродинамика высотных зданий, обтекание высотных зданий, распределение скорости, распределение давления, Программный Пакет COMSOL Multiphysics, метода RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes).

## 1 Кіріспе

Табиғи-климаттық жағдайлар тұрғын үйлердің микроклиматына елеулі ықпалын тигізеді және де оны реттеу жолдарының экономикалық тұрғыдан пайдалы екендігін анықтайды. Биік ғимараттарды жобалау әр түрлі факторларды ескеруді қажет ететін күрделі архитектуралық және инженерлік мәселе. Жел сыртқы факторлардың бірі болып табылады. Ол бөлмені желдетеді, ғимараттың жылу жоғалтуын арттырады, қоршаулардың жылу режимдерін өзгертеді. Осыдан желдің ғимараттарға әсерін зерттеу мәселесі туындайды. Жұмыстың негізгі мақсаты параллель орналасқан биік екі ғимаратты ауа ағынының ағып өту ерекшеліктерін зерттеу. Зерттеу сандық тәжірибе түрінде жүргізілді. Бұл жұмыста ені мен ұзындығы бірдей, ал биіктіктері бірі екіншісінен қысқа параллель орналасқан екі зәулім ғимараттың аэродинамикасы зерттеледі. Бірінші жағдайда екі биік ғимараттың арақашықтықтары тұрақты, ал жел жылдамдығы өзгереді деп қарастырылады. Сөйтіп жел жылдамдығының ғимарат аэродинамикасына әсері зерттеледі. Екінші жағдайда жел жылдамдығының бір мәніне сәйкес ғимараттардың арақашықтықтары өзгеріп отырады. Арақашықтықтарының өзгеруіне байланысты қысым мен жылдамдықтың таралулары, құйынның түзілуі зерттеледі.

## 2 Есептің қойылымы

Бұл жұмыста параллель орналасқан екі ғимараттың аэродинамикасы, яғни қысым таралуы және жылдамдық таралуы зерттелді. Ғимаратты ағып өтіп жатқан жел ағынын зерттеу сандық әдіспен жүзеге асырылды. Ғимараттардың ені мен ұзындығы бірдей, ал биіктіктері бірі екіншісінен қысқа деп алынды. Сөйтіп, ғимараттар арасындағы оңтайлы арақашықтықты табу жұмыстары жүргізілді. Арақашықтықтары сәйкесінше 6м, 16м, 26м етіп алынды. Жылдамдықтары 1м/с, 5м/с, 10м/с аралығында өзгерді. Зерттеуде екі биік ғимарат қатар орналасады және олардың арақашықтықтары өзгеріп отырады. Осы арақашықтықтарының өзгеруіне және желдің жылдамдығына байланысты қысым мен жылдамдықтың таралулары зерттеледі.



1-сурет - Екі қатар тұрған биік ғимаратты ауаның ағып өтуі

### 3 COMSOL Multiphysics бағдарламасында есептің шығарылуы

COMSOL Multiphysics бағдарламасында есепті сандық түрде шығару үшін  $x$ ,  $y$ ,  $z$  кеңістігінде ғимарат ретінде екі призма салынды (2- сурет). Осы призмалардың сыртында аэродинамикалық құбыр салынып, сол құбырдың ішіне ауа жіберілді. Енді ғимаратқа әсер ететін ауа ағынының жылдамдығы мен қысым эпюрасының өзгерісі зерттелді. Ғимараттардың арақашықтығын 6м, 16м, 26м етіп алып, ғимарат бойындағы ауаның жылдамдығы мен қысым эпюрасының өзгерісінің COMSOL Multiphysics бағдарламасында шығарылуы қарастырылды. Бірінші ғимараттың биіктігін 75 метр, ал ұзындығы 20м, ені 10 метр деп берілді. Екінші ғимараттың биіктігі 50м, ұзындығы 20м, ені 10м деп берілді. Ғимарат қабырға ретінде (Wall) деп алынды. Ғимарат бойында ауаның ағысы турбулентті болады. Ауаның бастапқы жылдамдығы 1 м/с, 5м/с 10 м/с деп берілді. Есептеу аймағы 150x100x132 м етіп алынды. Ғимаратқа әсер ететін жел әсерін бақылау үшін COMSOL Multiphysics бағдарламасында ағынды турбулентті, стационар емес және сығылмайтын сұйыққа арналған Навье-Стокс теңдеуіне RANS әдісі қолданылып шығарылды. Сығылмайтын сұйыққа арналған Навье-Стокс теңдеулер жүйесі қозғалыс және үзіліссіздік теңдеулерінен тұрады:

$$\rho * \frac{\partial u}{\partial t} + \rho * (u * \nabla) * u = \nabla * [-p * I + \mu * (\nabla u + (\nabla u^T))] + F \quad (1)$$

$$\rho \nabla * u = 0 \quad (2)$$

Шекаралық шарттары Simmetry, яғни симметриялық етіп берілді. Ауа кіріп жатқан бөлігі және шығып жатқан бөлігі таңдап алынды, сәйкесінше шекаралық шарттары төмендегідей етіп қойылды:

Кіре берістегі шекаралық шарт

$$u = -U_0 * n \quad (3)$$

$$k = \frac{3}{2}(U_0/T)^2 \quad (4)$$

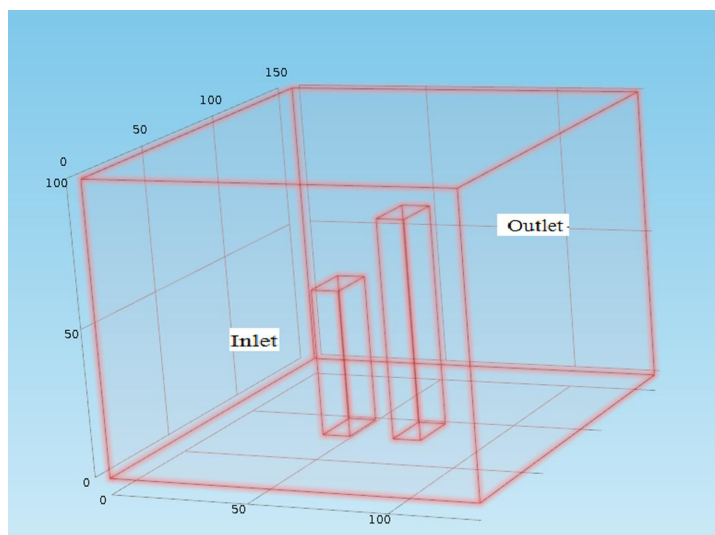
$$\epsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{L_T} \quad (5)$$

мұндағы  $L_T$  - турбуленттіліктің ұзындық масштабы,  $L_T = 0.01$   
Шыға берістегі шекаралық шарт

$$[-pl + (\mu + \mu_T)(\nabla u + (\nabla u)_T) - \frac{2}{3}(\mu + \mu_T)(\nabla * u)l - \frac{2}{3}\rho k * l] * n = -\hat{p}_0 n \quad (6)$$

$$\hat{p}_0 \leq p_0 \quad (7)$$

$$\nabla k * n = 0, \nabla \epsilon * n = 0 \quad (8)$$



**2-сурет** - MComsol Multiphysics бағдарламасындағы есептің қойылымы

Inlet - Ауаның кіре беріс бөлігі  
Symmetry - Симметриялық шекаралық шарттар  
Outlet - Ауаның шыға беріс бөлігі

#### 4 COMSOL Multiphysics бағдарламасы арқылы алынған есеп нәтижелері

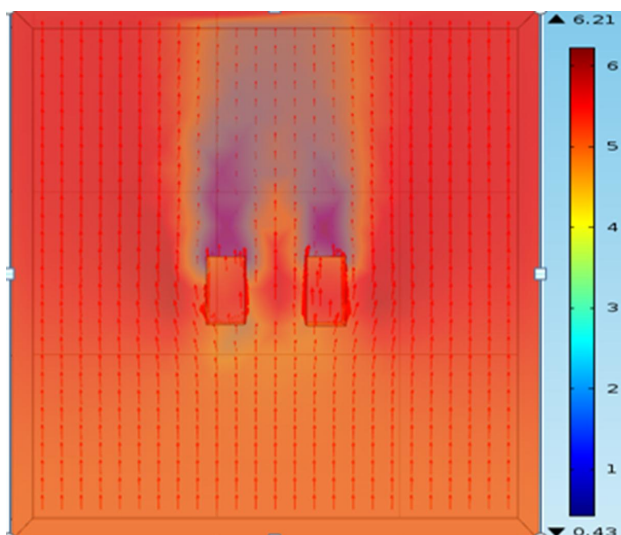
Параллель орналасқан екі ғимараттың ауаның ағып өтуінің есебі Comsol Multiphysics бағдарламасымен шығарылды. Екі ғимаратты ағып өткен кездегі ауа жылдамдығының таралуы, қысымның таралуы есептелді. Есеп әр түрлі жағдайда, ғимараттардың арақашықтықтары 6м, 16м және 26м болған жағдайда және ауа жылдамдығының әр түрлі мәндерінде қарастырылды. Алдымен, есептің дәл мәнін анықтау үшін торды дұрыс таңдай білу өте маңызды. Есепті шығару үшін тордың үш түрі қарастырылды.

-Ірі тор (coarse) 3- сурет

-Қалыпты тор (Normal) 4- сурет

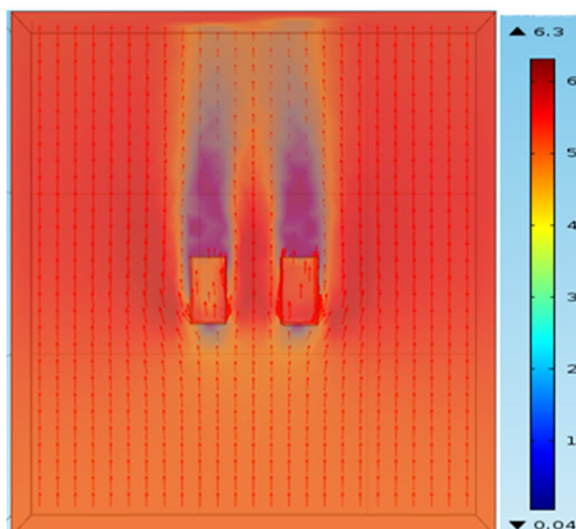
-өте ұсақ тор (Finer) 5- сурет

Ірі торды қолдана отырып алынған нәтиже:



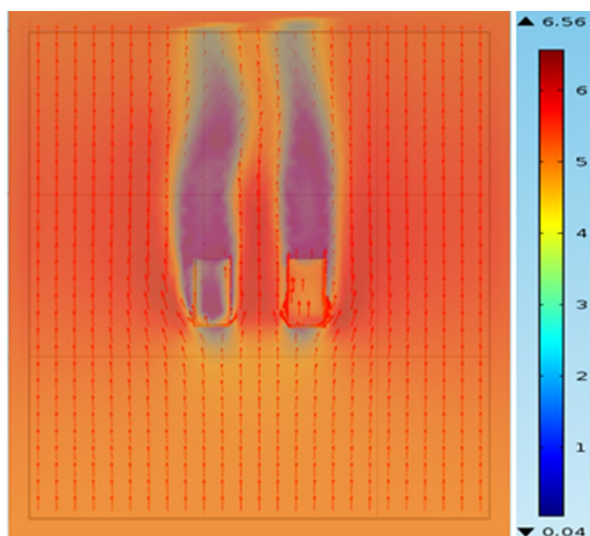
3-сурет -Екі ғимарат арақашықтығы тұрақты болғандағы жылдамдықтың таралуы.

Қалыпты торды пайдалана отырып алынған нәтиже:

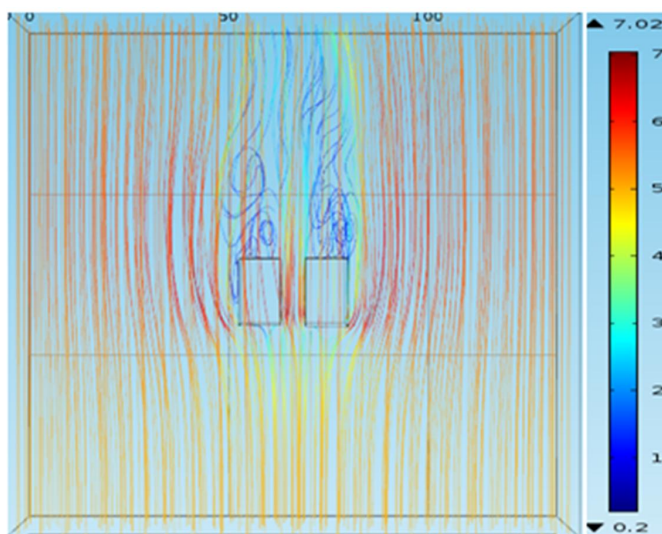


4-сурет - Екі ғимарат арақашықтығы тұрақты болғандағы жылдамдықтың таралуы.

өте ұсақ торды пайдалана отырып алынған нәтиже:



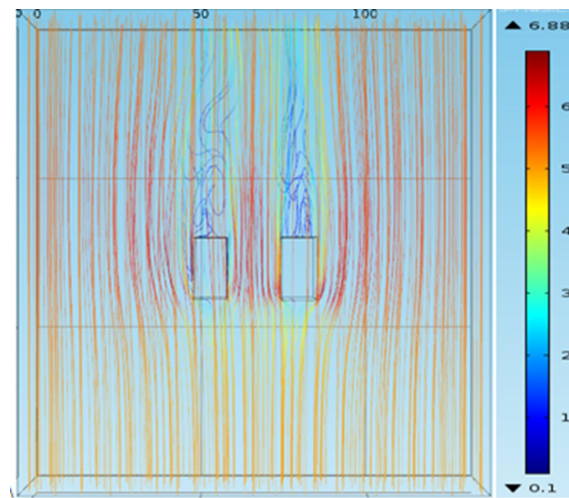
**5-сурет** - Екі ғимарат арақашықтығы тұрақты болғандағы жылдамдықтың таралуы.



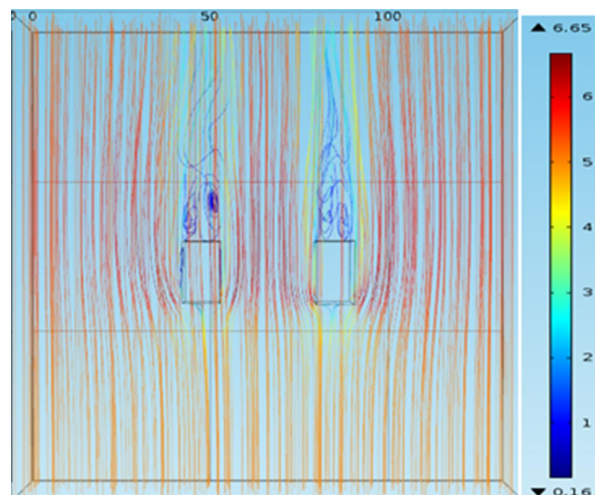
**6-сурет** - Екі ғимарат арақашықтығы 6м болғандағы жылдамдықтың таралуы.

Есептеу нәтижелеріндегі қою көк түс жылдамдық өте аз дегенді, сары түс қалыпты, ал қою қызыл түс өте жоғары жылдамдық дегенді білдіреді. Торларды салыстыру үшін тұрақты арақашықтықты және тұрақты жылдамдықты бере отырып, тек қана жоғарыда айтылған үш торды қолдана отырып, салыстыру жасалынды. Сонда тор жиілеген сайын кескін анық көріне бастады. Ірі торды пайдалана отырып алынған нәтижеге қарағанда ғимарат артындағы із көк түсті болатын, қалыпты тормен есептегенде көк түске аздаған сары түстің түскені байқалады, ал өте ұсақ торды пайдаланғанда сол жерде айқын түрде байқалатын сары түс, яғни қозғалыс бар екенін көріп отырмыз. Бұдан шығатын қорытынды неғұрлым тор жиірек болса, соғұрлым кескін анығырақ, болып жатқан құбылыс дәлірек көрінеді. Сондықтан келесі есептеулер өте ұсақ тормен, яғни finer-мен есептелінді.

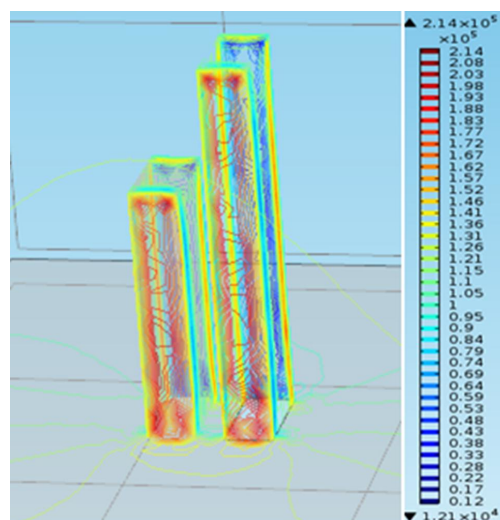




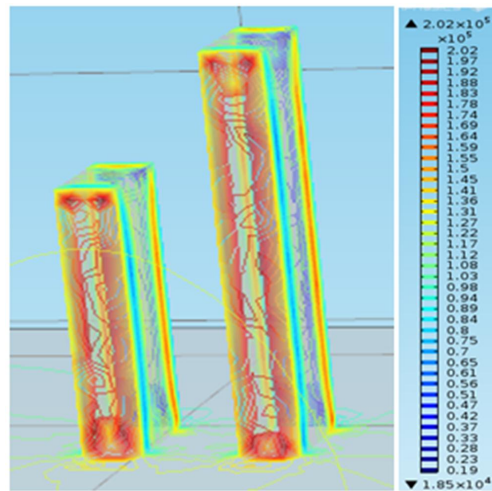
7-сурет -Екі ғимарат арақашықтығы 16м болғандағы жылдамдықтың таралуы.



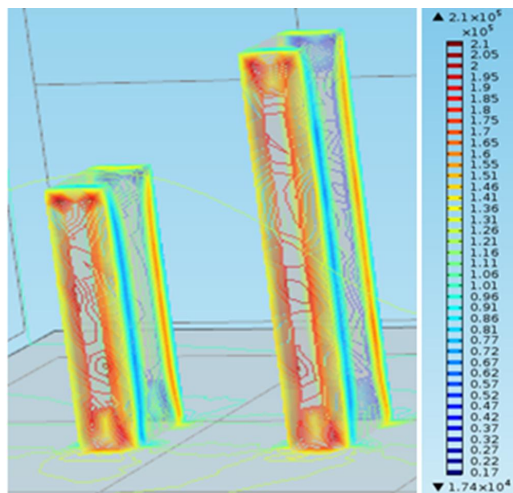
8-сурет - Екі ғимарат арақашықтығы 26м болғандағы жылдамдықтың таралуы.



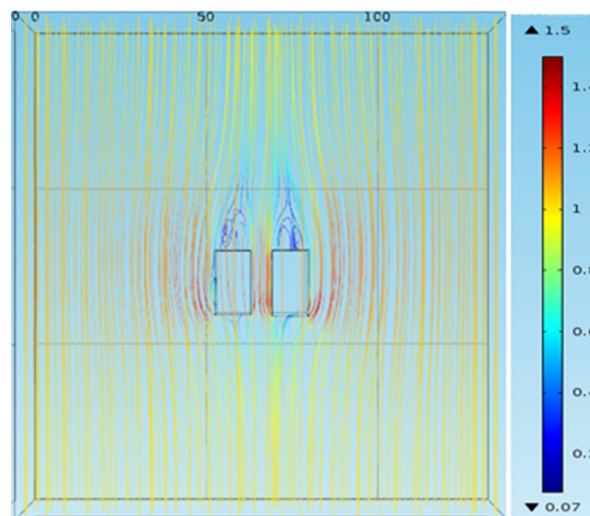
9-сурет -Екі ғимарат арақашықтығы 6м болғандағы қысымның таралуы.



10-сурет - Екі ғимарат арақашықтығы 16м болғандағы қысымның таралуы.

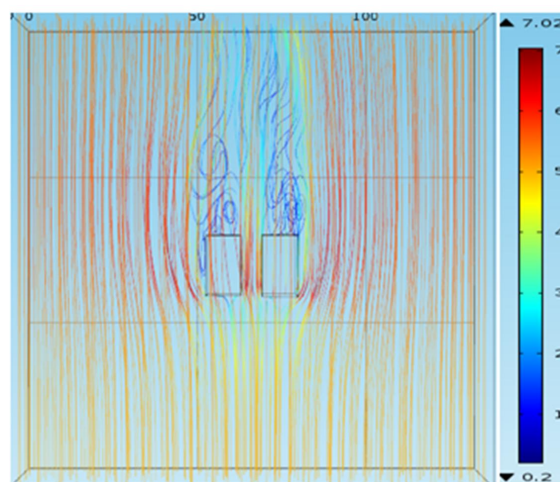


11-сурет - Екі ғимарат арақашықтығы 26м болғандағы қысымның таралуы.

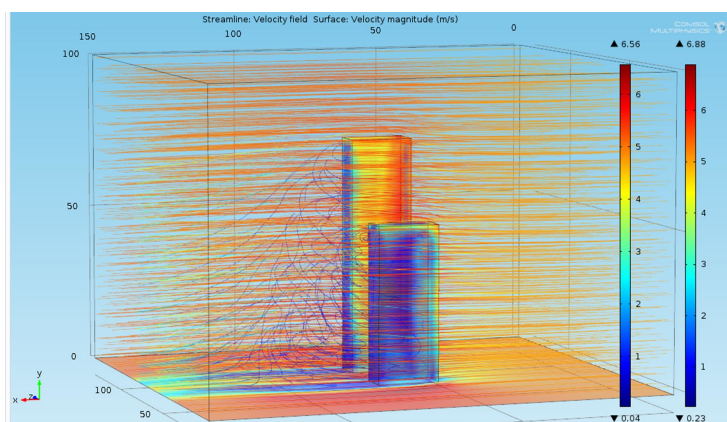


12-сурет - Бастапқы жылдамдығы 1м/с болғандағы ағын сызықтары.

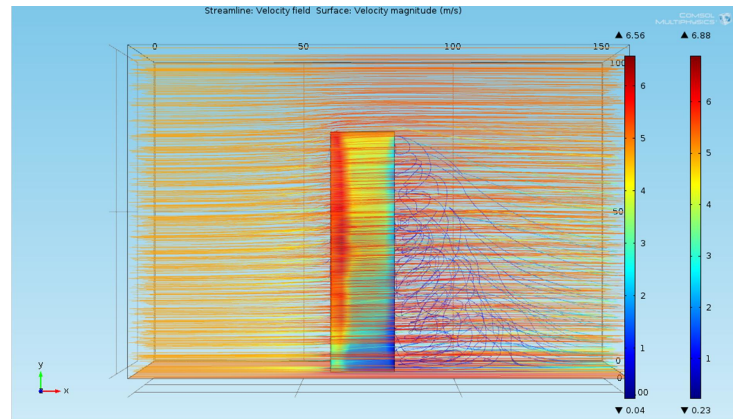
1. Екі ғимараттың арақашықтықтарын 6м, 16м және 26м, ал бастапқы жылдамдығын 5м/с етіп алғандағы, ғимараттардың төбесінен қарағандағы, жылдамдықтарының таралулары 6-8 суреттерде кескінделген. 6-11 суреттерден ғимараттардың арақашықтықтарын өзгерте отырып, алынған нәтижелер бойынша арақашықтығы 6м болғанда жылдамдықтың мәні максимал, 16м болғанда 6м-ге қарағанда жылдамдығы төмен, ал 26м болғанда алғашқы екеуінен де төмен мәнге ие екені байқалады. Бұдан шығатын қорытынды, ғимараттардың арақашықтығы неғұрлым жақын болса, соғұрлым арасындағы жылдамдықтар жоғары болады. Ғимараттардың артында пайда болып жатқан құйындардың орналасуы да арақашықтығының өзгеруіне байланысты әр түрлі. 6-11 суреттерден байқағанымыздай, ғимараттардың арақашықтықтары неғұрлым жақын болса, құйындар бір-бірімен қосылып қауіпті құйынды аймақтар түзілетіні, ал алшақтаған сайын құйындардың бір біріне әсері сейілетіні көрінеді. Қысымдар ғимараттың бетінде жоғары мәнге, ал ғимараттың артында теріс мәнге ие. Теріс мәнді қысым деп отырғанымыз, сол жерде сору болып жатыр дегенді білдіреді.



**13а-сурет** -Бастапқы жылдамдығы 5м/с болғандағы ағын сызықтары. Ғимараттарға төбесінен қарағандағы көрінісі

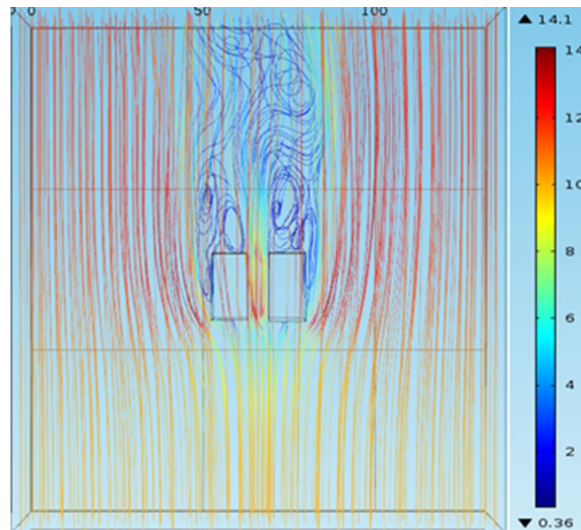


**13б-сурет** -Бастапқы жылдамдығы 5м/с болғандағы ағын сызықтары. Ғимараттарға артынан қарағандағы көрінісі



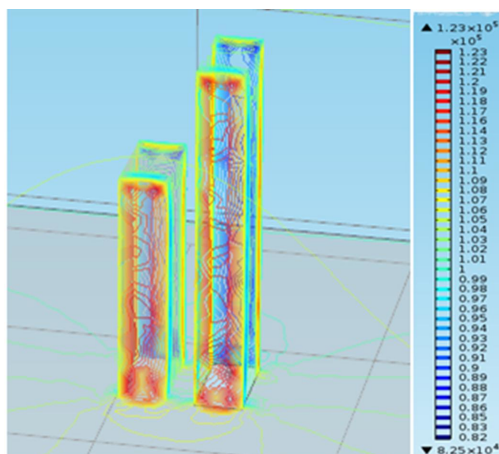
**13в-сурет** -Бастапқы жылдамдығы 5м/с болғандағы ағын сызықтары. Ғимараттарға жанынан қарағандағы көрінісі

2. Екі ғимараттың арақашықтықтарын 6м, ал бастапқы жылдамдығын 1 м/с, 5м/с, 10 м/с етіп бергендегі жылдамдықтардың таралуы 12-14 суреттерде кескінделген.

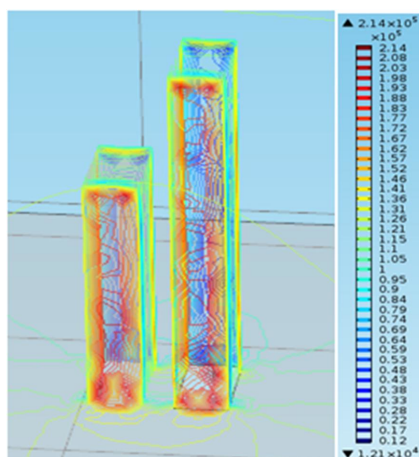


**14-сурет** - Бастапқы жылдамдығы 10м/с болғандағы ағын сызықтары.

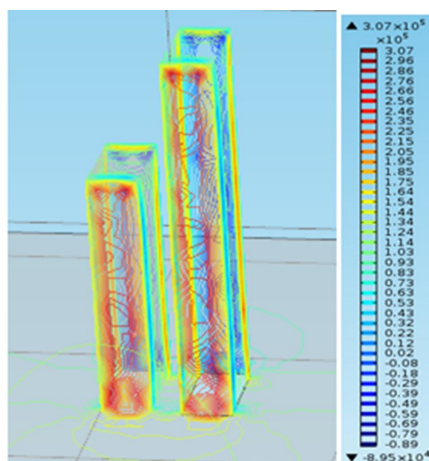
Екі ғимараттың арақашықтықтары 26м, ал бастапқы жылдамдығын 1м/с, 5м/с, 10м/с етіп бергендегі қысымның таралуы 15-17 суреттерде кескінделген.



15-сурет -Бастапқы жылдамдығы 1м/с болғандағы қысымның таралуы



16-сурет -Бастапқы жылдамдығы 5м/с болғандағы қысымның таралуы



17-сурет - Бастапқы жылдамдығы 10м/с болғандағы қысымның таралуы

15-17 суреттерде ғимараттардың арақашықтықтары тұрақты, ауаның жылдамдықтарының мәндері өзгертіліп отырған жағдайдағы биік ғимараттар артындағы түзілген

құйындар кескінделген. Жылдамдықты 1 м/с етіп бергенде ғимарат артында пайда болып жатқан құйындардың кішірек екендігі және ұзақ арақашықтыққа созылмайтындығы байқалса, ал 5 м/с, 10 м/с кезінде ғимарат артында пайда болған құйындардың ұйытқып ұзаққа созылып жатырғандығы байқалады. Яғни ауаның жылдамдығы артқан сайын ғимарат шетінен үзілген ағындардың есебінен ғимараттың артқы бөлігінде бір-бірімен жалғасып жатқан құйындар пайда болады.

## 5 Қорытынды

Бұл жұмыста ені мен ұзындығы бірдей, ал биіктіктері бірі екіншісінен қысқа параллель орналасқан екі зәулім ғимараттың аэродинамикасы зерттелді. Бірінші жағдайда екі биік ғимараттың арақашықтықтары тұрақты, ал жел жылдамдығы өзгереді деп қарастырылды. Сөйтіп жел жылдамдығының ғимарат аэродинамикасына әсері зерттеледі. Екінші жағдайда жел жылдамдығының бір мәніне сәйкес ғимараттардың арақашықтықтары өзгеріп отырады. Арақашықтықтарының өзгеруіне байланысты қысым мен жылдамдықтың таралулары, құйынның түзілуі зерттеледі. Сандық тәжірибе Comsol Multiphysics бағдарламасы Пакетін пайдаланып жүзеге асырылды. Сол кездегі алынған нәтижелер бойынша, желмен ағып өту кезінде ғимараттар маңында қауіпті құйынды аймақтар пайда болады. Құйынды аймақтар жер бетінен және ғимараттар жиегінен үзілген ағындардың есебінен пайда болады. Бұл құйынды аймақтар күрделі үш өлшемді тұрақталмаған құйындық ағындардан тұрады. Ғимараттарға жақындаған кезде ауа ағынының төменгі қабаттары тежеледі, және ағынның бұл бөлігінің кинетикалық энергиясы потенциалдыққа көшеді. Сәйкесінше, статикалық қысым ұлғаяды. Статикалық қысым ғимараттарға жақындаған сайын біртіндеп ұлғаяды. Ғимараттардың бетінде қысым максимал мәнге жетеді. Мұнда келетін ағын циркуляция аймағын құрады. Оның құйындары ғимарат формасын ыңғайлы ағып өтетін формаға дейін толықтырады және осылайша негізгі ағынның энергиясының жоғалуын азайтады. Бұл аймақта құйын тәрізді қозғалыс жасайтын және ғимараттың ық жағына қарай кететін ауамен алмасу жүреді. Келетін ағын ғимаратты және циркуляция аймағын жоғарыдан және жандарынан ағып өтеді. Ғимаратты ағып өтетін ағын қандайда бір сығылудың есебінен ғимаратқа келетін желдің жылдамдығынан көбірек жылдамдыққа ие. Екі ғимарат арақашықтығы жақын болған сайын арасындағы жылдамдық та арта береді. Ғимарат жиектерінен үзілу кезінде ағын ғимараттың ық жағынан ауаны қарқынды түрде ілестіреді, мұның нәтижесінде қысым азаяды. Ғимараттың ық жағында бірнеше құйын пайда болады. Бұл беттегі аэродинамикалық із шекарасы - қисық сызықты бет. Желмен ағып өту кезінде іргелес ғимараттардың аэродинамикалық із аймақтары кейде қосыла отырып, ауаның жалпы циркуляциясы бар күрделі аймақтарды құра отырып бір біріне әсер етеді. Алынған зерттеу нәтижелері зәулім ғимараттар мен үйлерді жобалағанда және тұрғызғанда пайдалы болары сөзсіз.

## Әдебиеттер

- [1] *S. Swaddiwudhipong, T.T.T. Anh, Z.S Liu, J.Hua. Modelling of wind load on single and staggeed dual buildings // Engineering with computers. Shpringer. - 2007. - С. 215-227.*
- [2] *GU Ming, QUAN Yong. Across-wind loads and effects of super-tall buildings and structure // Science China Technological sciences. Shpringer. -2011. -№10(54). -С.2531-2541.*

- [3] *GU Ming*. Wind resistant studies on tall buildings and structures // Science China Technological sciences. -2010. -№10(53). -С.2630-2646.
- [4] *S.A. Isaev, P.A.Baranov, Yu.V.Zhukova, A.A.Tereshkin, A.E.Usachov* "Simulation of the wind effect on an ensemble of high-rise buildings by means of multiblock computational technologies // Journal of engineering Physics and Thermophysics. - 2014. - №1(87). - С.112-123.
- [5] *Ayo Samuel Adinoyi, NormahMohd-Ghazali, and Shuhaimi Mansor*. Outdoor ventilation performance of various configurations of a layout of two adjacent buildings under isothermal conditions// Building Simulation. Shpringer. -2015. -№8. -С.81-98.
- [6] *Симму Э. Сканлан Р.* Воздейтвие ветра на здания и сооружения. / Пер. с англ. Б.Маслова, А.В Швецовою; Под ред. Б.Е Маслова. -М.: Стройиздат. -1984.- 360с.
- [7] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа . Издательство Наука, -Москва. -1978.- 736б
- [8] *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. - М.: Наука, 1972.- 430б.
- [9] *Туралина Д.Е.* Тәжірибелік аэромеханика бойынша зертханалық жұмыстар.-Алматы: Қазақ университеті, 2011.- 85б.

## References

- [1] *S. Swaddiwudhipong, T.T.T. Anh, Z.S Liu, J.Hua*. Modelling of wind load on single and staggeed dual buildings // Engineering with computers. Shpringer. - 2007. - С. 215-227.
- [2] *GU Ming, QUAN Yong*. Across-wind loads and effects of super-tall buildings and structure // Science China Technological sciences. Shpringer. -2011. -№10(54). -С.2531-2541.
- [3] *GU Ming*. Wind resistant studies on tall buildings and structures // Science China Technological sciences. -2010. -№10(53). -С.2630-2646.
- [4] *S.A. Isaev, P.A.Baranov, Yu.V.Zhukova, A.A.Tereshkin, A.E.Usachov* "Simulation of the wind effect on an ensemble of high-rise buildings by means of multiblock computational technologies // Journal of engineering Physics and Thermophysics. - 2014. - №1(87). - С.112-123.
- [5] *Ayo Samuel Adinoyi, NormahMohd-Ghazali, and Shuhaimi Mansor*. Outdoor ventilation performance of various configurations of a layout of two adjacent buildings under isothermal conditions// Building Simulation. Shpringer. -2015. -№8. -С.81-98.
- [6] *E. Simiu, R. Scanlan*. Wind Effects on Structures /Vozdeistvie vetra na zdaniya i sooruzheniya/ per.s angl.pod redakciei B.E.Maslova.- М.: Stroizdat, 1984. – 360 s.
- [7] *Loitsyanskii L.G.* Mehanika zhidkosti i gaza, – 5-e izd. – М.: Nauka, 1978. – 736 s.
- [8] *Sedov L.I.* Metody podobia i razmernosti v mehanike. - М.: Nauka, 1972. – 430 s.
- [9] *Turalina D.E.* Tazhiribelik aeromehanika boyinsha zerthanalik zhumistar. – Almaty: Kazakh universiteti, 2011.– 85b.

УДК 621.396.946

Ахмедов Д.Ш.<sup>1\*</sup>, Еремин Д.И.<sup>2\*\*</sup>, Кемешева Д.Г.<sup>3\*\*\*</sup>, Альников Д.В.<sup>4\*\*\*\*</sup><sup>1,2,3</sup>Институт космической техники и технологий, г. Алматы<sup>4</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

E-mail: \*lasp@mail.ru, \*\*denis\_e@bk.ru, \*\*\*d.kemesheva@gmail.com, \*\*\*\*d.alnikov@gmail.com

### Исследование возможностей использования отраженного излучения наземных радиоэлектронных средств от космических объектов на околоземной орбите

В статье производится оценка характеристик отраженного излучения радиоэлектронных средств. Приведена схема построения системы радиосвязи с использованием низкоорбитальных космических аппаратов. Приведено уравнение мощности излучателя, зависящее от эффективной площади рассеяния космических объектов, конфигурации, материала поверхности объектов, длины волны радиоэлектронных средств, ее поляризации, направления излучения. Определена необходимая мощность сигнала передатчика с помощью приложения Radar Equation Calculator в среде Matlab, при проведении расчета использовались данные существующих систем. По полученным результатам вычислений есть возможность получить полезный сигнал, переотраженный от группы космических объектов на низкой околоземной орбите. В статье приведено приложение анализатора сигнала Radar Waveform Analyzer в среде Matlab, с помощью которого возможно смоделировать и получить расчет минимальной и максимальной дальности; визуализировать реальные и мнимые части, амплитудные и фазовые графики, автокорреляцию сигнала и спектральный анализ сигнала.

**Ключевые слова:** Космические объекты, отраженное излучение, радиосвязь.

Akhmedov D., Eremin D.I., Kemesheva D.G., Alnikov D.V.

### Study of potential use of ground-based radioelectronic equipment radiation reflected from orbital space object

In article the evaluation of specifications of reflected radiation of electronic means is produced. Outline of construction of the system of radio communication with using low-orbit space vehicles is presented. The equation of power of the radiator dependent from radar cross-section of space objects, configurations, material of which the objects is made, lengths of the wave of radio-electronic facilities, polarization, and the direction of radiation is presented. Required power of the signal of the transmitter is determined with the aid of application Radar Equation Calculator in multi-paradigm numerical computing environment Matlab, at calculation we were used of given existing systems. On received results of calculations, there is opportunity to receive a useful signal re-scattered from the group of space objects on low Earth-orbital orbit. In article, the analyzer application of the signal Radar Waveform Analyzer in environment Matlab is presented, with the aid of which possibly to simulate and to be discharged of minimum and maximum range; to visualize real and imaginary parts, magnitude and phase schedules, signal autocorrelation and spectral analysis of the signal.

**Key words:** Space Objects, Radio Communication, Reflected Radiation.

Ахмедов Д.Ш., Еремин Д.И., Кемешева Д.Г., Альников Д.В.

### Жерүсті радиоэлектронды құралдардың Жер маңындағы орбитадағы ғарыштық нысандардан шағылысу сәулеленуін пайдалану мүмкіндіктерін зерттеу

Мақалада радиоэлектронды құралдардың шағылыс сәулелену сипаттамаларын бағалау жүргізіледі. Төменгі орбиталық ғарыштық аппараттарды пайдалану арқылы радиобайланыс жүйесін құру схемасы келтірілген.



Ғарыш аппараттарын, конфигурациялары, нысандардың сыртқы материалдары, радиоэлектронды құралдар толқынының ұзындығы, оның поляризациясы, сәулелену бағытын тарату алаңының тиімділігіне байланысты сәуле таратушының қуатына теңестіру жүргізілді. Matlab ортасында Radar Equation Calculator қосымшаларының көмегімен қажетті қабылдаушы сигналдар қуаты анықталды, есептеу барысында қолданыстағы жүйенің деректері пайдаланылды. Алынған есептеу нәтижелері бойынша төменгі жер маңындағы орбитада ғарыштық нысандар тобынан қайта сәулеленген пайдалы сигналды алу мүмкіндігі табылды. Мақалада Matlab ортасында Radar Waveform Analyzer сигнал талдағыш қосымшалар, нақты және алдамшы бөліктерді визуализациялау, магниттік және фазалық графиктер, сигналдарды автокорреляциялау және сигналды спектральді талдау келтірілген, бұл оның көмегімен ең төмен және ең жоғары қашықтықта есебін алу және үлгілеуге мүмкіндік береді.

**Түйін сөздер:** Ғарыштық нысандар, шағылыс сәулеленуі, радиобайланыс.

## 1 Введение

В мировой практике существует несколько проектов по организации космической радиосвязи где в качестве пассивных ретрансляторов используются искусственные космические объекты. Ранними аналогами предлагаемой системы пассивной радиосвязи являются проекты 60-годов, такие как программы Эхо, Вестфорд и пассивная радиолокация. Отражающими объектами электромагнитных волн, излучаемые передатчиком, являются искусственные космические объекты на околоземной орбите, которые способны рассеивать или направленно отражать электромагнитное излучение рабочего диапазона частот линии связи. С момента запуска первого космического аппарата прошло около 60 лет. До настоящего момента было произведено более 7000 запусков космических объектов. И это не предел. каждую неделю с космодромов производятся запуски новых космических аппаратов.

## 2 Анализ распределения космических объектов на околоземных орбитах

В настоящее время самая большая база данных космических объектов содержит каталог американских служб NORAD. Открытая часть каталога NORAD по состоянию на март 2016 года содержит данные о свыше 40666 объектов на земной орбите, размеры которых превышают 10 см [1]. Среди них есть действующие спутники, части разрушенных спутников, отработанных ступеней ракет и предметов, потерянных во время работ в открытом космосе. Количество объектов размером более 1 см оценивается в 600 тысяч.

По данным американской организации Union of Concerned Scientists на март 2016 года на околоземной орбите 1382 объекта являются активными космическими аппаратами [2].

Американские каталоги содержат данные о кеплеровских элементах орбиты космических объектов, которые позволяют сделать их анализ распределения по основным параметрам для оценки возможности использования искусственных объектов околоземного пространства в качестве отражателей радиоэлектронных средств. В ходе работы проведен анализ распределения космических объектов по высоте, который показывает, что более 35000 космических объектов с размером более 10 см, находятся на высоте до 2500 км от поверхности Земли. В качестве отражателей электромагнитных волн целесообразно использовать космические объекты на высоте от 100 км, количество которых около 7000. Значениями дальности отражающих объектов можно использовать 300, 800 и 1500 км, как высот с наибольшим скоплением объектов.

Анализ распределения космических объектов по наклонению, который определяет ориентацию плоскости орбиты в космическом пространстве показал, что большинство космических объектов находятся на орбитах с высоким наклонением от  $50^\circ$  до  $100^\circ$ . Из анализа распределения космических объектов по эксцентриситету заключено, что орбита большинства искусственных космических тел на околоземной орбите имеет форму окружности или эллипса близкой к круговой орбите.

Важнейшей характеристикой космических объектов является эффективная отражающая площадь, которая является количественной характеристикой способности объекта рассеивать энергию в направлении наземных радиоэлектронных средств. Отражательная способность космических объектов определяется эффективной площадью рассеяния (ЭПР). По результатам анализа каталога Space Track [3] выявлено, что ЭПР более 33 тысяч космических объектов менее  $0,1 \text{ м}^2$ , ЭПР около 6135 космических объектов между  $0,1 \text{ м}^2$  и  $1 \text{ м}^2$ , ЭПР 12500 космических объектов более  $1 \text{ м}^2$ .

### 3 Система радиосвязи. Основные части и принцип действия

Основными составными частями данной системы радиосвязи являются передатчик, приемник, передающая антенна, приемная антенна, эффективная площадь рассеяния объектов, прямой сигнал, отраженный сигнал, антенное и оконечное устройства (рисунок 1). Передатчик системы вырабатывает высокочастотные колебания, которые модулируются по амплитуде, частоте или фазе. Эти колебания подаются в антенное устройство и образуют зондирующий сигнал. Наибольшее применение находит зондирующий сигнал в виде последовательности равноотстоящих по времени коротких радиоимпульсов.

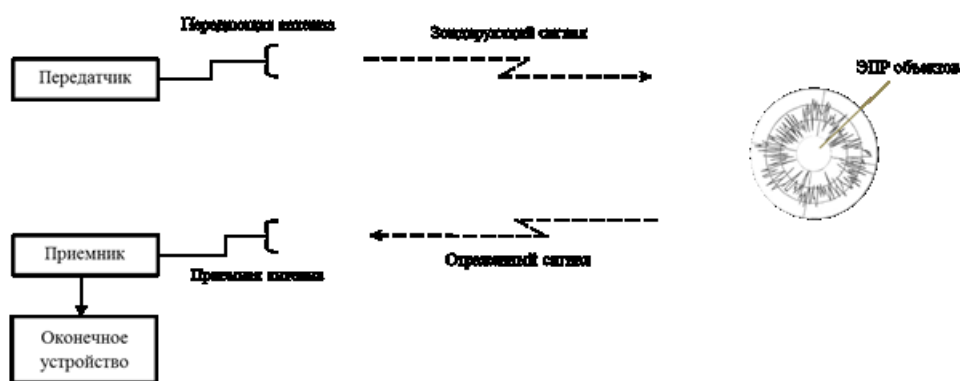


Рисунок 1 – Схема построения системы

После того как электромагнитная волна, падающая на группу объектов, вызывает в ее теле вынужденные колебания электрических зарядов, объект подобно обычной антенне создает свое электромагнитное поле. Это поле представляет собой вторичную, т.е. отраженную, электромагнитную волну, которая является носителем информации. Объектами данной системы являются искусственные космические объекты на околоземных орбитах, которые способны рассеивать или направленно отражать электромагнитное излучение. Объекты вносят неоднородность в свободное пространство. Так как параметры

$\varepsilon_a$  и  $\mu_a$  их поверхности отличаются соответственно от окружающей среды  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$ , чем нарушается постоянство вектора скорости распространения радиоволн. В результате объект преобразует радиоизлучение: часть энергии переотражается, часть – поглощается объектом, переходя в тепло, а другая часть при радиопрозрачности объекта – преломляется, изменяя направление распространения радиоволн. Для рассматриваемой системы интересен случай, когда объект является источником вторичного излучения.

Приемник системы необходим для выделения полезного сигнала из помех (первичная обработка сигнала). Необходимый уровень отраженного от объектов сигнала можно обеспечить следующим образом: увеличить мощность радиопередатчика; увеличить размер и эффективность антенн передающей и принимающей станции; сужение полосы частот, увеличение широты импульса и понижение скорости передачи информации. Оконечное устройство служит для представления сигнала в нужной потребителю форме.

#### 4 Анализ отражательной способности космических объектов

Отражающие свойства объектов зависят от ее размеров (обычно имеется сильная зависимость от площади проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению на РЭС), конфигурации, материала поверхности, длины волны РЭС, ее поляризации, направления облучения. Эффективная отражающая площадь объектов (ЭОП) – это площадь  $\sigma_0$  некоторой фиктивной плоской поверхности, расположенной нормально к направлению падающей плоской волны и являющейся идеальным и изотропным переизлучателем, которая, будучи помещена в точку объекта, создает у антенны РЭС ту же плотность потока мощности, что и реальный объект.

Из определения следует, что полностью переизлучаемая ЭОП мощность

$$P_0 = \Pi_0 \sigma_0, \quad (1)$$

где  $\Pi$  – плотность потока мощности падающей плоской волны у объектов.

Так как на расстоянии  $D$  от объектов вся переизлучаемая мощность равномерно распределяется на поверхности сферы  $4\pi D^2$ , то плотность потока мощности у РЭС

$$\Pi_p = \Pi_0 \sigma_0 / 4\pi D^2. \quad (2)$$

Для разъяснения понятие ЭОП, целесообразно ее выразить через хорошо известные параметры антенн – эффективную площадь  $A(\beta, \varepsilon)$ , коэффициент направленного действия (КНД)  $G'(\beta, \varepsilon)$ , коэффициент полезного действия (КПД)  $\eta_A$  и коэффициент усиления

$$G(\beta, \varepsilon) = G'(\beta, \varepsilon) \eta_A. \quad (3)$$

где аргументы  $\beta$ ,  $\varepsilon$  обозначают азимут и угол места. Мощность, выделяемая из поля падающей волны, имеющей плотность потока мощности  $\Pi_0$ , равна  $P_{0пр} = \Pi_0 A_0$ .

Соответственно мощность вторичного излучения объектов

$$\Pi_{0изд} = \Pi_0 A_0 \eta_0. \quad (4)$$

Если бы объект был изотропным вторичным излучателем, то плотность потока мощности на расстоянии  $D$  у РЭС была бы равна  $\Pi'_0 = \Pi_{\text{изд}}/4\pi D^2$ . С учетом же направленных свойств объектов

$$\Pi_p = \Pi'_p G'_0 = \frac{\Pi_0}{4\pi D^2} A_0 G'_0 \eta_0. \quad (5)$$

Выражение  $\sigma_0 = A_0 G'_0 \eta_0$  имеет размерность площади и характеризует, какую часть энергии падающей радиоволны получает объект ( $A_0$ ), потери энергии во вторичном излучателе ( $\eta_0$ ), направленные свойства вторичного излучения ( $G'_0$ ). ЭОП имеет размерность площади, но не является геометрической площадью, а является энергетической характеристикой, то есть определяет величину принимаемого сигнала и часто выражается в децибелах по отношению к  $\sigma_0 = 1\text{м}^2$ , т. е.  $\sigma_0 = 10 \lg(\sigma_0/1) = 10 \lg \sigma_0$  (иногда относительно квадрата длины волны)

## 5 Уравнение расчета мощности излучателя наземных радиоэлектронных средств

Мощность отраженного излучения зависит от эффективной площади рассеяния (ЭПР)  $S_{\text{эф0}}$  объектов, которая в свою очередь зависит от основных отражающих свойств объектов, такие как размер объекта (площади проекции тела на плоскость, перпендикулярную направлению на РЭС), конфигурация, материал поверхности, длина волны РЭС, ее поляризации, направления облучения. Мощность отраженного сигнала в приемной антенне задается уравнением:

$$P_c = \frac{P_{\text{и}} G_t G_r \lambda^2 S_{\text{эф0}}}{(4\pi)^3 R_1^2 R_2^2 L}, \quad (6)$$

где,  $P_{\text{и}}$  – мощность передатчика, Вт

$G_t$  – коэффициент усиления передатчика, дБ

$G_r$  – коэффициент усиления приемника, дБ. Если используется моностатическая система, коэффициенты усиления передатчика и приемника равны.

$\lambda$  – длина волны, м

$S_{\text{эф0}}$  – эффективная площадь рассеяния объектов,

$L$  – потери системы, дБ

$R_1^2$  – расстояние от передатчика до объектов,

$R_2^2$  – расстояние от объектов до приемника. Если используется моностатическая система, расстояния будут равны.

Это уравнение устанавливает зависимость между мощностью принимаемого сигнала  $P_c$  и мощностью излучения  $P_{\text{и}}$ . Из формулы (6) можно увидеть, что с увеличением расстояния до объектов мощность принимаемого сигнала убывает очень быстро – обратно пропорциональна 4 степени дальности. В этой связи мощность принимаемого сигнала будет мала, а сам сигнал имеет случайный характер. Малая мощность сигнала объясняется большим расстоянием до объектов на околоземных орбитах и поглощением энергии сигнала при его распространении. Случайный характер сигнала является следствием флуктуации отраженного сигнала за счет перемещения отдельных объектов

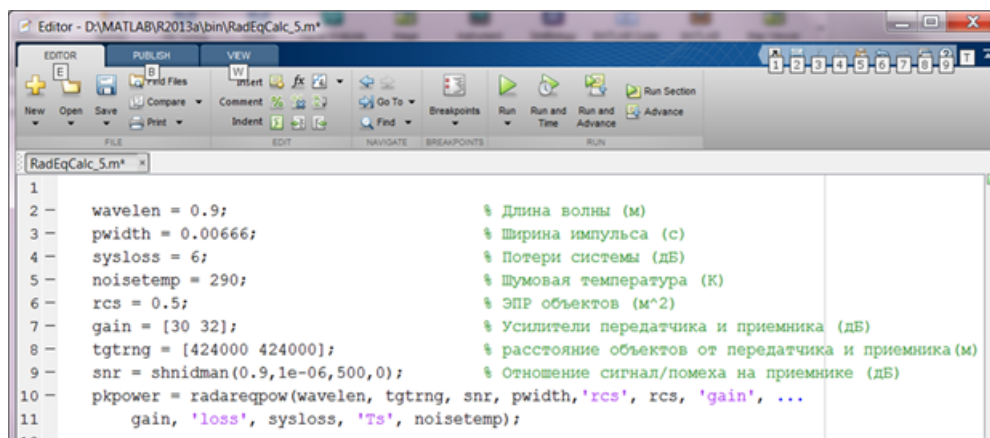
группы при отражении радиоволн, многолучевого распространения радиоволн, хаотических изменений амплитуды сигнала при распространении и ряда других факторов. В результате принимаемый сигнал по виду, интенсивности и характеру изменения похож в приемном тракте на шумы и помехи. Поэтому первой и основной задачей системы является обнаружение полезного радиосигнала, т.е. вынесение решения о присутствии полезного сигнала в поступающей на вход приемного тракта смеси полезного сигнала с помехами, называемой входной реализацией. Эта статистическая задача решается специальным устройством – обнаружителем, в котором стараются использовать алгоритм оптимального обнаружения. Качество процесса обнаружения характеризуют вероятностью правильного обнаружения, когда присутствующий во входной реализации сигнал обнаруживается, и вероятностью ложной тревоги, когда за полезный сигнал принимается помеха, а сам сигнал отсутствует.

## 6 Приложение Radar Equation Calculator

В среде Matlab имеется приложение Radar Equation Calculator, с помощью которого есть возможность определить необходимую мощность сигнала передатчика согласно формуле (6) (рисунок 2). Необходимо ввести данные, такие как длина волны, ширина импульса, потери системы в дБ, шумовая температура и эффективная площадь рассеяния объектов, коэффициент усиления передающей и приемной антенн, отношение сигнал/помеха на приемной антенне (вероятность обнаружения, вероятность ложной тревоги, количество импульсов) и расстояние до объектов. При проведении расчета в приложении Radar Equation Calculator для рассматриваемой системы радиосвязи использовались параметры систем спутниковой связи, наземных радиоэлектронных устройств и данные анализа распределения космических объектов (ЭПР объектов, расстояния от наземных радиоэлектронных средств до космических объектов), которые приведены в таблице 1.

**Таблица 1** – Параметры рассматриваемой системы радиосвязи

Параметр	Значение
Длина волны $\lambda$ , м	0,9
Ширина импульса, мс	6,66
Потери системы $L$ , дБ	6
Шумовая температура,	290
ЭПР объектов $S_{\text{эфо}}$ , м <sup>2</sup>	0,5
Усилитель передатчика $G_t$ дБ	30
Усилитель передатчика $G_r$ дБ	32
Расстояние от передатчика до объектов $R_1$ км	424
Расстояние от передатчика до объектов $R_2$ км	424
Отношение сигнал/помеха на приемнике:	
Вероятность обнаружения	0,9
Вероятность ложной тревоги	$10^{-6}$
Количество импульсов	500
<b>Максимальная мощность передатчика, Вт</b>	<b>66,24</b>



```

1
2   wavelen = 0.9;           % Длина волны (м)
3   pwidth = 0.00666;       % Ширина импульса (с)
4   sysloss = 6;            % Потери системы (дБ)
5   noisetemp = 290;        % Шумовая температура (К)
6   rcs = 0.5;              % ЭПР объектов (м^2)
7   gain = [30 32];         % Усилители передатчика и приемника (дБ)
8   tgtrng = [424000 424000]; % расстояние объектов от передатчика и приемника (м)
9   snr = shnidman(0.9,1e-06,500,0); % Отношение сигнал/помеха на приемнике (дБ)
10  pkrpower = radareqpow(wavelen, tgtrng, snr, pwidth, 'rcs', rcs, 'gain', ...
11  gain, 'loss', sysloss, 'Ts', noisetemp);
12

```

Рисунок 2 – М-file приложения Radar Equation Calculator

В приведенном примере для обнаружения на оконечном устройстве полезного сигнала максимальная мощность на передатчике будет равна 69,24Вт. Для уменьшения мощности передатчика одним из решений является увеличение количества импульсных сигналов. Результаты вычисления, приведенные на рисунке 3, получены при увеличении количества импульсов от 500 до 5000 с шагом 500 импульсов. При накоплении на приемном устройстве 5000 импульсов с максимальной мощностью 20 Вт есть возможность получить полезный сигнал, переотраженный от группы космических объектов на низкой околоземной орбите на высоте 424 км от поверхности Земли.

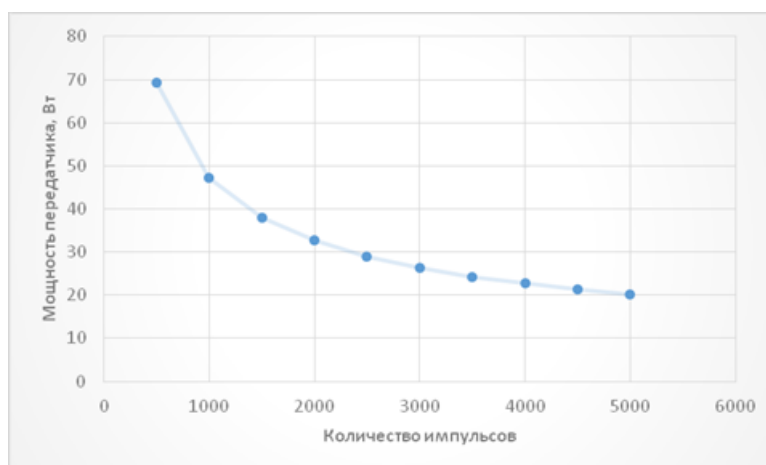


Рисунок 3 – График зависимости мощности передатчика от количества импульсов

## 7 Заключение

Приведены результаты анализа распределения космических объектов по основным параметрам, такие как высота, эксцентриситет и наклонение. Проведен анализ возможностей использования отраженного излучения наземных радиоэлектронных средств от низкоорбитальных спутников Земли. Определены основные составные части данной системы радиосвязи, выявлены характеристики отраженного излучения. Определены основные

параметры уровня мощности излучателя наземных радиоэлектронных средств, проведен анализ основного уравнения расчета мощности излучателя наземных радиоэлектронных средств. Проведен расчет мощности передатчика в среде Matlab с использованием приложения Radar Equation Calculator.

### Литература

- [1] База данных NORAD космических аппаратов на околоземных орбитах [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://satellitedebris.net/Database/index.php>.
- [2] База данных активных искусственных спутников Земли [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.ucsusa.org/nuclear-weapons/space-weapons/satellite-database.html>
- [3] Каталог искусственных космических объектов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.space-track.org/catalog>
- [4] Финкельштейн М.И. Основы радиолокации: Учебник для вузов. – М.: Радио и связь, 1983.
- [5] Яковлев О.И. Распространение радиоволн в космосе. – М.: Наука, 1985.
- [6] Ахмедов Д.Ш., Еремин Д.И., Кемешева Д.Г. Характеристики обнаружения и обработки информации отраженного излучения наземных радиоэлектронных средств от низкоорбитальных спутников Земли // Материалы международной научно-практической конференции "Инновационные процессы в России и мире". – РФ, Сочи, – 17-19 сентября 2015. – С. 115-120.
- [7] Yeregin D.I., Kemesheva D.G. Study of Potential Use of Ground-Based Radioelectronic Equipment Radiation Reflected from Orbital Space Objects // Proceedings of IASTEM International Conference. – Bali, Indonesia, – 2015. – 17 october 2015. – P. 17-19.

### References

- [1] Database NORAD satellites orbiting the Earth [electronic resource]. – Access: <http://satellitedebris.net/Database/index.php>.
- [2] The base of active satellites data [electronic resource]. – Access: <http://www.ucsusa.org/nuclear-weapons/space-weapons/satellite-database.html>
- [3] Catalogue of artificial space objects [electronic resource]. – Access: <https://www.space-track.org/catalog>
- [4] Finkelstein M.I. Radiolocation Basics: Textbook for Universities. – M.: Radio i Svyaz, 1983.
- [5] Yakovlev O.I. Propagation of Radio Waves in Space. – M.: Nauka, 1985.
- [6] Akhmedov D.SH., Yeregin D.I., Kemesheva D.G. Characteristics of detection and information processing of the reflected radiation of land radio-electronic tools from low-orbital satellites of Earth // Materials of the international scientific and practical conference "Innovative Processes in Russia and the World". – Russian Federation, Sochi. – 2015. – 17-19 september 2015 – P. 115-120.
- [7] Yeregin D.I., Kemesheva D.G. Study of Potential Use of Ground-Based Radioelectronic Equipment Radiation Reflected from Orbital Space Objects // Proceedings of IASTEM International Conference. – Bali, Indonesia, – 2015. – 17 october 2015. – P. 17-19.

3-бөлім

Раздел 3

Section 3

Информатика

Информатика

Computer  
science

UDC 004.032.26

Dairbayeva S.A.

International Information Technologies University,  
Republic of Kazakhstan, Almaty  
E-mail: sabina.dairbaeva@mail.ru

### Automatic Process Control System of Main Pipeline

The article is devoted to the Information system development that allows to automate the pumping process and change the thermal characteristics of pipeline. In winter, influence of temperature leads to significantly increasing of hydraulic friction, that can lead to breaking and oil pipeline “congelation”. The author offers the Information system based on SCADA system with using multifunctional MasterScada platform, which makes possible to perform the oil pumping process simulation and also collection, archiving and displaying of data. It was elaborated structural diagram of data collection that allows to reorganize big data during oil pumping process and monitor the main parameters of pipeline. The functional process scheme of automation the oil transportation process considers in the article, by the example of pipeline section (206 km) between two intermediate pumping stations in the area from Beyneu to Kulsary. The developed system provides continuous working of oil pipeline that decrease energy demands of oil pumping process and workload flow of oil fluid, and also speed up the processes of identifying and troubleshooting of equipment. The advantage of developed Information system is control and automatic regulation of main pipeline parameters during changing of thermal regime. Distinctive feature of the system is that controlling of hot oil pumping process can be realized in real-time mode.

**Key words:** oil pumping and transportation processes, Information system (IS), Automatic Process Control System (APCS), Supervisory Control and Data Acquisition (SCADA) system, Functional process scheme.

Даирбаева С.А.

### Автоматизированная Система Управления Технологическим Процессом магистрального трубопровода

Статья посвящена разработке информационной системы, позволяющая автоматизировать процесс горячей перекачки нефти при изменении температурного режима подземного трубопровода. Влияние температуры особенно сказывается в зимний период и приводит к значительному возрастанию гидравлического сопротивления, что может привести к остановке и «застыванию» нефтепровода. Автором предложена информационная система на базе SCADA систем с использованием многофункциональной платформы MasterScada, с помощью которой осуществляется симуляция процесса перекачки нефти, а также сбор, архивирование и отображение данных. Представлена структурная схема сбора данных, позволяющая упорядочить многочисленные данные в процессе перекачки нефти и проводить мониторинг основных параметров трубопровода. В статье рассмотрена функциональная схема автоматизации процесса транспортировки нефти на примере отрезка нефтепровода (206 км) между двумя промежуточно-насосными станциями в районе от Бейнеу до Кульсары. Разработанная система обеспечивает бесперебойную работу нефтепровода, что снижает энергозатраты процесса перекачки и загруженность расхода нефтяной смеси, а также ускоряет процессы выявления и устранения неполадок оборудования.



Преимуществом разработанной информационной системы является контроль и автоматическое регулирование основных параметров трубопровода при изменении температурного режима. Отличительная особенность системы, это то, что контроль и управление процессом горячей перекачки нефти может осуществляться в режиме реального времени.

**Ключевые слова:** процессы перекачки и транспортировки нефти, Информационная система (ИС), Автоматизированная Система Управления Технологическим Процессом (АСУ ТП), Система диспетчерского контроля и сбора данных (СКАДА), Функциональная схема процесса.

Даирбаева С.А

### Магистральдық құбырының технологиялық процесстерді басқару автоматтандырылған жүйесі

Мақала жер асты құбырын температурасын өзгерту кезінде ыстық мұнайды айдау процесін автоматтандыруға мүмкіндік беретін ақпараттық жүйесін дамытуға арналған. Температурның сірі әсерісе қыста әсір етеді және әкелуі едәуір ұлғайуына гидравликалық күшейткіш әкеледі, оның тоқтауыны және мұнай құбырының қатып қалуына. Автор ұсынады ақпараттық жүйе SCADA базасында, жүйесін пайдаланады көп функциональді платформаны MasterScada оның арқасында жасалады модельден процесс сорғымен айдап қотыру мұнайды, сонымен жинайды мұрағаттау және бейнебетте деректерді ұсынады. Мұнайды қайта айдау процесінде көптеген деректерді ұйымдастыру және мұнай құбырының негізгі параметрлерін бақылауға мүмкіндік беретін деректерді жинау құрылымдық сұлбасы. Мақала Кұлсарыға Бейнеу ауданы екі аралық сорғы станциясының арасындағы құбыр бөлімінде (206 шақырым) мысалында мұнай тасымалдау үдерісін автоматтандыру функциональдық диаграммасын сипаттайды. Дамыған жүйесі мұнай қоспасы ағынының энергетикалық аудару процесін және кәдеге жаратуды азайтады құбырының, үздіксіз жұмысын қамтамасыз етеді, сондай-ақ аппараттық проблемаларды анықтау және жоюды тездетеді. Температурасын өзгерту кезінде дамыған ақпараттық жүйесін артықшылығы құбырының негізгі параметрлерін бақылау және автоматты бақылау болып табылады. Жүйенің ерекшелігі ыстық мұнай айдау процесін бақылау және басқару нақты уақыт жүзеге асырылуы мүмкін.

**Түйінді сөздер:** мұнай сорғымен айдап қотыру және тасымалдау процесстері, ақпараттық жүйе (АЖ), технологиялық процесстерді басқару автоматтандырылған жүйесі, деректерді бақылау және қадағылау жүйесі, функциональдық процесс схемасы.

## 1 Introduction

Oil and gas industry is one of the most important component of the economic development of any country. Consider high cost of oil recovery and production, Kazakhstan oil companies engaged by development and introduction various Information systems in this industry. For solving this task, first of all, attend to automation of oil pipeline computing parameters and thermal “hot” pumping condition processes of main pipelines [1]. The using IS in the sphere of oil pipeline execution depends on the issues which developer set up. These tasks are divided into several classes: maintenance operation, technological and protection classes. Maintenance operation is rework process of equipment and main pipeline constructions, ensuring by material and technical resources. Examples of these constructions: Pumping/Heating station (PHS) and Control station (CS). Technological class includes planning, monitoring and controlling oil delivery process. Right distributed system allows effectively manage by technological process. Processing efficiency can be increased by introducing Automatic Process Control System (APCS). Last, protection class means environment protection, safety, insurance of equipment and financial-economic sector. The development of automated

information system is one of the direction of scientific-technical progress, which is used self-regulating software and mathematical methods. Those methods excuse people from receiving data and information transfer. Also decrease workload of actual operation. Information system allows to raise the workforce productivity, improve quality of process, optimize controlling, excuse people from manufactory that dangerous to health.

## 2 Automation of oil delivery process

Automation of technological process means realization of particular functions. First, changing technological characteristics of temperature, pressure, oil flow rate and other values. Second, automatic regulation of technological process parameters and discrete control by operational conditions of processing equipment. Here key moment is emergency shut-down system with deviation alarm. Deviation alarm suppose valve status (open/close) or equipment (device on/off). During the measurement process from sensing unit along cable, the signal sends value to controller, where it undergoes primary processing (analogue-to-digital conversion, checking for accuracy, noise filtering) [2]. After from controller digital code over network receive to Automated workstation (AWS). On the AWS operator sees the parameter values. However automatic regulation of technological parameter implies feedback. For this function the controller is also responsible. AWS operator can choices manual mode for regulation, or automatic mode. Another function of automation process is that stopcock or valve always give status notification information. This advantage allows timely find equipment deterioration. Also automation of technological process supposes emergency shut-down system. It means that if equipment break, oil delivery will be under threat. Controllers accomplish primary information gathering. This information stored as data array in main memory. Data exchange between controller and server is realized by using messages. Messages are formed by controller in cases if discrete parameter changing, timing deadline or output parameter value outside boundaries (minimum, maximum). Messages are stored in memory buffer and another special array, which contains information about current status of parameters. Control station (CS) sequentially scans data from each controller. At that time controller encapsulate messages from memory buffer and field of current status information. After packages are transmitted over the CS communication link and stored in archives database (archive data). Database and archive data is a set of tables that contain operational (current), historical and normative-reference information about the system parameters. Interface of process and its simulation can be implemented in SCADA system. When operator select particular object on the monitor, this data from operation database read to SCADA database. System has its own database for temporary store values that appear during particular time. So, automation of technological process means realization different functions from measurement process and its feedback to status notification information with emergency shut-down system. All this work perform controller, which contains memory buffer for messages. After controller send processed data to Automated workstation (AWS). For controlling and facilitation the work Control station (CS) use SCADA system, which includes two databases: for current status of parameters and for archives data [3].

### 3 SCADA system

Engineering of diverse systems possible on the basis of Supervisory Control and Data Acquisition (SCADA) systems. SCADA it is software package for visualization and control of technological processes. System gives a visual representation of the process and provides graphic operator interface for control and management. Also it allows to decide any issues of Automatic process control system (APCS) for oil industry. Products of SCADA very popular in world. Many companies from USA and Russia developed programmable products of system such as MasterScada, InTouch, Citect, TraceMode, Sitex, RealFlex, Genesis, FIX, Factory Link, Cimplicity etc. The choice of SCADA-system is a represent difficult task, some of programs require additional investment. However InSAT company provides an opportunity use the product in the demo version for free. Besides all this, Master Scada is leader of Russia market. Most popular oil and gas companies that use Master Scada. They are: Gazprom, Rosneft, Lukoil, Irkutskenergo, Kalinin Nuclear Power Station and others. Master Scada is a multifunctional platform that allows to design various control systems. With Master Scada program user can perform system simulation, also collecting, archiving and displaying data [4]. Technical system involve "Computer" element. It is a personal workstation that performs following functions: different equipment connection, database connection and data transfer to another computer. "Computer" can contain several elements: Object linking and embedding for Process Control Server (OPC Server), Master Link, Database connector (DB connector), controllers and input/output modules. OPC Server it is application that allows to perform handler functions for information exchange with external data sources like controllers and I/O modules. The exchange occurs by specific protocol, according to specification standard. Master Scada supports OPC Data Access (DA) and OPC Historical Data Access (HAD) standards. OPC DA grant access to interchange data in real time. OPC HAD provides the same access only to already stored data. Usually if necessary get archived data, use exactly OPC HAD Server. Both standards describe the receiving present data and interact with external devices, I/O modules and controllers. For using this servers InSAT company create MasterOPC Universal Modbus Server. The scheme of receiving data in OPC Server looks like: OPC Server using the integrated driver take data from lower level, analyze it and establish quality character with time marker, after transfer data to OPC client (Figure 1).

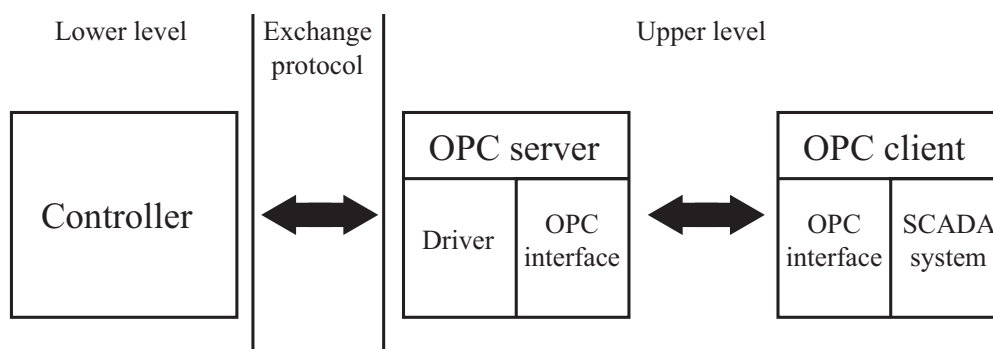


Figure 1 – Scheme of data obtaining

OPC client it is SCADA system. When Server receives the data, it test information by true/false conditions and quality character. Quality characters shows the status of OPC

Server. For instance: value is not significantly (code 0), configuration error (code 4), no connection (code 8), device error (code 12), sensor error (code 16) etc. Modbus OPC Server includes: COM, TCP/IP, PROGRAM nodes. Node is selected depending on how operator wants to receive data. It is known that each device has a unique port number. TCP / IP means that the server is running on TCP / IP protocols. PROGRAM allows work in a simulation regime. After selecting a node, need to add devices with the required settings and parameters. Variable names must be same with Master Scada parameters. All of this do for connecting OPC Server with Master Scada program, for following simulation.

#### 4 Solution

The proposed Information system allows ordering numerous data and monitors general parameters of pipeline. As project object taken heating main oil pipeline – Uzen – Atyrau – Samara. Oil pipeline begin from Uzen minefield to Atyrau petroleum refinery, then connected with “Transneft” oil pipeline system in Samara. The length of pipeline about 1380 kilometers, on Kazakhstan territory – 1232km. Diameter of pipe is 1.020 meters and depth of laying is 1.3 m from pipe axis. For project implementation taken segment between two intermediate Pumping/Heating Stations (PHS), in the area from Beyneu to Kulsary. Distance between them is 206 km. This segment is divided into five sections. At each of sections and on the first and second PHS established actuating devices, which measure thermal characteristics of high-viscosity oil. First sensor located after 20.6 km from first PHS, other after each 41.2 km. Figure 2 shows Functional process scheme (FPS) of oil transportation automation process. There is ingress of oil through valve on Pumping/Heating station (1) takes registrations of temperature (2), pressure (3), level (4), speed of fluid movement (5), heating temperature (6). After parameters pick up, they send to the Automated workstation (AWS) (7). Then petroleum moves to Pumping/Heating station (13). However for ensure oil temperature regulation divide distance from PHS 1 to PHS 2 at equidistance. For conventions, break distance to five sections (8, 9, 10, 11, 12). On each of section takes reading from sensors: Temperature (14), Heat Capacity (15), Heat Conduction (16), Heat Exchange (17), External Temperature (18), Coat Weight (19), and Deep (20). Received parameters send to nearest AWS (23). On the Control station (CS) shows data from all AWS.

Main idea of scheme is that CS signalize any thermal changes and emergencies. In the case when temperature lowered to extremely low mar, on the CS backlight this information. After Operator, which sitting at the CS, can decide upon whether to additional oil heating. Also when any emergency situations are happen, timely intervention allows to escape high consequences. In the case when equipment fault, system shows where, on what section, with which device the accident is occurred. Besides display the message, system also provides noise. Figure 3 demonstrate emergency situation with valve in the section 1, which implemented in MasterScada program. For the present purpose, dispatcher can suspend facilities work and send out experts to crash scene.

Next, intended purpose of product is timely shows serious increasing or reduction of parameters. However, when the value already reached the point of emergency it is difficult to correct the situation. That is why necessary to compute previously minimum and maximum parameters. In addition on the table, the values are painted in certain colors, which means their evidence. Red and dark blue colors shows minimum and maximum trouble situations,

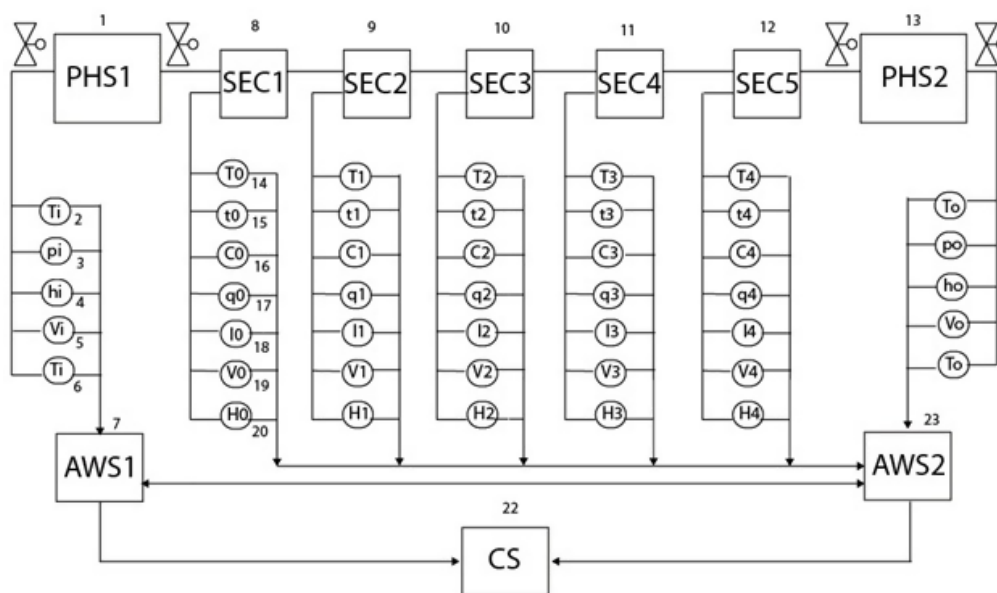


Figure 2 – Functional process scheme

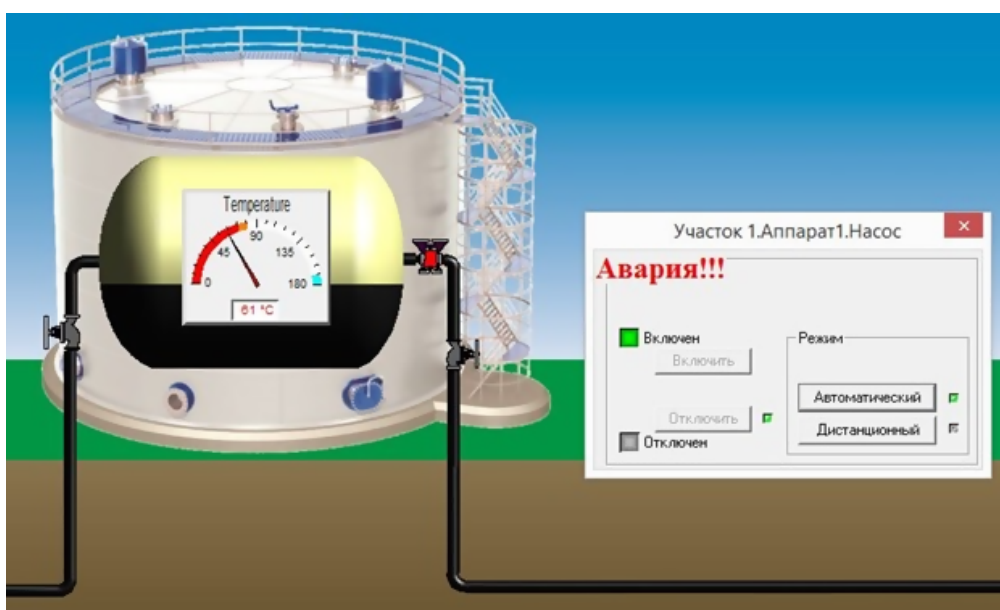


Figure 3 – Accident on Pumping/Heating station. Valve is breakdown

orange and light blue colors – minimum and maximum warning and alarm threshold. Not less useful function is trend view of particular parameter. Graphic clearly demonstrates the limits of the minimum and maximum. Program controls everything that happen and record cases when line of temperature crosses boundaries lines. Also trend displays current time (yy/mm/dd, hr/mm/sc). All of the above happens in online mode. However for full functionality was created database in Microsoft SQL Server, where storage all data from sections and stations.

Code of described procedures:

```
CREATE PROCEDURE AddValStation1 @Temperature int, @Pressure int,
@OilFlow int, @MotionSpeed int, @PreheatTemperature int AS BEGIN
Insert into station1 (Temperature, Pressure, OilFlow, MotionSpeed,
PreheatTemperature) values (@Temperature, @Pressure, @OilFlow,
@MotionSpeed, @PreheatTemperature); END
```

```
CREATE PROCEDURE AddValSection1 @HeatCapacity int, @HeatConduction
int, @HeatExchange int, @ExternalTemperature int, @CoatWeight int,
@Deep int, @Temperature int AS BEGIN Insert into section1
(HeatCapacity, HeatConduction, HeatExchange, ExternalTemperature,
CoatWeight, Deep, Temperature) values (@HeatCapacity,
@HeatConduction, @HeatExchange, @ExternalTemperature, @CoatWeight,
@Deep, @Temperature); END
```

## 5 Conclusion

The Information system, which is done with Master Scada platform, was developed like monitoring system with simulation mode. Functions of created product are: detection of accidents, failures in equipment; warning and emergency maximum/minimum values. It is mentioned that system failures and changes were attended with audio signal and blinked message. Significant instants create database where all received results are stored. There are several options for presenting the results: tables and graphs in simulation mode; graphs in the Trends window; tables in the database of Microsoft SQL Server. As a result, product helps to: decrease energy demands of oil pumping process, reduce workload of oil fluid flow (if necessary), speed up the processes of identifying and troubleshooting of equipment. The actuality of program is that the developed Information system allows to control oil pumping process, their general pipeline parameters and thermal regime. Finally, system works in real-time mode.

## References

- [1] Dairbayeva S.A., Rysbaiuly B.R., Dairbayev A.M. Information system of thermal mode of oil pumping in non-isometric main pipelines // Proceedings of the Seventh International Scientific and Practical Conference "Innovative development problems in oil and gas industry". – Almaty, 2015. – P. 564-568.
- [2] Zholymbetova Z.Z. Process automated control system development of cooling device: master's thesis. – Almaty, 2014. – P. 34-45.
- [3] Andreyev E.B., Klyuchnikov A.I., Krotov A.V., Popadko V.E., Sharapova I.Y. Avtomatizaciya tehnologicheskikh processov dobychi i podgotovki nefti i gaza. – Moskva: Nedra-Biznescentr, 2008. – P. 399-420. (in Russian)
- [4] Andreyev E.B. Design baseline in Master Scada: study guide. – Moscow, 2012. – P. 53-98.

УДК 004.822, 004.891.2

Мамыкова Ж.Д.\*, Надирбаева Г.М.\*\*, Жайдарова А.М.\*\*\*

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Республика Казахстан, г. Алматы  
E-mail: \*Zhanl.Mamykova@kaznu.kz, \*\*Galiya.Nadirbaeva@kaznu.kz,  
\*\*\*Aleksandra.Zhaidarova@kaznu.kz

### Применение информационных технологий при решении вопроса о трудоустройстве выпускников вузов

В данной статье затронут ряд проблем системы образования, такие как проблема подготовки квалифицированных кадров, проблема трудоустройства выпускников вузов, связь параметров подготовки кадров с планами по индустриализации страны в рамках Государственной программы. Представлена роль вуза в развитии Национальной инновационной системы республики, через модернизацию политики трудоустройства, программы производственных практик. Рассмотрены тенденции использования ИКТ в решении комплексной задачи формирования компетенций обучающегося, а также дальнейшего трудоустройства выпускника. Освещены основные проблемы, с которыми сталкиваются выпускники вузов при поиске места работы. Проведен анализ сайтов трудоустройства, рекрутинговых агентств. На основе проведенного анализа информационных ресурсов, а также анализа бизнес-процессов по трудоустройству в вузе, определены требования к проектируемой системе трудоустройства и описан основной функционал системы. Для повышения эффективности и производительности системы, а также для обеспечения гибкости в использовании системы для конкретных нужд пользователей предложена архитектура приложения с наличием конструктора сервисов.

**Ключевые слова:** трудоустройство, портал трудоустройства, выпускник, резюме, вакансия, информатизация образования.

Mamykova Zh.D., Nadirbayeva G.M., Zhaidarova A.M.

### Application of informational technologies in deciding the question of graduates employment

In this paper a range of issues of educational system is brought up, such as the problem of qualified personnel training, the problem of graduates employment, the parameter association of personnel training with plans on industrialization of the country within the framework of Government program. The role of the university in the development of the national innovation system of the republic is presented through modernization of employment policy, programs of manufacturing practice. Trends of using ICT in helping with the complex problem of the formation of student competencies are considered, as well as further graduate employment. Main problems are covered, which university graduates face with while searching for a job. Analysis of employment websites, recruiting agencies are conducted. Based on the conducted analysis of informational resources and analysis of business-processes on employment in the university the requirements for projected employment system are defined and main system functional is described. For an increase of effectiveness and efficiency of the system, also to provide the flexibility in usage of the system for certain users needs an application architecture is provided with availability of service builder.

**Key words:** employment, job portal, alumnus, CV, vacancy, education informatization.

Мамыкова Ж.Д., Надирбаева Г.М., Жайдарова А.М.  
**Ақпараттық технологияларды жоо түлектерін жұмысқа  
орналастыру мәселесінде қолдану**

Мақалада ЖОО түлектерін жұмысқа орналастыру Мемлекеттік бағдарлама аясында білікті кадрларды және кадрларды даярлау байланыс жоспары бойынша елді индустрияландыру сияқты маңызды мәселелер қамтылған. өндірістік тәжірибе бағдарламасы және жұмысқа орналастыру саясатын модернизациялау арқылы ЖОО-ның Республикадағы ұлттық инновациялық жүйесін дамыту рөлі ұсынылған. Білім алушының біліктілігін қалыптастыру кешенді міндетте АКТ қолдану үрдісі және түлекті әрі қарай жұмысқа орналастыру мәселелері қаралды. ЖОО түлектері жұмыс орнын іздестіруде кездесетін мәселелер қаралды. Жұмысқа орналастыру сайттарына, рекрутинг агенттіктеріне талдау өткізілді. Ақпараттық ресурстар мен жұмысқа орналастыру бойынша бизнес-үдерістерге талдау негізінде, жұмысқа орналастыру жүйесінде негізгі функционал анықталды. Тиімділікті жоғарлату үшін және жүйенің өнімділігін сонымен бірге, сервис конструкторлары бар қосымшасының ұсынылған архитектура қолданушылардың нақты мұқтаждықтары үшін жүйені пайдалануын қамтамасыз ету. **Түйін сөздер:** жұмысқа орналастыру, жұмысқа орналастыру порталы, түлек, түйіндеме, бос жұмыс орыны, білімді ақпараттандыру.

## 1 Введение

Главным активом инновационности страны является человеческий капитал, а именно высококлассные специалисты, эффективно использующие накопленный опыт, квалификацию и знания, умеющие оперативно модернизировать свой профессиональный арсенал и интеллектуальный уровень. Это связано с тем, что в настоящее время конкурентные преимущества предприятия определяются не столько технологией промышленного производства, размещением производственных сил, объемом инвестиций и прочими организационно-экономическими составляющими, сколько обеспеченностью предприятия высококвалифицированным персоналом, обладающим компетентностью и способным принимать оптимальные решения в сложной обстановке.

Современные реалии таковы, что требуется изменение роли специалиста в высокотехнологической промышленности и современном обществе, так как сегодня глобализация значительно меняет масштаб научно-технологических инноваций. Вопрос подготовки квалифицированных кадров увязан с планами по индустриализации страны в рамках Государственной программы индустриально-инновационного развития Республики Казахстан на 2015-2019 годы, а его успешное решение позволит снабдить высококвалифицированными специалистами как частный сектор, так и государственные структуры, развивать инновационную деятельность, которая становится источником повышения конкурентоспособности страны.

## 2 Постановка задачи

Основной задачей исследования является определение факторов, способствующих повышению конкурентоспособности выпускника и правильному выбору им изначально самой профессии, на основе анализа потребностей рынка труда. Так как в условиях современных рыночных отношений нет системы набора в вузы и техникумы с учетом показателей по планированию предприятиями обновления своего кадрового состава, существует нехватка специалистов в одной области и переизбыток в другой. На рисунке



1 схематично представлена роль вуза в развитии Национальной инновационной системы республики, через пересмотр программ производственных практик обучающихся и модернизацию политики трудоустройства.



Рисунок 1 – Роль вузов в развитии Национальной инновационной системы республики

Модернизация политики трудоустройства выпускников вуза, в первую очередь, предполагает реинжиниринг процессов взаимодействия вузов, в частности Центров карьеры, и работодателей, как субъектов рынка труда. На выходе образовательного процесса - выпускник с определенными компетенциями, с совокупностью конкурентных преимуществ в наличии приобретенных в процессе обучения теоретических знаний и практических навыков. Однако для многих предприятий требуются работники с опытом работы не менее 3-х и более лет. При изучении вопроса трудоустройства выпускников перед вузом встает ряд вопросов: каким образом решить проблему трудоустройства выпускников вузов, не имеющих опыта работы на производстве? как лучше информировать работодателя о компетенции выпускника? как организовать активное участие предприятий в построении образовательных программ? как лучше информировать будущих выпускников об имеющихся вакансиях и состоянии рынка труда?

### 3 Методы и средства трудоустройства выпускников

Можно утверждать, что пресловутая "система принудительного трудоустройства" или "принудительное распределение на вакантные места, независимо от желания и места проживания", базирующаяся на лозунге: "В нашей стране нет и не может быть безработных", несла в себе элементы гарантированного трудоустройства. Для женщин с

детьми или нерадивых студентов этот институт играл роль социальной защиты, которая в рыночных условиях сведена до минимума. На данный момент получивший диплом выпускник вуза надеется трудоустроиться на высокооплачиваемую работу по специальности, но не каждый выпускник, защищая диплом, уже знает, где будет работать. Шансы выпускника на "хорошее" трудоустройство зависят не только от полученных знаний и навыков, но и от информированности в плане доступных вакансий, в том числе не требующих опыта работы. Современный выпускник осуществляет поиск места работы, используя, в первую очередь, сайты трудоустройства и сайты социальных сетей.

Информационные технологии в сфере трудоустройства представлены общими и специализированными сайтами трудоустройств, на которых есть возможность для поиска вакансии, размещения резюме и необходимых ссылок по трудоустройству. Сайты по трудоустройству могут быть общими и специализированными. Общие сайты содержат информацию о вакансиях из разных профессиональных областей, специализированные сайты предоставляют информацию о специалистах из какой-то одной сферы деятельности.

В последние годы успешно развиваются биржи труда в Интернете. Крупнейшие представители рекрутинговых сетевых агентств – это HeadHunter, крупнейший рекрутинговый сайт Рунета, а Monster.com – крупнейший сайт в мире по поиску работы и персонала. На сайте Monster.com расположено более одного миллиона предложений от работодателей и более чем 200 миллионов резюме в базе данных (2015 год). В поиске работы сайты Monster посещает приблизительно 26 миллионов человек каждые 3 месяца.

Социальные сети все активнее используются работодателями для поиска специалистов. Иногда социальные сети – единственная возможность найти специалиста в редкой сфере.

Проведен сравнительный анализ информационных порталов трудоустройства: Рекрутинговые сайты: hh.kz (HeadHunter рунет), monster.com (весь мир); Профессиональные тематические сайты: enbek.kz, joblab.kz, karierist.kz, kontakt.kz, kzwork.kz, jooble.kz, medkadry.kz; Профессиональные форумы: zarplata.kz; Социальные сети: LinkedIn, ВКонтакте, Facebook, Мой круг; Доска объявлений: olx.kz, 24rabota.kz; Биржа труда молодежи: mbt.enbek.kz, birzhatruda.kz.

При обращении к вышеуказанным информационным ресурсам по трудоустройству возникает существенная проблема по их эффективности - это отсутствие взаимодействия между участниками рынка труда и вузами. Отрасли или конкретной структуре для того, чтобы получить высококвалифицированного специалиста, необходимо иметь оперативную информацию о конкретном вузе: содержании учебного процесса, цели и результаты образовательной программы, кадровый потенциал и материально-техническая обеспеченность, успеваемость выпускников, компетенции определенных видов деятельности выпускников, программы производственных практик, возможность конкретного участия в процессе разработки и развития образовательных программ с учётом требований рынка труда и опережающей подготовки специалистов для перспективных направлений развития науки и техники. В свою очередь информационные ресурсы: должны регулярно обновляться, иметь удобный интерфейс, близкий к типовому, в котором должна быть наиболее полная информация о потенциальных субъектах рынка труда, о требованиях предприятий той или иной отрасли к специалистам, условиях и предпочтениях.

Решением проблем трудоустройства выпускников вуза может послужить разработка инструментария и механизмов для активного взаимодействия всех участников рынка труда. Таким инструментом может служить описываемая ниже система по трудоустройству, поддерживаемая вузом.

В настоящее время становится очевидным, что с возникновением рыночного механизма спроса и предложения рабочей силы необходим новый механизм взаимодействия учреждений образования и рынка труда. В этой связи сегодня нужен личностно-ориентированный подход в организации трудоустройства, который можно легко реализовать с применением ИКТ, путем:

- создания единого портала (открытой коммуникационной площадки) "Молодежь и карьера" для развития вопросов трудоустройства, развития деловых отношений с бизнес-структурами;

- создания коммуникационного сервиса для взаимодействия вузов с работодателями по вопросам оценки образовательных программ, организации производственных практик, формирования с применением ИКТ (онлайн) "Ярмарки вакансий" (принцип аукциона), ведение рубрики HR-вопросов, формирования профессиональных дискуссионных площадок;

- предоставления аналитической информации по рынку труда, чтобы корректировать матрицу ключевых компетенций, определять потребность рынка труда, выявлять степень удовлетворения подготовкой кадров вузами, помочь в определении траектории личного роста выпускника;

- реализации интеллектуального поискового сервиса по вакансиям и резюме, с целью формирования когнитивной карты трудоустройства, карты ключевых компетенций специалистов, анализа активности работодателей соблюдать государственную программу "Подготовка национальных кадров";

- формирования сервиса для развития сетевого подхода к организации труда (работа фрилансерам), с целью формирования мобильных проектных команд, и формирования базы данных узкопрофилированных специалистов;

- создания научных сообществ для решения междисциплинарных задач из числа научных сотрудников и инженерно-технических сотрудников, за счет интеграции в научную инфраструктуру вузов (такой подход позволит выявлять профессионалов, для привлечения к государственным проектам стратегического значения);

- создания сообщества по внедрению, использованию современных наукоемких технологий, трансфер технологий с целью выявления знаний и умений среди выпускников и потребности работодателей в этих технологиях;

- создания системы взаимодействия госорганов, Палаты предпринимателей в организации программы трудоустройства, путем консультирования по HR-вопросам, анализа проблем трудоустройства, разработки рекомендаций вузам, инструкций для предприятий и др.

## 4 Функциональные возможности информационной системы по трудоустройству

### 4.1 Необходимость в информационной системе по трудоустройству

Проведенный анализ информационных ресурсов позволяет определить основной функционал информационной системы по трудоустройству, который должен включать такие параметры, как: регистрация, авторизация пользователей; поиск вакансий и резюме (простой и расширенный); размещение вакансий/резюме; просмотр вакансий/резюме; формирование списков избранных вакансий/резюме; отправка резюме и вакансий на конкретные предложения; подписка на вакансии и резюме; поддержка вакансий различных типов (постоянная работа, практики, стажировки, проектная работа/фриланс); управление личным профайлом; прямой диалог с работодателем; обратная связь; формирование статистических отчетов; создание банка данных для проведения анализа состояния рынка труда и востребованности выпускников вуза и др.

Предполагается, что новая информационная система по трудоустройству будет не только первым в Казахстане агрегатором банка данных выпускников вузов, но и первой системой по оценке уровня подготовки выпускников, как в открытом, так и в закрытом режимах.



Рисунок 2 – Функциональная модель Системы

Информационная система "Молодежь и карьера" (далее Система) предназначена для автоматизации учета, анализа, мониторинга и управления процессами связанных с трудоустройством выпускников вуза, с целью консолидации в единой базе данных всех сведений о состоянии бизнес-процессов трудовой деятельности выпускника вуза, начиная с процесса приобретения практических навыков в рамках обучения в вузе, предоставлении online-площадки для коммуникаций с работодателями, профессорско-преподавательским составом вуза и другими участниками рынка труда, для формирования аналитики и выработки управляющих воздействий по улучшению этого важного бизнес-процесса университета, за счет создания целевых индикаторов стратегии развития рынка труда.

Объектами автоматизации являются бизнес-процессы факультетов, кафедр, Центра карьеры и бизнеса, а также других подразделений и организаций вуза, заинтересованных в трудоустройстве выпускников вуза.

Модель информационного обеспечения Системы описана в нотации IDEF0 на рисунках 2 и 3.

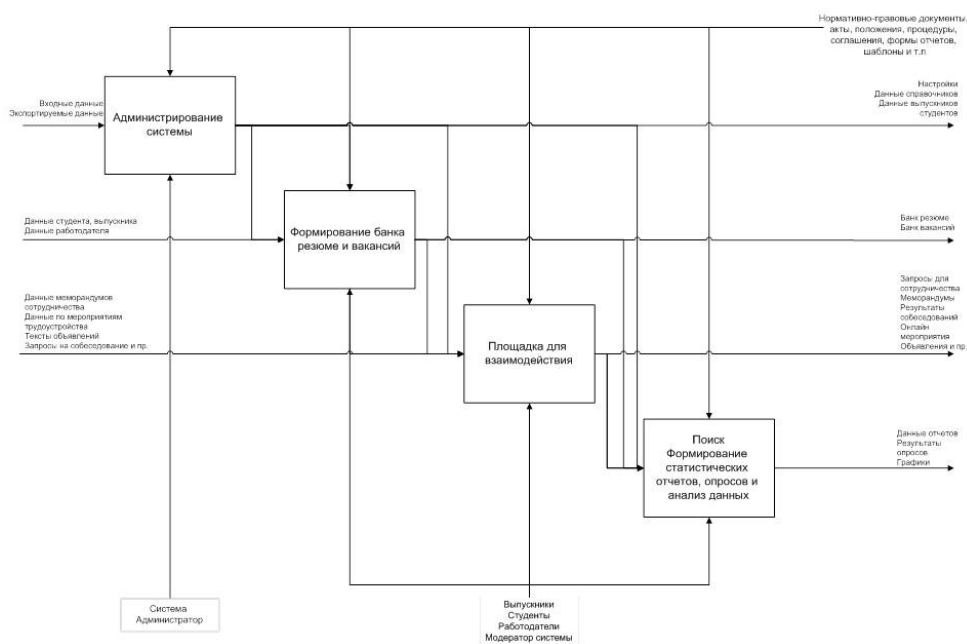


Рисунок 3 – Функциональная модель "Структура Системы"

Социально-экономический эффект разработки такой системы будет заключаться в улучшении профессиональной подготовки выпускников; будут даны рекомендации к построению программ профессионального развития и обучения сотрудников компании/гос.организаций; в выработке рекомендаций по развитию Программы национализации профессиональных кадров, социальной и сервисной инфраструктуры в регионе для удержания профессиональных кадров.

#### 4.2 Требования к системе

Система должна:

- обладать интуитивно понятным интерфейсом и быть удобной в обращении;
- эффективно решать основные задачи, связанные с поиском резюме и вакансий, обеспечивать взаимодействие соискателей и работодателей;
- предоставить возможности для проставления оценок, составления опросников и проведения других видов исследований касательно рынка труда, построения рейтинговых списков на основании отзывов и оценок и проведения различных мероприятий по трудоустройству;
- заинтересовать потенциальных пользователей широким спектром функциональных возможностей, предоставлять функции не только по поиску и просмотру результатов поиска, но и давать рекомендации (построенные по результатам отзывов, оценкам

и опросам); выпускникам вуза поддерживать связь с университетом и преподавателями; информировать зарегистрированных выпускников вуза об имеющихся вакансиях, мероприятиях, приглашать в проекты;

– позволить работодателю участвовать в подготовке кадров; работодателю оценивать образовательные программы по направлению подготовки в его сфере деятельности и давать рекомендации по изменению образовательных программ с учетом потребностей рынка труда;

– позволить преподавателям взаимодействовать с работодателями;

– позволить вузу получать достоверные данные о трудоустройстве выпускников, рейтинге выпускников вуза среди предприятий и прочие статистические данные;

– позволить формировать статистические отчеты по формам, запрашиваемым министерствами и прочими государственными организациями;

– обеспечить возможность предоставления доступа по срокам;

– обеспечить архивирование и удаление устаревших данных (резюме, вакансии) по заданным настройкам;

– иметь гибкую ролевую политику, иметь возможность назначать модераторов из числа обычных пользователей системы. Модераторы могут быть назначены на какие-то отдельные ресурсы, либо на все части системы;

– давать возможность распространять информацию среди пользователей различными методами (новости, объявления, рассылки, уведомления).

В информационной системе предусмотрены следующие роли, как: администратор Системы; аналитик Системы; обучающийся; работодатель; выпускник; эксперт HR; представитель госорганов; сотрудник вуза.

На рисунках 4 и 5 приведены фрагменты проектируемой Системы (ycareer.kaznu.kz).

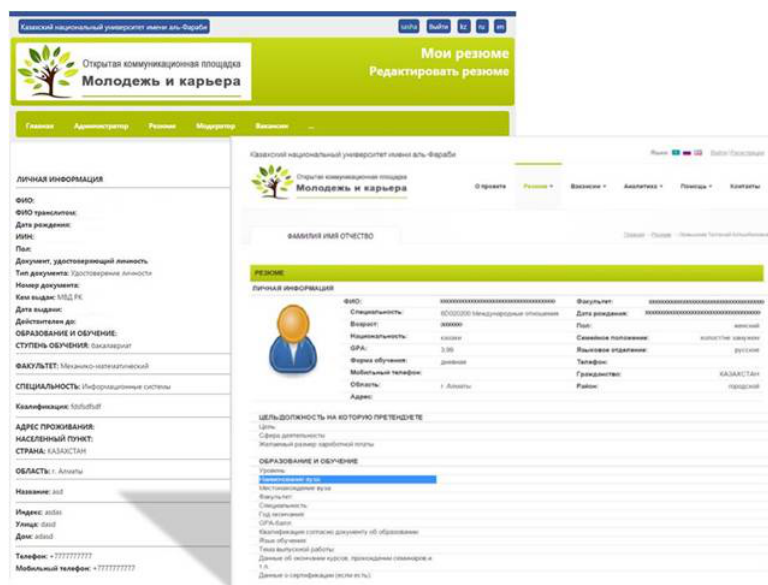


Рисунок 4 – Фрагменты личного кабинета и резюме обучающегося

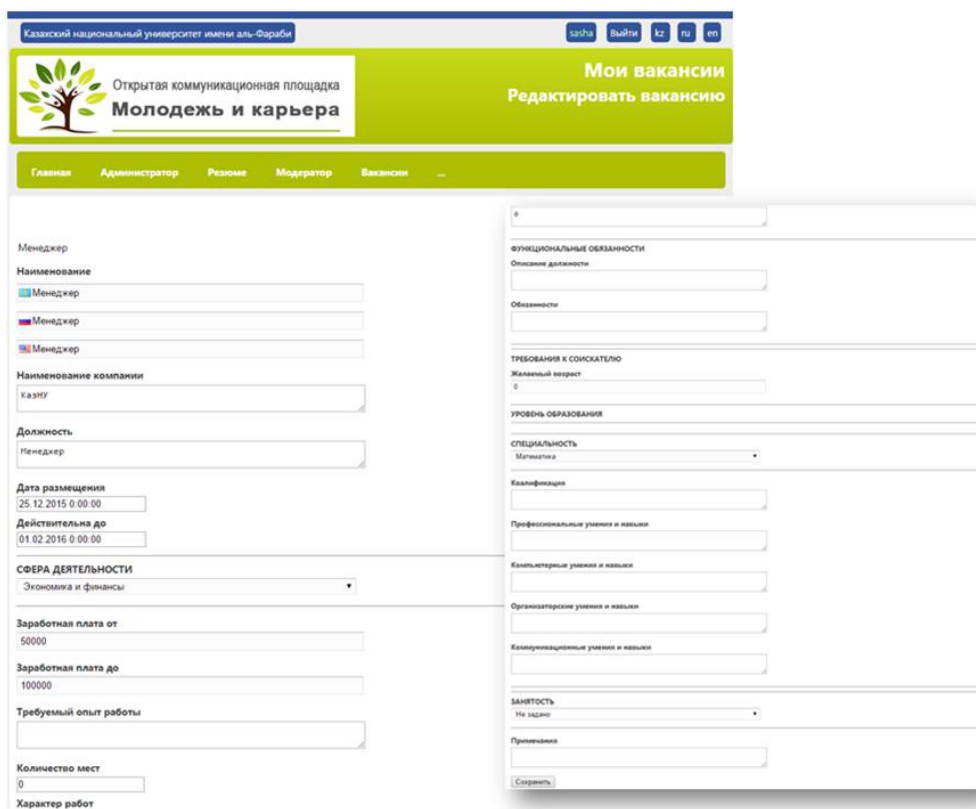


Рисунок 5 – Фрагмент личного кабинета работодателя и вакансий компании

Для повышения эффективности и производительности Системы, а также для обеспечения гибкости в ее использовании для конкретных нужд пользователей необходимо проектирование архитектуры приложения с наличием конструктора сервисов. Этот подход представляет собой сервис-ориентированную архитектуру, которая позволяет создавать сервисы, построенные путём комбинации самостоятельных и взаимодействующих блоков. Преимущества для пользователей: лично-ориентированный подход в настройке сервисов, то есть пользователь изначально выбирает только те функциональные возможности, которые ему действительно требуются; комплекс сервисов можно строить постепенно, добавляя необходимые сервисы.

Важно отметить, что для каждой сферы деятельности на рынке труда имеются свои критерии отбора. Резюме соискателя, нацеленное на требования конкретной вакансии, имеет больше шансов пройти отбор, чем резюме, указывающее общие возможности соискателя. При наличии сервис-ориентированной архитектуры Системы, соискателям предоставляется широкие возможности формирования собственного профайла, а также гибкого резюме, нескольких резюме по отдельным сферам деятельности, с гарантией предоставления сведений из университета, с отзывами от преподавателей, руководителей дипломных проектов, практик и стажировок. Таким образом, это не просто "офф-лайн резюме", это "живое" резюме подтвержденное вузом, что очень важно для работодателей.

## 5 Заключение

Проектируемая Система позволит объективно оценивать конкурентоспособность выпускников вуза на рынке труда, способствовать в обеспечении молодых специалистов рабочими местами, осуществлять мониторинг потребности рынка труда в тех или иных специалистах.

Такой подход позволит вузу занять свое место на рынке труда по подготовке специалистов, быть в курсе требований рынка, а также дать возможность выпускникам быть конкурентоспособными. Вуз закладывает конкурентные технологии, начиная с учебной скамьи, автоматический подбор баз практик, стажировок, вакансий, возможность формирования множества специализированных резюме по направлениям деятельности, для работодателя автоматический подбор выпускников, ранжирование по результатам успеваемости, анализ образовательных программ и прочее.

Таким образом, использование информационных технологий в процессе трудоустройства выпускника вуза является первостепенной задачей вуза, продиктованной современными требованиями общества и рынка труда, в частности.

## Литература

- [1] *Мутанов Г.М.* Инновации: создание и развитие. – Алматы: Қазақ университеті, 2012. – 244 с.
- [2] *Государственная программа индустриально-инновационного развития Республики Казахстан на 2015-2019 годы:* [Электрон. ресурс]. – 2015. - URL: <http://www.mid.gov.kz/ru/pages/gosudarstvennaya-programma-industrialno-innovacionnogo-razvitiya-respubliki-kazahstan-na-2015> (дата обращения: 20.05.2015).
- [3] *Боровков А.И.* Современное инженерное образование: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – 80 с.
- [4] *Пиралова О.Ф.* Современное обучение инженеров профессиональным дисциплинам в условиях многоуровневой подготовки: [Электрон. ресурс]. – 2009. – URL: <http://www.rae.ru/monographs/62> (дата обращения: 21.08.2015).
- [5] *Что ожидает рынок труда Казахстана в 2015 году:* [Электрон. ресурс]. – 2000. – URL: <http://almata.gojob.kz/seeker/career/article/47090-cto-ozhidaet-rynok-truda-kazahstana-v-2015-godu.html> (дата обращения: 20.05.2015).
- [6] *Анализ рынка труда РК: наиболее дефицитными становятся технические профессии:* [Электрон. ресурс]. – 2012. – URL: <http://www.primeminister.kz/news/show/26/analiz-rynka-truda-rk-naibolee-defitsitnymi-stanovjatsja-tehnicheskie-professii-/15-05-2014> (дата обращения: 20.05.2015).
- [7] *Сейткалиев Р.М., Мергалиева Л.И.* Формирование рынка труда Казахстана в условиях ЕАЭС: [Электрон. ресурс]. – 2010. – URL: <http://group-global.org/ru/publication/21618-formirovanie-rynka-truda-kazahstana-v-usloviyah-eaes> (дата обращения: 20.05.2015).
- [8] *Казахстан в 2013 году // Комитет по статистике Министерства национальной экономики Республики Казахстан: Статистический ежегодник / на казахском и русском языках.* - Астана, 2014. - 484 с.: [Электрон. ресурс]. – 2015. – URL: <http://www.stat.gov.kz> (дата обращения: 20.09.2015).
- [9] *Найдите работу:* [Электрон. ресурс]. – 2015. – URL: <http://hh.kz/> (дата обращения: 15.06.2015).

## References

- [1] *Mutanov G.M.* Innovatsii: sozdanie i razvitie. – Almaty: Kazakuniversiteti, 2012. – 244 s.
- [2] *Gosudarstvennaya programma industrialno-innovacionnogo razvitiya Respubliki Kazakhstan na 2015-2019 gody:* [Elektron.resurs]. – 2015. – URL: <http://www.mid.gov.kz/ru/pages/gosudarstvennaya-programma-industrialno-innovacionnogo-razvitiya-respubliki-kazahstan-na-2015> (data obrashcheniya: 20.05.2015).



- 
- [3] *Borovkov A.I.* *Sovremennoe inzhenernoe obrazovanie: ucheb.posobie.* - SPb.: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2012. – 80 s.
- [4] *Piralova O.F.* *Sovremennoe obuchenie inzhenerov professionalnym distsiplinam v usloviyah mnogourovnevoy podgotovki:* [Elektron.resurs]. – 2009. – URL: <http://www.rae.ru/monographs/62> (data obrashcheniya: 21.08.2015).
- [5] *Chto ozhidaet rynek truda Kazakhstana v 2015 godu:* [Elektron.resurs]. – 2000. – URL: <http://almata.gojob.kz/seeker/career/article/47090-chto-ozhidaet-rynok-truda-kazakhstana-v-2015-godu.html> (data obrashcheniya: 20.05.2015).
- [6] *Analiz rynka truda RK: naibolee defitsitnymi stanovjatsja tehicheskie professii:* [Elektron.resurs]. – 2012. – URL: <http://www.primeminister.kz/news/show/26/analiz-rynka-truda-rk-naibolee-defitsitnymi-stanovjatsja-tehicheskie-professii-/15-05-2014> (data obrashcheniya: 20.05.2015).
- [7] *Seitkaliyev R.M., Mergaliyeva L.I.* *Formirovanie rynka truda kazahstana v usloviyah EAES:* [Elektron.resurs]. – 2010. – URL: <http://group-global.org/ru/publication/21618-formirovanie-rynka-truda-kazahstana-v-usloviyah-eaes> (data obrashcheniya: 20.05.2015).
- [8] *Kazakhstan v 2013 godu //* *Komitet po statistike Ministerstva natsionalnoi ekonomiki Respubliki Kazakhstan: Statisticheskiy ezhegodnik / na kazakhskom i russkom yazikah.* - Astana, 2014. - 484 s.: [Elektron.resurs]. – 2015. – URL: <http://www.stat.gov.kz> (data obrashcheniya: 20.09.2015).
- [9] *Naidite rabotu:* [Elektron.resurs]. – 2015. – URL: <http://hh.kz/> (data obrashcheniya: 15.06.2015).

УДК 004.056.53(045)

Ахметов Б.С.<sup>1\*</sup>, Корченко А.А.<sup>2\*\*</sup>, Жумангалиева Н.К.<sup>1\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И.Сатпаева,  
Республика Казахстан, г. Алматы

<sup>2</sup>Национальный авиационный университет, кафедра безопасность информационных технологий, Украина, Киев

E-mail: \*bakhytzhana.akhmetov.54@mail.ru, \*\*annakor@ukr.net, \*\*\*nazym\_k.81@mail.ru

### Технология выявления аномального состояния для систем обнаружения вторжений

Одним из решений обеспечения безопасности, являются системы обнаружения вторжений, построенные по аномальному принципу. Такие системы обычно основываются на математических методах, требующих много времени на подготовку статистических данных. Поэтому необходимы более эффективные методы, основанные на экспертных подходах. Для решения этой задачи предлагается технология, базирующаяся на математических моделях и методах нечеткой логики, и содержащая восемь базовых этапов (выбор метода обработки нечетких данных, выбор метода определения коэффициента важности, формирование множеств вторжений и величин, формирование эталонов величин, фаззификация величин, формирование множества решающих правил, определение матриц инициализации, формирование результата), раскрывающие процесс выявления аномального состояния, порождаемого определенным типом кибератак в информационных системах. Эту технологию можно использовать для создания или усовершенствования существующих систем выявления кибератак в компьютерных сетях.

**Ключевые слова:** кибератака, системы обнаружения вторжений, обнаружение аномалий в компьютерных системах, решающие правила, модель базовых величин, модель эталонных величин, модель решающих правил, построение решающих правил, технология выявления аномалий, технология обнаружения вторжений.

Akhmetov B.S., Korchenko A.A., Zhumangaliyeva N.K.

### Technology of abnormal states for detection of intrusion systems

One of the security solutions are detection of intrusion systems based on the anomalous principle. Such systems are usually based on mathematical methods that require a lot of time for preparing statistics. That's why, a need for more effective methods based on expert approaches. In order to solve this problem, technology is proposed, based on mathematical models and methods of fuzzy logic, and contains eight basic steps (selection of fuzzy data processing method, the choice of method for determining the importance of the factor, the formation of sets of invasions and values, the formation of standards of size, fuzzification values, forming a plurality of critical rules, the definition of initialization matrix formation results), revealing the process of identifying an abnormal condition, generated by a specific type of cyber attacks in the information systems. This technology can be used to create or enhance existing detect systems of cyber attacks on computer networks.

**Key words:** cyber attack, detection of intrusion system, the detection of anomalies in computer systems, decision rules, the model of base units, a model of reference values, model of decision rules, construction of decision rules, anomaly detection technology, detection of intrusion technology.

Ахметов Б.С., Корченко А.А., Жумангалиева Н.К.  
**Шабуылдарды анықтау жүйесінің ауытқымалығының жағдайын  
анықтау технологиясы**

Қауіпсіздікті қамтамасыз етудің бір шешімі ретінде ауытқымалығының принципі бойынша құрылған шабуылдарды анықтауға арналған жүйені атауға болады. Бұл жүйелер әдетте статистикалық мәліметтерді дайындауға көп уақыт қажет ететін математикалық әдістерге негізделді. Сондықтан сарапшылық ұстанымдарға негізделген нәтижесі көбірек әдістер қажет. Бұл міндетті шешу үшін математикалық моделдер мен айқын емес қисын әдістеріне негізделген және ақпараттық жүйедегі кибершабуылдардың белгілі бір түрі туғызатын ауытқымалық жағдайды анықтау үрдісінің сегіз негізгі кезеңдерден тұратын (айқын емес мәліметтерді өңдеу әдісі, маңыздылық коэффициентін анықтау әдісі, шабуылдар жиыны мен шамаларды қалыптастыру, шама эталондарын қалыптастыру, шамалардың айқындалмауы, шешуші ережелер жиынтығын қалыптастыру, инициализация қалыптасталарын айқындау, нәтижені қалыптастыру) технология ұсынылады. Бұл технологияны компьютерлік жүйелердегі кибершабуылдарды анықтауға арналған жүйені құру немесе жетілдіру үшін пайдалануға болады. **Түйін сөздер:** кибершабуыл, шабуылдарды анықтау жүйесі, компьютерлік жүйедегі аномалияларды анықтау, шешуші ережелер, негізгі шамалардың моделі, шама эталондарының моделі, шешуші ережелерді құру, аномалияларды анықтау технологиясы, шабуылдарды анықтау технологиясы.

## 1 Введение

Интенсивное развитие информационных технологий оказало положительное влияние на все сферы человеческой деятельности. Вместе с этим наблюдаются и побочные эффекты, в первую очередь в связи с тем, что ресурсы информационных систем (РИС) все больше подвергаются воздействиям кибератак, под которыми понимаются меры, предпринимаемые для подрыва безопасности информационной системы (ИС) или реализация угроз характеристикам безопасности РИС посредством использования их уязвимостей. Современный спектр вторжений на РИС достаточно широкий и только основываясь на базовые признаки их можно классифицировать по: автоматизации; взаимодействию с политикой безопасности; дистанционности; действию, порожденному несанкционированным доступом; внешнему проявлению; инициализационному условию; инструментальным средствам; наличию обратной связи; нарушению базовых характеристик безопасности; природе взаимодействия; реляционным признакам; специфике реализации; направленности результата; степени сложности; типу базового ресурса; семиуровневой эталонной модели [1]. В стремительно развивающейся информационной среде появляются новые виды угроз, порождающие новые виды кибератак на ее ресурсы. В этой связи существует потребность в системах безопасности построенных на основе технологий, позволяющих анализировать, контролировать, прогнозировать и блокировать такие вторжения. Одним из решений защиты РИС от указанных кибератак, являются системы обнаружения вторжений (СОВ), построенные по аномальному принципу. Такие системы обычно основываются на математических методах, требующих много времени на подготовку статистических данных. Поэтому необходимы более эффективные технологии основанные на экспертных подходах.

Отметим, что несанкционированные воздействия на РИС оказывают влияние на среду их окружения и порождают в ней определенные аномалии. Такая среда обычно слабоформализованная, нечетко определенная и для выявления вторжений, породивших ано-

малии в этой среде необходимы соответствующие технологии. В работах [1-3] показана эффективность применения математического аппарата нечетких множеств для решения такого рода задач, а его использование для формализации подхода к выявлению вторжений, позволит повысить эффективность разрабатываемых СОВ. В этой связи, целью данной работы является разработка технологии выявления аномалий, использование которой позволит синтезировать эффективно функционирующие системы, осуществляющие обнаружение вторжений по аномальному состоянию величин (например, сетевого трафика), характеризующих среду окружения. Под такой средой будем подразумевать совокупность значений сформированных переменных (например, время обработки запроса, загруженность процессора, количество обращений к ресурсу, число подключений и др.), которые можно использовать для оценивания протекающих процессов в ИС с целью выявления ее аномального состояния. В работах [4-6] предложена модель базовых величин (МБВ), модель эталонных величин (МЭВ) и модель решающих правил (МРП), которые возьмем за основу разработки соответствующей технологии. Реализация технологии осуществляется за восемь базовых этапов: 1) выбор метода обработки нечетких данных, 2) выбор метода определения коэффициента важности (КВ), 3) формирование множеств вторжений и величин, 4) формирование эталонов величин, 5) фазсификация величин, 6) формирование множества решающих правил (РП), 7) определение матриц инициализации, 8) формирование результата, которые представлены на рис. 1. Опишем каждый из них.

**Этап 1 – выбор метода обработки нечетких данных.** На этом этапе осуществляется выбор методов обработки нечетких данных относительно заданных критериев. В работе [7] рассмотрены три базовые группы соответствующих методов – формирования функций принадлежности (ФП) (четырнадцать методов – МФФП<sub>1</sub>, МФФП<sub>2</sub>, МФФП<sub>3</sub>, ..., МФФП<sub>14</sub>, например, метод корректировки параметров (КП), метод интервальных оценок (МИО), метод лингвистических термов с использованием статистических данных (МЛТС) и др.), сравнения функций принадлежности (восемь методов – МСФП<sub>1</sub>, МСФП<sub>2</sub>, МСФП<sub>3</sub>, ..., МСФП<sub>8</sub>, например,  $\alpha$  – уровневое расстояние (АУР), функция упорядочения нечетких подмножеств (ФУ), метод поиска "центра тяжести" (ЦТ) и др.) и нечеткой арифметики (четырнадцать методов – МНА<sub>1</sub>, МНА<sub>2</sub>, МНА<sub>3</sub>, ..., МНА<sub>14</sub>, например, максимная композиция (ММК),  $\alpha$  – уровневый принцип обобщения (АУПО), метод линейной аппроксимации по локальным максимумам (ЛАЛМ) и др.), из которых посредством процедур выбора МФФП, МСФП и МНА отбирается один из представителей. Процесс выбора осуществляется на основе заданных критериев. Так для всех групп методов базовыми критериями являются – используемый класс ФП и экспертная информация, для МФФП – использование ранговых оценок и число привлекаемых экспертов, а для МСФП – применение  $\alpha$  – уровневого подхода. Если несколько методов будут отвечать установленным критериям, то окончательное решение о выборе будет основываться на предпочтении эксперта. Например, согласно принятых критериев для каждой группы возможных методов МФФП<sub>*i*</sub> ( $i = \overline{1, 14}$ ), МСФП<sub>*j*</sub> ( $j = \overline{1, 8}$ ) и МНА<sub>*k*</sub> ( $k = \overline{1, 14}$ ), после реализации процедуры выбора определяется соответственно метод ЛАЛМ, АУР и МЛТС, которые совместно будут использоваться для обработки нечетких данных при решении задачи выявления аномального состояния в компьютерных системах.

**Этап 2 – выбор метода определения коэффициента важности (МОКВ).**

Этап ориентирован на выбор (согласно установленным критериям) метода формирования КВ из заданного множества. В работе [8] рассмотрено двадцать пять МОКВ (МОКВ<sub>1</sub>, МОКВ<sub>2</sub>, МОКВ<sub>3</sub>, ... МОКВ<sub>25</sub>, например, метод средних рангов (СР), мультипликативная свертка Кини (МСК), метод случайных векторов (СЛВ) и др.), среди которых в процессе реализации процедуры выбора определяется рабочий метод. Если несколько методов будут отвечать установленным критериям, то в данном случае окончательным решением о выборе будет принимать эксперт. Приоритет метода определяется посредством процедуры выбора МОКВ согласно таких критериев как: форма выражения входных (ВхД) и выходных (ВыхД) данных; трудоемкости и рекомендуемой шкалы [8]. Например, согласно установленных критериев и приоритетов эксперта из множества МОКВ<sub>*i*</sub> (*i* = 1, 25) выбирается метод СР.

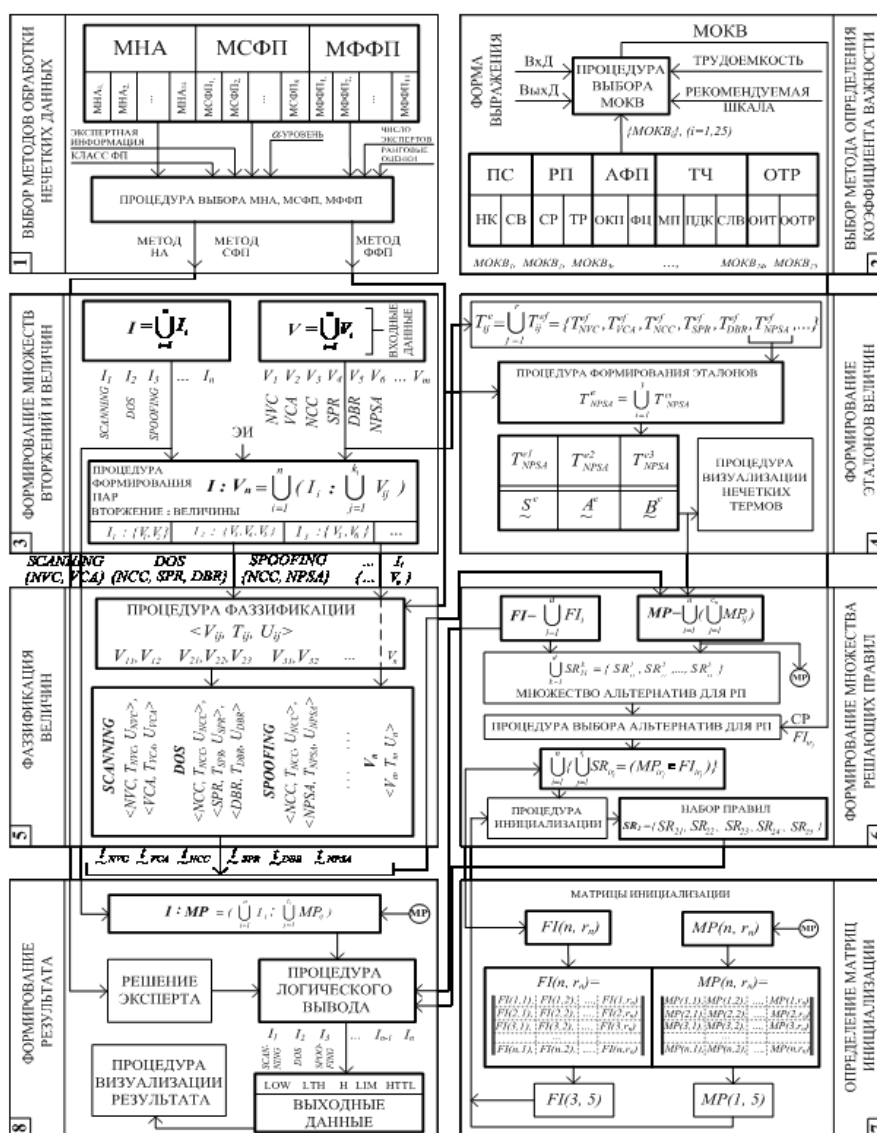


Рисунок 1 – Схема отображения технологии идентификации аномалий

**Этап 3 – формирование множеств вторжений и величин.** Этап предназначен для формирования множества вторжений и соответствующего им множества величин

для выявления аномального состояния. На основании входных величин среды окружения с использованием МБВ [4] формируются множество возможных вторжений  $\mathbf{I} = \bigcup_{i=1}^n I_i$  и соответствующее им множество возможных величин  $\mathbf{V} = \bigcup_{i=1}^m V_i$ , согласно значений которых (например,  $V_1 = NVC$ ,  $V_2 = VCA$ ,  $V_3 = NCC$ ,  $V_4 = SPR$ ,  $V_5 = DR$ ,  $V_6 = NPS$ ,  $\dots$ ,  $V_m$ ) с учетом решений экспертов можно выявить аномальное состояние, порождаемое определенным элементом из множества  $\mathbf{I}$ , например,  $(I_1 = SCANNING, I_2 = DOS, I_3 = SPOOFING, \dots, I_n)$  [4]. Для выявления аномального состояния каждому типу вторжения  $\mathbf{I}$  ставится в соответствие подмножество набора величин  $\mathbf{V}_n$  из множества  $\mathbf{V}$ , по которым можно обнаружить подозрительную активность в системе. Таким образом, формируется множество пар – "вторжение : величины"  $\mathbf{I} : \mathbf{V}_n = \bigcup_{i=1}^n (I_i : \bigcup_{j=1}^{k_i} V_{ij})$ , в котором каждому вторжению будет соответствовать набор величин  $(I_1 : \{V_1, V_2\})$ ,  $(I_2 : \{V_3, V_4, V_5\})$ ,  $(I_3 : \{V_3, V_6\})$ ,  $\dots$ ,  $(I_n : \{V_3, V_n\})$ , например,  $(SCANNING\{NVC, VCA\})$ ,  $(DS : \{NCC, SPR, DR\})$  и  $(SPOOFING\{NCC, NPS\})$ .

**Этап 4 – формирование эталонов величин.** Этот этап направлен на получение эталонов, которые необходимы для измерения текущих значений величин характеризующих среду окружения. На основании входных данных (см. этап 3)  $\mathbf{V} = \bigcup_{i=1}^m V_i$ , выбранного на первом этапе МФФП и с помощью процедуры формирования эталонных величин получаем соответствующие значения эталонов лингвистических переменных (ЛП) для всех  $T_{ij}^e = \bigcup_{f=1}^r T_{ij}^{ef}$ , например,  $\{T_{NVC}^{ef}, T_{VCA}^{ef}, T_{NCC}^{ef}, T_{SPR}^{ef}, T_{DR}^{ef}, T_{NPSA}^{ef}, \dots\}$ . Так, например, для NPSA [4] с использованием МФФП<sub>6</sub> = МЛТС [1] можем получить эталонные значения  $T_{NPSA}^e = \bigcup_{i=1}^3 T_{NPSA}^{ei}$  и осуществить визуализацию лингвистических термов для NPSA –  $\{T_{NPSA}^{e1}, T_{NPSA}^{e2}, T_{NPSA}^{e3}\} = \{\underline{S}^e, \underline{A}^e, \underline{B}^e\}$ . Далее с помощью процедуры визуализации формируется графическое представление эталонов лингвистических термов  $\{\underline{S}^e, \underline{A}^e, \underline{B}^e\}$ .

**Этап 5 – фаззификация величин.** На этом этапе осуществляется преобразование набора подмножеств величин, характеризующих текущее состояние системы, в соответствующие им текущие значения нечетких переменных. На основании МБВ [4], выбранного (на первом этапе) метода получения ФП и с помощью процедуры фаззификации, реализующей один из МФФП формируется набор ЛП, каждая из которых представляется кортежем  $\langle V_{ij}, T_{ij}, U_{ij} \rangle$ . Далее на основе процедуры, связывающей с каждым вторжением из множества  $\mathbf{I}$  конкретный набор величин из множества  $\mathbf{V}$ , получаем множества пар [4]  $\mathbf{I} : \mathbf{V}_n = \bigcup_{i=1}^n (I_i : \bigcup_{j=1}^{k_i} V_{ij})$ . Так, например, с использованием множества пар "вторжение : величины", МФФП<sub>6</sub> = МЛТС (см. этап 1) и набора кортежей, отображающих соответствующие значения ЛП для вторжения SCANNING (при  $V_{11}, V_{12} - \langle NVC, T_{NVC}, U_{NVC} \rangle, \langle VCA, T_{VCA}, U_{VCA} \rangle$ ), DOS (при  $V_{21}, V_{22}, V_{23} - \langle NCC, T_{NCC}, U_{NCC} \rangle, \langle SPR, T_{SPR}, U_{SPR} \rangle, \langle DR, T_{DR}, U_{DR} \rangle$ ) и SPOOFING (при  $V_{31}, V_{32} - \langle NCC, T_{NCC}, U_{NCC} \rangle, \langle NPS, T_{NPSA}, U_{NPSA} \rangle$ ) формируются текущие зна-

чения нечетких переменных среды окружения  $t_{\sim NVC}$ ,  $t_{\sim VCA}$ ,  $t_{\sim NCC}$ ,  $t_{\sim SPR}$ ,  $t_{\sim DBR}$ , и  $t_{\sim NPSA}$ , которые соответственно отражают величины  $NVC$ ,  $VCA$ ,  $NCC$ ,  $SPR$ ,  $DBR$  и  $NPSA$ .

**Этап 6 – формирование множества решающих правил (РП).** Этап ориентирован на формирование РП необходимых для измерения текущего состояния системы относительно эталонных величин. На основании множеств нечетких идентификаторов  $\mathbf{FI} = \bigcup_{i=1}^d FI_i$  [4] и сопряженных пар  $\mathbf{MP} = \bigcup_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^{c_n} MP_{ij})$  [4] (использующих конкретные значения лингвистических термов, определенных на четвертом этапе) формируется множество альтернатив  $SR_{ij}^k$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, d}$ ,  $j = \overline{1, r_n}$ , где  $n$  – количество вторжений,  $r_n$  – количество правил для выявления  $i$ -го вторжения, а  $d$  – количество альтернативных вариантов для формирования одного правила). Например, для первого вторжения и первого правила это будет  $\bigcup_{k=1}^d SR_{11}^k = \{SR_{11}^1, SR_{11}^2, SR_{11}^3, SR_{11}^4, SR_{11}^5\}$ . Для построе-

ния РП, отображаемых выражением  $\bigcup_{i=1}^n \{ \bigcup_{j=1}^{r_i} SR_{ir_j} = (MP_{ir_j} \in FI_{ir_j}) \}$  [6]. Формирование правил осуществляется на основе множества альтернатив с помощью процедуры их выбора, которая базируется на одном из методов формирования КВ (см. этап 2). Далее, отобранные  $FI_{ir_j}$  на этапе 7 используются в качестве данных для матриц инициализации, которые посредством процедуры инициализации передают конкретные значения в  $MP_{ir_j}$  и  $FI_{ir_j}$ , формируя таким образом непосредственные наборы РП, например,

$$\begin{aligned} \mathbf{SR}_2 &= \{SR_{21} = (t_{\sim NPSA} \cong \underline{B}^e \wedge t_{\sim NCC} \cong \underline{V}S^e) \in L, \\ SR_{22} &= (t_{\sim NPSA} \cong \underline{B}^e \wedge t_{\sim NCC} \cong \underline{S}^e) \in LTH, \\ SR_{23} &= (t_{\sim NPSA} \cong \underline{B}^e \wedge t_{\sim NCC} \cong \underline{A}^e) \in HTTL, \\ SR_{24} &= (t_{\sim NPSA} \cong \underline{B}^e \wedge t_{\sim NCC} \cong \underline{B}^e) \in H, \\ SR_{25} &= (t_{\sim NPSA} \cong \underline{B}^e \wedge t_{\sim NCC} \cong \underline{V}B^e) \in LIM\} \quad [6]. \end{aligned}$$

**Этап 7 – определение матриц инициализации.** Этап предназначен для формирования исходных данных (в виде набора матриц) для процедуры инициализации РП. На основе полученных конкретных значений всех  $FI_{ir_j}$  с помощью процедуры выбора альтернатив для РП и данных по конкретным парам  $FI_{ij}$  (см. этап 6) соответственно определяем матрицы инициализации для нечетких идентификаторов  $FI(n, r_n)$  и сопряженных пар  $MP(n, r_n)$ , где  $n$  – количество вторжений, а  $r_n$  – количество правил для выявления  $i$ -го вторжения. Например, такие матрицы для использования на этапе 6 при построении РП имеют вид –  $FI(3, 5)$  и  $MP(3, 5)$ , а их конкретные элементы отображены в [6].

**Этап 8 – формирование результата.** Этот этап направлен на получение выходных данных, характеризующих аномальное состояние. На основе сформированных множеств возможных вторжений (см. этап 3) и сопряженных пар (см. этап 6), формируется множество пар – "вторжение : множество сопряженных пар"  $\mathbf{I} : \mathbf{MP} = (\bigcup_{i=1}^n I_i : \bigcup_{j=1}^{c_i} MP_{ij})$  [4]. Посредством этого множества, сформированных РП и множества  $\mathbf{FI}$  (см. этап 6), с

помощью процедуры логического вывода (функционирующей на основе выбранных по решению эксперта МНА и МСФП) определяются конкретные значения нечетких идентификаторов, характеризующих уровень аномального состояния, который может быть порожден конкретной кибератакой. Другими словами каждому  $I_i$  присваивается один из  $FI_i$ . Так, например, вторжениям  $I_1 = SCANNING$ ,  $I_2 = DOS$  и  $I_3 = SPOOFING$  соответственно будет определен уровень LOW, LTH и H [6].

Выводы: После определения этих результатов осуществляется их визуализация в виде эталонных лингвистических термов, на фоне которых идентифицируется значение переменной, характеризующей текущее состояние системы относительно аномалий.

Предложенная в работе технология базируется на математических моделях и методах нечеткой логики, и содержит восемь базовых этапов, раскрывающих процесс выявления аномального состояния, порождаемого определенным типом кибератак в ИС. На основе этой технологии можно создавать или усовершенствовать реальные системы обнаружения вторжений применяющих механизмы выявления аномалий, порожденных атакующими действиями в компьютерных сетях.

## Литература

- [1] Корченко О.Г. Построение систем защиты информации на нечетких множествах // Теория и практические решения / О.Г.Корченко. – К.: МК-Пресс, 2006. – 320 с.
- [2] Волянська В.В. Система виявлення аномалій на основі нечітких моделей [Текст] / В. В. Волянська, А. О. Корченко, Є. В. Паціра // Зб. наук. пр. Інституту проблем моделювання в енергетиці НАН України ім. Г. Є Пухова. – Львів : ПП "Системи, технології, інформаційні послуги 2007. – [Спец. випуск]. – Т.2. – С. 56-60.
- [3] Корченко О.Г. Системи захисту інформації [Текст] : Монографія / О. Г. Корченко. – К.: НАУ, 2004. – 264 с.
- [4] Ахметов Б.С., Корченко А.А., Жумангалиева Н.К. Модель базовых величин для контроля аномальности состояния среды окружения // Вестник НАН РК. – 2016. – № 1(305) – 26 с.
- [5] Ахметов Б.С., Корченко А.А., Жумангалиева Н.К. Базовые модели эталонных величин для систем обнаружения вторжений / Вестник МКТУ Х.А.Ясави. – 2015. – № 4.
- [6] Ахметов Б.С. Использование методов нечетких множеств в системах обнаружения вторжений / Б.С. Ахметов, А.А. Корченко, Н.К. Жумангалиева // Інформаційна безпека. – 2014. – № 1 (13); № 2 (14). – С. 42-55.
- [7] Использование методов экспертного оценивания в системах обнаружения вторжений / Б.С. Ахметов, А.А. Корченко, С.Т. Ахметова, Н.К. Жумангалиева // Інформаційна безпека. – 2014. – № 3 (15); № 4 (16). – С. 34-43.

## References

- [1] Korchenko O.G. Postroenie sistem zaschityi informatsii na nechetkih mnozhestvah // Teoriya i prakticheskie resheniya / O.G.Korchenko. – K.: MK-Press, 2006. – 320 s.
- [2] Volyanska V.V. Sistema viyavlennya anomalii na osnovi nechitkih modeley [Tekst] / V. V. Volyanska, A. O. Korchenko, E. V. Patsira // Zb. nauk. pr. Institutu problem modelyuvannya v energetitsi NAN Ukrayini Im. G. E Puhova. – Lviv : PP "Sistemi, tehnologii, Informatsiyni poslugi 2007. – [Spets. vipusk]. – T.2. – S. 56-60.
- [3] Korchenko O.G. Sistemi zahistu Informatsiyi [Tekst] : Monografiya / O. G. Korchenko. – K.: NAU, 2004. – 264 s.
- [4] Ahmetov B.S., Korchenko A.A., Zhumangalieva N.K. Model bazoviyh velichin dlya kontrolya anomalnosti sostoyaniya sredy okruzeniya // Vestnik NAN RK. – 2016. – No 1(305) – 26 s.
- [5] Ahmetov B.S., Korchenko A.A., Zhumangalieva N.K. Bazovyye modeli etalonnuyh velichin dlya sistem obnaruzheniya vtorzheniy / Vestnik MKTU H.A.Yasavi. – 2015. – No 4.



- 
- [6] *Ahmetov B.S.* Ispolzovanie metodov nechetkih mnozhestv v sistemah obnaruzheniya vtorzheniy / B.S. Ahmetov, A.A. Korchenko, N.K. Zhumangalieva // Informatsiyana bezpeka. – 2014. – No 1 (13); No 2 (14). – S. 42-55.
- [7] Ispolzovanie metodov ekspertnogo otsenivaniya v sistemah obnaruzheniya vtorzheniy / B.S. Ahmetov, A.A. Korchenko, S.T. Ahmetova, N.K. Zhumangalieva // Informatsiyana bezpeka. – 2014. – No 3 (15); No 4 (16). – S. 34-43.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

1. *Айсағалиев Серикбай Абдигалиевич* - профессор механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор технических наук
2. *Ахмедов Даулет Шафигуллович* - директор Института космической техники и технологий, доктор технических наук
3. *Алдибеков Тамаша* - профессор механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, доктор физико-математических наук
4. *Алдажарова Майра* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им.аль-Фараби
5. *Альников Дмитрий Владимирович* - магистрант механико-математического факультета Казахского национального университета им.аль-Фараби
6. *Ахметов Бахытжан Сражатдинович* - профессор Казахского национального исследовательского технического университета имени К.И.Сатпаева, доктор технических наук
7. *Даирбаева Сабина Алипбаевна* - магистрант Международного университета информационных технологий
8. *Дильман Туребай Бимагамбетович* - доцент кафедры "Высшая математика" Кызылординского государственного университета имени Коркыт Ата, кандидат физико-математических наук
9. *Дилдабек Гулмар* - доцент Казахского национального университета имени Аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
10. *Еремин Денис Иванович* - заведующий лабораторией космических информационных технологий Института космической техники и технологий
11. *Жайдарова Александра Мухамедановна* - PhD докторант Казахского национального университета им.аль-Фараби
12. *Жунисова Жанат Хавизовна* - доцент механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
13. *Жуманғалиева Назым Кенжеғалиевна* - PhD докторант Казахского национального исследовательского технического университета имени К.И.Сатпаева
14. *Кемешова Динара Галимжановна* - заведующая сектором лаборатории космических информационных технологий Института космической техники и технологий
15. *Китайбеков Ерлан Толепович* - PhD докторант Казахского национального педагогического университета имени Абая
16. *Корченко Анна Александровна* - доцент Национального авиационного университета, Украина, г. Киев, кандидат технических наук
17. *Кыдырмина Нургуль Алимовна* - PhD докторант Института прикладной математики КН МОН РК, г. Караганда
18. *Мирзакулова Азиза Еркөмековна* - PhD докторант механико-математического факультета Казахского национального университета им.аль-Фараби
19. *Молдабек Жанболат Тамашаулы* - магистр механико-математического факультета Казахского национального университета им.аль-Фараби

- 
20. *Мамыкова Жаныл Джумангалиевна* - директор Института информационных технологий и инновационного развития КазНУ им. аль-Фараби, кандидат технических наук
  21. *Майханова А.К.* - магистрант механико-математического факультета Казахского национального университета им.аль-Фараби
  22. *Надирбаева Галия Муратбековна* - начальник управления по развитию информационной бизнес-логики Института информационных технологий и инновационного развития КазНУ им. аль-Фараби
  23. *Садыбеков Махмуд Абдысаметович* - заведующий отделом Института математики и математического моделирования, ГНС, доктор физико-математических наук
  24. *Туралина Динара Елусизовна* - доцент механико-математического факультета Казахского национального университета имени аль-Фараби, кандидат физико-математических наук
  25. *Тенгаева Айжан Абденовна* - ассоциированный профессор Казахского национального аграрного университета, кандидат физико-математических наук

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

1. В журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика" принимаются набранные только в текстовом формате  $\text{\LaTeX}2\epsilon$  на казахском, русском или английском языках, ранее не опубликованные проблемные, обзорные, дискуссионные статьи в области естественных наук, где освещаются результаты фундаментальных и прикладных исследований.
2. Материалы следует направлять по адресу: 050040 Алматы, ул. аль-Фараби, 71, корпус 13, Научно-исследовательский институт механики и математики КазНУ им. аль-Фараби, каб. 125, тел. 377-32-23. Электронная почта: Lazat-dairbayeva@mail.ru (ответственному секретарю редколлегии, Дайрабаева Л.М.)
3. Статья должна сопровождаться письмом от учреждения, в котором выполнена данная работа, где указываются сведения об авторах: Ф.И.О. полностью, место их работы, должность (название вуза, центра без сокращений, факультета, кафедры), рабочий телефон, факс, e-mail, домашний адрес и контактный телефон.
4. В редакцию необходимо представить электронную версию статьи: tex-файлы работы и файлы рисунков на одном диске. Для файлов рисунков рекомендуется использовать средства основного пакета  $\text{\LaTeX}2\epsilon$  или формат eps [см. п.7]. Указывается код по УДК. В редакцию также представляется оттиск работы в двух экземплярах.

5. Объем статьи, включая список литературы, таблицы и рисунки с подрисовочными надписями, аннотации, не должен превышать 15 страниц печатного текста. Минимальный объем статьи - 5 страниц. В начале работы после заголовка и фамилий авторов работы помещается её аннотация в объеме 200-250 слов на том же языке, на котором набран основной текст. Кроме сведений, которые можно почерпнуть из заголовка, аннотация должна отражать методы исследования, основные результаты статьи, их новизну и указывать на смежные работы.

После аннотации задаются ключевые слова. Для каждой работы задайте 5-6 ключевых слов в порядке их значимости, т.е. самое важное ключевое слово статьи должно быть первым в списке.

Название работы, ФИО авторов, аннотация и ключевые слова должны быть представлены в статье на трех языках: казахском, русском и английском.

Использованная литература должна быть оформлена в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 "Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления". Список литературы должен состоять не более чем из 20 наименований. Ссылки на источники в тексте статьи даются только в квадратных скобках (без цитирования [12], при цитировании или пересказе авторского текста [12, с. 29]). Нумерация ссылок в статье производится по порядковому номеру источника в пристатейном списке литературы. Архивные материалы в список не включаются, ссылки на них помещаются в тексте в круглых скобках. При использовании в статье источников из электронных ресурсов или удаленного доступа (Интернета) в списке литературы приводится библиографическая запись источника и ссылка на сетевой ресурс с полным сетевым адресом в Интернете. Желательно указывать дату обращения к ресурсу.

Список литературы на языке оригинала сопровождается списком литературы (references) в английской транслитерации.

6. Журнал придерживается единого стиля и поэтому предъявляет ряд общих требований к оформлению работ. Исходный (неоттранслированный) tex-файл должен целиком помещаться в горизонтальных рамках экрана за возможным исключением матриц и таблиц и транслироваться без протестов  $\text{\LaTeX}2\epsilon$  и сообщений о кратных и неопределенных метках, больших переполненных и незаполненных боксах. Не следует определять много новых команд, изобретая собственный сленг. Авторы могут подгружать другие стандартные стилевые пакеты, но только те, которые не входят в противоречие с пакетами `amsmath` и `amssymb`. Естественно файл, кроме всего прочего, должен быть проверен на отсутствие грамматических и стилистических ошибок. Статьи, не удовлетворяющие этим требованиям, возвращаются на доработку.

---

Эталонный образец работы с демонстрацией графики, с преамбулой устраивающей редакцию, списки типичных ошибок оформления и методы их устранения можно получить в редакции или на сайте КазНУ им. аль-Фараби <http://journal.kaznu.kz>.

7. Графические файлы с рисунками должны быть только качественными черно-белыми в формате .eps , либо выполненными в латеховском формате. Рисунки в этих форматах делаются, например, с помощью мощных математических пакетов Maple, Mathematica или с помощью пакета Latexcad. Качественные графические файлы сделанные другими графическими программами должны быть сконвертированы в формат .eps с помощью Adobe Photoshop или конвертера Conversion Artist. Все рисунки должны быть уже импортированными в tex-файл и представляются в редакцию вместе с основным файлом статьи. Графические форматы, отличные от выше указанных, отвергаются.

Редакция вправе отказаться от включения в работу рисунка, если автор не в состоянии обеспечить его надлежащее качество.

Уважаемые читатели, вы можете подписаться на наш журнал "Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика", который включен в каталог АО "Казпочта" "ГАЗЕТЫ И ЖУРНАЛЫ". Количество номеров в год – 4. Индекс для индивидуальных подписчиков, предприятия и организаций – 75872, подписная цена за год – 1200 тенге; индекс льготной подписки для студентов – 25872, подписная цена за год для студентов – 600 тенге.

**МАЗМУНЫ - СОДЕРЖАНИЕ**

**1-бөлім****Раздел 1****Математика****Математика***Айсағалиев С.А., Жунусова Ж.Х.*

Разрешимость и построение решения уравнения Фредгольма первого рода ..... 3

*Дильман Т.Б.*

Единственность решения одной задачи интегральной геометрии в многомерном пространстве ..... 17

*Қытайбеков Е.*

Задача Дирихле для трехмерных гиперβολо-параболических уравнений с вырождением типа и порядка ..... 28

*Кыдырмина Н.А.*

Прямые и обратные теоремы приближения в метрике глобального пространства типа Морри ..... 35

*Mirzakulova A. E., Aldazharova M.M., Moldabek Zh.T., Aldibekov T.M.*

Generalized singular exponents linear system of differential equations ..... 47

*Садыбеков М.А., Дилдабек Г., Тенгаева А.А.*

О новой нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа 55

**2-бөлім****Раздел 2****Механика****Механика***Туралина Д.Е., Майханова А.Қ.*

Параллель орналасқан екі биік ғимараттың аэродинамикасын зерттеу ..... 67

*Ахмедов Д.Ш., Еремин Д.И., Кемешева Д.Г., Альников Д.В.*

Исследование возможностей использования отраженного излучения наземных радиоэлектронных средств от космических объектов на околоземной орбите ..... 80

**3-бөлім****Раздел 3****Информатика****Информатика***Dairbayeva S.A.*

Automatic Process Control System of Main Pipeline ..... 88

*Мамыкова Ж.Д., Надирбаева Г.М., Жайдарова А.М.*

Применение информационных технологий при решении вопроса о трудоустройстве выпускников вузов ..... 95

*Ахметов Б.С., Корченко А.А., Жумангалиева Н.К.*

Технология выявления аномального состояния для систем обнаружения вторжений ..... 106

Сведения об авторах ..... 114

К сведению авторов ..... 116

## CONTENS

## Section 1

## Matematics

- Aisagaliev S.A., Zhunussova Zh.Kh.*  
Solvability and construction of solution of the first kind Fredholm integral equation ..... 3
- Dilman T.B.*  
Uniqueness theorem of solution the integral geometry problem for family curves in multidimensional space 17
- Kitaybekov E.T.*  
Dirichlet problem for three-dimensional hyperbolic-parabolic equations with type and order extinction . 28
- Kydyrmina N.*  
The direct and inverse approximation theorems in metrics of the global Morrey-type space ..... 35
- Mirzakulova A. E., Aldazharova M.M., Moldabek Zh.T., Aldibekov T.M.*  
Generalized singular exponents linear system of differential equations ..... 47
- Sadybekov M.A., Dildabek G., Tengayeva A.A.*  
On a new nonlocal boundary value problem for an equation of the mixed parabolic-hyperbolic type .... 55

## Section 2

## Mechanics

- Turalina D.E., Maihanova A.K.*  
The investigations of aerodynamics of two parallel high-rise buildings ..... 67
- Akhmedov D., Eremin D.I., Kemesheva D.G., Alnikov D.V.*  
Study of potential use of ground-based radioelectronic equipment radiation reflected from orbital space object ..... 80

## Section 3

## Computer science

- Dairbayeva S.A.*  
Automatic Process Control System of Main Pipeline ..... 88
- Мамыкова Zh.D., Nadirbayeva G.M., Zhaidarova A.M.*  
Application of informational technologies in deciding the question of graduates employment ..... 95
- Akhmetov B.S., Korchenko A.A., Zhumangaliyeva N.K.*  
Technology of abnormal states for detection of intrusion systems ..... 106
- Сведения об авторах ..... 114  
К сведению авторов ..... 116

**УСПЕЙТЕ ПОДПИСАТЬСЯ НА СВОЙ ЖУРНАЛ**

**АКЦИЯ!!!**

**Каждому подписчику  
ПУБЛИКАЦИЯ СТАТЬИ  
БЕСПЛАТНО!!!**

- Акция действительна при наличии квитанции об оплате годовой подписки.
- Статья должна соответствовать требованиям размещения публикации в журнале.
- Статья печатается в той серии журнала, на которую подписался автор.
- Все нюансы, связанные с публикацией статьи, обсуждаются с ответственным секретарем журнала.

---

Издательский дом  
«Қазақ университеті»  
г. Алматы,  
пр. аль-Фараби, 71  
8 (727) 377 34 11, 221 14 65

АО «КАЗПОЧТА»  
г. Алматы,  
ул. Богенбай батыра, 134  
8 (727 2) 61 61 12

ТОО «Евразия пресс»  
г. Алматы,  
ул. Жибек Жолы, 6/2  
8 (727) 382 25 11

ТОО «Эврика-пресс»  
г. Алматы,  
ул. Кожамкулова, 124, оф. 47  
8 (727) 233 76 19, 233 78 50